

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

PRÉSENTÉE A LA
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

PAR
Odile ROBAUX-FOURNIER

LABORATOIRE AIMÉ COTTON
C. N. R. S.

POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES THEOREMES D'ECHANTILLONNAGE.
APPLICATIONS AU TRAITEMENT DES ENREGISTREMENTS PAR
SYNTHESE D'INFORMATIONS.

SOUTENUE LE 23.06.1971 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M. P. JACQUINOT : PRÉSIDENT
M. F. FRANÇON
Mme B. ROIZEN-DOSSIER }
Mme J. CONNES } EXAMINATEURS
M. D. TAUPIN }

À mes Parents,

À mon Mari,

À tous ceux qui me sont chers.

O. Robaux-Fournier

Δ ηα Ερώτηση.

Δ ηα Ερώτηση.

Δ ηα Ερώτηση ηα Ερώτηση.

Ο Ερωτηματολόγιο.

AVANT - P R O P O S

Le présent travail a été réalisé au Laboratoire Aimé Cotton. Je prie Messieurs les Professeurs JACQUINOT et CHABBAL d'accepter l'expression de mes remerciements pour l'accueil qu'ils m'y ont réservé.

Ma vive reconnaissance va à Madame B. ROIZEN-DOSSIER, Professeur à la Faculté des Sciences d'Orsay, qui n'a cessé de me prodiguer encouragements et conseils. Pour les longues heures qu'elle m'a toujours si largement dispensées avec une amicale sollicitude, en particulier pour la mise au point de ce travail, je la remercie sincèrement.

Que Monsieur le Professeur FRANÇON, mon parrain lors des années que j'ai passées au C.N.R.S., veuille bien trouver ici l'expression de mes sentiments respectueux et reconnaissants.

Je tiens à remercier Madame J. CONNES, Directeur de Recherche au C.N.R.S., de m'avoir fait l'honneur et le plaisir de faire partie du Jury appelé à juger des résultats de mon travail.

Il m'est agréable de remercier également Monsieur D. TAUPIN, Maître de Recherche au C.N.R.S. Son programme " Simplex " pour la recherche du minimum d'une fonction m'a été d'un précieux secours.

Je ne saurais oublier ici mon premier professeur en informatique, Monsieur J. LEGRAS, qui m'a toujours témoigné la plus grande bienveillance.

II

J'aimerais aussi remercier tous les membres du laboratoire, et en particulier :

- Monsieur S. GERSTENKORN et son groupe de travail qui ont, par leur confiance, stimulé mes recherches dans cette voie;

- A. CARLIER, R. VETTER, M. KLAPISCH et J. BAUCHE qui ont bien voulu me faire part de leurs remarques sur toutes ou certaines parties du manuscrit;

- J. FATTAZ qui a calculé avec compétence certaines applications numériques de ce travail.

L'amitié de tous, chercheurs et techniciens, m'a permis de mener à bien ce travail dans une ambiance agréable.

Mes remerciements vont aussi aux ingénieurs et opérateurs du Service de Calcul de l'UNIVAC 1108 d'Orsay. Ils m'ont toujours fait profiter de leur expérience avec une amicale bienveillance.

Je tiens aussi à remercier Monsieur M. REY pour la gentillesse et la célérité avec lesquelles il a reproduit les différents graphiques. Mes remerciements vont aussi à Mesdames FONTAINE, HAGNERE et TAIEB qui se sont partagé la frappe du manuscrit.

*
* *

III
TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS

TABLE DES MATIERES

GENERALITES

. notations, rappel de quelques propriétés des Transformées de Fourier.

* * *

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1

PREMIERE PARTIE

L'OUTIL MATHEMATIQUE	5
<u>CHAPITRE I</u> - LE THEOREME D'ECHANTILLONNAGE. CAS UNIDIMENSIONNEL.	
1. Introduction	7
2. Enoncé du théorème d'échantillonnage	7
3. Influence d'un échantillonnage inférieur à h_0	9
4. Influence de la troncature de la série	11
5. Choix du pas h optimum	14
6. Vérification	15
7. Conclusion	18

CHAPITRE II - PRODUIT DE CONVOLUTION NUMERIQUE DE DEUX FONCTIONS
DONT LA T.F. EST A SUPPORT BORNE. CAS UNIDIMENSION-
NEL.

1. Introduction	19
2. Expression numérique d'un produit de convolution	21
3. Conséquences	23
4. Conclusion	26

CHAPITRE III - LE THEOREME D'ECHANTILLONNAGE. CAS MULTIDIMENSION-
NEL.

1. Introduction	27
2. Enoncé du théorème d'échantillonnage à deux di- mensions	27
3. Cas des fonctions radiales	29
3.1) Transformée de Hankel	
3.2) Développement de $A(r)$ en série de Dini- Bessel	
3.3) Expression du théorème d'échantillonnage	
3.4) Généralisation	
3.5) Vérification	
4. Conclusion	36

CHAPITRE IV - PRODUIT DE CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS DONT LA
T.F. EST A SUPPORT BORNE. CAS BI-DIMENSIONNEL

1. Expression numérique : cas des fonctions quel- conques	37
2. Cas des fonctions radiales	38
2.1) Exposé du problème	
2.2) Cas où les deux transformées de Hankel n'ont pas même domaine	

- 2.3) Application du développement des fonctions radiales en série de Dini-Bessel
- 2.4) Application numérique

DEUXIEME PARTIE

	LE TRAITEMENT DES ENREGISTREMENTS	45
<u>CHAPITRE V</u>	- INTRODUCTION	
	1. Exposé du problème	47
<u>CHAPITRE VI</u>	- LES CORRECTIONS PAR CONVOLUTION	
	1. Introduction	51
	1.1) Généralités	
	1.2) La correction par convolution n'entraîne pas de gain mais un transfert d'informations	
	1.3) Formes diverses du produit de convolution	
	1.4) Modification du bruit	
	2. Influence d'une correction par convolution sur le rapport signal/bruit	54
	2.1) Bruit stationnaire et indépendant du signal	
	2.2) Bruit dépendant du signal reçu	
	3. Choix des fonctions correctrices	59
	3.1) Apodisation	
	3.2) Super-résolution	
	3.3) Filtrage du bruit	
	3.4) Autres critères	
	4. Conclusions	67

CHAPITRE VII - ETUDE THEORIQUE DE L'EQUATION DE CONVOLUTION

1. Introduction	69
2. Unicité de la solution en l'absence de bruit	69
3. Rôle du bruit	70
4. Rôle des informations	70
5. Critère de qualité des solutions obtenues	71
5.1) Construction d'autres solutions à partir de l'objet	
5.2) Incertitude sur celui-ci	
5.3) Gain en résolution	
5.4) Remarques	
6. Conclusion	75

CHAPITRE VIII - METHODES DE DECONVOLUTION

1. Introduction	77
2. Méthodes basées sur les fonctions d'onde ellip- soïdales	77
2.1) Propriétés des fonctions d'onde ellipsoï- dales	
2.2) Applications aux problèmes de déconvolu- tion	
2.3) Influence du bruit	
2.4) Remarques	
3. Méthodes basées sur l'échantillonnage de la fonction $b(x)$	88
3.1) Principe de base	
3.2) Revue critique de différentes méthodes (Scheidecker, Burger et Van Cittert)	
4. Méthodes plus élaborées	99
4.1) Méthode de J.C. Leclerc	
4.2) Méthode de P.A. Jansson	
4.3) Méthode de Y. Biraud	

5. Conclusions	104
<u>CHAPITRE IX</u> - PRINCIPE D'UNE METHODE DE DECONVOLUTION PARTIELLE	
1. Exposé du problème	105
2. Exploitation des informations connues a priori	107
3. $b(x)$ est une fonction non négative à support fini	108
3.1) Construction d'une nouvelle représentation $b'(x)$ de $b(x)$	
3.2) Propriétés de $b'(x)$	
3.3) Détermination de $b'(x)$	
4. Exploitations d'autres informations	113
5. Influence du bruit	113
6. Remarques	114
7. Conclusions	115
<u>CHAPITRE X</u> - MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE DECONVOLUTION PARTIELLE	
1. Introduction	117
2. Etude du cas général	117
2.1) Choix de $A_c(x)$	
2.2) Caractérisation du sous-ensemble des développements auquel $b_c^n(x)$ appartient	
2.3) Détermination de $b_c^n(x)$	
2.4) Calcul numérique de ρ^2	
2.5) Choix du processus de minimisation	
3. Résultats	127
3.1) Résolution d'un doublet	
3.2) Résolution de la structure hyperfine d'une raie de MN	
4. Conclusions	134

VIII

CHAPITRE XI - PROBLEME DE DECOMPOSITION

1. Introduction	135
2. Exposé du problème	136
3. Méthodes numériques	138
4. Résultats	141
4.1) Décomposition d'un enregistrement synthétique	
4.2) Décomposition d'une structure isotopique	
4.3) Décomposition d'une structure hyperfine	
5. Conclusions	148

CHAPITRE XII - PROBLEMES DE FILTRAGE

1. Introduction	149
2. Le filtrage non linéaire	149
3. Expression de la fonction de vraisemblance	151
3.1) Cas d'erreurs indépendantes	
3.2) Observations d'égale importance	
3.3) Observations d'inégale importance	
4. Cas général	154
5. Intérêt de la méthode	154
6. Conclusion	155

<u>CONCLUSION</u>	157
-------------------------	-----

TROISIEME PARTIE

<u>APPENDICES</u>	161
<u>APPENDICE 1</u> - CALCUL DES COEFFICIENTS β_{pqj}	163
<u>APPENDICE 2</u> - ORGANIGRAMME DU SIMPLEX NON LINEAIRE	173
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	179

GENERALITES

I NOTATIONS UTILISEES -

Au cours de notre travail nous utilisons les notations et conventions suivantes :

$[- a , + a]$, support borné d'une fonction .

$g(x)$, fonction de la variable réelle x .

$\hat{g}(\mu)$, Transformée de Fourier (T.F.) de $g(x)$.

$$\hat{g}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot e^{-j2\pi\mu x} dx .$$

$b(x)$, fonction signal inconnue .

$e(x)$, enregistrement .

$f(x)$, réponse impulsionnelle de l'appareil de mesure .

$n(x)$, fonction aléatoire correspondant au bruit .

Opérateurs:

\mathcal{F} opérateur de Fourier $\hat{f}(\mu) = \mathcal{F}(f(x))$.

$\overline{\mathcal{F}}$ opérateur inverse de \mathcal{F} , $f(x) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}(\mu))$.

* opérateur de convolution $f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy$.

Symboles:

$$\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} .$$

$$\text{rect } \frac{x}{t} = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| < \frac{t}{2} , \\ 0 & \text{pour } |x| > \frac{t}{2} , \end{cases}$$

$\text{rect } \frac{x}{t}$ est donc la fonction créneau de largeur t .

$\delta(x)$, fonction de Dirac définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) .$$

$$P_h(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(x-ph) : \text{peigne de Dirac} .$$

$J_0(x)$, $J_1(x)$, fonctions de Bessel de première espèce,
d'ordre 0 et 1 .

II RAPPEL DE QUELQUES PROPRIETES DES TRANSFORMEES DE FOURIER - (cf J. Arsac, [1961])

Nous ne considérons que des fonctions $\in \mathcal{L}$, c'est-à-dire telles que
 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ existe .

$$\mathcal{F}(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) = \alpha_1 \mathcal{F}(f_1(x)) + \alpha_2 \mathcal{F}(f_2(x)) = \alpha_1 \hat{f}_1(\mu) + \alpha_2 \hat{f}_2(\mu) .$$

$$\mathcal{F}[e^{-2\pi i \mu' x} f(x)] = \hat{f}(\mu - \mu') .$$

$$\overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(x)))} = f(x) .$$

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\mu}{a}\right) .$$

$$\mathcal{F}(x^p f(x)) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \hat{f}^{(p)}(\mu) .$$

$$\mathcal{F}(f(x) * g(x)) = \hat{f}(\mu) \times \hat{g}(\mu) .$$

$$\mathcal{F}(f(x) \times g(x)) = \hat{f}(\mu) * \hat{g}(\mu) .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mu) \cdot \hat{g}(\mu) d\mu .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\mu)|^2 d\mu , \quad (\text{théorème de Parseval}) .$$

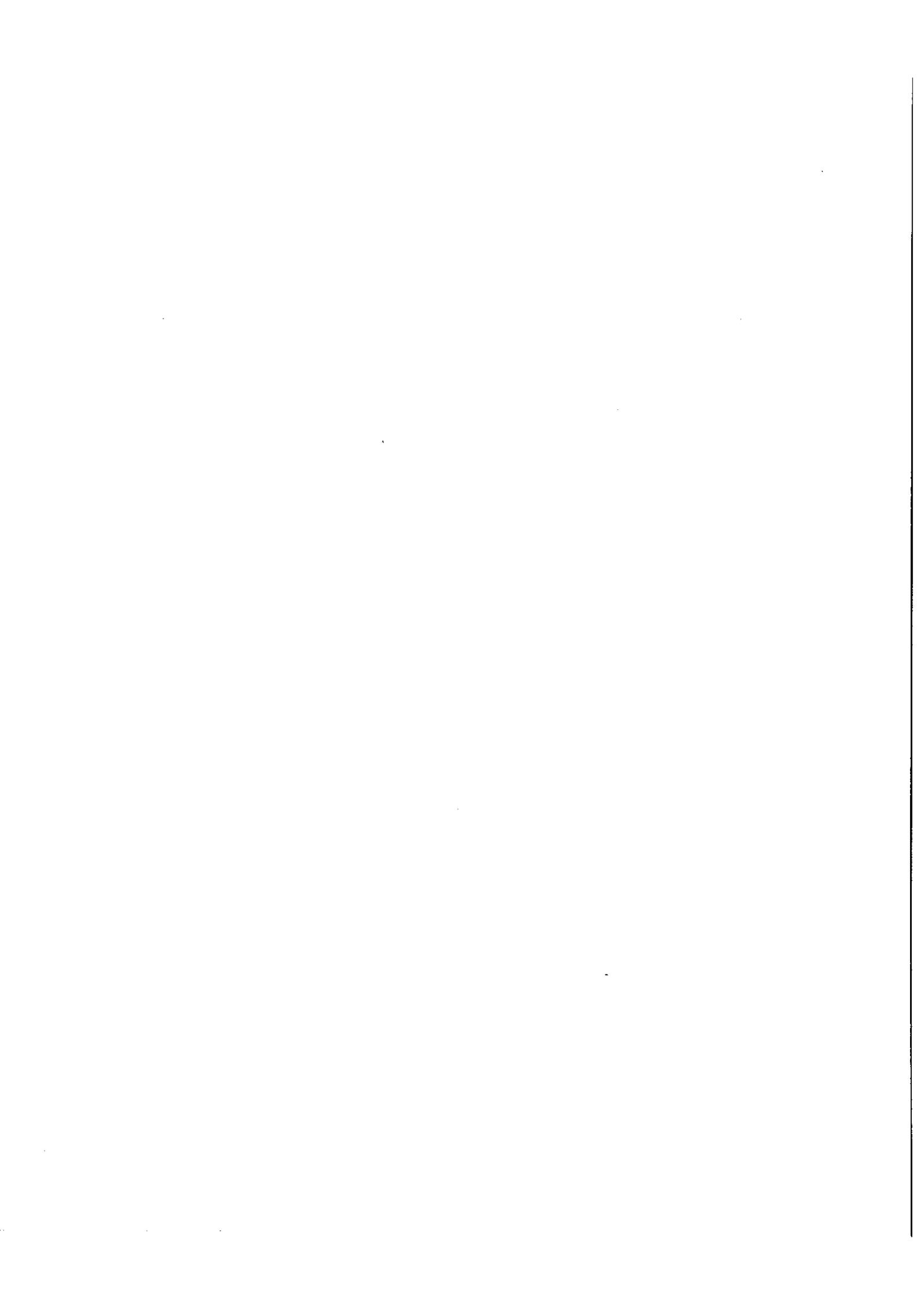
III QUELQUES TRANSFORMEES DE FOURIER UTILISEES .

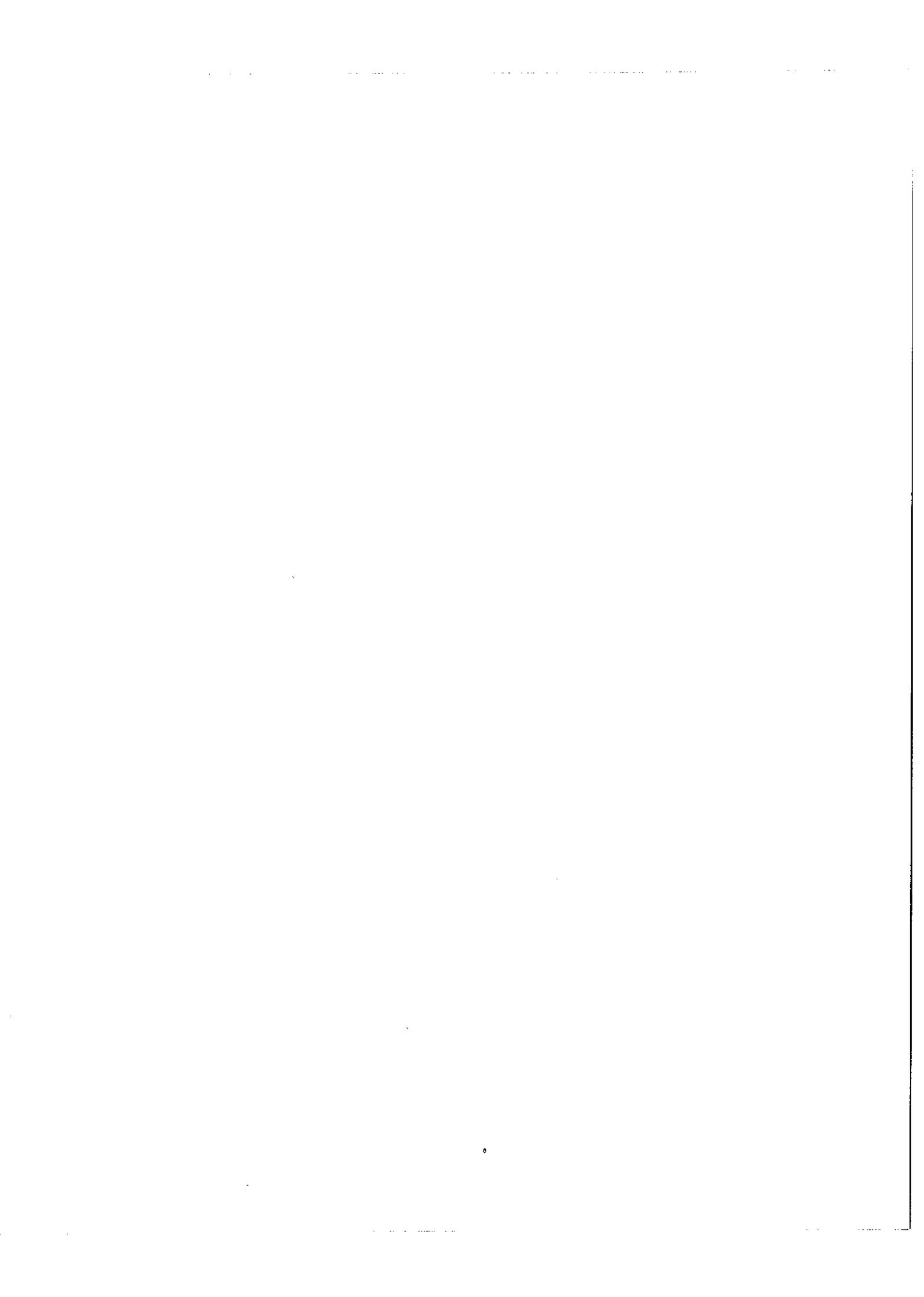
$$\mathcal{F}(2a \operatorname{sinc} 2ax) = \operatorname{rect} \frac{\mu}{2a} .$$

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{rect} \frac{\mu}{2a}\right) = 2a \operatorname{sinc} 2ax .$$

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = 1 .$$

$$\mathcal{F}(P_h(x)) = h P_{1/h}(\mu) .$$





INTRODUCTION

En Physique, l'observation d'un phénomène se matérialise souvent par l'enregistrement d'un signal. L'expérience a en général pour but la représentation d'un objet b dont l'enregistrement e diffère pour deux raisons :

- d'une part, l'appareil de mesure, les conditions expérimentales, introduisent une certaine déformation : le résultat de l'observation est une image i de l'objet.

- d'autre part, à cette image se superpose un bruit n dont l'origine est variable avec le type d'enregistrement effectué. Nous envisageons seulement le cas d'un bruit additif. La grandeur e est alors la somme des grandeurs i et n :

$$e = i + n$$

Le but des méthodes de traitement du signal, dans le cadre desquelles nous travaillons, est de remonter de e à b , quantité à déterminer. Nous limitons notre étude au cas, très fréquent en optique et plus particulièrement en Spectroscopie, où l'enregistrement est constitué par une courbe $e(x)$ dans laquelle e représente le phénomène enregistré en fonction d'une grandeur variable x ; de plus, nous admettons que la déformation subie par le signal est une déformation linéaire : plus précisément l'enregistrement $e(x)$ est lié au signal $b(x)$ par l'équation:

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x)$$

dans laquelle $*$ représente l'opération de convolution. Nous retrouvons

dans cette expression l'équation générale d'un filtre linéaire dont $f(x)$ serait la réponse impulsionnelle. Pour l'opticien ou le spectroscopiste $f(x)$ se confond souvent avec la déformation dite "fonction d'appareil" due uniquement à l'appareil de mesure.

Pendant longtemps, la plupart des auteurs se sont efforcés d'améliorer les appareils de mesure et les techniques d'enregistrement afin que la fonction d'appareil soit la moins déformante possible, c'est-à-dire, dans le cas d'une relation de convolution, la plus proche d'un pic de Dirac. Au Laboratoire Aimé Cotton, ces recherches ont été largement développées ces dernières années. Tout récemment encore, l'essor pris par la Spectroscopie par T.F., a prouvé l'utilité des travaux dans ce domaine. Dans de nombreux problèmes, l'amélioration ainsi apportée suffit amplement pour une détermination correcte de $b(x)$.

Cependant, il est des cas où les conditions expérimentales entraînent l'existence d'une fonction $f(x)$ déformante ou d'un bruit $n(x)$ important : $e(x)$ constitue alors une représentation imparfaite de $b(x)$.

On peut chercher à améliorer cet enregistrement $e(x)$ par des méthodes de traitement numérique ou analogique. L'idée n'en est pas récente : depuis longtemps, en effet, certains expérimentateurs ont cherché, soit à filtrer le bruit présent dans l'enregistrement, soit à faire apparaître certains caractères de $b(x)$ par l'emploi a posteriori de filtres linéaires numériques adaptés. Parmi eux, certains ont même voulu remonter de $e(x)$ à $b(x)$ par la résolution de l'équation de convolution. En théorie, ce problème peut être résolu en l'absence de bruit. En réalité, d'une part l'enregistrement n'est jamais exempt de bruit ; d'autre part, les méthodes de calcul utilisées entraînent des approximations qui introduisent un "bruit de calcul"

supplémentaire. Les conditions dans lesquelles s'effectuent ces calculs ne correspondent plus à l'hypothèse d'absence de bruit et conduisent le plus souvent à des résultats erronés.

Un des buts du travail que nous présentons est de proposer une solution de l'équation de convolution compatible avec le bruit présent dans l'enregistrement. Les possibilités modernes de calcul numérique permettent en effet de faire une synthèse de toutes les informations, même vagues, dont on peut à priori disposer sur le signal : nous pouvons donc utiliser ces informations pour compenser en partie l'incertitude due au bruit.

Par ailleurs, les traitements par voie numérique des enregistrements font appel à l'échantillonnage et à la troncature des fonctions $e(x)$, $b(x)$ et $f(x)$... Il nous a semblé très important d'étudier auparavant l'influence de ces deux opérations sur ces fonctions et sur les expressions analytiques dans lesquelles elles interviennent. Nous avons ainsi été amenés à étudier les propriétés des séries finies de Shannon auxquelles ces échantillonnages font appel.

*
* *

Ce mémoire comprend deux parties :

- La première partie est consacrée à l'étude de l'outil mathématique que constitue le théorème d'échantillonnage. Dans un premier chapitre nous donnerons une forme très générale du théorème de Shannon que nous utiliserons pour faire apparaître les propriétés des séries finies correspondantes. Puis nous montrerons (chapitre II) comment l'expression classique du produit de convolution numérique de deux fonctions dont la T.F. est à support borné peut s'interpréter à l'aide des propriétés des séries finies de Shannon ainsi mises en évidence.

Dans la seconde partie, à la lumière des conclusions tirées dans la première, nous ferons une étude critique des méthodes de traitement usuelles des enregistrements. Devant leur insuffisance nous serons amenés à proposer une méthode originale de déconvolution de l'équation intégrale, méthode qui fait appel à la "synthèse d'informations". Nous en étudierons les propriétés et les limites et nous l'illustrerons par des exemples concrets de traitement sur des enregistrements effectués en laboratoire.

P R E M I E R E P A R T I E

L'OUTIL MATHEMATIQUE

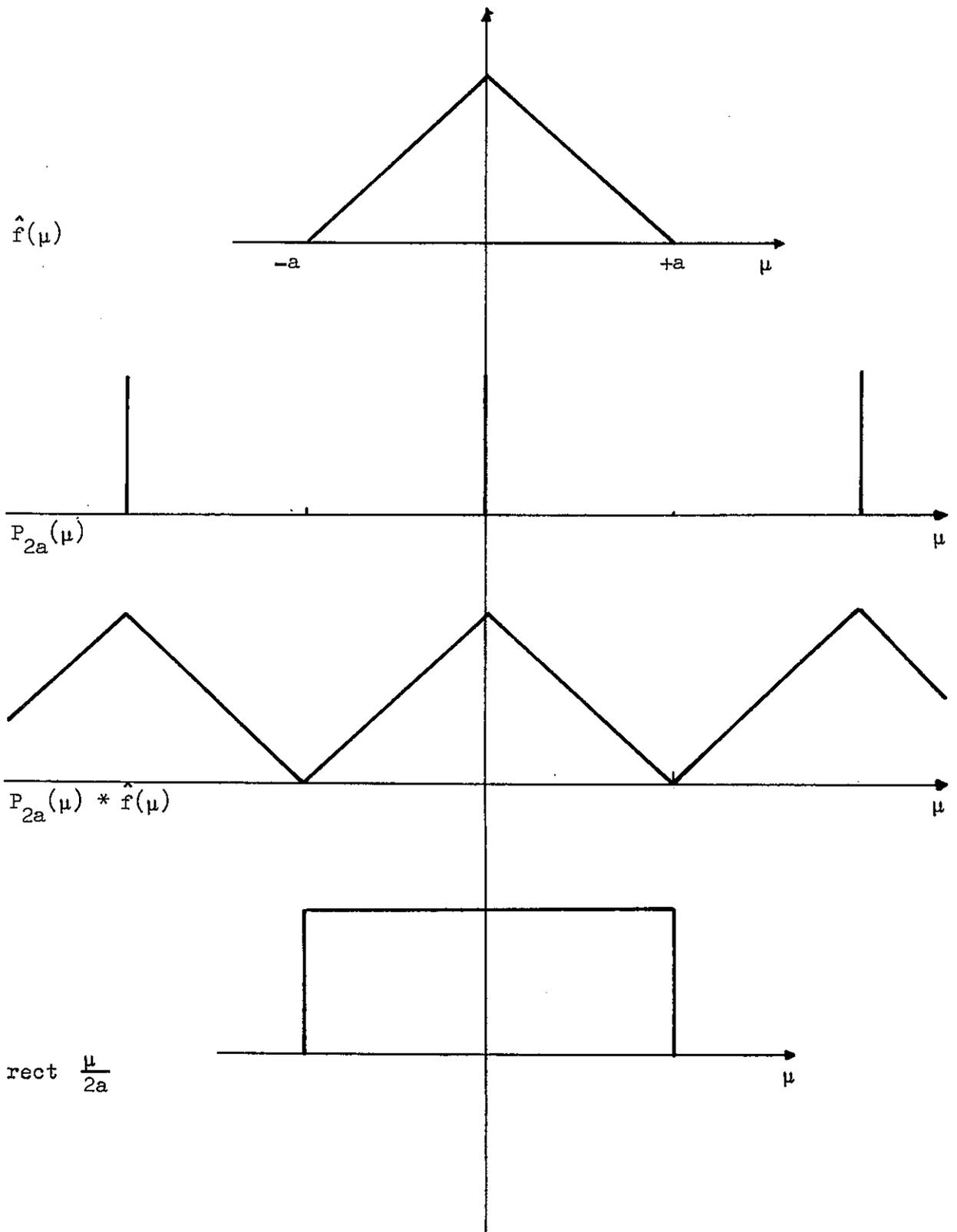


Figure 1

$$\hat{f}(\mu) = [\hat{f}(\mu) * P_{2a}(\mu)] \times \text{rect } \frac{\mu}{2a}$$

CHAPITRE I

LE THEOREME D'ECHANTILLONNAGE

- CAS UNIDIMENSIONNEL -

1 - INTRODUCTION -

Après un bref rappel de la forme classique du théorème d'échantillonnage, nous nous proposons d'étudier les conséquences d'un échantillonnage trop serré ou d'un échantillonnage tronqué.

21 - ENONCE DU THEOREME D'ECHANTILLONNAGE -

Nous considérons une fonction réelle $f(x)$ dont la T.F. $\hat{f}(\mu)$ est à support borné $[-a, +a]$ et continue sur ce support; nous pouvons écrire à la suite de Woodward [Woodward , [1960]] :

$$(I . 1) \quad \hat{f}(\mu) = [\hat{f}(\mu) * P_{2a}(\mu)] \times \text{rect} \frac{\mu}{2a} .$$

La signification de cette égalité apparaît clairement sur la figure 1. Si l'on prend la T.F. des 2 membres, il vient :

$$(I . 2) \quad f(x) = [f(x) \times \frac{1}{2a} P_{1/2a}(x)] * 2a \text{ sinc } 2ax$$

et puisque :

$$P_{1/2a}(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - p/2a)$$

$$\text{et} \quad \delta(x - \frac{p}{2a}) * g(x) = g(x - \frac{p}{2a}) ,$$

il vient :

$$(I . 3) \quad f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(\frac{p}{2a}) \text{ sinc } 2a(x - \frac{p}{2a}) .$$

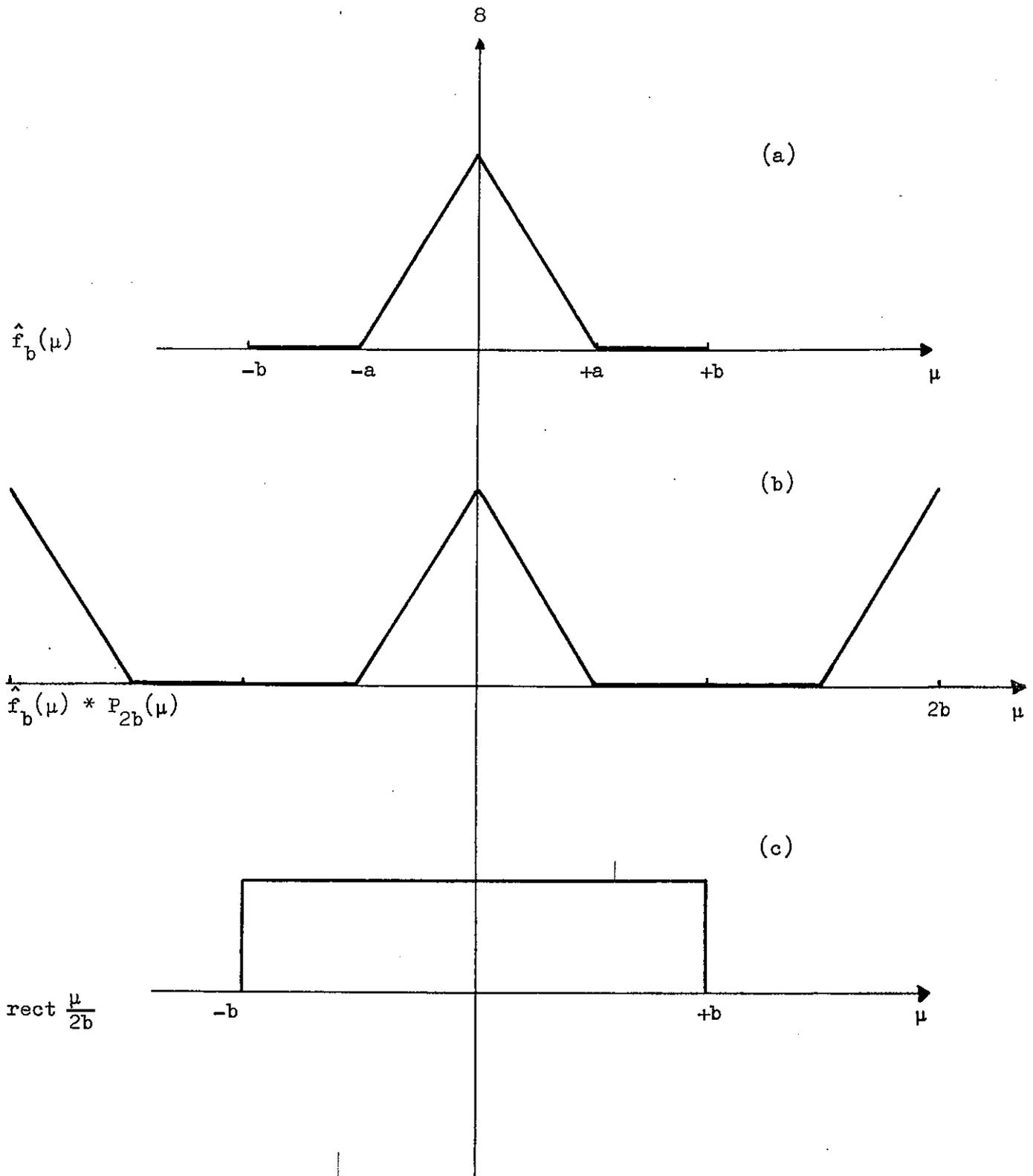


Figure 2

$$\hat{f}_b(\mu) = [\hat{f}_b(\mu) * P_{2b}(\mu)] \times \text{rect } \frac{\mu}{2b}$$

C'est cette expression qui, suivant les auteurs, constitue le théorème d'échantillonnage, ou théorème de Shannon, (ou théorème d'interpolation); elle traduit le fait qu'il est possible de restituer $f(x)$ pour tout x à partir d'un nombre infini de valeurs discrètes de $f(x)$ équidistantes de $h_0 = 1/2a$. Dans la suite de notre travail, nous rencontrerons très souvent cette valeur h_0 et nous serons amenés très naturellement à l'appeler "pas de Shannon"; (auteur qui mit en évidence cette propriété des fonctions à spectre limité [Shannon, 1948]).

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'analyser cette expression. Nous montrerons d'abord que $f(x)$ peut être développée à partir d'un échantillonnage à un pas h inférieur à h_0 . Puis, nous étudierons les conséquences d'une troncature de la série (I. 3) à un nombre fini de termes.

3.11 - INFLUENCE D'UN ECHANTILLONNAGE A UN PAS INFÉRIEUR A h_0 -

3.11.1) Considérons la fonction $\hat{f}_b(\mu)$ ($b \geq a$), égale à $\hat{f}(\mu)$ sur l'intervalle $[-a, +a]$ et nulle sur le reste de l'intervalle $[-b, +b]$. (fig. 2a); $\hat{f}_b(\mu)$ est une fonction localement sommable dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\hat{f}_b(\mu))$ est définie par :

$$\mathcal{F}(\hat{f}_b(\mu)) = \int_{-b}^{+b} \hat{f}_b(\mu) e^{-j2\pi\mu x} d\mu = \int_{-a}^{+a} \hat{f}(\mu) e^{-j2\pi\mu x} d\mu$$

$$\mathcal{F}(\hat{f}_b(\mu)) = f(x)$$

mais nous pouvons écrire aussi (fig. 2c) :

$$\hat{f}_b(\mu) = [\hat{f}_b(\mu) * P_{2b}(\mu)] \times \text{rect} \frac{\mu}{2b} .$$

Soit, en prenant la T.F. de cette dernière expression ;

$$f(x) = [f(x) \times \frac{1}{2b} P_{1/2b}(x)] * 2b \text{ sinc } 2b x ,$$

C'est-à-dire

$$(I.4) \quad f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p/2b) \operatorname{sinc} 2b \left(x - \frac{p}{2b}\right)^* .$$

III.2) Conséquences

Il est donc possible de trouver diverses expressions du théorème d'échantillonnage. Elles correspondent, d'une part à un échantillonnage de la fonction $f(x)$ à un pas $h = 1/2b \leq h_0 = 1/2a$ (pas qui peut être choisi plus ou moins grand), d'autre part à l'utilisation des différentes fonctions de base $\operatorname{sinc} 2b'x$ ou $\operatorname{sinc} x/h'$. La largeur h' de ces fonctions peut être toute valeur comprise entre h et h_0 .

Aux développements en série (I.4) de $f(x)$, correspondent des développements en série de $\hat{f}_b(\mu)$, obtenus en prenant la T.F. des membres de (I.4); soit :

$$(I.5) \quad \mathcal{F}(f(x)) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2b} f\left(\frac{p}{2b}\right) e^{-j2\pi\mu\frac{p}{2b}} \operatorname{rect} \frac{\mu}{2b} .$$

Nous notons ici que $f(x)$ étant une fonction continue, elle est égale en tout point à n'importe lequel des développements (I.4).

Il en est de même pour les développements en série (I.5) et la fonction $\hat{f}_b(\mu)$, avec toutefois une restriction : développement en série et fonction sont égaux sauf en des points de mesure nulle, les points d'abscisse $\pm a$. En effet, $\hat{f}(\mu)$ peut ne pas s'annuler en ces points (fig. 3) et dans ce cas les fonctions $\hat{f}_b(\mu)$ possèdent une discontinuité de premier ordre.

(*) De même nous pouvons considérer b' tel que $b \geq b' \geq a$ et noter

$$\hat{f}_{b'}(\mu) = (\hat{f}_b(\mu) * P_{2b'}(\mu)) \times \operatorname{rect} \frac{\mu}{2b'} .$$

Il vient alors :

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2b'}{2b} f\left(\frac{p}{2b}\right) \operatorname{sinc} 2b' \left(x - \frac{p}{2b}\right) .$$

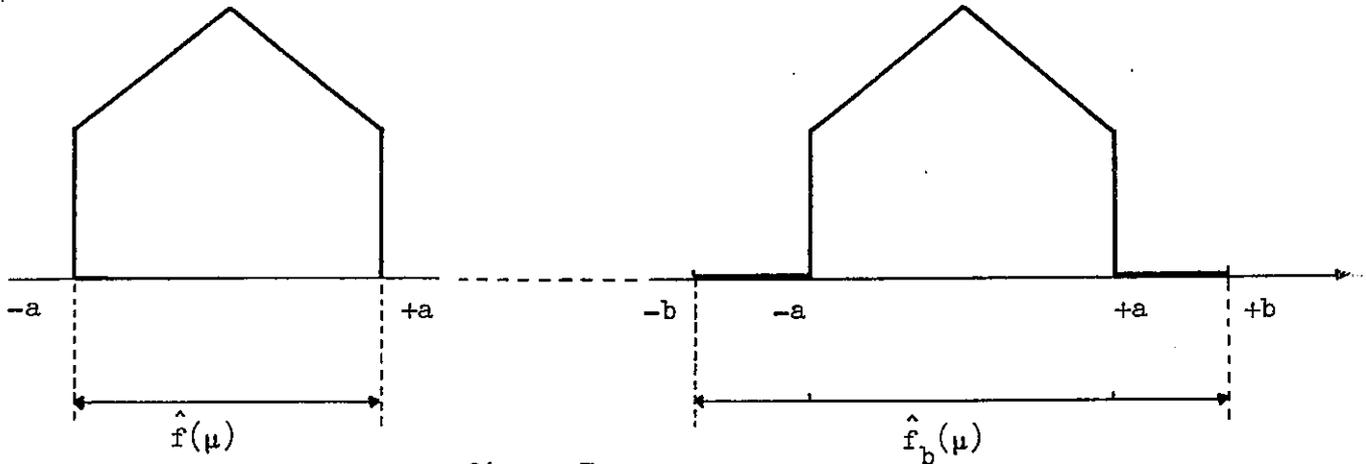


figure 3

4 - INFLUENCE DE LA TRONCATURE DE LA SERIE -

Pratiquement, lorsqu'on échantillonne une fonction à un pas h quelconque, on limite cet échantillonnage à un nombre fini N de termes. N est choisi de façon que $f(x)$ ne fournisse plus que des contributions considérées comme négligeables au delà de $|x| = nh$, $n = (N - 1)/2$. Il est utile de rechercher ce que représente la série limitée $f_N(x)$ ainsi obtenue.

Dans ce but, nous allons étudier l'effet de la troncature de la série (I . 4) sur la T.F. $\hat{f}(\mu)$; posons

$$\hat{f}_N(\mu) = \mathcal{F}(f_N(x)) = \mathcal{F} \sum_{p=-n}^{+n} f(ph) \operatorname{sinc}(x - ph)/h ,$$

soit :

$$\hat{f}_N(\mu) = \sum_{p=-n}^{+n} h f(ph) e^{-j2\pi\mu ph} \cdot \operatorname{rect} h\mu ,$$

$$(I . 6) \quad \hat{f}_N(\mu) = \sum_{p=-n}^{+n} A_p e^{-j2\pi\mu ph} \cdot \operatorname{rect} h\mu , \text{ avec } A_p = h f(ph) .$$

Notons que les coefficients A_p s'identifient aux coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction définie sur l'intervalle $[-1/2 h, +1/2 h]$. En effet, considérons (fig. 4) la fonction $\hat{f}_{1/2h}(\mu)$,

identiquement nulle pour $|\mu| \geq \frac{1}{2h}$, continue par morceaux sur l'intervalle $[-1/2 h, +1/2 h]$ et définie par :

$$\begin{cases} \hat{f}_{1/2h}(\mu) = \hat{f}(\mu) & \text{pour } |\mu| \leq \frac{1}{2h_0} \\ \hat{f}_{1/2h}(\mu) = 0 & \text{pour } \frac{1}{2h_0} \leq |\mu| \leq \frac{1}{2h} \end{cases}$$

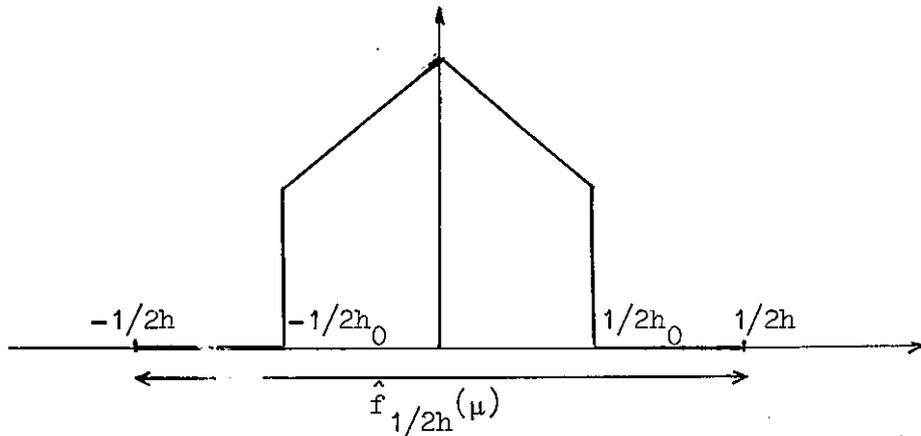


Figure 4

Cette fonction admet, sur cet intervalle, un développement en série de Fourier qui lui est égal presque partout :

$$\hat{f}_{1/2h}(\mu) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p e^{-j2\pi\mu p h}$$

avec :

$$a_p = \int_{-1/2h}^{+1/2h} \hat{f}_{1/2h}(\mu) e^{-j2\pi\mu p h} d\mu$$

On reconnaît, dans ces coefficients, les coefficients A_p de la série (I.6).
En effet,

$$a_p = h \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mu) e^{-j2\pi\mu p h} d\mu = h f(ph) = A_p$$

$\hat{f}_{1/2h}(\mu)$ étant nulle en tout point extérieur à l'intervalle $[-1/2h, +1/2h]$,

peut être représentée sur $-\infty, +\infty$ par la série :

$$(I . 7) \quad \hat{f}_{1/h}(\mu) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p e^{-j2\pi\mu ph} \cdot \text{rect } h\mu$$

Ce développement n'est autre que le développement (I . 5) retrouvé par un autre procédé .

Si maintenant nous revenons à l'expression (I . 6), nous constatons qu'elle représente la série (I . 7) limitée à ses $(2n + 1)$ premiers termes. Or, l'une des propriétés des développements en série de Fourier est que la somme de leurs N premiers termes est la meilleure approximation en moyenne quadratique de la fonction correspondante lorsque celle-ci est développée à partir des fonctions de base $\hat{b}_{h,p}(\mu) = \exp[-j2\pi\mu ph] \cdot \text{rect } h\mu$. Si, de plus, nous rappelons que ces fonctions forment un système orthogonal et complet sur l'intervalle $[-1/2 h, +1/2 h]$, nous pouvons constater que la série (I . 6) converge en moyenne vers $\hat{f}_{1/h}(\mu)$.

Les transformées de Fourier par l'intégrale de Fourier, de ces bases,

$$b_{h,p}(x) = \mathcal{F}(\hat{b}_{h,p}(\mu)) = \text{sinc}(x - ph)/h ,$$

forment à leur tour un système orthogonal et complet vis à vis des fonctions dont la T.F. est de support fini, inférieur ou égal à $[-1/2 h, +1/2 h]$.

Le développement $f_N(x)$ ci-dessous ,

$$f_N(x) = \sum_{p=-n}^{+n} f(ph) \text{sinc}(x - ph)/h ,$$

constitue donc (théorème de Parseval) la meilleure approximation en moyenne quadratique sur $-\infty, +\infty$ de la fonction $f(x)$, développée à l'aide des $(2n + 1)$ premières bases $\text{sinc}(x - ph)/h$.

Nous verrons tout au long de notre travail l'importance d'une telle propriété de ces développements.

5 - CHOIX DU PAS h OPTIMUM -

Nous avons vu qu'il est possible de trouver une infinité de développements de $f(x)$. Tant qu'on ne les tronque pas, ces développements, entièrement équivalents et égaux à $f(x)$, ne se distinguent que par les fonctions de base utilisées $b_{h,p}(x)$ et par la valeur des coefficients correspondants, coefficients et bases étant fonctions du paramètre $h \ll h_0$ choisi.

Lorsque nous tronquons ces développements à un nombre fini de termes, nous remplaçons $f(x)$ par différentes approximations en moyenne quadratique, de qualité inégale selon les bases utilisées (donc selon h). Plus h est petit, plus le domaine $\Delta \mu [-1/2 h, +1/2 h]$ de $\hat{f}_{1/2h}(\mu)$ est étendu. Il faut alors approcher une fonction, égale à $\hat{f}(\mu)$ sur $[-a, a]$ et nulle sur un intervalle de plus en plus étendu ($a < |\mu| < 1/2 h$) à l'aide d'un nombre limité de termes. L'erreur commise croit lorsque h décroît si, pour approcher cette fonction, on met en jeu un nombre donné ($2n + 1$) de termes.

Le meilleur résultat s'obtient pour $h = h_0$. Ce pas correspond à l'égalité des domaines de $\hat{f}(\mu)$ et $\hat{f}_{1/2h}(\mu)$. Ce choix de h prend beaucoup d'importance quand la fonction $\hat{f}(\mu)$ présente des discontinuités aux points $\pm a$. Cette règle est d'autant plus importante que le saut de la fonction en ces points est plus élevé. En effet, il devient très difficile d'approcher correctement $\hat{f}_{1/2h}(\mu)$ à l'aide d'un petit nombre de termes sur un intervalle $[-1/2 h, +1/2 h]$ plus grand que $[-a, +a]$.

La série (I . 6) présente alors, au voisinage de la discontinuité, des oscillations dont l'ampleur dépend de la valeur aux points $-a, +a$ de $\hat{f}(\mu)^*$.

(*) oscillations connues sous le nom de phénomène de Gibbs

Toutefois, l'écart entre fonction $f(x)$ et séries $f_N(x)$ diminue lorsqu'on s'astreint à prendre un nombre $(2n + 1)$ de termes inversement proportionnel à h ($nh = A$, représente l'abscisse de coupure de la fonction $f(x)$). Cet écart reste cependant toujours du même ordre ou supérieur à celui obtenu à l'aide de la série de Shannon $f_{N_0}(x)$ (avec $n_0 h_0 = A$).

6 - VERIFICATION-

A titre de vérification nous avons échantillonné une fonction $f(x)$ considérée lors d'un précédent travail : cette fonction (fig.5) présente de fortes oscillations qui rendent difficile sa représentation par une série limitée. Nous allons vérifier qu'un choix correct du pas d'échantillonnage permet de réduire de beaucoup le nombre de termes.

La fonction choisie a pour domaine de fréquences, le domaine $|\mu| \leq 1$ et pour expression :

$$f(x) = \sum_{p=1}^5 a_p g_p(x) \quad \text{avec} \quad \hat{g}_p(\mu) = \frac{\text{sinc } p\mu}{1 - |\mu|} \quad \text{rect } \frac{\mu}{2}$$

Les coefficients ont pour valeur :

$$a_1 = 1,5228 \quad , \quad a_2 = -1,066 \quad , \quad a_3 = 0,983 \quad , \quad a_4 = -0,8951 \quad , \quad a_5 = 0,45 \quad .$$

Si l'on tronque $f(x)$ à l'abscisse $A = 5$, on peut choisir d'échantillonner au pas $h_0 = 0.5$ à l'aide de 21 termes ou bien au pas $h = 0.125$ à l'aide de 81 termes ; nous avons calculé point par point les deux résultats $f_{h_0, N_0}(x)$ et $f_{h, N}(x)$ en même temps que $f(x)$: c'est $f_{h_0, N_0}(x)$ qui, avec 4 fois moins de termes, s'approche le mieux de la fonction cherchée.

Sur la figure suivante (fig. 6) nous avons tracé les fonctions $\hat{f}(\mu)$, $\hat{f}_{1/2h_0, N_0}(\mu)$ et $\hat{f}_{1/2h, N}(\mu)$ correspondantes : on voit que la qualité de l'approximation en moyenne de $\hat{f}(\mu)$ sur $[-4, +4]$ est médiocre. En particulier, sur $[-1, +1]$, cette fonction s'écarte plus de $\hat{f}(\mu)$ que ne le fait $\hat{f}_{1/2h_0, N_0}(\mu)$, ce qui explique les résultats de la figure 5.

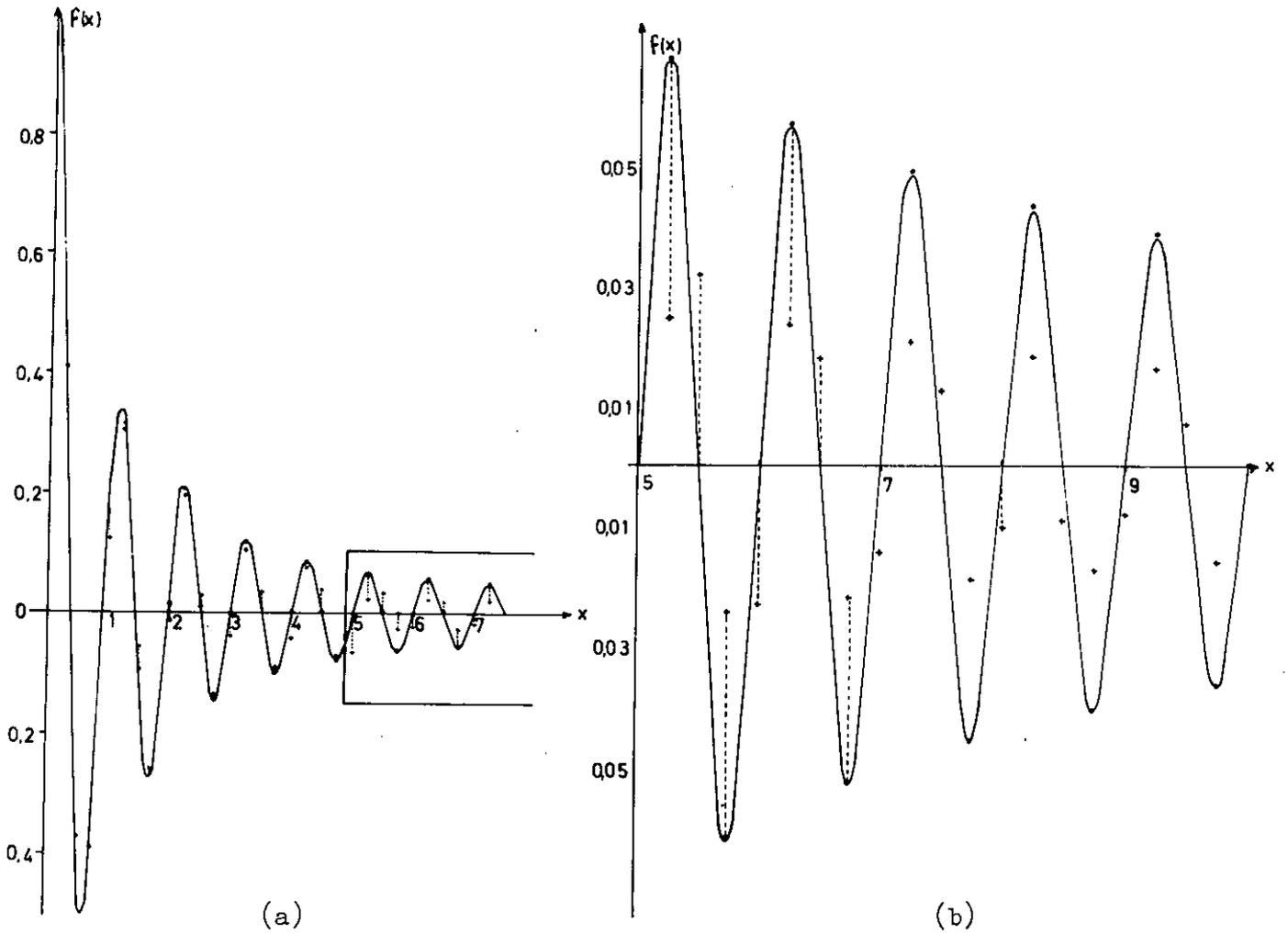


figure 5

(a) - en traits pleins $f(x)$.

(b) - Agrandissement d'une portion de la figure 5 (a) .

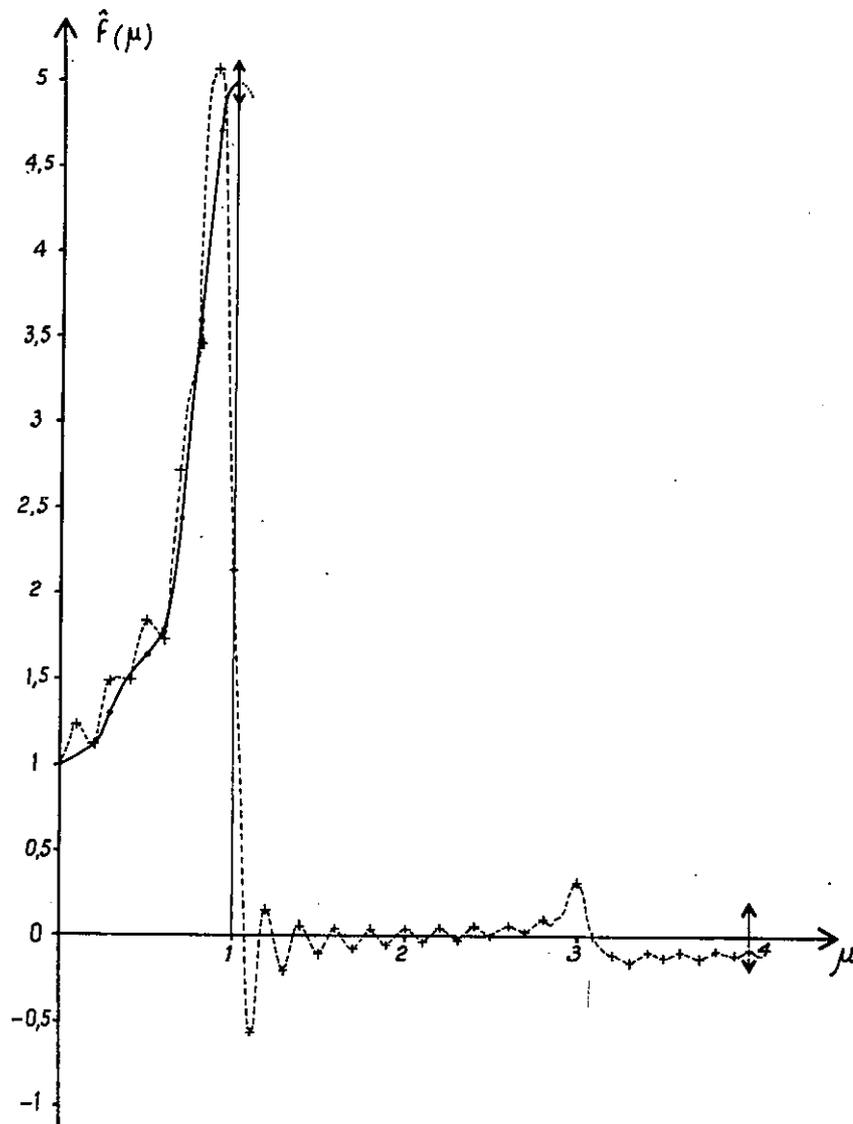


figure 6

- en traits pleins $\hat{f}(\mu)$ et $\hat{f}_{1/2h_0, N_0}(\mu)$: ($h_0 = 0.5$, $N_0 = 10$) ;
on remarque que $\hat{f}_{1/2h_0, N_0}(\mu)$ est pratiquement confondu avec $\hat{f}(\mu)$
- en pointillé $\hat{f}_{1/2h, N}(\mu)$ ($h = 0.125$, $N = 40$)

7 - CONCLUSION -

Le théorème d'échantillonnage peut s'exprimer sous la forme très générale suivante :

$$(I . 8) \quad f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2b'}{2b} f\left(\frac{p}{2b}\right) \operatorname{sinc} 2b' \left(x - \frac{p}{2b}\right)$$

soit :

$$(I . 9) \quad f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{h}{h'} f(ph) \operatorname{sinc} (x - ph)/h' ,$$

avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} h' &\leq h , \\ h &\leq h_0 = \frac{1}{2a} . \end{aligned}$$

Cependant , nous avons également montré que c'est la forme classique du théorème d'échantillonnage qui conduit au meilleur résultat si l'on tronque la série (I . 9) à un nombre fini de termes. Nous avons alors :

$$h = h' = h_0 = \frac{1}{2a} .$$

La série

$$f_N(x) = \sum_{p=-n}^{+n} f(ph_0) \operatorname{sinc} (x - ph_0)/h_0$$

constitue une approximation en moyenne quadratique sur $-\infty, +\infty$ de la fonction $f(x)$ à l'aide des fonctions de bases $\operatorname{sinc} (x - ph_0)/h_0$. Ces fonctions constituent donc des bases particulièrement indiquées pour développer $f(x)$.

CHAPITRE II

PRODUIT DE CONVOLUTION NUMERIQUE DE 2 FONCTIONS DONT LA T.F EST A SUPPORT BORNE
 - CAS UNIDIMENSIONNEL -

1 - INTRODUCTION -

Nous savons que le produit de convolution de deux fonctions f et g dont les spectres de Fourier \hat{f} et \hat{g} sont de domaine limité peut se mettre sous la forme :

$$(II . 1) \quad \varphi(y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h f(ph) g(y - ph)$$

Cette série fait appel à l'échantillonnage au pas h de l'une des fonctions f ou g . La valeur de h doit être choisie inférieure à h_d inverse de la moitié de la somme des domaines de \hat{f} et \hat{g} .

Cependant, lorsqu'on calcule numériquement ce produit de convolution on limite la série à ses N premiers termes.

A la lumière des conclusions du 1^{er} chapitre, nous nous proposons d'établir que, pour $h < h_0^*$, cette opération équivaut à effectuer le produit de convolution exact de l'une des fonctions, par l'approximation en moyenne quadratique à N termes de l'autre fonction développée à l'aide des fonctions de base $b_{h,p} = \text{sinc } 2c(x-ph)$.

(*) h_0 : inverse du plus grand des domaines de \hat{f} et \hat{g}

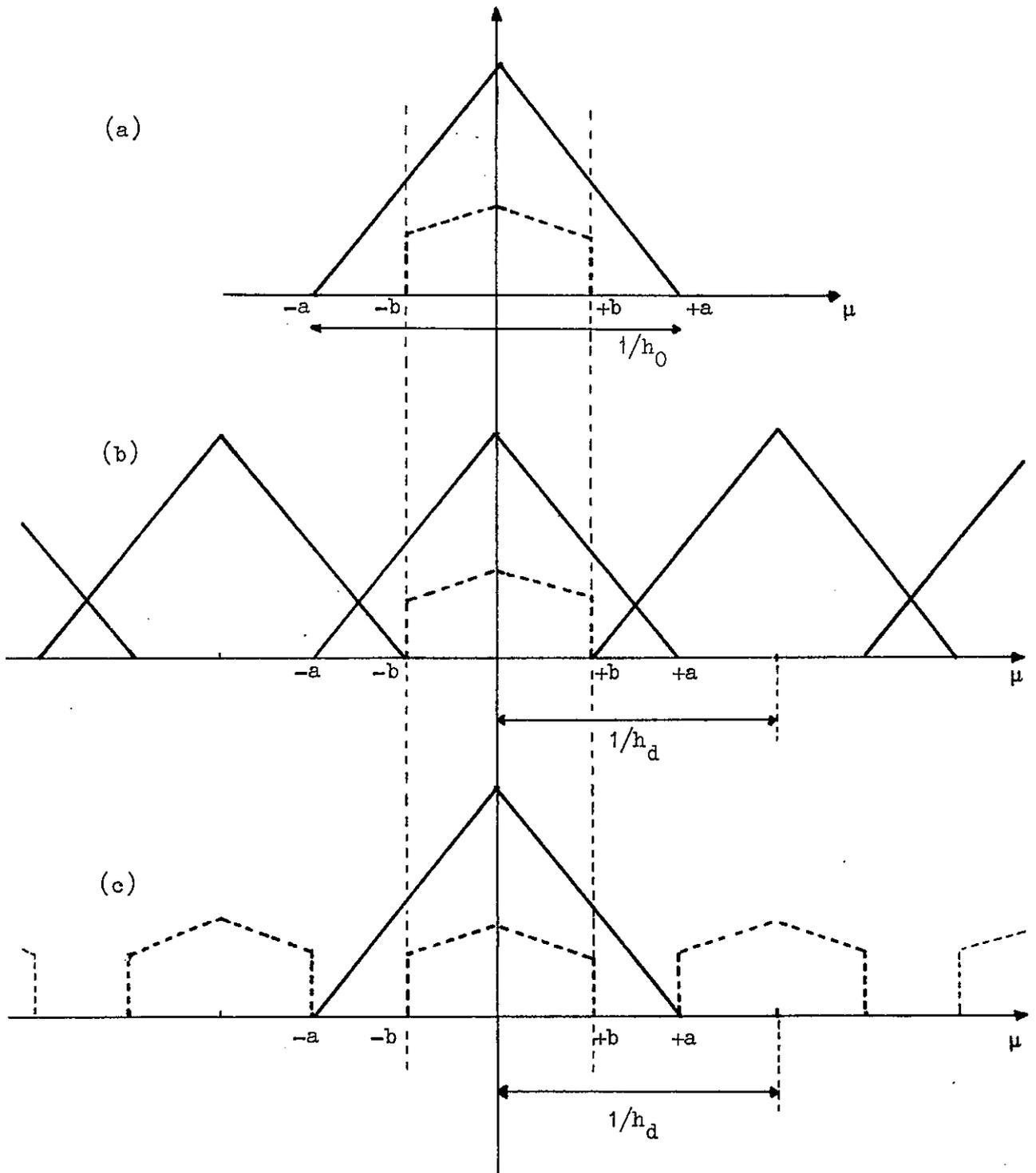


Figure 7

-(a) { : en traits pleins $\hat{f}(\mu)$ -(b) : en traits pleins $\hat{f}_s(\mu) = \hat{f}(\mu) * P_{1/h_d}(\mu)$
 { : en traits pointillés $\hat{g}(\mu)$ -(c) : en traits pointillés $\hat{g}_s(\mu) = \hat{g}(\mu) * P_{1/h_d}(\mu)$

Pour $h < h_d$: $\hat{f}_s(\mu) \times \hat{g}(\mu) = \hat{f}(\mu) \times \hat{g}_s(\mu) = \hat{f}(\mu) \times \hat{g}(\mu)$

2 - EXPRESSION NUMERIQUE D'UN PRODUIT DE CONVOLUTION -

2.1) Rappelons que le produit de convolution φ de 2 fonctions f et g , dont les T.F $\hat{f}(\mu)$ et $\hat{g}(\mu)$ sont respectivement de domaine $[-a, +a]$ et $[-b, +b]$, $b \leq a$, peut se mettre sous la forme (II. 1).

En effet, φ est défini par l'équation intégrale :

$$(II. 2) \quad \varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(y-x) dx = f * g .$$

Pour calculer numériquement $\varphi(y)$, nous nous proposons de remplacer l'intégrale par une somme discrète. Nous posons :

$$\varphi_s(y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(ph) \cdot g(y-ph) \cdot h = \int_{-\infty}^{+\infty} h f(x) P_h(x) g(y-x) dx .$$

Pour que $\varphi_s(y)$ soit égal à $\varphi(y)$ il faut et il suffit que les T.F de ces deux fonctions soient égales presque partout. Or,

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(\mu) = \hat{f}(\mu) \times \hat{g}(\mu) \\ \hat{\varphi}_s(\mu) = (\hat{f}(\mu) * P_{1/h}(\mu)) \times \hat{g}(\mu) . \end{cases}$$

$\hat{g}(\mu)$ étant identiquement nulle pour $|\mu| \geq b$, $\hat{\varphi}(\mu)$ et $\hat{\varphi}_s(\mu)$ sont égaux si l'on réalise l'égalité, sur $[-b, +b]$, de $\hat{f}(\mu)$ et $\hat{f}(\mu) * P_{1/h}(\mu)$. Toutefois, $\hat{f}(\mu)$ étant aussi de domaine borné ($\hat{f}(\mu) \equiv 0$ pour $|\mu| \geq a$), il suffit de prendre $1/h \geq a + b$ pour que, sur $[-b, +b]$, l'on ait :

$$\hat{f}(\mu) * P_{1/h}(\mu) \equiv \hat{f}(\mu) \quad ; \quad (\text{cf fig. 7})$$

soit, en posant $\frac{1}{h_d} \equiv a + b$,

$$\hat{\varphi}(\mu) = \hat{\varphi}_s(\mu) \quad , \quad \text{pour } \frac{1}{h} \geq \frac{1}{h_d} \quad ,$$

et par conséquent :

$$(II. 3) \quad \varphi(y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(ph) g(y-ph) h \quad \text{pour } h \leq h_d$$

2.2) Cette même expression peut être obtenue en remplaçant dans (II.2) $f(x)$ par le développement :

$$(II.4) \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(ph) \operatorname{sinc}(x - ph), \quad \text{pour } h \ll h_d \quad *$$

Ce développement (II.4), n'est cependant égal à $f(x)$ que pour $h \ll h_0 = 1/2a$ (cf chapitre I § 7).

Nous mettons ainsi en évidence que :

- pour $h_0 \ll h \ll h_d$, l'expression (II.3) égale au produit de convolution $f * g$, est aussi égale au produit de convolution de g par différentes séries infinies (qui ne correspondent pas à $f(x)$).

- pour $h \ll h_0$, l'expression (II.1) correspond au produit de convolution exact de $g(x)$ par le développement de $f(x)$ à l'aide des fonctions $\operatorname{sinc}(x - ph)/h$.

2.3) Cette dernière remarque prend toute son importance lorsqu'on limite l'expression de φ à ses N premiers termes. Nous obtenons ainsi une approximation $\varphi_N(y)$ du produit de convolution :

$$(II.5) \quad \sum_{p=-n}^{+n} h f(ph) g(y - ph) \quad h \ll h_d$$

*

en effet pour $h < b$ on a

$$\operatorname{sinc}(x - ph) * g(x) = h g(y - ph) .$$

Pour $h \ll h_0$, $\varphi_N(y)$ correspond au produit de convolution exact de $g(x)$ par la fonction $f_N(x)$, approximation en moyenne quadratique de $f(x)$ à l'aide des N premières fonctions de bases $\text{sinc}(x - ph)/h$.

$$\varphi_N(y) = g * f_N \quad \text{avec} \quad f_N = \sum_{p=-n}^{+n} f(ph) \text{sinc}(x - ph)/h$$

3 - CONSEQUENCES -

Les remarques faites dans le chapitre précédent peuvent s'appliquer ici. Nous en tirons les conséquences suivantes :

- à nombre infini de termes, les différentes expressions de $\varphi(y)$ correspondant à des pas h différents, inférieurs à h_d , sont équivalentes
- à nombre fini de termes l'expression calculée

$$\varphi_N(x) = \sum_{p=-n}^{+n} f(ph) g(x - ph) h \quad , \quad h \ll h_0$$

correspond au produit de convolution exact de la fonction $g(x)$ par l'approximation en moyenne quadratique de $f(x)$ à l'aide des fonctions de base $\text{sinc}(x - ph)/h$. Nous avons montré, qu'à nombre donné de termes c'est avec les bases $\text{sinc}(x - ph_0)/h_0$ [$h_0 = 1/2a$] que cette fonction est la mieux approchée. C'est donc avec ce même pas h_0 que nous obtiendrons la meilleure approximation du produit de convolution.

- les expressions

$$(II . 6) \quad \varphi_N'(x) = \sum_{p=-n}^{+n} g(ph) f(x - ph) h \quad h \ll h_0$$

$$(II . 7) \quad \varphi_N''(x) = \sum_{p=-n}^{+n} f(ph) g(x - ph) h \quad h \ll h_0$$

ne conduisent pas, à nombre donné de termes, au même résultat. φ_N' correspond au produit de convolution exact de f par l'approximation en moyenne de g à l'aide des bases $\text{sinc}(x - ph)/h$; φ_N'' , à celui de g par l'approximation en moyenne de f à l'aide de ces mêmes bases. Il est préférable de choisir l'expression pour laquelle l'approximation considérée approche le mieux la fonction correspondante. Lorsque les fonctions $\hat{f}(\mu)$ et $\hat{g}(\mu)$ n'ont pas même domaine, nous savons que le pas h_0 est égal à l'inverse du plus grand des domaines. Sur ce domaine $[-1/2h_0, +1/2h_0]$, l'une des deux fonctions doit être prolongée par des parties nulles et peut n'être que continue par morceaux. Il est donc préférable d'échantillonner la fonction dont la T.F est de support $[-1/2h_0, +1/2h_0]$ et est continue sur ce support.

Vérification :

Nous avons voulu à titre de vérification effectuer le produit de convolution des fonctions :

$$f(x) = \sum_{p=-5}^{+5} f\left(\frac{p}{2a}\right) \text{sinc } 2a \left(x - p/2a\right) \quad , \quad a = 1$$

et $g(x) = 2b \text{sinc } 2b x \quad , \quad b = 0.1$

Nous avons choisi arbitrairement pour coefficients $f\left(\frac{p}{2}\right)$, les coefficients de la fonction $A_c(x)$ dont nous nous servons dans le chapitre X de ce travail.

Nous pouvons aisément calculer le produit de convolution exact $\varphi = f * g$:

$$\varphi = f * g = \sum_{p=-5}^{+5} f\left(\frac{p}{2}\right) \text{sinc } 2a \left(x - p/2a\right) * 2b \text{sinc } 2b x$$

Or,

$$\text{sinc } 2a \left(x - p/2a\right) * 2b \text{sinc } 2b x = \frac{1}{2a} \text{sinc } 2b \left(x - \frac{p}{2a}\right) \quad ,$$

pour $b < a$,

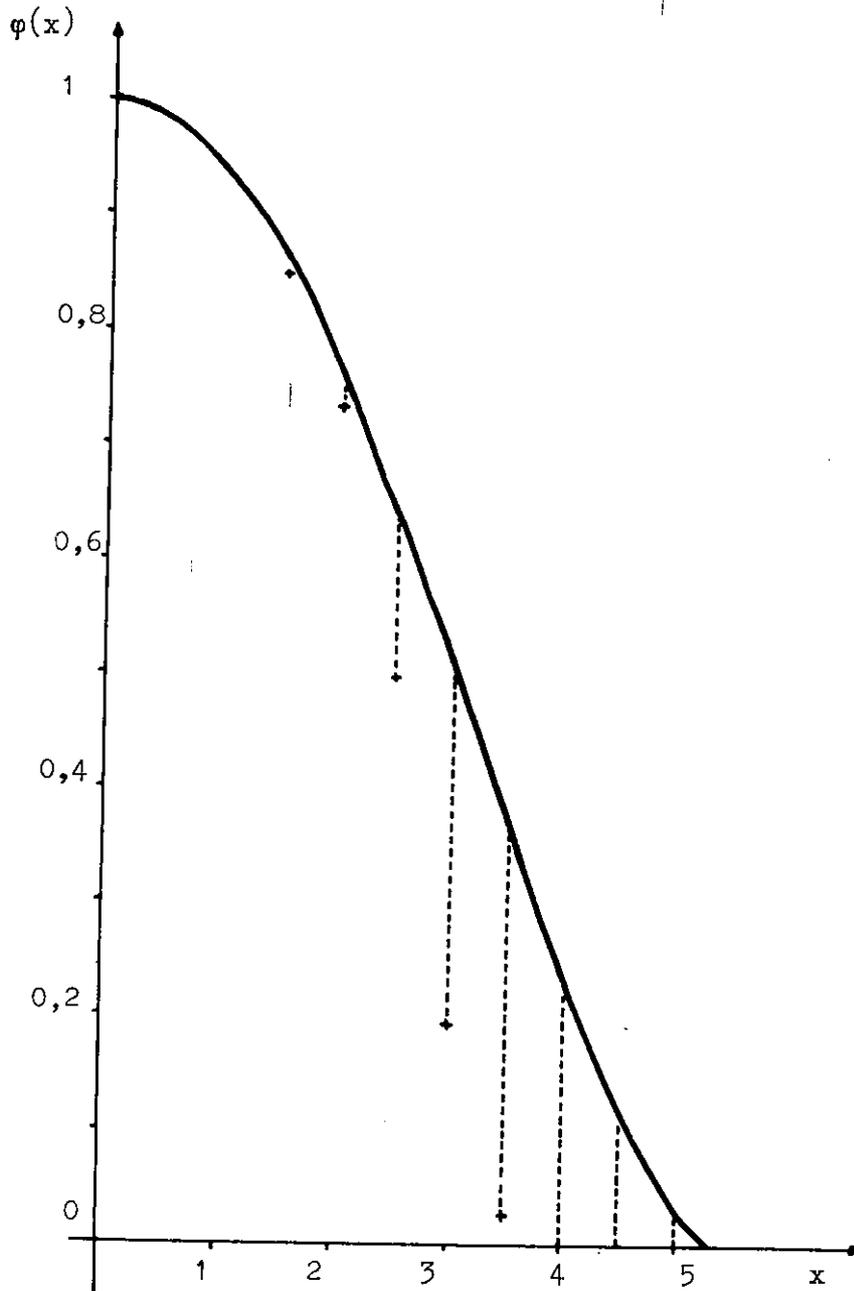


figure 8

- en traits pleins , $\varphi(x) = f(x)*g(x)$ et $\varphi_N^+(x) = f_N(x)*g(x)$
- les '+' correspondent aux valeurs de $\varphi_N^-(x) = f(x)*g_N(x)$

soit :

$$\varphi = \sum_{p=-5}^{-5} \frac{1}{2} f\left(\frac{p}{2}\right) \operatorname{sinc} \left(x - \frac{p}{2}\right) .$$

Nous obtenons cette même expression en appliquant directement l'expression (II . 7) avec $h = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$ et $n = 5$:

$$\varphi_N' = \sum_{p=-5}^{+5} \frac{1}{2} f\left(\frac{p}{2}\right) \operatorname{sinc} 0.2 \left(x - \frac{p}{2}\right)$$

Par contre, en calculant le produit de convolution sous la forme (II . 6)

$$\varphi_N''(x) = \sum_{p=-5}^{+5} \frac{1}{2a_1} \operatorname{sinc} 2b \left(\frac{p}{2a}\right) \cdot f \left(x - \frac{p}{2a}\right) ,$$

nous obtenons des résultats très différents (fig. 8) .

4 - CONCLUSION -

Lorsque nous calculons numériquement l'expression :

$$\varphi_N(y) = \sum_{p=-n}^{-5} h f(ph) g(x - p/h) , \quad h \ll h_0 ,$$

nous effectuons le produit de convolution exact de la fonction $g(x)$ par l'approximation en moyenne quadratique de $f(x)$ à l'aide des bases $\operatorname{sinc} (x - ph)/h$, soit :

$$\varphi_N(y) = g(x) * f_N(x) \quad \text{avec} \quad f_N(x) = \sum_{p=-n}^{-n} f(ph) \operatorname{sinc} (x - ph)/h .$$

Nous avons montré que $\varphi_N(y)$ peut conduire au résultat exact ; pour cela, $f(x)$ doit appartenir à la classe des combinaisons linéaires à N termes des bases $b_{h,p}(x)$, soit :

$$f(x) = f_N(x) = \sum_{p=-n}^{+n} f(ph) \operatorname{sinc} (x - ph)/h$$

CHAPITRE III

LE THEOREME D'ECHANTILLONNAGE

- CAS MULTIDIMENSIONNEL -

I - INTRODUCTION -

Nous nous proposons dans ce chapitre de généraliser les formes du théorème d'échantillonnage et du produit de convolution numérique au cas des fonctions bi-dimensionnelles. Nous étudions particulièrement les fonctions à symétrie circulaire.

2 - THEOREME D'ECHANTILLONNAGE A 2 DIMENSIONS -

Lorsque la fonction $f(x,y)$ a une transformée de Fourier $\hat{f}(\mu,\nu)$ de domaine limité à un rectangle de côté $2a$ et $2b$, nous pouvons écrire

$$(III . 1) \quad \hat{f}(\mu,\nu) = [\hat{f}(\mu,\nu) * P_{2a,2b}(\mu,\nu)] \cdot \text{rect} \left(\frac{\mu}{2a}, \frac{\nu}{2b} \right)$$

$P_{2a,2b}$ représente la généralisation à 2 dimensions du peigne de Dirac. Elle est donc formée d'une infinité de distributions situées aux points de coordonnées $[2na, 2nb]$ (fig. 9). $\text{rect} \left(\frac{\mu}{2a}, \frac{\nu}{2b} \right)$ représente la fonction égale à l'unité sur le rectangle de côtés $[2a, 2b]$ et nulle à l'extérieur.

En prenant les transformées de Fourier des deux membres de l'expression (III . 1), il vient :

$$f(x,y) = [f(x,y) \times 2a \cdot 2b \cdot P_{1/2a, 1/2b}(x,y)] * \left(\frac{1}{2a} \text{sinc } 2a x \cdot \frac{1}{2b} \text{sinc } 2b y \right)$$

soit :

$$(III . 2) \quad f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f(ph, qh') \cdot \text{sinc} (x - ph)/h \cdot \text{sinc} (y - qh')/h'$$

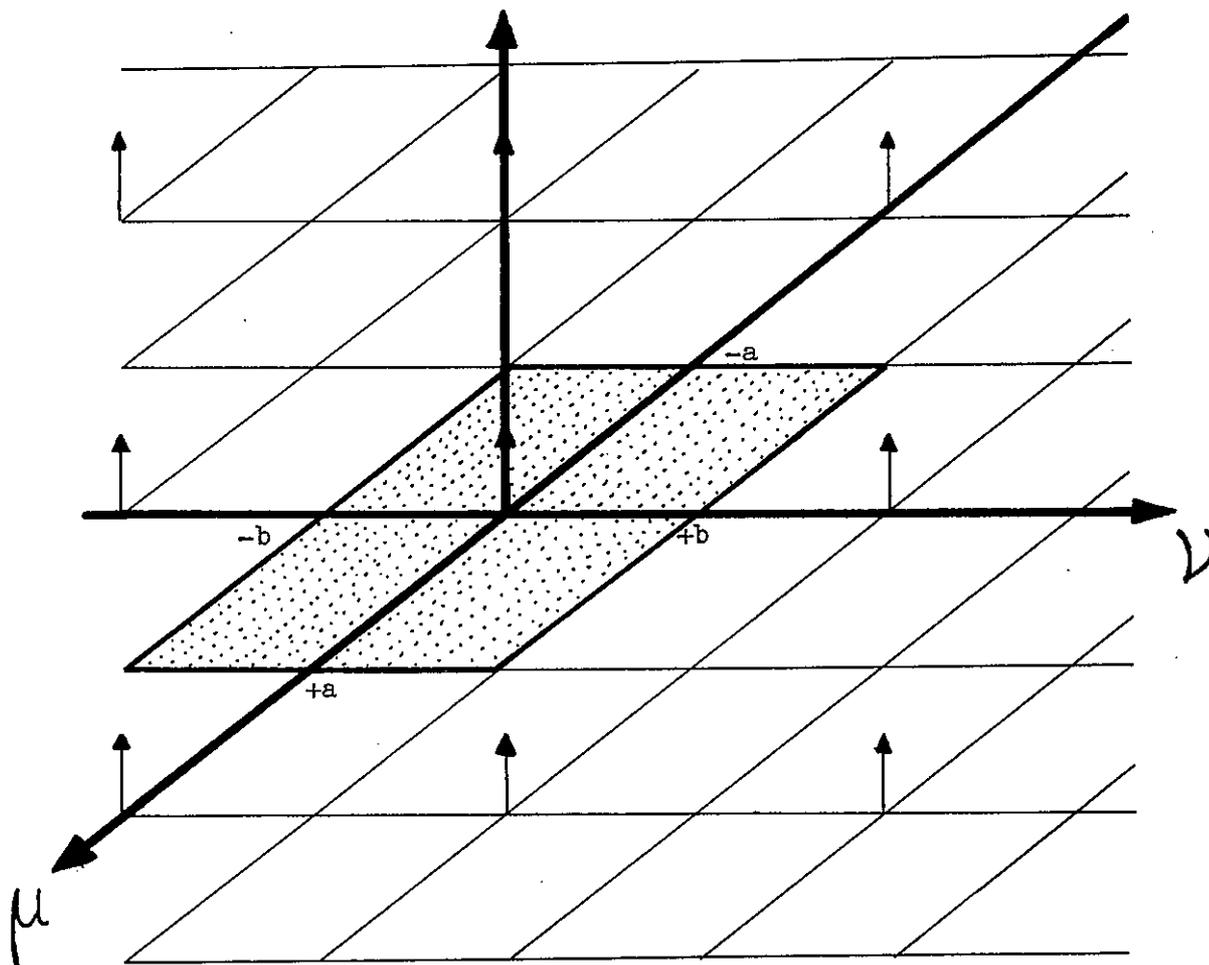


Figure 9

- $P_{2a,2b}(\mu, \nu)$ est constituée d'une infinité de pics de Dirac situés aux points de coordonnées $(n \times 2a, m \times 2b)$
- en grisé, le domaine de $\text{rect}\left(\frac{\mu}{2a}, \frac{\nu}{2b}\right)$

Remarque :

Tronquer cette série, c'est-à-dire calculer $\sum_{-N} \sum_{-M} \dots$ revient, comme précédemment, à remplacer $\hat{f}(\mu, \nu)$ par son approximation en moyenne

quadratique à l'aide des développements à $(NM - 1)$ termes des fonctions de base $\exp [-j\pi^2 (p\mu + qh'u)]$. Toutes les remarques que nous avons faites pour les fonctions uni-dimensionnelles sont ici valables. Nous retiendrons en particulier le résultat suivant : seules les fonctions $f(x,y)$ dont les transformées de Fourier sont continues sur le domaine rectangulaire de côté $(1/h, 1/h')$ * sont convenablement approchées à l'aide d'un nombre limité de termes.

3 - CAS DES FONCTIONS RADIALES -

3.1) Transformée de Hankel

On dit qu'une fonction $f(x,y)$ est radiale si elle ne dépend que de la distance ρ du point de coordonnées x,y à l'origine, soit :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 ;$$

$f(x,y)$ peut donc se noter $A(\rho)$.

On sait que la T.F. $\hat{f}(\mu,u)$ d'une telle fonction est aussi, par raison de symétrie, une fonction radiale que nous noterons $\hat{A}(r)$. Elle peut s'exprimer sous la forme de l'intégrale simple

$$(III . 3) \quad \hat{A}(r) = \int_0^{\infty} A(\rho) J_0(2\pi\rho r) 2\pi\rho d\rho$$

Cette équation intégrale porte le nom de transformée de Hankel, (T.H). Cette transformée possède des propriétés analogues à celles de la transformée de Fourier : [Watson, (1922)]

$$(III . 4) \quad - \text{Réciprocité } A(\rho) = \int_0^{\infty} \hat{A}(r) J_0(2\pi\rho r) 2\pi r dr$$

$$(III . 5) \quad - \text{Produit scalaire } \int_0^{\infty} A(\rho) B(\rho) 2\pi\rho d\rho = \int_0^{\infty} \hat{A}(r) \hat{B}(r) 2\pi r dr$$

* Ce sont les fonctions qui ne présentent pas de discontinuité sur le pourtour du rectangle de côté $2a, 2b$.

La fonction radiale est un cas particulier des fonctions à 2 dimensions. Lorsque la transformée de Hankel d'une fonction radiale a un support borné, celui-ci est un disque de rayon a qui s'inscrit dans le carré de côté $2a$. Dans le cas général, cette fonction ne s'annule pas sur les bords du disque. La fonction $\hat{f}_{2a}(\mu, \nu)$, égale à $\hat{A}(r)$ sur le disque de rayon a , et prolongée par des parties nulles sur le carré de côté $2a$, présente donc une discontinuité sur le pourtour de ce cercle de rayon a . On peut affirmer, à la lumière des remarques du paragraphe précédent, que la fonction $f(x, y)$ ne sera pas approchée correctement à l'aide d'un nombre limité de termes $\text{sinc}(x - nh)/h \cdot \text{sinc}(y - mk)/h'$.

3.2) Développement de $\hat{A}(r)$ en série de Dini-Bessel

On obtient un meilleur résultat si l'on tient compte de la symétrie circulaire des fonctions $A(\rho)$ et $\hat{A}(r)$. Ceci peut se faire en utilisant la décomposition de $\hat{A}(r)$ sur le disque de rayon a , à l'aide des fonctions de base $J_0(\lambda_p \frac{r}{a})^*$ introduites par B. Dossmer [1954]. Ces bases, dites de Dini - Bessel, forment un système qui possède les propriétés suivantes :

a) il est orthogonal relativement à r sur l'intervalle $0 \leq |r| \leq a$

$$(III . 6) \quad \int_0^a J_0(\lambda_p \frac{r}{a}) J_0(\lambda_q \frac{r}{a}) 2\pi r dr = 0 \quad \text{si } \lambda_p \neq \lambda_q$$

Le système associé formé par les fonctions de base $\varphi_p(\rho)$, T.H. de $J_0(\lambda_p \frac{r}{a})$ est orthogonal relativement à r sur l'intervalle $0 < |\rho| < \infty$ (par suite de III . 5) .

$$\int_0^\infty \varphi_p(\rho) \varphi_q(\rho) 2\pi \rho d\rho = 0 \quad \text{si } p \neq q$$

avec
$$\varphi_p(a, \rho) = \int_0^a J_0(\lambda_p \frac{r}{a}) J_0(2\pi \rho r) 2\pi r dr$$

* λ_p représente les racines positives ou nulles de $J_1(u) = 0$

$$(III . 7) \quad \varphi_p(a, \rho) = 2\pi a^2 J_0(\lambda_p) \frac{(2\pi\rho)^2}{(2\pi\rho)^2 - \left(\frac{\lambda_p}{a}\right)^2} \cdot \frac{J_1(2\pi\rho a)}{2\pi\rho a}$$

b) il peut être normé. En effet, (A. Angot, [1961])

$$(III . 8) \quad \int_0^a J_0\left(\lambda_p \frac{r}{a}\right) J_0\left(\lambda_p \frac{r}{a}\right) 2\pi r dr = \pi a^2 J_0^2(\lambda_p)$$

c) Il est complet sur l'intervalle $0 \leq r \leq a$: Toute fonction $\hat{A}(r)$ peut être approchée en moyenne sur le disque de rayon a à l'aide d'une combi-

naison linéaire $\hat{A}_N(r) = \sum_{p=0}^N a_p J_0\left(\lambda_p \frac{r}{a}\right)$ des fonctions de bases $J_0\left(\lambda_p \frac{r}{a}\right)$.

La série $\hat{A}_N(r)$ ainsi obtenue converge uniformément, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers $\hat{A}(r)$ sous certaines conditions signalées par G.N. Watson (Watson, [1922]) : celles-ci sont semblables aux conditions de convergence du développement en série de Fourier d'une fonction. En effet, $\hat{A}_N(r)$ converge, en tout point de l'intervalle $0 \leq r \leq a$, vers $(\hat{A}(r-0) + \hat{A}(r+0))/2$ pourvu que :

1) $\hat{A}(r)$ soit à variations bornées et que $\int_0^a \hat{A}(r) \sqrt{r} dr$ existe

2) $\hat{A}(r)$ n'admette que des points de discontinuité de première espèce.

3.3) Expression du théorème d'échantillonnage .

Dans ces conditions, on peut poser :

$$(III . 9) \quad \hat{A}(r) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p J_0\left(\lambda_p \frac{r}{a}\right) ,$$

Expression dans laquelle les " c_p " sont précisément les coefficients qui, pour un nombre donné N de bases, rendent minimum la quantité

$$(c_0, c_1, \dots, c_N) = \int_0^a (\hat{A}(r) - \hat{A}_N(r))^2 2\pi r dr$$

Ces coefficients ont déjà fait l'objet de calculs (B. Roizen - Dossier, [1956]) dont nous donnons ici le résultat :

$$c_p = \frac{A\left(\frac{\lambda_p}{2\pi a}\right)}{\pi a^2 J_0^2(\lambda_p)}$$

Portons la valeur de ces coefficients dans $\hat{A}(r)$, il vient :

$$\hat{A}(r) = \sum_{p=0}^{\infty} A\left(\frac{\lambda_p}{2\pi a}\right) \frac{1}{\pi a^2 J_0^2(\lambda_p)} J_0\left(\lambda_p \frac{r}{a}\right)$$

Il est alors facile de calculer la T.H. de $\hat{A}(r)$,

$$A(\rho) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \varphi_p(a, \rho),$$

soit en posant : $\Psi_p(a, \rho) = \frac{1}{\pi a^2 J_0^2(\lambda_p)} \varphi_p(a, \rho)$,

il vient :

$$(III . 10) \quad A(\rho) = \sum_{p=0}^{\infty} A\left(\frac{\lambda_p}{2\pi a}\right) \Psi_p(a, \rho)$$

La fonction $A(\rho)$ peut donc être calculée en tout point ρ à partir de la suite infinie mais discrète des valeurs $A(\lambda_p/2\pi a)$ et des bases associées $\Psi_p(a, \rho)$.

3.4. Généralisation

Nous pouvons généraliser ce résultat en considérant la fonction $\hat{A}_b(r)$ égale à $\hat{A}(r)$ sur le disque de rayon a et nulle pour $a < r < b$. Si $\hat{A}(r)$ ne s'annule pas pour $r = a$, $\hat{A}_b(r)$ présente une discontinuité en ce point.

Le développement :

$$\hat{A}_{N,b}(r) = \sum_{p=0}^N c'_p J_0\left(\lambda_p \frac{r}{b}\right).$$

avec :

$$c'_p = \frac{A_b\left(\frac{\lambda_p}{2\pi b}\right)}{\pi b^2 J_0^2(\lambda_p)}$$

converge, lorsque $N \rightarrow \infty$ vers $\hat{A}_b(r)$ presque partout sauf au point $r = a$. Cependant, les T.F. de ces deux fonctions $A_{b,N}(\rho)$ et $A(\rho) = A_b(\rho)$, sont deux fonctions continues et la convergence est uniforme en tout point.

Nous avons donc :

$$A(\rho) = A_b(\rho) = \sum_{p=0}^{\infty} A\left(\frac{\lambda_p}{2\pi b}\right) \Psi_p(b, \rho)$$

En conclusion, tout échantillonnage plus serré de $A(\rho)$, par exemple aux points $\frac{\lambda_p}{2b\pi} < \frac{\lambda_p}{2a\pi}$, conjugué à l'emploi des bases correspondantes $\Psi_p(b, \rho)$, fournit une série à nombre infini de termes dont la somme représente toujours exactement $A(\rho)$.

Lorsqu'on ne conserve qu'un nombre fini N de termes, il est évident que tous les échantillonnages ne sont pas équivalents et que la meilleure représentation de $A(\rho)$ est donnée par

$$(III.11) \quad A_N(\rho) = \sum_{p=0}^N A\left(\frac{\lambda_p}{2a\pi}\right) \Psi_p(a, \rho).$$

Les fonctions de bases $J_0\left(\lambda_p \frac{r}{a}\right)$ utilisées, dans ce cas, pour développer $\hat{A}(r)$, et le domaine (disque de rayon a) sur lequel elles sont utilisées, sont en effet particulièrement bien adaptés au problème. Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans le cas unidimensionnel permet de s'en convaincre.

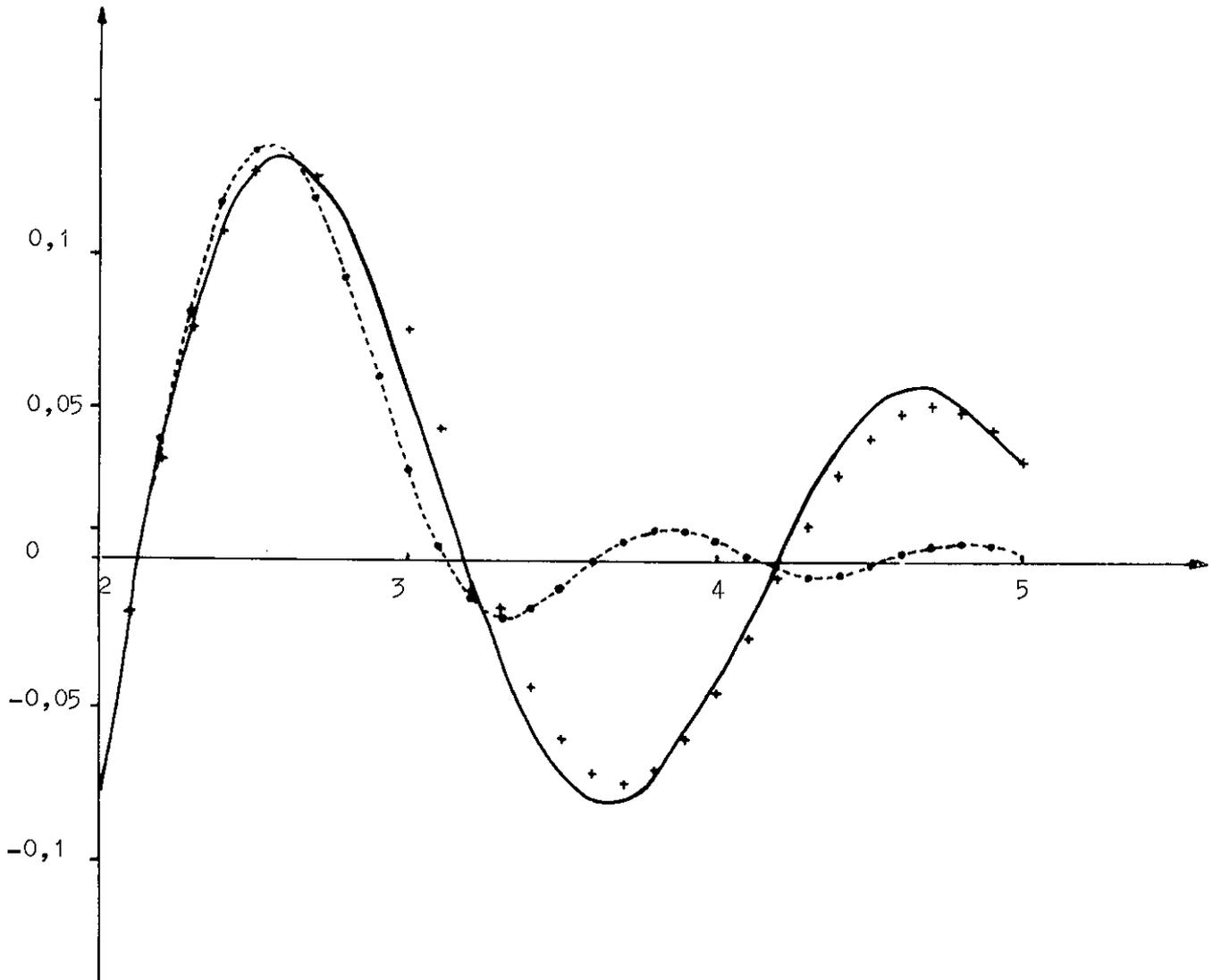


figure 10

- en traits pleins : $A(\rho) = \left[\frac{J_1(\pi\rho)}{\pi\rho} - 2 \frac{J_2(\pi\rho)}{(\pi\rho)^2} \right] / A(0)$, pour ρ variant de 2 à 5 ;

- en traits pointillés , $A_N(\rho) = \sum_0^5 A(\lambda_p/2\pi) \cdot \Psi_p(1, \rho) / A(0)$;

- les '+' correspondent aux valeurs de la fonction :

$$A_M(\rho) = \sum_0^2 A(\lambda_p/\pi) \cdot \Psi_p(0,5, \rho) / A(0) .$$

3.5) Vérification

Nous avons voulu représenter de deux façons [cf. figure 10] différentes la fonction :

$$A(\rho) = \left(\frac{J_1(\pi\rho)}{\pi\rho} - 2 \frac{J_2(\pi\rho)}{(\pi\rho)^2} \right)$$

dont la T.H. :

$$\hat{A}(r) = \frac{2}{\pi} - \frac{2(1-4r^2)}{\pi} \quad \text{est identiquement nulle pour } |r| > \frac{1}{2}.$$

Nous fixons l'abscisse de coupure, que nous prenons voisine de $\rho_c = \pi$.

La première représentation est obtenue à l'aide de 3 termes

$\Psi_p(a, \rho)$ avec $a = 0.5$. Elle correspond à une abscisse de coupure $\rho_c = \frac{\lambda_3}{\pi} = 3.23$.

Notons tout de suite que l'écart entre deux valeurs de λ_p consécutives tend vers π lorsque p croît. L'échantillonnage de $A(\rho)$ est donc effectué à un pas de l'ordre de 1.

La seconde représentation est obtenue à l'aide de 6 termes

$\Psi_p(b, \rho)$ avec $b = 1$. L'échantillonnage est donc effectué à un pas de l'ordre de 0.5 et l'abscisse de coupure de $A(\rho)$ est égale à $\rho_c = \frac{\lambda_6}{2\pi} = 3.12$.

Notons que les écarts de la seconde représentation avec $A(\rho)$ sont, malgré un nombre de termes deux fois plus grand, supérieurs aux écarts obtenus à l'aide de la 1^{re} représentation. Cette dernière représentation reste toujours de l'ordre de $A(\rho)$.

47 - CONCLUSION -

Les conclusions du premier chapitre peuvent s'appliquer ici encore. Nous pouvons affirmer que :

- Il existe une infinité de développements en série susceptibles de représenter une fonction radiale $A(\rho)$. Tant qu'on ne les limite pas à un nombre fini de termes, ces développements sont équivalents et égaux à $A(\rho)$.

- Ne conserver qu'un nombre fini de termes revient à remplacer $\hat{A}(r)$ par différentes approximations, dont la qualité dépend des bases utilisées. Ces bases diffèrent entre elles par la valeur de b , c'est-à-dire par l'abscisse des points d'échantillonnage $\lambda_p/2b\pi$. Pour une abscisse de coupure donnée, les meilleurs résultats s'obtiennent avec $b = a$ (échantillonnage non serré).

CHAPITRE IV

PRODUIT DE CONVOLUTION NUMERIQUE DE DEUX FONCTIONS DONT LA T.F. EST A SUPPORT BORNE
CAS BI-DIMENSIONNEL

1 - EXPRESSION NUMERIQUE - CAS DES FONCTIONS QUELCONQUES -

La généralisation du cas unidimensionnel est immédiate lorsque $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont deux fonctions quelconques réelles à support borné. Il suffit en effet dans l'expression analytique de leur produit de convolution

$$\varphi(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y') g(x-x',y-y') dx' dy'$$

de remplacer $f(x',y')$ par son développement à l'aide des bases :

$$\text{sinc}(x' - ph)/h \cdot \text{sinc}(y - qh')/h'$$

Il vient alors :

$$(IV.1) \quad \varphi(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} hh' f(ph,qh') g(x-ph,y-qh') .$$

Lorsque nous effectuons numériquement ce produit de convolution, nous limitons cette série à ses premiers termes et nous obtenons l'approximation $\varphi_{N,M}(x,y)$ de $\varphi(x,y)$:

$$(IV.2) \quad \varphi_{N,M}(x,y) = \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-m}^m hh' f(ph,qh') g(x-ph,y-qh') ;$$

nous pouvons transposer immédiatement ici les conclusions que nous avons développées dans le chapitre II.

2 - CAS DES FONCTIONS RADIALES -

2.1) Exposé du problème

Nous nous proposons de calculer

$$C(\rho) = A(\rho) * B(\rho) ,$$

lorsque A et B sont des fonctions radiales. Cette écriture simplifiée recouvre en fait l'intégrale double

$$\varphi(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y') g(x-x',y-y') dx' dy'$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x,y) \rightarrow C(\rho) \\ f(x,y) \rightarrow A(\rho) \\ g(x,y) \rightarrow B(\rho) \end{array} \right. , \text{ par passage en coordonnées polaires.}$$

La T.H. $\hat{C}(r)$ de $\hat{C}(\rho)$ est le produit des T.H. $\hat{A}(r)$ et $\hat{B}(r)$ et l'on peut écrire indifféremment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}(r) = \hat{A}(r) * \hat{B}(r) \\ \hat{\varphi}(\mu,\nu) = \hat{f}(\mu,\nu) \times \hat{g}(\mu,\nu) \end{array} \right.$$

Nous allons d'abord établir qu'il est possible d'obtenir une bonne approximation du produit $\varphi(x,y)$ par la série $\varphi_{N,M}(x,y)$, (IV.2), lorsque les domaines des fonctions $\hat{A}(r)$ et $\hat{B}(r)$ sont respectivement le disque de rayon a et le disque de rayon b, $a \neq b$. Pour cela, il est nécessaire de choisir convenablement la fonction à échantillonner.

Nous nous placerons ensuite dans le cas particulier où $a = b$. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser le développement de l'une ou des 2 fonctions en série de Dini-Bessel, pour obtenir un meilleur résultat.

2.2) Cas $a \neq b$

(par exemple $a > b$) .

On peut considérer que $A(\rho)$ et $B(\rho)$ sont des fonctions à deux dimensions quelconques puis calculer l'expression :

$$\varphi_{N,M}(x,y) = \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-m}^m h \cdot h' f(ph, qh') g(x - ph, y - qh')$$

soit
$$\hat{\varphi}_{N,M}(\mu, \nu) = \hat{f}_{N,M}(\mu, \nu) \times \hat{g}(\mu, \nu)$$

$\hat{\varphi}_{N,M}(\mu, \nu)$ représente donc le produit de $\hat{g}(\mu, \nu)$ par l'approximation à $NM - 1$ termes de $\hat{f}(\mu, \nu)$ sur le rectangle de côté $1/h, 1/h'$. Comme $\hat{f}(\mu, \nu)$ n'occupe sur ce rectangle que le disque de rayon a , on peut s'attendre à ce qu'une expression correcte de $\varphi(x, y)$ nécessite un grand nombre de termes.

Toutefois, seule importe la qualité de l'approximation de $\hat{f}(\mu, \nu)$ sur le disque de rayon b , domaine de $\hat{g}(\mu, \nu)$ (figure 11). Or l'approximation de $\hat{f}(\mu, \nu)$ est surtout mauvaise au voisinage de la discontinuité formée par le cercle de rayon a , région où $\hat{f}(\mu, \nu)$ présente de fortes oscillations. Si l'on a pris soin, comme ici, d'échantillonner la fonction dont la T.F. possède le plus grand domaine, ces oscillations se répercutent peu sur le produit

$$\hat{\varphi}(\mu, \nu) = \hat{f}(\mu, \nu) \times \hat{g}(\mu, \nu)$$

et les résultats peuvent être corrects pour un nombre restreint de termes.

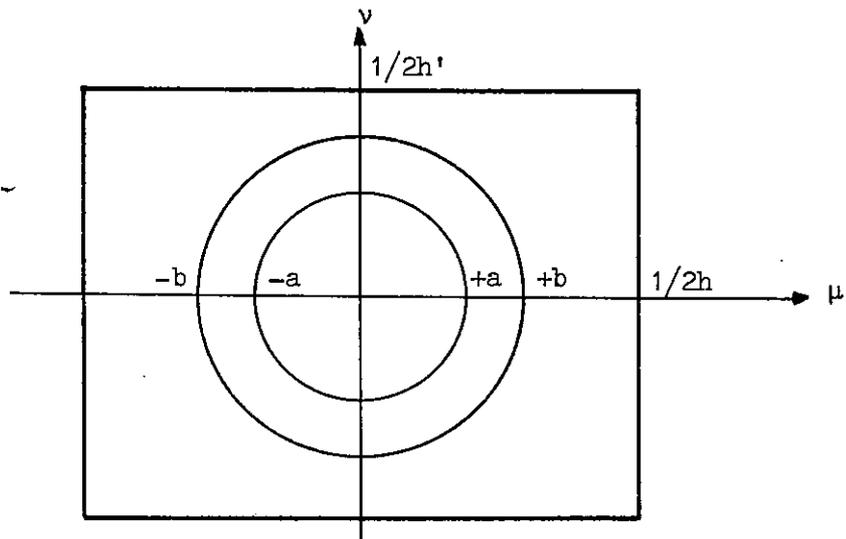


Figure 11

A titre d'exemple nous avons effectué le produit de convolution

$$C(\rho) = A(\rho) * B(\rho) \text{ avec ;}$$

$$A(\rho) = \pi \frac{J_1(2\pi\rho)}{2\pi\rho} \quad ,$$

et

$$B(\rho) = \pi \frac{J_1(\pi\rho)}{\pi\rho} \quad ;$$

soit

$$: \quad f(x,y) = \pi \frac{J_1(2\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}}$$

et

$$: \quad g(x,y) = \pi \frac{J_1(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \quad .$$

Les T.H. de ces fonctions sont :

$$\hat{A}(r) = 1 \quad \text{sur le disque de rayon } 2$$

$$\hat{B}(r) = 1 \quad \text{sur le disque de rayon } 1 \quad .$$

On a donc :

$$\hat{C}(r) = \hat{A}(r) \times \hat{B}(r) = \hat{B}(r) \quad ,$$

ce qui nous conduit au résultat : $C(\rho) = B(\rho)$

Le calcul numérique de ce produit de convolution n'offre donc aucun intérêt propre mais constitue un test des propriétés énoncées ; nous l'avons effectué de deux façons différentes :

a) en échantillonnant la fonction $f(x,y)$ ($A(\rho)$) au points $x = ph, y = qh$ ($h = 0.5$) avec $N = M = 5$. Nous obtenons une première approximation $\varphi_1(x,y)$;

b) en échantillonnant la fonction $g(x,y)$ aux mêmes points pour le même nombre de termes : nous obtenons l'approximation $\varphi_2(x,y)$.

Pour un nombre de termes relativement faible (26), le tableau 1 donne les valeurs $\varphi(x,x)$, $\varphi_1(x,x)$, $\varphi_2(x,x)$, pour x variant de 0 à 3 . On voit que l'approximation $\varphi_1(x,x)$ est dans l'ensemble meilleure que $\varphi_2(x,x)$.

x	$\varphi_2(x, x)$	$\varphi_1(x, x)$	$\varphi(x, x)$
0.	1.	1.	1.
0.2	0.90602	0.90530	0.9044
0.4	0.660	0.656	0.653
0.6	0.3486	0.3407	0.3390
0.8	0.07005	0.0619	0.0644
1.	- 0.0968	- 0.1073	- 0.0968
1.2	- 0.128803	- 0.14914	- 0.1298
1.4	- 0.0735	- 0.0985	- 0.0733
1.6	- 0.0158	- 0.0173	0.0077
1.8	0.0034	0.0398	0.0585
2.	- 0.0001	0.0492	0.0578
2.2	0.000587	- 0.0150	- 0.0215
2.4	0.000483	- 0.0332	- 0.0393
2.6	- 0.00038	- 0.0251	- 0.0281
2.8	0.00005	- 0.0013	0.00016
3.	0.00016	0.019	0.023

TABLEAU 1

2.3) Application du développement des fonctions radiales en série de Dini-Bessel : cas $a = b$

Nous avons rappelé dans le chapitre précédent le développement des fonctions radiales en série de Dini-Bessel. Nous nous proposons à présent d'effectuer le produit de convolution $C(\rho)$ en utilisant les propriétés de ces développements.

Nous posons $a = b = 1$, les autres cas se ramenant à celui-ci par simple contraction d'abscisse. Nous choisissons de développer $A(r)$ suivant les fonctions de base $J_0(\lambda_p r)$ et nous limitons la série à ses $(N + 1)$ premiers termes,

$$\text{soit : } \hat{A}_N(r) = \sum_{p=0}^N c_p J_0(\lambda_p r), \quad c_p = A\left(\frac{\lambda_p}{2\pi}\right) \frac{1}{\pi J_0^2(\lambda_p)} ;$$

nous obtenons une approximation $C_N(\rho)$ de $C(\rho)$:

$$C(\rho) \cong C_N(\rho) = \int_0^1 \hat{A}_N(r) \hat{B}(r) J_0(2\pi r \rho) 2\pi r dr$$

$C_N(\rho)$ étant une fonction dont la T.H. $\hat{C}_N(r)$ est une fonction à support borné, il importe seulement de calculer ses valeurs aux points $\lambda_k/2\pi$. En effet (d'après III.11) :

$$(IV.3) \quad C(\rho) \cong C_N(\rho) \cong C_{N,K}(\rho) = \sum_{k=0}^K C_N\left(\frac{\lambda_k}{2\pi}\right) \Psi_k(1, \rho) .$$

Aux points $\lambda_k/2\pi$, $C_N(\rho)$ prend la valeur :

$$C_N\left(\frac{\lambda_k}{2\pi}\right) = \int_0^1 \hat{A}_N(r) \hat{B}(r) J_0(\lambda_k r) 2\pi r dr ,$$

soit :

$$(IV.4) \quad C_N\left(\frac{\lambda_k}{2\pi}\right) = \int_0^1 \hat{B}(r) \sum_{p=0}^N c_p J_0(\lambda_p r) J_0(\lambda_k r) 2\pi r dr$$

Or, sur le domaine $[0,1]$, les fonctions $J_0(\lambda_p r)$, $J_0(\lambda_k r)$ sont aussi des fonctions radiales. Leur produit peut aussi se développer en série de Dini-Bessel :

$$J_0(\lambda_p r) J_0(\lambda_k r) = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_{pkq} J_0(\lambda_q r) .$$

Ces coefficients β_{pkq} peuvent être calculés une fois pour toutes et faire l'objet d'une table (cf. Appendice 1). En fait pour p et k donnés, les β_{pkq} sont pratiquement nuls pour q inférieur à une valeur minimum q_1 , et pour q supérieur à une valeur maximum q_2 . Nous pouvons donc écrire :

$$J_0(\lambda_p r) \cdot J_0(\lambda_k r) = \sum_{q=q_1(p,k)}^{q_2(p,k)} \beta_{pkq} J_0(\lambda_q r) .$$

Il vient en reportant ce développement dans l'expression (IV.4) :

$$c_N\left(\frac{\lambda_k}{2\pi}\right) = \sum_{p=0}^N c_p \int_0^{\hat{B}(r)} \sum_{q=q_1(p,k)}^{q_2(p,k)} \beta_{pkq} J_0(\lambda_q r) 2\pi r dr ,$$

soit :

$$c_N\left(\frac{\lambda_k}{2\pi}\right) = \sum_{p=0}^N c_p \sum_{q=q_1(p,k)}^{q_2(p,k)} \beta_{pkq} B\left(\frac{\lambda_k}{2\pi}\right) .$$

Et finalement, d'après (IV.3) :

$$(IV.5) \quad c(\rho) = \sum_{k=0}^K \sum_{p=0}^N \frac{1}{\pi J_0^2(\lambda_p)} \frac{1}{\pi J_0^2(\lambda_k)} A\left(\frac{\lambda_p}{2\pi}\right) B\left(\frac{\lambda_k}{2\pi}\right) \sum_{q=q_1(p,k)}^{q_2(p,k)} \beta_{pkq} \varphi_q(1, \rho)$$

Application numérique

Nous avons utilisé l'expression (IV.5) pour calculer le produit de convolution des fonctions $A(\rho)$ et $B(\rho)$ avec :

$$A(\rho) = \frac{J_1(\pi\rho)}{\pi\rho} = 2 \frac{J_2(\pi\rho)}{(\pi\rho)^2} = B(\rho) .$$

Ces fonctions possèdent une T.H. nulle à l'extérieur du disque de rayon $\frac{1}{2}$.

$$\hat{A}(r) = \hat{B}(r) = \frac{2}{\pi} [1 - (1 - 4 r^2)]$$

soit $\hat{C}(r) = \hat{A}(r) \cdot \hat{B}(r) = \frac{4}{\pi^2} [1 - 2(1 - 4 r^2) + (1 - 4 r^2)^2]$

les T.H. des fonctions $(1 - 4 r^2)^n$ sont connues analytiquement (cf. P. Jacquinet - B. Roizen-Dossier, [1964]). On peut donc calculer leur produit de convolution exact :

$$C(\rho) = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{J_1(\pi\rho)}{\pi\rho} - 2\pi \frac{J_2(\pi\rho)}{(\pi\rho)^2} + 4\pi \frac{J_3(\pi\rho)}{(\pi\rho)^3} \right) .$$

Nous avons reporté sur le tableau 2 l'expression analytique de $C(\rho)/C(0)$ et l'expression numérique obtenue par (IV.5) : $C_N(\rho)/C_N(0)$. Pour un nombre de termes relativement faible ($N = 6$), on obtient une approximation correcte de l'expression analytique.

ρ	$C(\rho)/C(0)$	$C_N(\rho)/C_N(0)$
0.	1	1
0.2	0.931	0.927
0.4	0.740	0.726
0.6	0.467	0.442
0.8	0.170	0.139
1.	- 0.09	- 0.112
1.2	- 0.267	- 0.289
1.4	- 0.339	- 0.344
1.6	- 0.311	- 0.293
1.8	- 0.207	- 0.170
2.	- 0.06	- 0.02

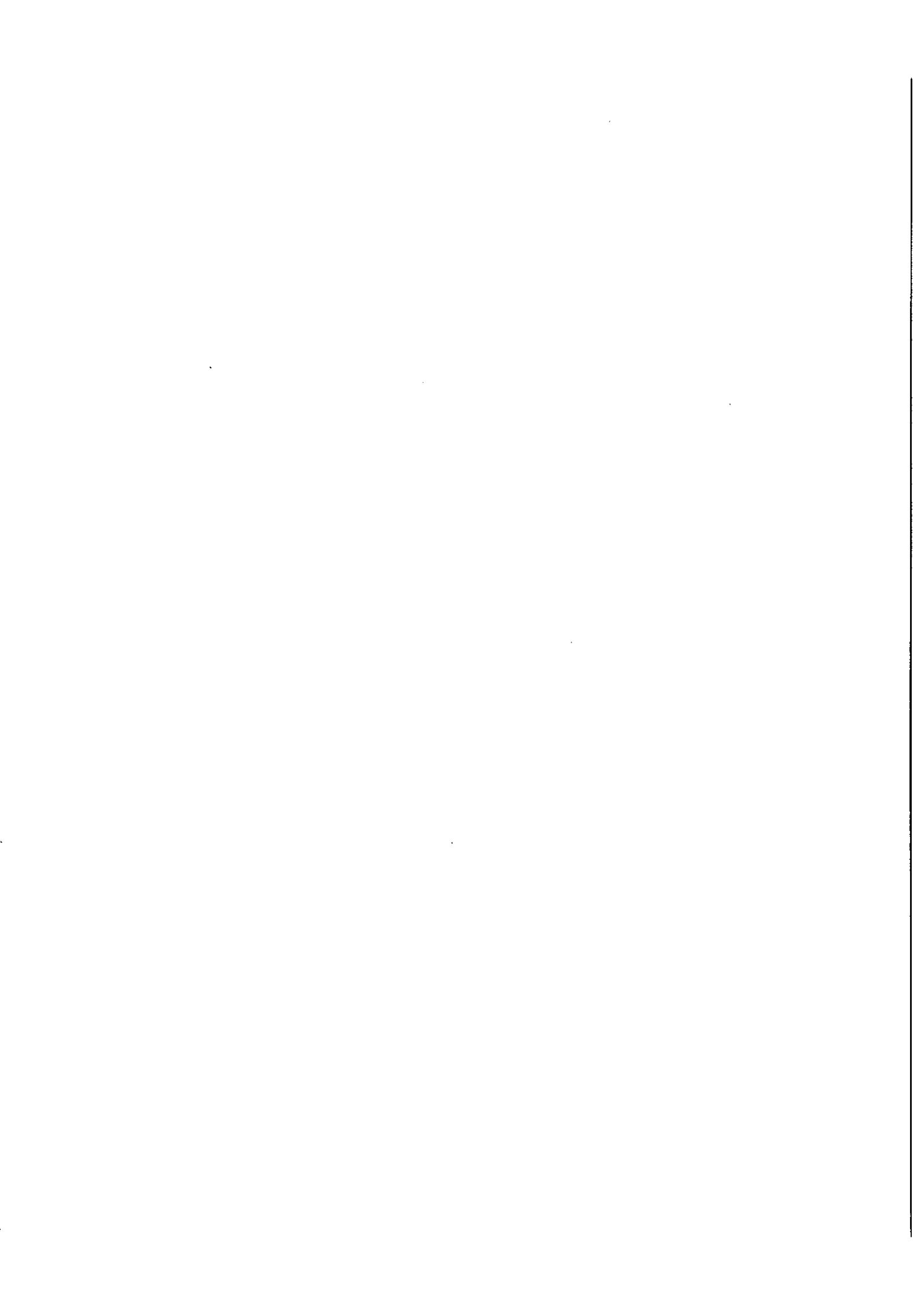
Tableau 2

45

45

DEUXIEME PARTIE

LE TRAITEMENT DES ENREGISTREMENTS



CHAPITRE V

INTRODUCTION

1 - EXPOSE DU PROBLEME -

L'expérimentateur qui veut observer un objet $b(x)$ n'a en général pas accès directement à celui-ci. Il passe par l'intermédiaire d'un enregistrement. Nous étudions le cas où le signal $b(x)$, unidimensionnel, est lié à son enregistrement $i(x)$ par l'équation de convolution

$$i(x) = b(x) * f(x).$$

Ce cas est idéal car un enregistrement n'est jamais parfait : il est entaché d'un certain bruit. Nous supposons que le bruit est un bruit additif et nous serons amenés à considérer une relation de la forme :

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x) = i(x) + n(x)$$

- $f(x)$ est une fonction que nous appellerons réponse impulsionnelle: ce peut être la "fonction d'appareil" de l'appareil enregistreur.

D'une façon générale, $f(x)$ peut être le produit de convolution de plusieurs fonctions:

$$f = f_1 * f_2 * f_3 \dots$$

Dans le cas d'un spectre de raies par exemple, nous désignons par f_1 la fonction d'appareil avec laquelle ce spectre a été enregistré, f_2 la fonction profil d'une raie, f_3 l'élargissement dû à l'effet Doppler...

- $b(x)$ peut, suivant les cas, représenter un signal continu ou bien une série de pics de Dirac.

Nous nous plaçons dans les conditions suivantes :

- $b(x)$, fonction signal inconnue, est une fonction à support borné.
 Sa T.F. $\hat{b}(\mu)$ [figure 12] peut s'étendre sur un domaine illimité (cas où $b(x)$ représente une série de pics de Dirac par exemple).

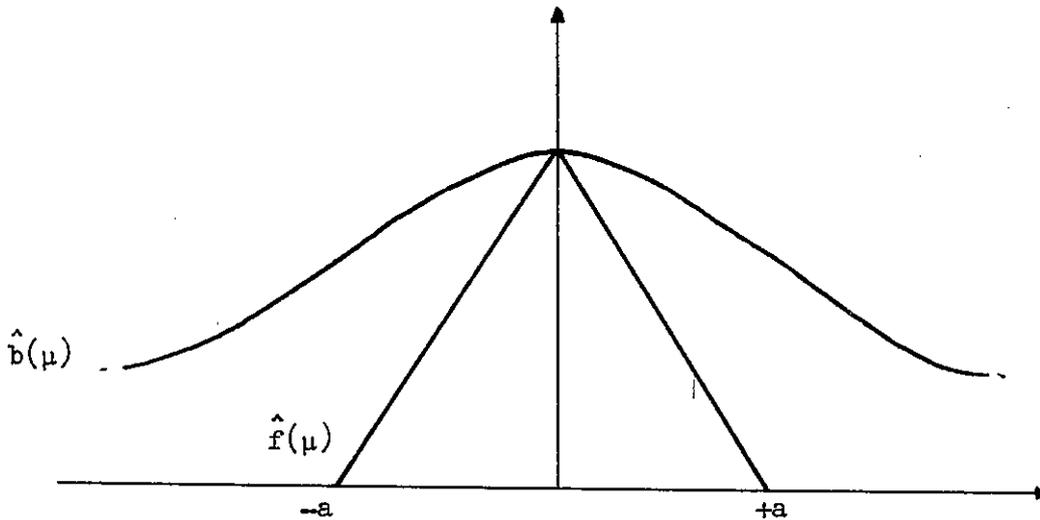


figure 12

- $\hat{f}(\mu)$, T.F. de $f(x)$, est une fonction à support borné. Elle est nulle ou négligeable à l'extérieur du domaine $|\mu| \gg a$ (domaine que nous noterons A). $\hat{f}(\mu)$ supprime toutes les fréquences de $b(x)$ supérieures à a , dite fréquence de coupure ; elle agit à la manière d'un filtre passe-bas.

Le but d'un véritable traitement de l'enregistrement est de synthétiser l'ensemble des informations que l'on possède sur $b(x)$ pour reconstituer le mieux possible ce signal. Or, ces informations sont de deux ordres :

- d'une part, nous possédons $e(x)$ qui est une certaine "représentation" de $b(x)$

- d'autre part, nous avons souvent, a priori, certaines informations sur $b(x)$; ces informations peuvent être particulièrement précises [$b(x)$ est formé d'un nombre donné de pics de Dirac, $b(x)$ est un profil de Voigt... etc]. Toutefois, très souvent elles ont un caractère beaucoup plus vague

(par exemple, $b(x)$ est une répartition d'énergie, donc une fonction non négative).

La plupart des auteurs ont toujours négligé ce dernier type d'information. Nous étudierons (chapitre VII) leur importance et nous montrerons que la prise en considération de toutes les informations permet une meilleure reconstitution du signal. Nous proposerons donc (chapitre IX) une méthode originale de restitution partielle de $b(x)$ par synthèse de toutes les informations. Auparavant, nous rappellerons la méthode classique du traitement d'un enregistrement par convolution ; cette opération, nous le verrons, revient à pondérer, par une fonction autre que $\hat{f}(\mu)$, les fréquences $\hat{b}(\mu)$ sur l'intervalle $[-a, +a]$. Certaines caractéristiques du signal $b(x)$ peuvent ainsi être mises en évidence. (chapitre VI).

Puis nous chercherons à résoudre l'équation de convolution. Nous montrerons qu'une restitution exacte du signal par des méthodes numériques n'est en général pas possible ; nous exposerons le principe des principales méthodes de déconvolution que nous connaissons à ce jour et nous montrerons pourquoi celles-ci ne nous satisfont pas. (chapitre VIII).

Nous proposons d'exposer ensuite le principe de la restitution partielle de l'objet par synthèse de toutes les informations en notre possession. (Nous étudierons en particulier des informations de caractère très général). (chapitre IX).

Nous montrerons enfin comment l'utilisation d'informations plus précises peut permettre la reconstitution complète de l'objet : ces derniers problèmes sont groupés sous le nom de "décomposition". (chapitre XI).

Nous montrerons dans un dernier chapitre comment ces mêmes informations peuvent être utilisées en vue d'un filtrage non linéaire effectué a posteriori sur l'enregistrement. (chapitre XII).

Toutes ces études font appel au calcul numérique et ont pour point de départ un échantillonnage des fonctions $e(x)$, $f(x)$, $b(x)$. Aussi utiliserons nous les résultats établis dans la première partie pour éclairer et justifier nos procédés de calcul.

CHAPITRE VI

LES CORRECTIONS PAR CONVOLUTION

1 - INTRODUCTION -

1.1) Nous groupons sous le nom de corrections par convolution les traitements qui consistent à convoluer l'enregistrement $e(x)$ par une fonction $c(x)$ choisie en fonction de la correction à effectuer : filtrage, apodisation ou super-résolution. On obtient alors un enregistrement corrigé $e'(x)$:

$$e'(x) = e(x) * c(x) = [i(x) + n(x)] * c(x) .$$

Parce que l'opérateur convolution est associatif, on peut écrire ;

$$\begin{aligned} e'(x) &= i(x) * c(x) + n(x) * c(x), \\ e'(x) &= b(x) * f(x) * c(x) + n(x) * c(x), \\ e'(x) &= b(x) * f'(x) + n'(x) = i'(x) + n'(x) . \end{aligned}$$

L'opération substitue donc à la fonction $f(x)$ une fonction

$$f'(x) = f(x) * c(x)$$

avec

$$\hat{f}'(\mu) = \hat{f}(\mu) \times \hat{c}(\mu).$$

Toute correction par convolution de $e(x)$ appelle les remarques suivantes :

$$1.2) \text{ la fonction } \hat{f}'(\mu) = \hat{f}(\mu) \times \hat{c}(\mu) ,$$

admet un support au plus égal à celui de $\hat{f}(\mu)$.

L'enregistrement $e'(x)$ ne peut donc contenir des fréquences supérieures à celles de $e(x)$.

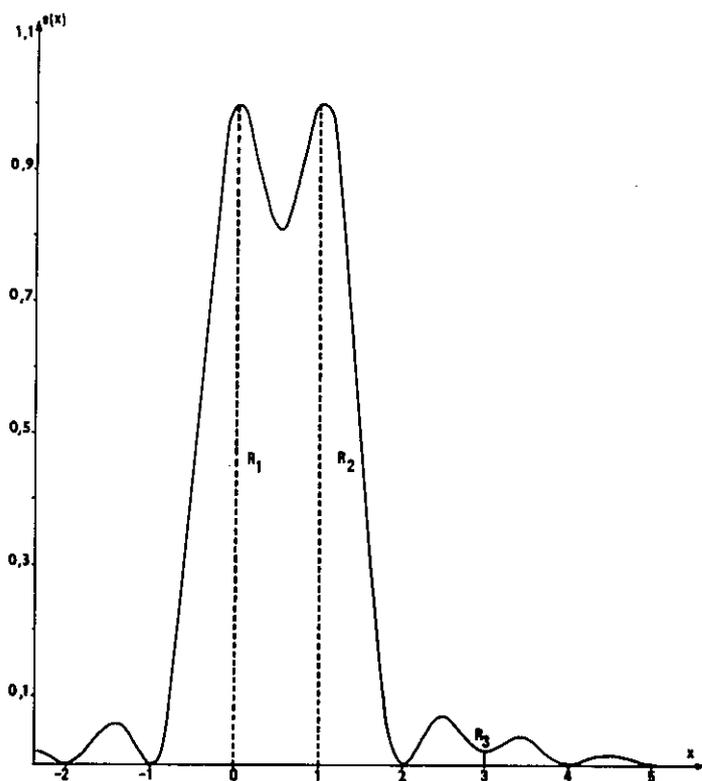


figure 13 :
enregistrement réalisé avec
 $f(x) = (\sin \pi x / \pi x)^2$

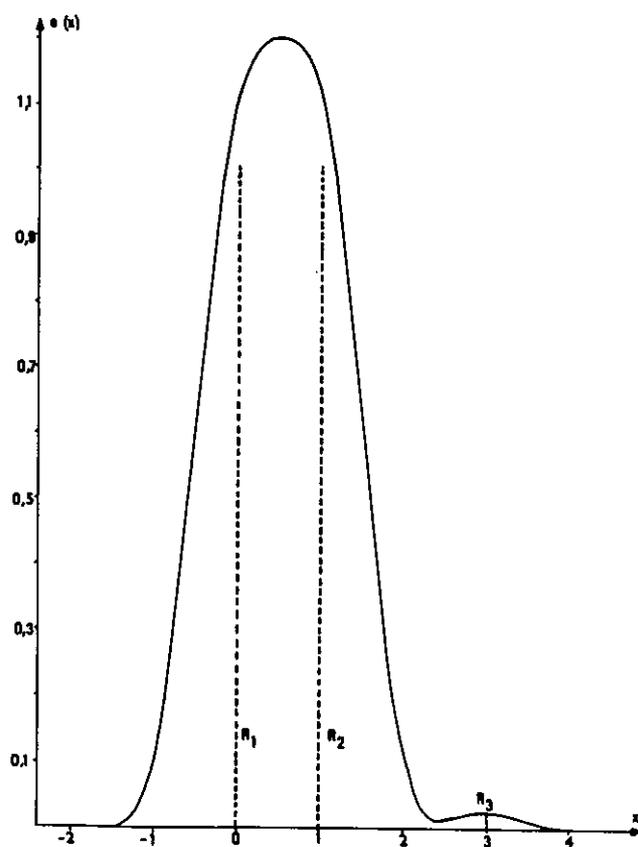


figure 14 :
enregistrement réalisé avec
 $f'(x)$, fonction "apodisée"

soit :
$$\varphi(\theta) = \overline{n(x) n^*(x - \theta)}$$

et la répartition spectrale de l'énergie de $n(x)$ est définie par $\hat{\varphi}(\mu)$, T.F. de $\varphi(\theta)$.

L'étude de $n'(x) = n(x) * c(x)$ est désormais classique (Arsac [1961], Angot [1961]) et nous ne rappelons ici que le résultat : si l'on effectue une convolution sur une fonction aléatoire $n(x)$, sa T.F. $\hat{n}(\mu)$ est multipliée par $\hat{c}(\mu)$, T.F. de la fonction correctrice $c(x)$. La répartition spectrale de l'énergie est, elle, multipliée par $|\hat{c}(\mu)|^2$. Dans l'enregistrement corrigé $e'(x)$, on aura donc :

$$\varphi'(\theta) = \overline{n'(x) n'(x - \theta)}$$

avec :

$$\hat{\varphi}'(\mu) = \hat{\varphi}(\mu) \times |\hat{c}(\mu)|^2.$$

Soit : σ'^2 , la variance de la fonction $n'(x)$. Par définition :

$$\sigma'^2 = \varphi'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}'(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\mu) |\hat{c}(\mu)|^2 d\mu.$$

Lorsque la correction de l'enregistrement est effectuée numériquement au pas h , le résultat est immédiat (J. Connes [1961]) :

$$\begin{cases} \hat{c}(\mu) \text{ est remplacée par } \hat{c}(\mu) * R_{1/h}(\mu) \\ \hat{c}^2(\mu) \text{ est remplacée par } |\hat{c}(\mu) * R_{1/h}(\mu)|^2. \end{cases}$$

Or, pour $h < 1/2a$, ($2a$ domaine de $\hat{c}(\mu)$) :

$$|\hat{c}(\mu) * R_{1/h}(\mu)|^2 = |\hat{c}(\mu)|^2 * R_{1/h}(\mu).$$

Soit ,

$$\sigma''^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\mu) \cdot [\hat{c}^2(\mu) * R_{1/h}(\mu)] d\mu ;$$

$$\sigma''^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\mu) \hat{c}^2(\mu) d\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\mu) \hat{c}^2(\mu - 1/h) d\mu + \dots$$

Pour que σ''^2 soit de même grandeur que son premier terme σ'^2 , il est nécessaire de choisir h de façon que $\hat{\varphi}(\mu)$ soit négligeable sur les domaines $[n/h - a, nh + a]$ (figure 15), n variant de 1 à ∞ , soit : $h < 1/2 B$. Cette condition étant respectée, l'écart quadratique moyen du bruit dans l'enregistrement est :

$$\sigma''^2 = \sigma'^2 = \int_{-a}^{+a} \hat{\varphi}(\mu) \hat{c}^2(\mu) d\mu, \quad h < \frac{1}{2B}.$$

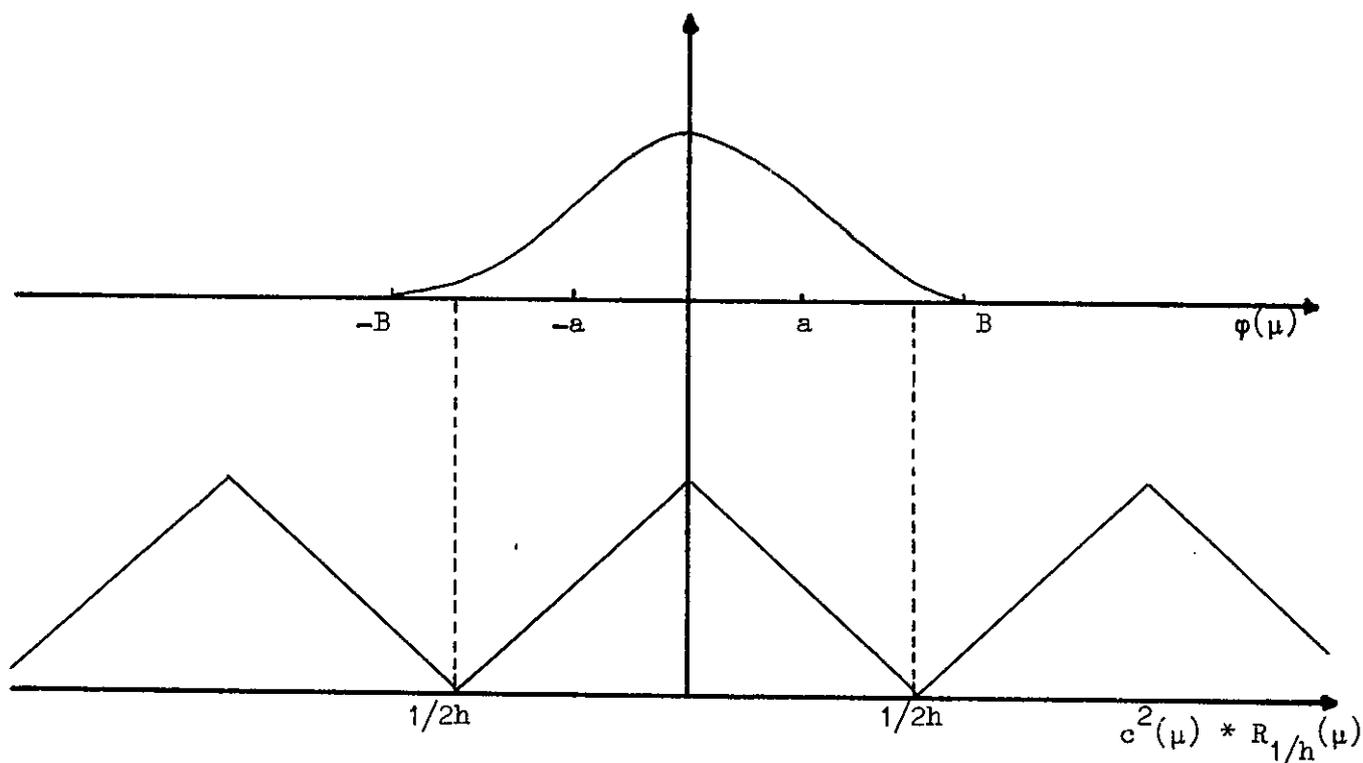


Figure 15

Choisir un tel pas permet en même temps de supprimer les fréquences de bruit supérieures à a . Cette correction (filtrage du bruit) présente d'ailleurs un intérêt en soi et peut s'effectuer indépendamment de toute autre correction (cf. § 3.2.3.).

2.1.2) Influence de la correction sur le signal enregistré.

L'intensité du signal enregistré $i(x)$ est, elle aussi, altérée par la correction. La nouvelle intensité au point $x = 0$ est donnée par :

$$i'(0) = (i(x) * c(x))_{x=0} = \int_{-a}^{+a} \hat{i}(\mu) \cdot \hat{c}(\mu) d\mu .$$

2.1.3) Etude du rapport (s/b) [signal/bruit].

Dans l'enregistrement $e(x)$ on peut définir le rapport (s/b) au point $x = 0$, par :

$$(s/b) = \frac{i(0)}{\sigma} = \frac{\int_{-a}^{+a} \hat{i}(\mu) d\mu}{\left[\int_{-B}^{+B} \hat{\varphi}(\mu) d\mu \right]^{\frac{1}{2}}} .$$

Dans l'enregistrement corrigé, il est défini par :

$$(s/b) = \frac{i(0)}{\sigma'} = \frac{\int_{-a}^{+a} (\hat{i}(\mu) \hat{c}(\mu)) d\mu}{\left[\int_{-a}^{+a} \hat{\varphi}(\mu) \hat{c}^2(\mu) d\mu \right]^{\frac{1}{2}}} .$$

L'altération du rapport signal/bruit dans l'enregistrement corrigé dépend donc de la forme de la fonction $\hat{c}(\mu)$. En général, une fonction dont l'amplitude décroît de 0 à a (fonction apodisante) altèrera moins de rapport qu'une fonction dont l'amplitude croît (fonction super-résolvante).

(cf. O. Robaux - B. Roizen-Dossier [1967]).

2.2) Etudions à présent le cas où $n(x)$ dépend de l'intensité du signal reçu (par exemple, bruit de photons d'un enregistrement réalisé dans le visible).

2.2.1) Influence de la correction sur $n(x)$.

En chaque point, $n(x)$ suit une loi aléatoire, de moyenne nulle, de variance proportionnelle à $i(x)$, de la forme :

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{i(x)}} e^{-\frac{x^2}{2i(x)}} .$$

La variable aléatoire $n'(x)$ est déterminée par la série :

$$n'(x) = \sum_{p=-m}^{+m} h c(ph) n(x - ph) .$$

Elle est constituée par la somme pondérée de plusieurs variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale. Elle suit également une loi normale de variance (Y.V. Linnik, [1963]) :

$$\sigma'^2(x) = \sum_{p=-m}^m h c^2(ph) n^2(x - ph)$$

soit :

$$\sigma'^2(x) = \sum_{p=-m}^n h c^2(ph) i(x - ph) .$$

Pour toute valeur de $h \ll 1/4a$ ($[-2a, +2a]$, domaine de $\hat{c}(\mu) * \hat{c}(\mu)$, T.F. de $c^2(x)$), il vient :

$$\sigma'^2(x) = \int_{-a}^{+a} \hat{i}(\mu) \cdot [\hat{c}(\mu) * \hat{c}(\mu)] \cos 2\pi\mu x \, d\mu .$$

2.2.2) Etude du rapport (s/b).

Dans l'enregistrement corrigé le rapport (s/b) au point x devient

$$(s/b)' = \frac{\int_{-a}^{+a} \hat{i}(\mu) \cdot \hat{c}(\mu) \cos 2\pi\mu x \, d\mu}{\left[\int_{-a}^{+a} \hat{i}(\mu) \cdot (\hat{c}(\mu) * \hat{c}(\mu)) \cos 2\pi\mu x \, d\mu \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Le niveau du bruit dépend ici du point de l'enregistrement où il est calculé. En pratique on peut remplacer $\hat{i}(\mu)$ par $\hat{e}(\mu)$ afin de calculer l'ordre de grandeur de $(s/b)'$ et vérifier ainsi que la fonction correctrice convient.

3 - CHOIX DES FONCTIONS CORRECTRICES -

Nous rappelons ici brièvement les principales corrections qui peuvent être effectuées par convolution :

3.1) Apodisation *

$f(x)$ présente souvent autour d'un maximum central des maxima secondaires moins importants appelés "pieds". Le rôle de $c(x)$ est alors de substituer à $f(x)$ une fonction $f'(x)$ dont les "pieds" sont très atténués.

B. Dossier (B. Dossier, [1954]) a proposé des techniques de calcul pour la recherche de ces fonctions $f'(x)$. Le plus souvent, l'expérimentateur utilise directement ces fonctions comme fonctions correctrices : il lui suffit de vérifier que la fonction $i(x) * f'(x)$ présente les caractères recherchés.

* voir pour une bibliographie détaillée : P. Jacquinet - B. Roizen-Dossier [1964].

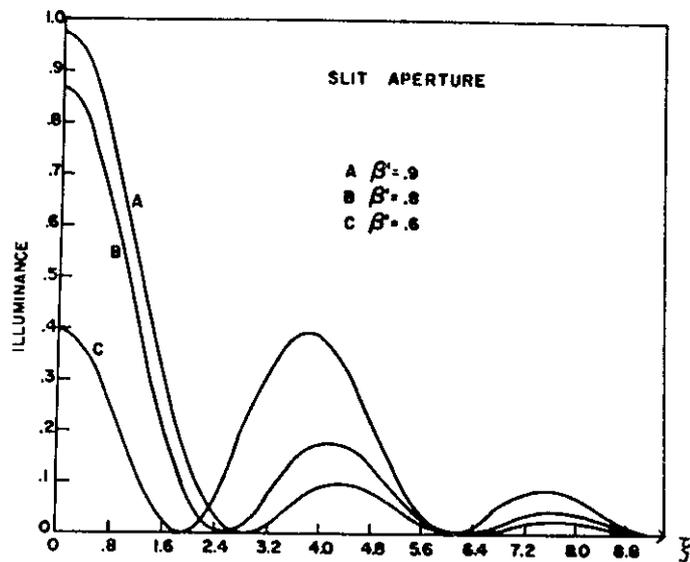


figure 16

fonctions $f'(\zeta)$ super-résolvantes positives proposées par Barakat [1962]
 La fonction d'appareil à corriger est ici la fonction $(\sin \zeta/\zeta)^2$. pour
 $\beta' = 0.6$; l'abscisse du 1^{er} zéro est en $\zeta = 0.6\pi$ mais le 1^{er} pied est de
 même grandeur que le corps de la fonction. (extrait de "J.O.S.A.")

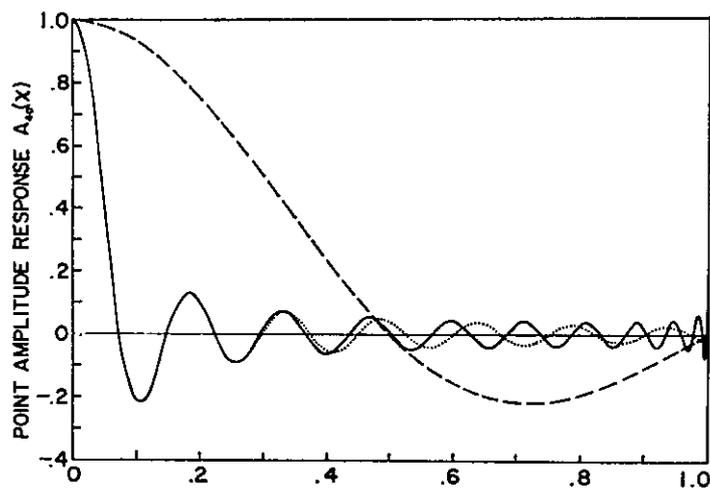


figure 17

- en traits pleins fonction $f'(x)$ super-résolvante proposée par
 B. R. Frieden [1969]

- en pointillés fonction $\text{sinc } 2x$ initiale.

l'abscisse du 1^{er} zéro est ici en $x = 0.1$ et les pieds de la fonction
 sont du même ordre que ceux de $\text{sinc } 2x$ sur $[0.5 - 1]$.

(extrait de "Optica Acta")

3.2) Super résolution *

3.2.1) Le rôle de $c(x)$ est alors d'agir sur $f(x)$ de sorte que $f'(x)$ présente un maximum central plus étroit que $f(x)$. P. Jacquinot (P. Jacquinot, [1959]) a même montré que l'abaisse du 1er zéro d'une fonction d'appareil peut devenir aussi petite que l'on désire. Toutefois ce gain se fait payer par deux graves défauts :

- α) diminution du rapport (s/b) au point que le signal devienne littéralement noyé dans le bruit et
- β) relèvement important des premiers pieds de $f'(x)$. (figure 16).

3.2.2) Tout récemment Friden (Friden, [1970]) a montré que ce second défaut peut être corrigé. Il propose des fonctions $f'(x)$ dont le maximum central est aussi étroit que l'on désire et dont les premiers pieds sont, sur un intervalle fixé, les mêmes que ceux de $\text{sinc } x$ (figure 17).

Toutefois, il souligne que le flux de lumière transmis par de tels filtres tombe à des valeurs inférieures à 10^{-4} de sa valeur initiale dès que le pouvoir de résolution ** est de l'ordre de 0.9.

Un rapide examen des T.F. $\hat{f}'(\mu)$ de ces fonctions permet de s'en convaincre (figure 18). Elles sont fortement oscillantes et croissent lorsque μ varie de 0 à a . Or le rapport (s/b) dans un enregistrement corrigé par convolution à l'aide d'une fonction correctrice $c(x)$ identique à $f'(x)$ s'écrit :

*

voir aussi P. Jacquinot - B. Roizen-Dossier [1964], Barakat [1962], Wilkins [1961], etc ...

**

Le pouvoir de résolution est dans ce cas déterminé comme le rapport de la largeur de la fonction $f'(x)$, à la largeur de la fonction $\text{sinc } tx$ qui a même domaine spectral.

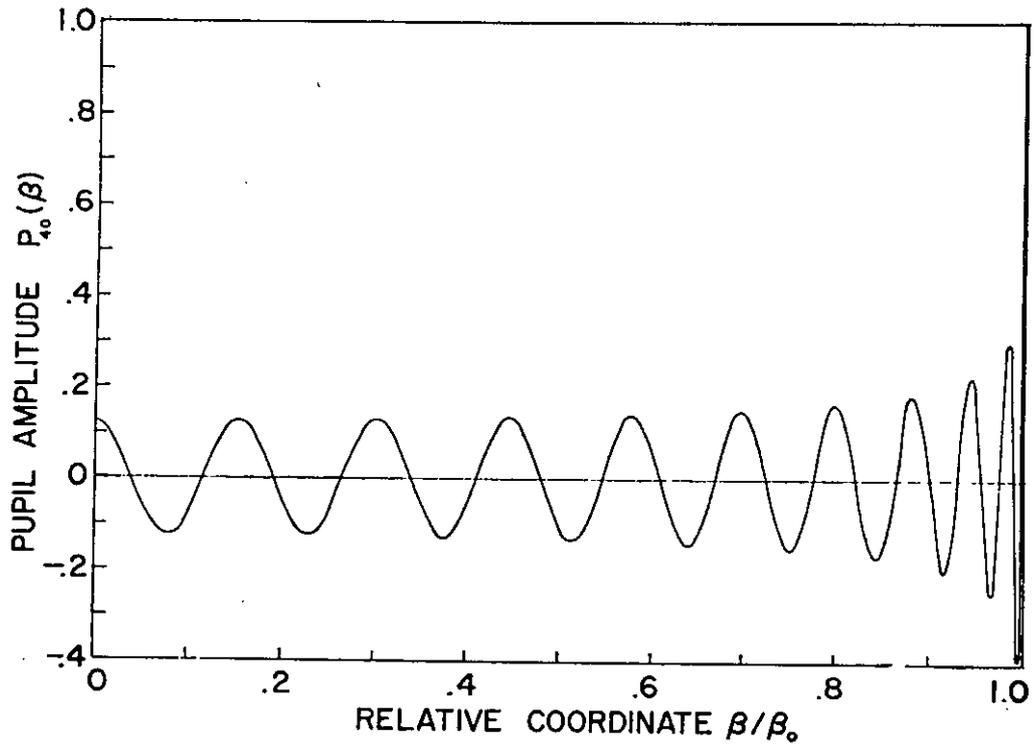


figure 18

transformée de Fourier $\hat{f}(\mu)$ de la fonction super-résolvante proposée par B. R. Frieden [1969] . (extrait de "J.O.S.A.")

$$(s/b)' = \frac{\int_{-a}^{+a} \hat{i}(\mu) \hat{f}'(\mu) d\mu}{\left[\int_{-a}^{+a} \hat{\phi}(\mu) \times \hat{f}'^2(\mu) d\mu \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Si nous normons la fonction $\hat{f}'(\mu)$ ($\hat{f}'(0) = 1$), nous constatons :

- que les fréquences de bruit sont fortement augmentées. (Pour $\mu = a$, $\hat{f}'(\mu) = 5$, $\hat{f}'^2(\mu) = 25$!),

- que la fonction $\hat{i}(\mu)$ est multipliée par une fonction alternativement positive et négative ; par contre $\hat{\phi}(\mu)$ est, elle, multipliée par une fonction positive sur tout son domaine. La correction a donc tendance à diminuer fortement l'intensité du signal, tout en augmentant le bruit : le rapport (s/b) ne peut que décroître.

3.2.3) Nous remarquons dans ce cas l'importance de l'étude du compromis gain en résolution-perte en rapport signal/bruit. Nous avons étudié ce problème très en détail dans le cas du spectromètre à fentes (O. Robaux, B. Roizen-Dossier [1967]) et la même méthode peut être utilisée dans chaque cas particulier.

3.3) Filtrage du bruit.

Dans de nombreux enregistrements, la seule correction cherchée est l'atténuation de $n(x)$. Celle-ci doit s'effectuer en modifiant le moins possible les fréquences $\hat{i}(\mu)$.

3.3.1) Lorsque le bruit est stationnaire le long de l'enregistrement il peut être atténué par un filtrage. Celui-ci supprime les fréquences $\hat{n}(\mu)$ les plus élevées et, dans le meilleur des cas, toutes les fréquences supérieures à a .

La méthode théorique la plus simple consiste à multiplier $\hat{f}(\mu)$ par une fonction créneau de largeur $2a$, ce qui revient à convoluer $f(x)$ par la fonction $2a \operatorname{sinc} 2ax$.

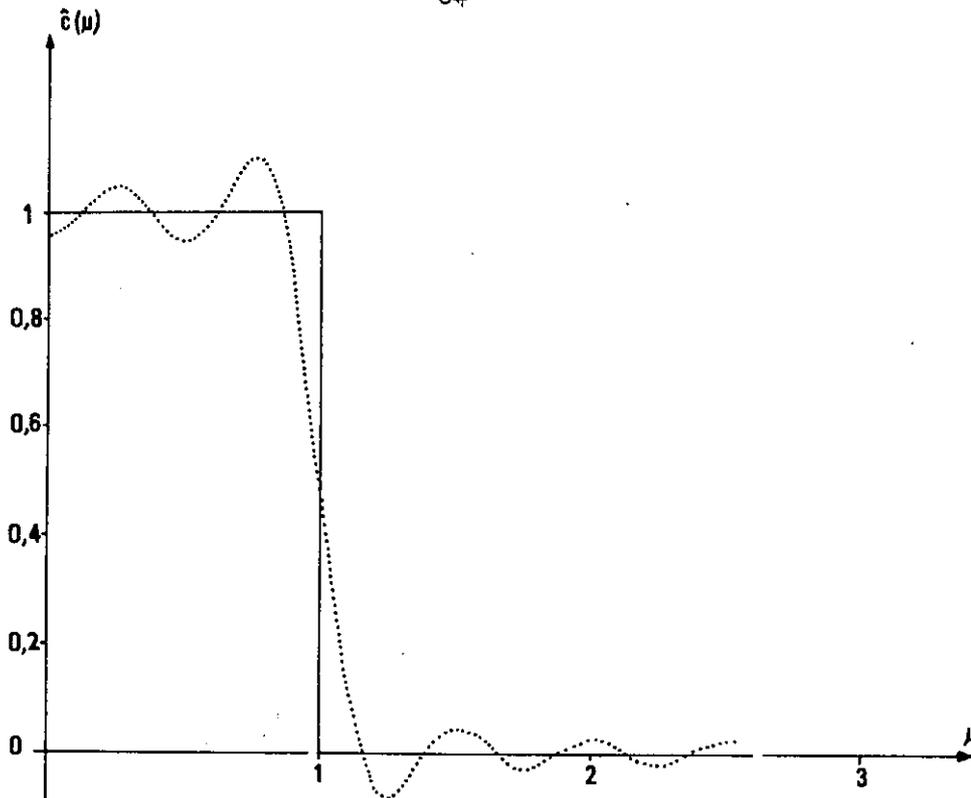


figure 19

- en traits pleins, filtre créneau rect $\frac{\mu}{2}$
- en pointillés, approximation en moyenne quadratique à 10 termes sur $[-2,5, +2,5]$ du filtre précédent

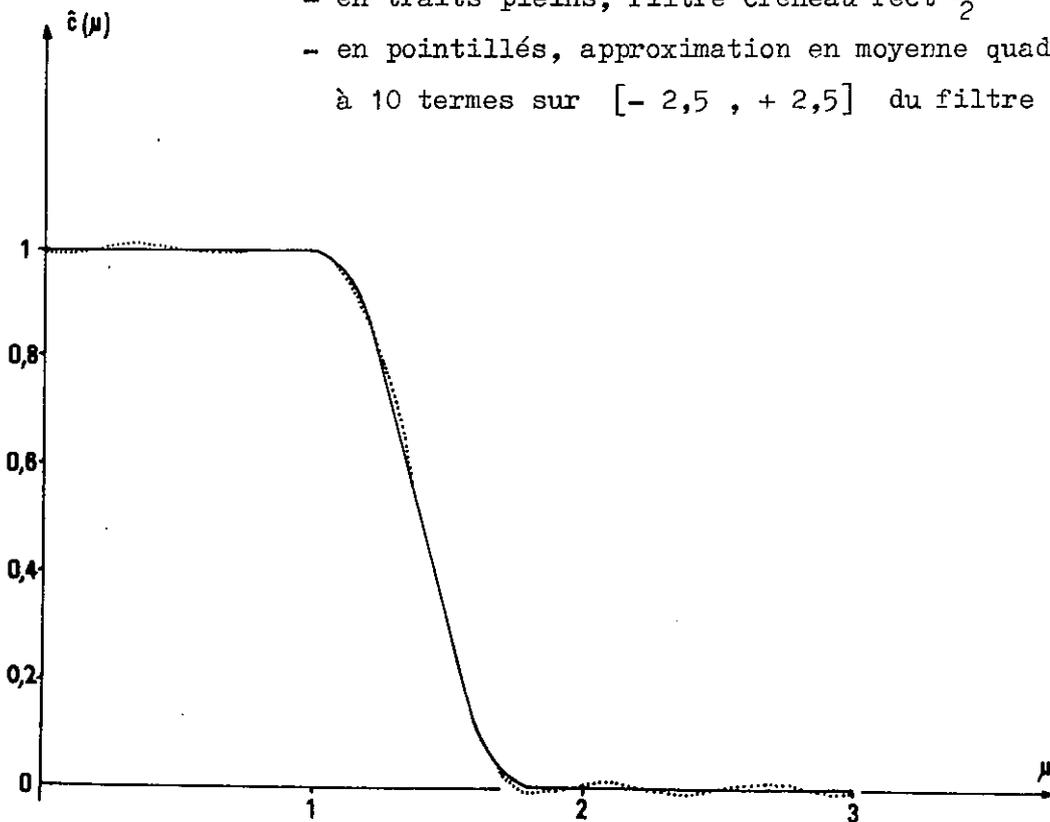


figure 20

- en traits pleins, filtre $\hat{\epsilon}(\mu)$ proposé par P. Toussaint, [1968]
- en pointillés, approximation en moyenne quadratique à 10 termes sur $[-3, +3]$ du filtre précédent.

Cependant, cette méthode ne peut être mise en pratique. En effet, lorsque cette convolution est effectuée numériquement (cf. § 2), le pas h doit être choisi inférieur à $1/2B^*$. B , donc $1/2h$, est nécessairement plus grand que a , sinon la correction envisagée n'apporterait aucune amélioration. Dans cette opération le filtre de largeur a est remplacé par son approximation en moyenne quadratique sur $[-1/2h, +1/2h]$ à l'aide des bases $\exp j2\pi\mu h$. On utilise en fait un nouveau filtre qui présente de fortes oscillations dans le voisinage de a (cf. figure 19) : il altère donc les fréquences $\hat{i}(\mu)$ de l'enregistrement.

Pour éviter ce phénomène, il est courant de remplacer ce filtre par un autre dont le raccord à l'axe se fait en pente douce. P. Toussaint, par exemple (P. Toussaint, [1968]), conseille d'utiliser le filtre (cf. figure 20) :

$$\hat{c}(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < |\mu| < a, \\ 1 - (\mu - a)^2 \frac{2}{(a' - a)^2} & \text{pour } a < |\mu| < \frac{a' + a}{2}, \\ (\mu - a')^2 \frac{2}{(a' - a)^2} & \text{pour } \frac{a' + a}{2} < |\mu| < a', \\ 0 & \text{pour } |\mu| > a'. \end{cases}$$

Nous pouvons expliquer aisément cette méthode empirique. En effet, l'approximation d'un tel filtre par les bases exponentielles $\exp j2\pi\mu h$ est rapidement convergente et présente peu d'oscillations. (cf. figure 20).

3.3.2) Un cas plus favorable se présente lorsque l'enregistrement $e(x)$ couvre une faible étendue. Dans ce cas, il est correctement re-

*

$2B$ correspond à la largeur du domaine où la fonction, répartition spectrale de l'énergie, $\hat{\varphi}(\mu)$ n'est pas négligeable.

représenté par un nombre restreint de bases $\text{sinc}(x - ph)/h$. Le produit de convolution de $e(x)$ par $\text{sinc} 2ax$ est donné par :

$$\sum_{p=-m}^m e(ph) \text{sinc} 2a(x - ph) .$$

On filtre dans ce cas l'approximation de $e(x)$ à l'aide des bases $\text{sinc}(x - ph)/h$ par le filtre créneau $\text{rect} \frac{\mu}{2a}$.

3.4) Autres critères .

De nombreux autres critères peuvent être proposés pour choisir les fonctions correctrices $c(x)$. Parmi ceux-ci l'un des plus intéressants consiste à rechercher la fonction $c(x)$ qui minimise la quantité :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} [b(x) - e(x) * c(x)]^2 dx .$$

Ce calcul a été effectué par M. Tournarie (M. Tournarie, [1958]) puis par C.W. Helstrom (C.W. Helstrom, [1967]) à l'aide d'un calcul de variations. Ces auteurs trouvent une expression à peu près équivalente de $c(x)$, plus aisément représentable par sa T.F. $\hat{c}(\mu)$:

$$\hat{c}(\mu) = \frac{1}{\hat{f}(\mu)} \times \frac{|\hat{b}(\mu) \times \hat{f}(\mu)|^2}{|\hat{b}(\mu) \times \hat{f}(\mu)|^2 + \hat{\varphi}^2(\mu)}$$

Cette expression de $\hat{c}(\mu)$ appelle la remarque suivante : en l'absence de bruit, $\hat{\varphi}^2(\mu)$ est nul, il vient :

$$\hat{c}(\mu) = \frac{1}{\hat{f}(\mu)} ,$$

soit : $\hat{f}'(\mu) = \hat{f}(\mu) \times \frac{1}{\hat{f}(\mu)} = \text{rect} \frac{\mu}{2a}$,

et $f'(x) = \text{sinc} 2ax$.

L'opération tend donc à substituer à $f(x)$, la fonction $\text{sinc} 2ax$. On retrouve là le résultat démontré directement par J. Arzac (J. Arzac, [1961]). Signalons, toutefois, que si le critère utilisé consiste à minimiser

l'écart quadratique moyen entre le signal $b(x)$ et sa représentation $e'(x) = e(x) * c(x)$, cette dernière n'est en général pas la représentation la plus conforme de $b(x)$. En particulier, elle ne laisse apparaître sélectivement aucun caractère simple à définir*.

4 - CONCLUSIONS -

La méthode du traitement des enregistrements par convolution est une méthode d'emploi facile. Cependant, nous avons vu que son efficacité se trouvait limitée par deux facteurs :

- Les seules corrections possibles consistent en une pondération différente des fréquences $\hat{b}(\mu)$ sur le domaine $[-a, +a]$. Elles ne restituent aucune des fréquences perdues.

- Elles entraînent une modification du bruit présent dans l'enregistrement, modification qui peut aller à l'encontre du résultat souhaité.

Ceci tient essentiellement au fait que cette méthode n'utilise pour la restitution de $b(x)$ qu'une seule des données que nous possédons : l'enregistrement $e(x)$.

La prochaine étape de notre travail va nous amener à chercher comment restituer une partie des fréquences $\hat{b}(\mu)$ perdues. Nous utiliserons tout d'abord dans ce but en plus de $e(x)$, l'information suivante : $b(x)$ est un signal d'étendue finie.

* Comme le fait, par exemple, une représentation obtenue en substituant à $f(x)$ une fonction apodisée : elle fait apparaître des détails de faible intensité qui se trouvent au voisinage de signaux plus intenses.

CHAPITRE VII

ETUDE THEORIQUE DE L'EQUATION DE CONVOLUTION

1 - INTRODUCTION -

Le signal inconnu $b(x)$ est lié à l'enregistrement $e(x)$ par l'équation de convolution :

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x) .$$

Nous supposons que $b(x)$ est une fonction à support fini (tel est en effet le cas des signaux enregistrés).

Nous supposons également que nous connaissons la réponse impulsionnelle $f(x)$.

Nous nous proposons de résoudre les problèmes suivants :

- est-il possible à partir de la relation de convolution de restituer effectivement $b(x)$?

- si oui, avec quelle précision?

2 - UNICITÉ DE LA SOLUTION EN L'ABSENCE DE BRUIT -

Les résultats de la démonstration prouvant l'unicité de la solution de l'équation de convolution :

$$e(x) = b(x) * f(x) ,$$

dans le cas où $b(x)$ est une fonction à support fini, sont empruntés à J. Arzac (J. Arzac [1961]).

La T.F. d'une telle fonction s'exprime par l'intégrale :

$$\hat{b}(\mu) = \int_{-x_0}^{+x_0} b(x) e^{-j2\pi\mu x} dx .$$

On peut démontrer que $\hat{b}(\mu)$ ne peut s'annuler identiquement sur aucun intervalle fini : le caractère d'unicité de $b(x)$ s'en déduit aisément.

Puisqu'il y a unicité de la solution, nous pouvons chercher à atteindre celle-ci, c'est-à-dire restituer $b(x)$.

Dans l'espace des T.F., ceci suppose que l'on restitue les fréquences $\hat{b}(\mu)$ non seulement sur le domaine $[-a, +a]$ où elles sont pondérées par $\hat{f}(\mu)$, mais aussi à l'extérieur de ce domaine, dans la région où $\hat{f}(\mu)$ les a "coupées".

3 - ROLE DU BRUIT -

Le problème tel que nous venons de le poser ne peut se résoudre par des méthodes numériques qu'en faisant appel à des approximations qui rendent illusoire la restitution de $b(x)$ (H. Wolter, [1960]).

Par ailleurs, $\hat{b}(\mu)$ n'est jamais connue sans aucune erreur, sur le domaine A puisque tout enregistrement $e(x)$ est entaché de bruit. Dans ces conditions nous ne pouvons plus prétendre à l'unicité de la solution. S'il est impossible en effet que deux objets différents donnent la même image, par contre, il est possible que ces deux objets donnent deux images dont l'écart en tout point est inférieur au bruit (réel ou "de calcul")? Cela revient à dire qu'un enregistrement donné peut correspondre à plus d'un signal original.

4 - ROLE DES INFORMATIONS -

Parmi toutes les solutions $b(x)$ à support fini qui vérifient la relation de convolution

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x),$$

seul nous intéresse $b(x)$, le signal que nous avons effectivement enregistré. Nous devons pouvoir rejeter toutes les solutions parasites et ne

garder que $b(x)$.

Ce rejet se fera si l'on connaît, a priori, quelques caractéristiques du signal enregistré : forme, étendue du support, intensités maximales et minimales etc.. . Il est évident que plus les informations sur $b(x)$ sont précises, plus il est facile de cerner la "bonne" solution.

5 - "CRITERES DE QUALITE" DES SOLUTIONS OBTENUES -

Supposons qu'une méthode de restitution nous fournisse une fonction $b(x)$ solution de l'équation de convolution

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x)$$

Supposons de plus que $b(x)$ possède les quelques caractéristiques que nous savons a priori appartenir au signal.

Nous nous proposons d'évaluer - le degré d'incertitude qui subsiste sur $b(x)$.

- le gain en résolution sur lequel nous pouvons compter.

5.1) Construction d'autres solutions à partir de $b(x)$.

5.1.1) A cette fin, nous allons chercher à construire à partir de $b(x)$, une série de fonctions $b'(x)$, qui vérifient aussi l'équation de convolution et qui possèdent les mêmes caractéristiques. Pour cela, considérons des fonctions $A_c(x)$ auxquelles nous demandons de posséder les propriétés suivantes :

α Ces fonctions sont des fonctions de type réponse impulsionnelle, à support borné.

β Les fonctions $A_c(x)$ se déduisent les unes des autres par contraction d'abscisse,

soit :

$$A_c(x) = A_c \left(\frac{x}{c}, x \right) .$$

— Le produit de convolution de la fonction $A_c(x)$ par une fonction possédant les propriétés connues a priori du signal $b(x)$, fournit une fonction qui possède aussi ces propriétés. Prenons l'exemple d'un signal $b(x)$ de profil symétrique non négatif. Pour que le profil obtenu par la convolution de $A_c(x)$ et de $b(x)$ possède les mêmes propriétés, il nous suffit de choisir comme fonction $A_c(x)$ un profil symétrique non négatif.

§ Il existe une valeur c_{\max} telle que, pour $c > c_{\max}$ les fonctions $A_c(x)$ vérifient une condition du type

$$(VII.1) \quad |e(x) * k A_c(x) - e(x)| < n(x)$$

où k est une constante de normalisation.

Ceci signifie que la convolution de $e(x)$ par toute fonction $A_c(x)$ convenablement normalisée redonne une fonction qui ne s'écarte de $e(x)$ qu'au bruit près.

x	$e^{-\pi x^2}$	$e^{-\pi x^2} * e^{-25\pi x^2}$	$ e^{-\pi x^2} - e^{-\pi 26/25 x^2} $
0.	1.	1.	0.
0.2	0.8819	0.8774	0.004
0.4	0.6049	0.5928	0.012
0.6	0.3227	0.3084	0.014
0.8	0.1339	0.1235	0.005
1.2	0.0108	0.00905	0.001
1.4	0.00211	0.0016	0.001

TABLEAU 5

A titre d'exemple, considérons un profil gaussien $e^{-\pi x^2}$. Si nous le convoluons par un profil $e^{-\pi 25x^2}$, 5 fois plus étroit, nous obtenons un profil qui, une fois convenablement normalisé, s'écarte du profil $e^{-\pi x^2}$ à moins de 0.02. Lorsque le profil initial est bruité, ce bruit étant de l'ordre de 0.01, nous ne pouvons distinguer $e^{-\pi x^2}$ de $k e^{-\pi x^2} * e^{-\pi 25x^2}$.

Nous définirons dans chaque cas une fonction $A_c(x)$, vérifiant cette condition, c'est-à-dire telle que :

$$e(x) * k A_c(x) = e(x) .$$

Dans l'espace de Fourier, cette relation s'écrit :

$$(VII.2) \quad \hat{e}(\mu) \times k \hat{A}_c(\mu) = \hat{e}(\mu) ,$$

avec $\hat{e}(\mu)$ de support fini $[-a, +a]$ (en supposant $e(x)$ filtré).

Cette relation exprime que, sur $[-a, +a]$, l'altération des fréquences $\hat{e}(\mu)$ due à la multiplication par la fonction $k A_c(\mu)$ est du même ordre que l'altération de ces mêmes fréquences due à la présence du bruit $\hat{n}(\mu)$ [cf. figure 21].

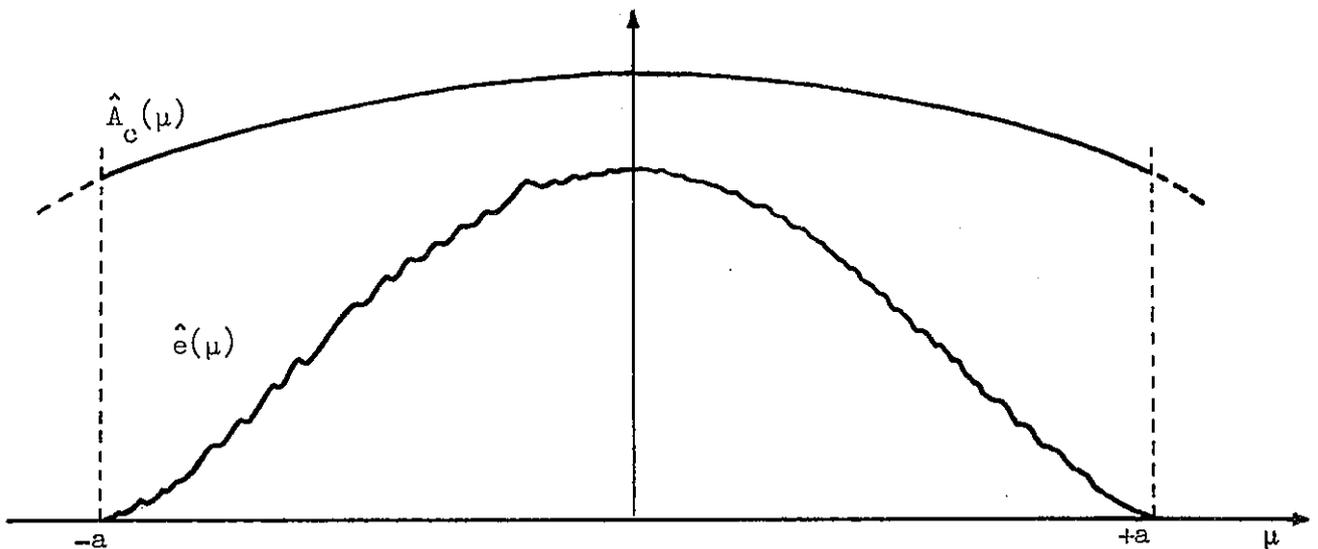


figure 21

$$\text{sur } [-a, +a] , \hat{e}(\mu) = i(\mu) + n(\mu) \cong i(\mu) * k \hat{A}_c(\mu)$$

5.1.2) Nous en déduisons que :

Si $b(x)$ est solution de l'équation de convolution :

$$(VII.1) \quad e(x) = b(x) * f(x) + n(x) ,$$

$b'(x) = b(x) * k A_c(x)$ est solution d'une équation de convolution qui s'écrit :

$$e'(x) = k A_c(x) * e(x) = b'(x) * f(x) + n'(x).$$

Or $e'(x)$ ne peut se distinguer de $e(x)$ bruité : $b'(x)$ est donc aussi solution de (VII.1).

Nous pouvons donc construire à partir de $b(x)$ un ensemble de fonctions $b'(x)$, solutions de l'équation de convolution: (VII.1)

5.2) Incertitude sur $b(x)$

Dans la classe des fonction $A_c(x)$ ainsi définie, désignons par $A_{c \max}(x)$, la fonction la plus large à mi-hauteur ; sa largeur est une mesure de l'incertitude qui subsiste sur l'objet restitué $b(x)$. Celui-ci n'est connu qu'à une convolution près, la convolution par $A_{c \max}(x)$.

5.3) Gain en résolution.

A l'aide de cette fonction $A_{c \max}(x)$, nous évaluons aussi notre gain en résolution.

Partant de l'enregistrement $e(x) = b(x) * f(x)$, nous obtenons une représentation de $b(x)$: $b'(x) = b(x) * A_c(x)$. Nous proposons d'évaluer notre gain par le rapport :

$$G = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\text{Largeur à mi-hauteur de } f(x)}{\text{Largeur à mi-hauteur de } A_c(x)} .$$

5.4) Remarques.

Il existe une certaine indétermination sur $A_c(x)$: on peut lui conférer diverses formes analytiques. Cependant, la pratique montre que la largeur de $A_{c \max}(x)$ est pratiquement indépendante de la forme analytique de cette fonction. Le choix de celle-ci sera donc fait en fonction du pro-

blème traité.

Pour effectuer aisément le produit de convolution $e(x) * A_c(x)$, nous serons amenés en général à exprimer $A_c(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire des bases $\text{sinc}(x - ph)/h$.

6 - CONCLUSIONS -

En présence de bruit, il existe plusieurs solutions $b'(x)$, à support borné donné, de l'équation de convolution :

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x) .$$

Cependant, nous avons mis en évidence que la connaissance a priori de certaines caractéristiques du signal enregistré peut être utilisée pour rejeter un grand nombre de solutions parasites.

Nous avons souligné que la solution qu'on obtient par "synthèse" d'informations n'est connue qu'à une convolution près. La fonction convoluée ainsi mise en évidence nous sert à définir "l'incertitude" de la restitution et le gain en résolution, qui, compte tenu du bruit, ne saurait être dépassé.

CHAPITRE VIII

METHODES DE DECONVOLUTION

1 - INTRODUCTION -

De nombreux auteurs se sont penchés sur le problème de la recherche d'une solution à support fini de l'équation de convolution :

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x) .$$

Nous n'analysons pas toutes ces méthodes, certaines, n'étant d'ailleurs que des variantes plus ou moins améliorées de méthodes plus anciennes. Nous ne rappelons seulement que les grands principes sur lesquels elles reposent. On pourra trouver une abondante bibliographie sur ce sujet dans la mise au point bibliographique de A. Gérard (A. Gérard [1968]).

2 - METHODES BASEES SUR LES FONCTIONS D'ONDE ELLIPSOIDALES -

(Slepian et H.O. Pollack [1961], Frieden [1967], [1966], Rino [1969]).

Les plus élégantes parmi les méthodes de déconvolution, celles qui satisfont le plus les théoriciens, sont basées sur les propriétés des fonctions d'onde ellipsoïdales ("Prolate spheroidal wave functions").

Ces fonctions ont été introduites et utilisées dans le domaine de la déconvolution par D. Slepian et H.O. Pollack. De nombreux auteurs ont par la suite appliqué leurs résultats pour résoudre les problèmes de déconvolution d'enregistrements uni-dimensionnels. Ils utilisent l'information suivante : $b(x)$ est une fonction à support fini.

2.1) Propriétés des fonctions d'ondes ellipsoïdales.

Soit \mathcal{L}_∞^2 la classe des fonctions $f(t)$ définies sur l'axe réel et de carré sommable. Etant donné $c > 0$, on peut trouver un ensemble dénombrable de fonctions réelles $\Psi_0(c,t), \Psi_1(c,t) \dots \Psi_n(c,t)$ et un ensemble de nombres réels positifs

$$\lambda_0(c) > \lambda_1(c) \dots > \lambda_n(c)$$

tels que :

a) les $\Psi_i(c,t)$ sont à spectre limité $[-c, +c]$, orthonormales sur l'axe réel :

$$(VIII.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i(c,t) \Psi_j(c,t) dt = \delta_{ij}$$

et complètes dans B_c . (B_c sous-ensemble de \mathcal{L}_∞^2 des fonctions dont la T.F. s'annule pour $|\mu| > c$);

b) dans l'intervalle $[-1, +1]$ les $\Psi_i(c,t)$ sont orthogonales et complètes dans \mathcal{L}_1^2

$$(VIII.2) \quad \int_{-1}^{+1} \Psi_i(c,t) \Psi_j(c,t) dt = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \lambda_i(c) & , i = j, i = 1, 2 \dots n \end{cases} ;$$

c) pour toute valeur de t réelle ou complexe, on a :

$$\lambda_i \Psi_i(c,t) = \int_{-1}^{+1} 2c \operatorname{sinc} 2c(t-y) \Psi_i(c,y) dy$$

intégrale qui peut s'écrire à l'aide de l'opérateur convolution :

$$(VIII.3) \quad \lambda_i \Psi_i(c,t) = 2c \operatorname{sinc} 2cy * (\Psi_i(c,y) \cdot \operatorname{rect} \frac{y}{2}) ,$$

d) les $\Psi_i(c, t)$ sont aussi fonctions propres de l'équation intégrale

$$\beta_i \Psi_i(c, t) = \int_{-1}^{+1} c^{j2\pi\mu c t y} \Psi_i(c, y) dy \quad \text{avec} \quad \beta_i^2 = \frac{\lambda_i}{c},$$

soit, en posant $cy = x$ et en introduisant l'opérateur \mathcal{F} :

$$(VIII.4) \quad \beta_i \Psi_i(c, t) = \mathcal{F} \left[\Psi_i\left(c, \frac{x}{c}\right) \cdot \frac{1}{c} \cdot \text{rect} \frac{x}{2c} \right]$$

e) On en déduit aisément :

$$(VIII.5) \quad \mathcal{F} \left[\Psi_i(c, t) \right] = \frac{1}{\beta_i c} \Psi_i\left(c, \frac{x}{c}\right) \text{rect} \frac{x}{2c}.$$

2.2) Application aux problèmes de déconvolution.

Nous nous plaçons dans le cas où les fréquences $\hat{b}(\mu)$ ont été restituées sur $[-a, +a]^*$. La fonction d'appareil utilisée est la fonction $2a \text{sinc } 2ax$ et l'enregistrement $e(x)$ que nous considérons est tel que

$$e(x) = b(x) * 2a \text{sinc } 2ax + n(x).$$

Considérons tout d'abord le cas d'un enregistrement parfait

$$(VIII.6) \quad e(x) = b(x) * 2a \text{sinc } 2ax.$$

En outre, la seule information dont nous désirons tirer parti est le support fini $[-x_0, +x_0]$ de $b(x)$.

Etant ainsi donnés x_0 , et a , considérons la suite des fonctions $\Psi_i(c, t)$ avec $c = x_0 \times a$. Nous pouvons aussi définir les suites :

$$(VIII.7) \quad \begin{cases} \varphi_i(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi_i\left(c, \frac{t}{a}\right) \\ \varphi_i(x_0, t) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \Psi_i\left(c, \frac{t}{x_0}\right) \end{cases}.$$

* Si ce n'est pas le cas, on s'y ramène au préalable

Nous pouvons à présent restituer $b(x)$ de deux façons différentes :

- soit en recherchant le développement de $\hat{b}(\mu)$ sur $-\infty, +\infty$ à l'aide des fonctions de base $\varphi_i(a, \mu)$ orthonormales et complètes dans B_{x_0} ,

- soit en recherchant directement le développement de $b(x)$ sur $[-x_0, +x_0]$ à l'aide des fonctions de base $\varphi_i(x_0, x)$, orthogonales et complètes dans $\mathcal{L}^2_{x_0}$.

2.2.1) Développement de $\hat{b}(\mu)$.

* $\hat{b}(\mu)$ est une fonction à spectre borné $[-x_0, +x_0]$; d'après a) elle est représentable sur $-\infty, +\infty$ par :

$$\hat{b}(\mu) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p \varphi_p(a, \mu) .$$

Nous pouvons déterminer les coefficients b_p , en utilisant la connaissance que nous avons de $\hat{b}(\mu)$ sur $[-a, +a]$. Il vient :

$$\int_{-a}^{+a} \hat{b}(\mu) \varphi_j(a, \mu) d\mu = \int_{-a}^{+a} \left[\sum_{p=0}^{\infty} b_p \varphi_p(a, \mu) \right] \varphi_j(a, \mu) d\mu ;$$

or :

$$\int_{-a}^{+a} \varphi_p(a, \mu) \varphi_j(a, \mu) d\mu = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{a} \psi_p\left(c, \frac{\mu}{a}\right) \psi_j\left(c, \frac{\mu}{a}\right) d\mu ,$$

soit d'après b) :

$$\int_{-a}^{+a} \varphi_p(a, \mu) \varphi_j(a, \mu) d\mu = \begin{cases} 0 & , p \neq j \\ \lambda_j(c) & , p = j \end{cases}$$

et donc :

$$\int_{-a}^{+a} \hat{b}(\mu) \varphi_j(a, \mu) d\mu = b_j \lambda_j$$

et finalement :

$$\hat{b}(\mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p} \cdot \left[\int_{-a}^{+a} \hat{b}(\mu) \varphi_p(a, \mu) d\mu \right] \cdot \varphi_p(a, \mu) ;$$

posons la quantité entre crochets égale à \hat{b}_p ,

$$\hat{b}(\mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p} \hat{b}_p \varphi_p(a, \mu).$$

Pratiquement, on ne peut approcher $\hat{b}(\mu)$ que par une somme finie à $N + 1$ termes. Nous obtenons ainsi une première approximation $\hat{b}_N^1(\mu)$ de $\hat{b}(\mu)$:

$$\hat{b}_N^1(\mu) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\lambda_p} \hat{b}_p \varphi_p(a, \mu).$$

Il est facile de restituer $\hat{b}_N^1(x)$ en utilisant les propriétés des Transformées de Fourier et l'égalité (VIII.5) :

$$\hat{b}_N^1(x) = \mathcal{F}(\hat{b}_N^1(\mu)) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\lambda_p} \hat{b}_p \mathcal{F}[\varphi_p(a, \mu)] ;$$

$$\begin{aligned} \text{or : } \mathcal{F}[\varphi_p(a, \mu)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{a}} \psi_p\left(c, \frac{\mu}{a}\right)\right], \\ &= \frac{1}{\beta_p c} \frac{a}{\sqrt{a}} \psi_p\left(c, \frac{ax}{c}\right) \cdot \text{rect} \frac{ax}{2c}, \end{aligned}$$

$$\text{soit : } = \frac{1}{\lambda_p} \frac{a}{\sqrt{a}} \psi_p\left(c, \frac{x}{x_0}\right) \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0}$$

et par conséquent :

$$(VIII.8) \hat{b}_N^1(x) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\lambda_p^{3/2}} \hat{b}_p \varphi_p(x_0, x) \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0}.$$

2.2.2) Recherche directe de $b(x)$.

L'objet $b(x)$ recherché est de support borné $[-x_0, +x_0]$. Les fonctions $\varphi_p(x_0, x)$ sont d'après b) orthogonales sur $[-x_0, +x_0]$ et complètes dans $L^2_{x_0}$,

soit :

$$b(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b'_p \varphi_p(x_0, x) \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0} .$$

Or nous avons (VIII.6) :

$$e(x) = b(x) * 2a \text{ sinc } 2ax = \sum_{p=0}^{\infty} b'_p \varphi_p(x_0, x) \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0} * 2a \text{ sinc } 2ax$$

mais d'après (VIII.3) et (VIII.7) :

$$\varphi_p(x_0, x) \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0} * 2a \text{ sinc } 2ax = \lambda_p \varphi_p(x_0, x) .$$

Sous couvert des hypothèses de convergence habituelles, nous pouvons inverser les ordres d'intégration et de sommation. Nous obtenons :

$$e(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b'_p \lambda_p \varphi_p(x_0, x) = \sum_{p=0}^{\infty} e_p \varphi_p(x_0, x) .$$

Cette expression nous permet de calculer les coefficients b'_p de deux manières :

2.2.2.1) Les coefficients e_p sont donnés par :

$$e_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e(x) \varphi_p(x_0, x) dx .$$

En effet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(x) \varphi_j(x_0, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} b'_p \lambda_p \varphi_p(x_0, x) \varphi_j(x_0, x) dx .$$

et d'après a), ils sont égaux à :

$$= b'_j \lambda_j = e_j$$

On en tire :

$$b'_p = \frac{1}{\lambda_p} e_p = \frac{1}{\lambda_p} \int_{-\infty}^{+\infty} c(x) \varphi_p(x_0, x) dx,$$

soit pour $b_N(x)$, approximation à $N + 1$ termes de $b(x)$:

$$(VIII.9) \quad b_N(x) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\lambda_p} e_p \varphi_p(x_0, x) \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0}$$

Toutefois, on montre facilement que :

$$e_p = \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \hat{b}_p ;$$

et l'expression (VIII.8) est donc équivalente à (VIII.9).

2.2.2.2)

Les fonctions $\varphi_p(x, x_0)$ sont aussi orthogonales sur $[-x_0, +x_0]$.

On peut donc calculer les coefficients b'_p par :

$$\begin{aligned} \int_{-x_0}^{+x_0} e(x) \varphi_j(x_0, x) dx &= \int_{-x_0}^{+x_0} \sum_p b'_p \lambda_p \varphi_p(x_0, x) \varphi_j(x_0, x) dx \\ &= b'_j \lambda_j^2 \quad (\text{d'après b}) \end{aligned}$$

soit

$$b'_j = \frac{1}{\lambda_j^2} \int_{-x_0}^{+x_0} e(x) \varphi_j(x_0, x) dx = \frac{\bar{e}_j}{\lambda_j^2}$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle approximation de $b(x)$:

$$(VIII.10) \quad b_N^2(x) = \sum_{p=0}^N \frac{\bar{e}_p}{\lambda_p^2} \varphi_p(x_0, x) .$$

2.3) Influence du bruit*

Pratiquement tout enregistrement $e(x)$ est entaché d'un bruit $n(x)$. Nous calculons en fait :

$$b'(x) = b(x) + n'(x), \text{ avec ;}$$

$$n'(x) = \sum_{p=0}^N \gamma_p \varphi_p(x_0, x) .$$

Plaçons-nous dans le cas où $n(x)$ est filtré par le filtre $\text{rect} \frac{\mu}{2a}$. Nous pouvons aisément calculer les coefficients γ_p^1 , obtenus lors des approximations $b_N^1(x)$ (VIII.8) et $b_N^2(x)$ [VIII.10]

$$\gamma_p^1 = \frac{1}{\lambda^{3/2}} \hat{n}_p \text{ avec } \hat{n}_p = \int_{-a}^{+a} \hat{n}(\mu) \varphi_p(a, \mu) d\mu ,$$

$$\gamma_p^2 = \frac{1}{\lambda^2} \bar{n}_p \text{ avec } \bar{n}_p = \int_{-x_0}^{+x_0} n(x) \varphi_p(x_0, x) dx .$$

Nous ne pouvons pas comparer aisément les deux quantités correspondantes :

$$n_1'(x) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\lambda^{3/2}} \hat{n}_p \varphi_p(x_0, x) \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0} ,$$

et

$$n_2'(x) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\lambda^2} \bar{n}_p \varphi_p(x_0, x) \text{rect} \frac{x}{2x_0} .$$

La détermination de ces coefficients est effectuée en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier.

* (cf. aussi C.K. Rushforth and R.W. Harris [1967]).

Toutefois, si nous considérons que les valeurs λ_p sont inférieures à l'unité et décroissent très vite lorsque p croît, il est préférable d'utiliser la première approximation de $b(x)$ (VIII.8). Cette expression fait d'ailleurs intervenir l'enregistrement $e(x)$ dans sa totalité et il est normal qu'elle conduise à un résultat meilleur que la formule (VIII.10) qui n'utilise l'enregistrement que sur le domaine $[-x_0, +x_0]$.

2.4. Remarques.

2.4.1) Le calcul montre que le bruit, dans l'objet reconstitué, est inversement proportionnel à λ_i . Or nous avons

$$\lambda_i = \int_{-1}^{+1} \Psi_i^2(c, t) dt = \int_{-a}^{+a} \varphi_i^2(a, \mu) d\mu$$

alors que :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i^2(c, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i^2(a, \mu) d\mu .$$

Nous en tirons les conclusions suivantes ;

à un λ_i proche de 1, correspond un terme de bruit $\gamma_i \varphi_i$ faible mais aussi une fonction $\varphi_i(a, \mu)$ pratiquement nulle à l'extérieur du support $[-a, +a]$. Il s'en suit que les termes correspondants du développement $\hat{b}(\mu) = \sum b_i \varphi_i(a, \mu)$ sont peu bruités mais ne jouent aucun rôle dans la reconstitution de $\hat{b}(\mu)$ à l'extérieur de $[-a, +a]$.

Par contre à un λ_i faible correspond un terme de bruit trop important pour que le terme correspondant du développement de $\hat{b}(\mu)$ puisse être pris en considération.

Seuls seront donc véritablement utiles les φ_i , correspondant à des valeurs de λ_i éloignées des valeurs extrêmes 0 et 1.

Valeurs de $\lambda_n(c) = L_n(c) \times 10^{-p_n(c)}$

n	c = 0.5		c = 1.0		c = 2.0		c = 4.0		c = 8.0	
	L	p	L	p	L	p	L	p	L	p
0	3.0969	11	5.7258	1	8.8056	1	9.9589	1	1.0000	0
1	8.5811	3	6.2791	2	3.5564	1	9.1211	1	9.9988	1
2	3.9175	5	1.2375	3	3.5868	2	5.1905	1	9.9700	1
3	7.2114	8	9.2010	6	1.1021	3	1.1021	1	9.6055	1
4	7.2714	11	3.7179	8	1.8882	5	8.8279	3	7.4790	1
5	4.6378	14	9.4914	11	1.9359	7	3.8129	4	3.2028	1
6	2.0413	17	1.6716	13	1.3661	9	1.0951	5	6.0784	2
7	6.5766	21	2.1544	16	7.0489	12	2.2786	7	6.1263	3
8	1.6183	24	2.1207	19	2.7768	14	3.6066	9	4.1825	4

TABLEAU 4

Nous avons reporté, à l'exemple de G. Toraldo de Francia [1969], dans le tableau 4, différentes valeurs de $\lambda_n(c)$ calculées par Slepian. Nous remarquons que pour c donné le nombre de λ_i "moyens" ($0.9 > \lambda_i > 0.1$) est de l'ordre de 2. Encore les deux fonctions correspondantes ne sont-elles pas toutes deux réelles : les fonctions $\Psi_i(c, t)$ sont en effet imaginaires pour i impair. Nous ne disposons plus que d'un seul terme $\Psi_i(c, t)$ susceptible d'apporter une contribution importante au prolongement cherché sans altérer profondément le rapport s/b .

Il ne peut qu'en être de même pour toute autre valeur de c . Si cela n'était, cette méthode serait en contradiction avec les conclusions tirées dans le chapitre précédent et permettrait d'obtenir, sans introduire d'informations supplémentaires, la solution recherchée.

2.4.2) Même en l'absence de bruit, cette méthode se heurte à d'autres difficultés.

a) Problème de la convergence des développements. En effet, la convergence de $\hat{b}_n(\mu)$ vers $\hat{b}(\mu)$ a lieu au sens des moindres carrés ; c'est à dire (D. Slepian and H.O. Pollack [1961]) :

$$(VIII.11) \quad \int_{-a}^{+a} [\hat{b}(\mu) - \hat{b}_n(\mu)]^2 d\mu = \sum_{n+1}^{\infty} \lambda_j b_j^2 ,$$

$$(VIII.12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{b}(\mu) - \hat{b}_n(\mu)]^2 d\mu = \sum_{n+1}^{\infty} b_j^2 .$$

Le seul écart qui nous soit significatif est donné par l'équation (VIII.12). Or, nous ne pouvons calculer que la quantité (VIII.11). On constate que cette dernière devient vite négligeable, car les λ_j décroissent rapidement lorsque j croît. Cependant, le fait de rendre négligeable la quantité (VIII.11) n'entraîne nullement la même propriété pour la quantité (VIII.12).

b) Problème d'une représentation analytique des fonctions Ψ_n . Ces fonctions n'ont pas de représentation analytique simple. Jusqu'à présent différents auteurs (Frieden, [1967]) ont cherché à les approcher par une série de polynômes de Legendre*. Or pour les grandes valeurs de c les fonctions $\Psi_n(c, x)$ présentent, un grand nombre d'oscillations. Il est donc nécessaire d'utiliser des polynômes d'ordre élevés. Ceux-ci sont de plus en plus difficiles à calculer lorsque x augmente (Schedeckker, [1968]).

* Compte tenu des propriétés des fonctions $\Psi_N(c, x)$, il nous semble, toutefois, qu'il y aurait intérêt à les développer à l'aide des bases $\text{sinc } 2c (x - p/2c)$.

2.5)

Malgré sa puissance apparente, nous n'avons pas utilisé cette méthode pour les deux raisons suivantes :

Nous avons montré qu'elle échoue en présence de bruit.

Nous préférons utiliser une méthode apparemment moins puissante mais qui tient compte des informations que l'on possède a priori sur l'objet. Elle permet ainsi d'obtenir une certaine restitution en présence de bruit.

3 - METHODES BASEES SUR L'ECHANTILLONNAGE DE LA FONCTION $b(x)$ --

Avant de rappeler certaines de ces méthodes nous allons exposer le principe de base sur lequel nous pouvons toutes les faire reposer^{*}.

3.1) Principe de base.

3.1.1) Nous possédons un enregistrement $e(x)$ qui est une certaine représentation du signal $b(x)$:

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x).$$

Dans l'espace des T.F., nous pouvons écrire :

$$\hat{e}(\mu) = \hat{b}(\mu) \times \hat{f}(\mu) + \hat{n}(\mu).$$

Nous avons vu qu'il est très difficile de restituer, sur tout l'intervalle des fréquences, $\hat{b}(\mu)$ à partir de $\hat{e}(\mu)$ lorsque $\hat{f}(\mu)$ supprime les fréquences $\hat{b}(\mu)$ supérieures à la fréquence de coupure a . Nous nous proposons donc de restituer seulement une bande de fréquences, les fréquences $-c < |\mu| < c$. Ceci revient à rechercher la fonction $b_c(x)$ telle que :

$$\hat{b}_c(\mu) = \hat{b}(\mu) \times \text{rect} \frac{\mu}{2c},$$

soit , $b_c(x) = b(x) * 2c \text{ sinc } 2cx.$

*

certaines d'entre elles ne reposent pas explicitement sur ce principe mais nous verrons que dès qu'on fait appel à l'échantillonnage de $b(x)$, ce principe est sous-jacent.

L'opération tend à substituer à la réponse impulsionnelle $f(x)$ une fonction plus fine $2c \operatorname{sinc} 2cx$. $b_c(x)$ constitue donc une meilleure représentation de $b(x)$ que ne l'est la fonction enregistrée $e(x)$.

Nous négligeons provisoirement $n(x)$ et nous posons que $e(x)$, $b(x)$ et $f(x)$ sont paires pour la facilité de l'exposé.

3.1.2) Caractéristiques de la fonction $b_c(x)$.

$b_c(x)$ vérifie l'équation de convolution. Nous entendons par là que $b_c(x)$ est une solution particulière de l'équation fonctionnelle :

$$(VIII.13) \quad y(x) * f(x) = e(x) \quad .$$

C'est-à-dire que $b_c(x) * f(x) = e(x)$,

ou encore $\hat{b}_c(\mu) \times \hat{f}(\mu) = \hat{e}(\mu)$.

En effet nous avons :

$$\hat{b}(\mu) \times \hat{f}(\mu) = \hat{e}(\mu) \quad .$$

Or, $\hat{f}(\mu)$ étant nulle pour $|\mu| \geq a$, on a pour tout $c \geq a$: (cf. figure 22)

$$\hat{b}(\mu) \times \frac{\operatorname{rect} \mu}{2c} \times \hat{f}(\mu) = \hat{e}(\mu) \quad ;$$

c'est-à-dire

$$\hat{b}_c(\mu) \times \hat{f}(\mu) = \hat{e}(\mu) \quad ,$$

et par conséquent

$$b_c(x) * f(x) = e(x) \quad .$$

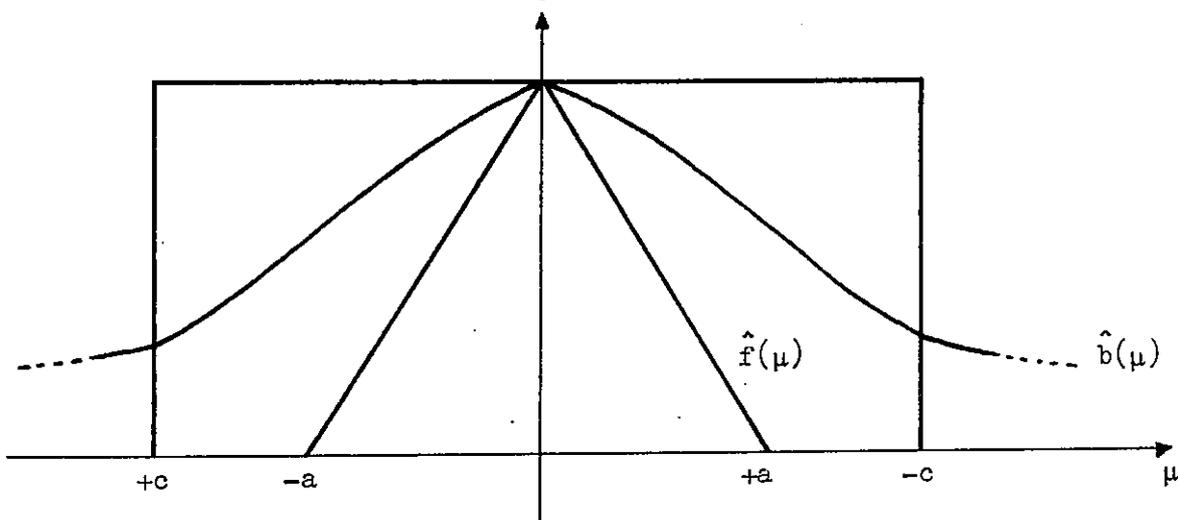


figure 22

On constate donc que l'équation de convolution (VIII.10) admet une infinité de solutions

$$b_c(x) = b(x) * 2c \operatorname{sinc} 2cx .$$

Toutes ces solutions s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque c est fini. Si c tend vers l'infini, $b_c(x)$ tend vers $b(x)$ qui est la solution de support fini.

§ $b_c(x)$ a une T.F. $\hat{b}_c(\mu)$ de domaine limité $[-c, +c]$. Le théorème d'échantillonnage lui est donc applicable :

$$b_c(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_c\left(\frac{p}{2c}\right) \operatorname{sinc} 2c \left(x - \frac{p}{2c}\right) .$$

Or $b(x)$ est une fonction à support borné $[-x_0, +x_0]$. Pour $|x| > x_0$ $b_c(x)$ ne diffère de $b(x)$ que par des "pieds" qui vont décroissant. On peut donc négliger les coefficients $b_c\left(\frac{p}{2c}\right)$ pour p assez grand et écrire :

$$(VIII.14) \quad b_c(x) \simeq b_c^n(x) = \sum_{p=-n}^{+n} b_c\left(\frac{p}{2c}\right) \operatorname{sinc} 2c \left(x - \frac{p}{2c}\right) .$$

Or, nous l'avons déjà souligné (chapitre I, § 7), la fonction $b_c^n(x)$ n'est autre que l'approximation en moyenne quadratique à N termes ($N = 2n + 1$), sur $-\infty, +\infty$ de $b_c(x)$ dans le système des fonctions de bases $\operatorname{sinc} 2c \left(x - \frac{p}{2c}\right)$. Parallèlement, $\hat{b}_c^n(\mu)$ est, dans le domaine de Fourier, l'approximation en moyenne quadratique d'ordre n , sur $-c \leq \mu \leq c$, de $\hat{b}_c(\mu)$ à l'aide des bases $\cos p\pi\mu/c$. La fonction $b_c^n(x)$ s'identifie donc à la combinaison linéaire des N fonctions de base $\operatorname{sinc} 2c \left(x - \frac{p}{2c}\right)$ ($-n \leq p \leq n$) qui minimise l'écart :

$$(VIII.15) \quad \sigma_n^2(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[b_c(x) - \sum_{p=-n}^n b_p \operatorname{sinc} 2c \left(x - \frac{p}{2c}\right) \right]^2 dx$$

Le théorème de Parseval nous permet d'établir que la fonction $\hat{b}_c^n(\mu)$ est également la combinaison linéaire à N fonctions de base $\cos p\pi\mu/c$ ($-n \leq p \leq n$) qui minimise l'écart* ;

$$(VIII.15)_b \quad \sigma_n^2(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{b}_c^n(\mu) - \sum_{p=-n}^n b_p \cos p\pi\mu/c \right]^2 d\mu .$$

3.1.3) Détermination de $b_c(x)$.

$b_c^n(x)$, à la différence de $b_c(x)$, n'est pas solution de l'équation de convolution, aussi ne peut-on pas écrire :

$$b_c^n(x) * f(x) = e(x) .$$

Toutefois, comme $b_c^n(x)$ constitue la meilleure approximation à n termes, sur $-\infty, +\infty$, de $b_c(x)$, cette fonction doit rendre très petit l'écart :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [b_c^n(x) * f(x) - e(x)]^2 dx = \sigma_n^2 .$$

On pourrait même être tenté d'écrire que $b_c^n(x)$ est le développement à n termes qui rend l'écart σ_n^2 minimum; ceci équivaudrait à calculer le développement

$$B_c^n(x) = \sum_{p=-n}^{+n} B_p \operatorname{sinc} 2c(x - p/2c) ,$$

* Il existe aussi une combinaison à n termes des $\cos p\pi \frac{x}{x_0}$ qui minimise

l'écart $\int_{-x_0}^{+x_0} \left[b_n(x) - \sum_{p=-n}^{+n} \hat{b}_p \cos p\pi \frac{x}{x_0} \right]^2 dx$. Elle serait peut-être

aussi intéressante à rechercher mais les coefficients \hat{b}_p qu'elle introduit ne sont plus des valeurs de la fonction $b_c(x)$. La combinaison

$\sum_{p=-n}^{+n} b_p \operatorname{sinc} 2c(x - p/2c)$ est, naturellement introduite par toutes les

méthodes qui font appel à l'échantillonnage de l'objet à restituer au pas $h = 1/2c$. Nous verrons que dans la méthode que nous avons mise au point (chapitre IX) les deux représentations nous conduiront au même résultat.

tel que l'écart

$$(VIII.16) \quad \sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [B_c^n(x) * f(x) - e(x)]^2 dx$$

soit minimum .

On commettrait là une erreur. En effet, le développement $B_c^n(x)$ qui rend minimum l'écart σ^2 ci-dessus a une T.F. $\hat{B}_c^n(\mu)$ qui rend minimum l'écart :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{B}_c^n(\mu) \times \hat{f}(\mu) - \hat{e}(\mu)]^2 d\mu ,$$

mais, comme $\hat{f}(\mu)$ et $\hat{e}(\mu)$ ne possèdent pas de fréquences supérieures à a , l'expression ci-dessus s'écrit :

$$(VIII.16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \int_{-a}^{+a} [\hat{B}_c^n(\mu) \times \hat{f}(\mu) - \hat{e}(\mu)]^2 d\mu = \sigma_n^2(a) ,$$

La fonction $\hat{B}_c^n(\mu)$ rend donc minimum l'écart entre $\hat{B}_c^n(\mu) \times \hat{f}(\mu)$ et $\hat{e}(\mu)$ sur le domaine $[-a, +a]$. Par conséquent, sur ce domaine $[-a, +a]$, $\hat{B}_c^n(\mu)$ et la fonction recherchée $\hat{b}_c^n(\mu)$ sont des fonctions très proches. L'une, $\hat{b}_c^n(\mu)$, rend l'écart σ^2 petit, l'autre, $\hat{B}_c^n(\mu)$ le rend minimum. Mais pour $c \geq |\mu| \geq a$, domaine où nous recherchons la restitution de $\hat{b}(\mu)$, nous ne savons rien du comportement de $\hat{B}_c^n(\mu)$: en fait elle peut s'écarter notablement de $\hat{b}_c^n(\mu)$.

3.1.4) Application numérique ,

A titre d'exemple considérons les fonctions suivantes :

$$\hat{b}_c(\mu) = \text{sinc } 2\mu ,$$

$$\hat{f}(\mu) = \begin{cases} 1 - 2|\mu| & \text{pour } \mu < 0.5, \\ 0 & \text{pour } \mu > 0.5. \end{cases}$$

La fréquence de coupure est ici : $a = 0.5$;

$$\hat{e}(\mu) = \text{sinc } 2\mu \times (1 - 2|\mu|) \quad ;$$

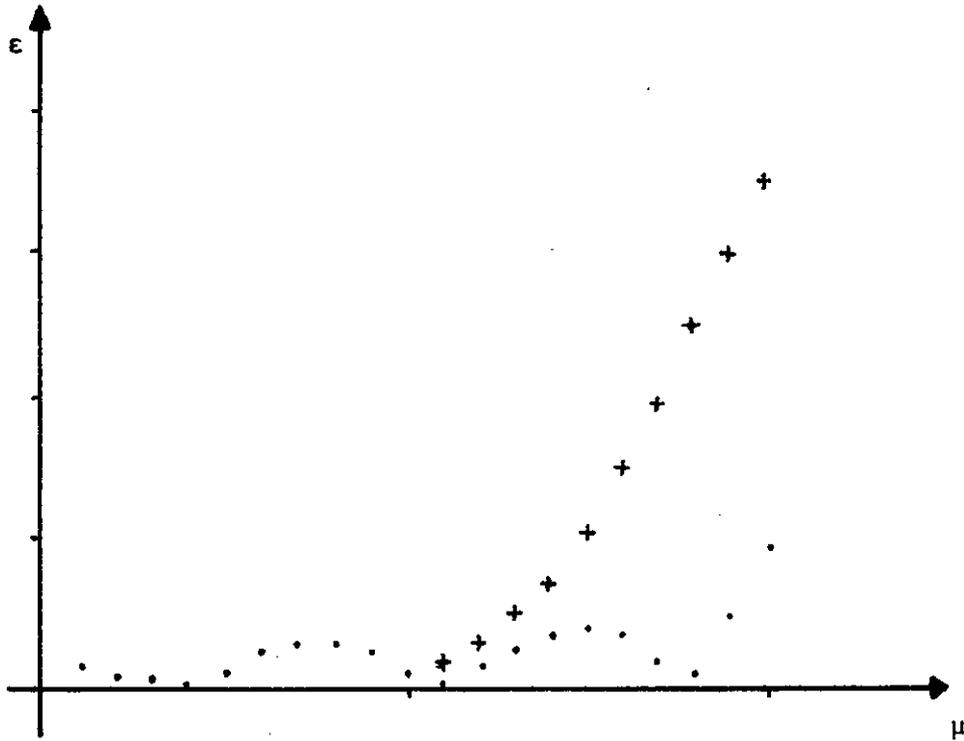


figure 23

Valeurs absolues des écarts $|\varepsilon|$ sur $[0, +1]$ entre la fonction $\hat{b}(\mu) = \text{sinc } 2\mu$ et : $(+).\hat{b}_1^3(\mu)$ approximation à 3 termes $\sum b_p \cos p\pi\mu$ sur $[0, 0,5]$ de $\hat{b}(\mu)$; les écarts sont négligeables sur $[0, 0,5]$ à l'échelle de la figure ; par contre, ils sont importants sur $[0,5, 1]$ là où on cherche à restituer $\hat{b}(\mu) \dots \hat{b}_1^3(\mu)$ approximation à 3 termes $\sum b_p \cos p\pi\mu$ sur $[0, 1]$, de $\hat{b}(\mu)$; les écarts sont de même importance sur tout l'intervalle ; l'intervalle $[0,5, 1]$ est mieux restitué.

Connaissant $\hat{e}(\mu)$ et $\hat{f}(\mu)$, nous nous proposons de déterminer la combinaison à 3 termes $\hat{B}_c^n(\mu)$ des bases $\cos p\pi\mu$, susceptible de représenter $\hat{b}(\mu)$ sur l'intervalle $[-1, +1]$ ($c = 1$).

Pour déterminer $B_c^n(\mu)$, nous cherchons le minimum de l'écart quadratique $\sigma^2(a)$ défini par la relation (VIII.16) :

$$\hat{B}_c^n(\mu) = 0,1591 + 0,6754 \cos \pi\mu + 0,1567 \cos 2\pi\mu$$

avec

$$\sigma^2(a) = \sigma_{\min}^2(0.5) = 1.10^{-6} .$$

L'écart $\sigma^2(c)$ correspondant :

$$\sigma^2(c) = \int_{-c}^{+c} [\hat{b}(\mu) - \hat{B}_c^n(\mu)]^2 d\mu ,$$

est beaucoup plus grand, il vaut :

$$\sigma^2(c) = 2.93 .$$

L'écart $\sigma_n^2(a)$ étant l'écart minimum, nous pouvons nous attendre à ce que $\hat{B}_c^n(\mu)$ approche correctement $\hat{b}(\mu)$ sur $[-0.5, +0.5]$. La figure 23 nous l'indique clairement. Par contre l'écart $\sigma^2(c)$ qui lui correspond (2.93) est relativement élevé : $\hat{B}_c^n(\mu)$ s'écarte sensiblement de $\hat{b}(\mu)$ sur $(+a < |\mu| < c)$ c'est à dire là où, précisément, nous cherchons à restituer $\hat{b}(\mu)$.

A titre de comparaison, nous avons également calculé l'approximation en moyenne $\hat{b}_c^n(\mu)$ de $\hat{b}(\mu)$ sur $[-c, +c]$. Cette combinaison, solution de l'équation (VIII.15)_b, est donnée par :

$$\hat{b}_c^n(\mu) = 0.225 + 0.5624 \cos \pi\mu + 0.2387 \cos 2\pi\mu$$

avec $\sigma^2(c) = \sigma_{\min}^2(c) = 0.170 ,$

l'écart $\sigma^2(a)$ correspondant vaut alors $\sigma^2(a) = 0.0129$.

$\hat{b}_c^n(\mu)$ rend bien $\sigma^2(a)$ petit, mais il ne confère pas à cet écart la valeur minimale que nous venons de calculer $\sigma_{\min}^2(a) = 1.10^{-6}$. Par contre $\sigma^2(c)$ se trouve minimum. De ce fait, $\hat{b}_c^n(\mu)$ approche $\hat{b}(\mu)$ sur tout l'intervalle $[-c, +c]$ (figure 23).

3.1.5)

Nous pouvons résumer la discussion précédente :

Lorsque l'enregistrement est parfait (non bruité) le développement $b_c^n(x)$ cherché doit rendre petit l'écart

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [b_c^n(x) * f(x) - e(x)]^2 dx,$$

cette condition nécessaire n'est toutefois pas suffisante.

En particulier, nous avons constaté que $b_c^n(x)$ ne s'identifie pas au développement $B_c^n(x)$ qui minimise σ^2 .

En présence de bruit, nous pouvons tirer les mêmes conclusions. On peut également les appliquer au cas de fonctions impaires, et par suite au cas des fonctions quelconques.

3.2) Revue critique des différentes méthodes.

Une des principales causes d'échec des méthodes de déconvolution, introduisant comme inconnues les échantillons de la fonction $b(x)$, vient précisément de ce que leurs auteurs confondent la fonction $b_c^n(x)$ et la fonction $B_c^n(x)$ qui minimise $\sigma_n^2(a)$.

3.2.1)

Nous pouvons expliquer ainsi les remarques faites par J.P. Scheidecker (J.P. Scheidecker, [1968]). Ce dernier emploie une méthode de moindres carrés très élaborée pour minimiser l'expression (VIII.15) mais ne parvient pas aux résultats escomptés. Citons ici ses conclusions : " en fait, dans la pratique, nous ne multiplions pas exactement la fonction F^* par la fonction caractéristique de $(-L, L)^*$, mais par une fonction \mathcal{D} inconnue, qui vaut 1 sur $(-\Omega, \Omega)^*$, qui approche 1 sur le reste de l'intervalle $(-L, L)$ jusqu'à valoir 0 en $|\mu| = L$ " (figure 24).

* $F \rightarrow \hat{b}(\mu)$

$(-L, +L) \rightarrow [-c, +c]$

$(-\Omega, \Omega) \rightarrow [-a, +a]$

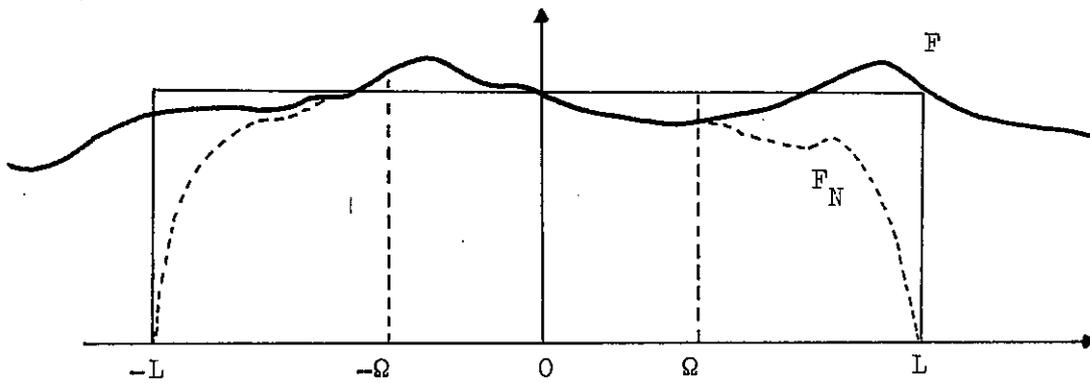


figure 24 - tirée de Scheidecker , [1969].

3.2.2)

3.2.2.1) Une erreur analogue peut se glisser dans les nombreuses méthodes issues du processus itératif proposé par Bürger et Van Cittert (Bürger et Van Cittert, [1936]). Rappelons tout d'abord le schéma de calcul proposé par ces auteurs soit $b^{(n)}$ l'approximation de b fournie par la $n^{\text{ième}}$ itération, on peut en déduire :

$$e^{(n)}(x) = b^{(n)}(x) * f(x) , \quad n^{\text{ième}} \text{ approximation de } e ;$$

$$b^{(n+1)}(x) = b^{(n)}(x) + \underbrace{[e(x) - e^{(n)}(x)]}_{\hat{\epsilon}(n)} .$$

La première approximation $b^{(1)}$ est choisie égale à $e(x)$. Dans ce cas, la suite des opérations effectuées peut s'écrire dans le domaine de Fourier, sous la forme :

$$\hat{b}^{(1)} = \hat{e} ,$$

$$\hat{b}^{(2)} = b^{(1)} + \hat{e} - b^{(1)} \times \hat{f} = \hat{e} + \hat{e}(1 - \hat{f}) ,$$

$$\hat{b}^{(3)} = b^{(2)} + \hat{e} - b^{(2)} \times \hat{f} = \hat{e} + \hat{e}(1 - \hat{f}) + \hat{e}(1 - \hat{f})^2 \dots$$

$$b^{(n)} = \hat{e} [1 + (1 - \hat{f}) + \dots + (1 - \hat{f})^{n-1}] .$$

donc :

$$b^{(n)} = \hat{e} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \hat{f})^j$$

Dès 1933, ces auteurs signalent que leur méthode converge si, et seulement si : $|1 - \hat{f}| < 1$, strictement, ce qui, en particulier, impose $\hat{f}(\mu) \neq 0$ pour tout μ .

En effet, lorsque cette condition est réalisée on peut écrire :

$$\frac{1}{\hat{f}} = \frac{1}{1 - (1 - \hat{f})} = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \hat{f})^j$$

et :

$$\limite \ n \rightarrow \infty \quad \hat{b}^{(n)}(\mu) = \frac{\hat{e}}{\hat{f}} = \hat{b}(\mu) .$$

Mais la condition $|1 - \hat{f}(\mu)| < 1$ n'est réalisée que sur le domaine $[-a, +a]$: cette méthode ne peut donc permettre de prolonger $\hat{b}(\mu)$ au delà de ce domaine.

3.2.2.2)

Non seulement la méthode que nous venons d'exposer ne peut pas nous permettre de prolonger $\hat{b}(\mu)$ au delà du domaine $[-a, +a]$, mais elle peut aussi conduire l'utilisateur, qui ne l'a pas analysée, à des résultats erronés. Nous nous proposons d'en convaincre le lecteur par une rapide analyse des conditions dans lesquelles se déroule généralement le calcul numérique s'y afférant.

L'expérimentateur possède en effet des points d'enregistrement $e(x)$ échantillonnés à un pas h en général inférieur à $1/2a$. Il est naturellement amené à adopter pour les approximations successives $b^{(n)}(x)$ le même pas h . Dans ces conditions les calculs se font effectivement sur des fonctions $e_{h,m}(x)$, $b_{h,m}^{(n)}(x)$, $e_{h,m}^{(n)}(x)$, qui sont des approximations à l'aide des bases $\text{sinc}(x - ph)/h$ des fonctions $e(x)$, $b^{(n)}(x)$ et $e^{(n)}(x)$.

Dans le domaine de Fourier, les transformées respectives de ces fonctions sont de domaine $[-1/2h, +1/2h]$, elles satisfont à la relation :

$$\hat{b}_{n,h}^{(n)}(\mu) = \hat{e}_{m,h}(\mu) \times \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \hat{f}(\mu))^j \quad \text{pour } -\frac{1}{2h} \leq \mu \leq \frac{1}{2h} .$$

- pour $|\mu| < a$, nous avons toujours :

$$\limite \quad n \rightarrow \infty \quad \sum_{j=0}^{n-1} |1 - \hat{f}(\mu)|^j = \frac{1}{\hat{f}(\mu)} \quad ,$$

et :

$$\hat{b}_{m,h}^{(n)}(\mu) = \hat{e}_{m,h}(\mu) \cdot \frac{1}{\hat{f}(\mu)} \cong \hat{b}(\mu) \quad ;$$

- pour $|\mu| \geq a$, $\hat{f}(\mu) = 0$ et $|1 - \hat{f}(\mu)| = 1$, nous avons alors :

$$\hat{b}_{m,h}^{(n)}(\mu) = \hat{e}_{m,h}(\mu) \times \sum_{j=0}^{n-1} (1)^{j|} \quad ,$$

$$\hat{b}_{m,h}^{(n)}(\mu) = \hat{e}_{m,h}(\mu) \times \frac{n(n-1)}{2} \quad .$$

Or , $\hat{e}_{m,h}(\mu)$ n'est pas identiquement nulle pour $\frac{1}{2h} > |\mu| \geq a$.
En un point d'abscisse μ , et pour m et h donnés nous pouvons donc écrire :

$$\hat{b}_{m,h}^{(n)}(\mu) = \varepsilon_{m,h}(\mu) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \text{cste} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \quad .$$

Non seulement $\hat{b}_{m,h}^{(n)}(\mu)$ ne converge pas vers $\hat{b}(\mu)$ lorsque n croit, mais elle laisse apparaître des oscillations dont l'amplitude va en croissant avec n . Il y a donc apparition dans la restitution $\hat{b}_{h,m}^{(n)}(x)$ de fréquences élevées n'appartenant pas à $b(x)$.

3.2.2.3)

Il faut donc être prudent dans le choix de h . Pour obtenir une fonction $\hat{b}_{h,m}^{(n)}(\mu)$ satisfaisante, il faut que le support de cette fonction $[-1/2h, +1/2h]$ soit confondu avec le domaine $[-a, +a]$, ce qui entraîne :

$$h = 1/2a \quad .$$

Dans ces conditions, les approximations $b_{h,m}^{(n)}(x)$ ne divergent pas lorsque le nombre d'itérations croît. Toutefois, nous constatons qu'il est alors impossible de restituer $\hat{b}(\mu)$ à l'extérieur de $[-a, +a]$.

4 - METHODES PLUS ELABOREES -

Lorsque certaines caractéristiques du signal $b(x)$ sont connues, il est possible de rejeter un certain nombre de solutions inadéquates de l'équation de convolution et de cerner le signal $b(x)$ initial (chapitre VII . § 4) .

Nous allons brièvement analyser ici les méthodes qui, dans ce but, ont exploité des informations connues à priori .

4.1)

4.1.1) J.C. Leclerc (J.C. Leclerc, [1969]) utilise la méthode de Bürger et Van Cittert que nous venons d'analyser. (cf § 3.2.2.).

Il constate que la fonction $b(x)$ vers laquelle il désire converger est une répartition d'énergie donc une fonction non négative. Cette constatation l'amène à rejeter les valeurs négatives des échantillons des différentes approximations. Pour cela, il remet systématiquement à zéro ces valeurs. Il signale, toutefois, que sa méthode ne converge vers une solution satisfaisante que lorsque la largeur du profil instrumental (fonction d'appareil) est petite vis à vis de celle du profil observé , c'est-à-dire lorsque $\hat{f}(\mu)$ coupe peu de fréquences $\hat{b}(\mu)$. Cette constatation, remarquons-le , est en accord avec l'analyse que nous venons de faire.

4.1.2)

Cette méthode marque donc un progrès dans les processus de restitution de $b(x)$. Nous devons cependant l'accueillir avec réserve. En effet, l'introduction d'une condition de non négativité sur la fonction résultat doit se faire avec prudence. Nous avons vu qu'échantillonner au pas h la fonction recherchée $b(x)$, revient à chercher non plus $b(x)$, mais :

$$b_c(x) = b(x) * \text{sinc}(x - ph)/h,$$

$$b_c(x) = b(x) * \text{sinc} 2c(x - p/2c),$$

ou, ce qui revient au même ; $\hat{b}_c(\mu) = \hat{b}(\mu) \times \text{rect} \frac{\mu}{2c}$

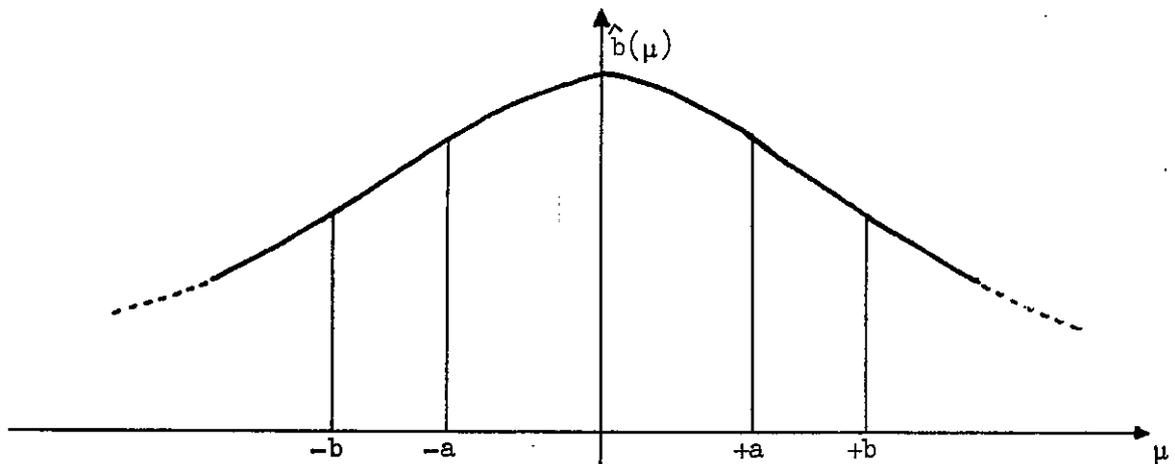


figure 25

Si $\hat{b}(\mu)$ s'étend loin au delà de $[-c, +c]$, (figure 25), nous ne pouvons pas prétendre que $b_c(x) = b(x)$. En particulier, nous ne pouvons pas prétendre que $b_c(x)$ reste comme $b(x) > 0$: la remarque de Leclerc s'explique alors aisément.

4.2)

Signalons aussi la variante de la même méthode utilisée par Jansson et son équipe, [1970]. Ils enregistrent des spectres en absorption et constatent qu'il est nécessaire de rejeter toute solution qui correspond à une absorption inférieure à 0% ou supérieure à 100%. Dans ce but ils utilisent une pondération des différentes itérations.

Nous donnons ci dessous les principales étapes de leur calcul .

Soit:

$$e(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x' - x) b(x') dx ,$$

qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$e_i = \sum_{l=1}^n f_{il} b_l .$$

L'approximation $b^{k+1}(x)$ d'ordre $k+1$ est donnée par :

$$b_i^{(k+1)} = b_i^k + \frac{x_i}{f_{i0}} \left[e_i - \sum_{l=1}^{i-1} f_{il} b_l^{k+1} - \sum_{l=i}^n f_{il} b_l^k \right] ,$$

avec : $x_i = \left\{ 1 - 2 \left| b_i^{(k)} - \frac{1}{2} \right| \right\}$.

L'effet d'un tel paramètre χ_i est une correction pondérée . Cette pondération est maximale à 50% d'absorption ($b_i^{(k)} = 0.5$) . Elle est égale à 0 pour une absorption de 0% ou 100% ($b_i^{(k)} = 0$, $b_i^{(k)} = 1$) , ces auteurs rejettent ainsi les solutions qui n'ont pas de sens physique, d'une façon plus souple que ne le permet la méthode précédente .

Remarquons cependant que lorsqu'un coefficient b_i , atteint les valeurs 0 ou 100 au cours d'une des premières itérations, il conserve cette valeur lors de toutes les itérations successives.

Nous constatons qu'il y a donc risque de fausser le résultat dès le départ.

D'autre part, la remarque que nous avons faite précédemment (§ 4.1.2) est ici encore valable et le choix du pas d'échantillonnage h doit être fait avec grande prudence.

4.3)

4.3.1)

Y. Biraud (Y. Biraud, [1970]) utilise une méthode originale pour exploiter à la fois l'information de la non négativité de $b(x)$ et le support fini de sa T.F. $\hat{b}(\mu)$. En effet, il constate que la plupart des signaux qu'il enregistre ont un spectre de Fourier négligeable à l'extérieur d'un domaine $[-\mu_{\min} , +\mu_{\min}]$. Compte tenu de ces deux hypothèses, il établit que le spectre $\hat{b}(\mu)$ d'une telle fonction $b(x)$ obéit aux relations suivantes :

a) $\hat{b}(\mu) = \hat{g}(\mu) * g(\mu)$, dans laquelle $\hat{g}(\mu)$ est une fonction de domaine $[\mu_{\min}/2 , +\mu_{\min}/2]$;

$$(VIII.12) \quad \underline{\beta)} \quad | \hat{b}(\mu) / \hat{b}(0) | < \cos \frac{\pi}{(2 + \{ \mu_s / \mu \})}$$

où le symbole $\{ t \}$ désigne la partie entière de t et μ_s une borne supérieure de μ_{\min} (relation démontrée par P. Boas et Jr. Kac , [1945]).

4.3.2) Restitution de $\hat{b}(\mu)$ à l'extérieur de $[-a, +a]$.

Y. Biraud propose de reconstituer $\hat{b}(\mu)$ par l'intermédiaire de $\hat{g}(\mu)$. Il effectue ce calcul en trois étapes:

a) calcul des T.F. $\hat{e}(\mu)$ de l'enregistrement $e(x)$, et $\hat{f}(\mu)$ du profil instrumental $f(x)$;

b) calcul de $\hat{b}(\mu)$ par simple division:

$$\hat{b}(\mu) = \hat{e}(\mu) / \hat{f}(\mu).$$

Nous avons vu (chapitre VI, § 2) que cette manière d'opérer introduit sur $\hat{b}(\mu)$ un bruit proportionnel à $\frac{1}{\hat{f}(\mu)}$. Il est nécessaire de rejeter les fréquences $\hat{b}(\mu)$ les plus bruitées. Celles-ci ne satisfont plus à la relation (VIII.12). Or dans cette relation μ_s est une inconnue. On peut, soit l'estimer à partir des fréquences les moins entachées de bruit, c'est-à-dire des fréquences proches de $\mu = 0$ (pour lesquelles $\hat{f}(\mu) \approx 1$), soit adopter $\mu_s = a$, fréquence de coupure de $f(x)$.

En effet, par hypothèse, on a $a < \mu_s$, ce qui entraîne :

$$\cos \frac{\pi}{(2 + \{ a/\mu \})} < \cos \frac{\pi}{(2 + \{ \mu_s/\mu \})}.$$

La condition $\hat{b}(\mu) / \hat{b}(0) < \cos \pi / (2 + \{ a/\mu \})$ sera donc restrictive par rapport à la condition (VIII.12). Elle permet d'éliminer plus sûrement les fréquences les plus bruitées. On obtient donc $\hat{b}(\mu)$ sur un domaine $[-\mu_c, +\mu_c]$ plus petit que $[-a, +a]$.

c) calcul de $\hat{g}(\mu)$:

A ce stade des calculs, on impose à $\hat{g}(\mu)$ de satisfaire à la condition

$$(VIII.13) \quad (\hat{g}(\mu) * \hat{g}(\mu))_{\mu=0} = \hat{b}(0)$$

et on définit les écarts suivants :

$$\alpha) \quad \sigma^2 = \frac{1}{2\mu_c} \int_{-\mu_c}^{+\mu_c} (\hat{b}(\mu) - \hat{g}(\mu) * \hat{g}(\mu))^2 d\mu,$$

qui représente l'écart quadratique moyen sur $[-\mu_c, +\mu_c]$ entre la

courbe $\hat{b}(\mu)$ et la fonction restituée $\hat{b}'(\mu) = \hat{g}(\mu) * \hat{g}(\mu)$;

$$\beta) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{2\mu_c} \int_{-\mu_c}^{+\mu_c} \hat{n}^2(\mu) d\mu \quad \text{qui, sur}$$

le même domaine, représente l'écart quadratique moyen des fluctuations du bruit .

La recherche de $\hat{g}(\mu)$ s'effectue ensuite à l'aide d'un procédé doublement itératif dont le schéma est le suivant :

- agrandissement successif du domaine de $\hat{g}(\mu)$ à partir de $c = \mu_c/2$;
- recherche sur les domaines $[-c - k\Delta, +c + k\Delta]$ ($k = 0, 1, \dots$) de la fonction qui, satisfaisant à la relation (VIII.13), minimise l'écart σ^2 .

Le processus itératif est arrêté dès que $\hat{g}(\mu)$ répond aux caractéristiques suivantes :

$$\underline{a} : | \hat{g}(\mu) * \hat{g}(\mu) |_{\mu=0} = \hat{b}(0),$$

$$\underline{b} : \int_{-\mu_c}^{+\mu_c} | \hat{b}(\mu) - \hat{g}(\mu) * \hat{g}(\mu) |^2 d\mu < \sigma_n^2 .$$

A cette étape, $\hat{g}(\mu)$ est de domaine $[\Delta\mu = c - M\delta, +c + M\delta]$ et il n'existe pas de fonctions à support inférieur à $\Delta\mu$ qui satisfont aux relations ci-dessus.

4.3.2)

En appliquant cette méthode, Biraud accroît sensiblement la résolution dans des enregistrements simples . Cependant, nous ferons les remarques suivantes :

- Cette méthode ne peut s'appliquer qu'à des signaux dont les spectres de Fourier couvrent une étendue de l'ordre de 2 à 3 fois le domaine des fréquences spatiales.

- Il semble difficile de tenir compte d'autres informations. La méthode est vraiment "spécialisée" dans l'exploitation de la non négativité du signal.

- mais surtout, il est impossible de contrôler la justesse du résultat obtenu et de déterminer le domaine $\Delta \mu$ sur lequel le prolongement obtenu est significatif. De plus, nous pensons qu'on améliorerait la méthode en minimisant non pas l'écart σ^2 , mais l'écart :

$$\int_{-\mu_c}^{+\mu_c} \{ \hat{f}(\mu) [\hat{b}(\mu) - \hat{g}(\mu) * \hat{g}(\mu)] \}^2 d\mu \quad . \quad \text{En effet,}$$

une telle pondération accorde moins d'importance aux fréquences $\hat{b}(\mu)$ pour lesquelles $\hat{f}(\mu)$ est faible, c'est à dire les fréquences les plus bruitées. La fonction $\hat{g}(\mu)$ qu'on calculerait ainsi correspondrait mieux à la réalité.

5 - CONCLUSIONS -

Nous avons analysé les différents principes des méthodes de déconvolution utilisées à ce jour. Nous avons déduit de cette étude les constatations suivantes:

- Elles n'utilisent pas toutes les informations qui peuvent être connues a priori.
- Elles sont dangereuses à utiliser car elles ne comportent aucun contrôle concernant la justesse du résultat obtenu. Nous avons en particulier souvent remarqué qu'elles avaient tendance à restituer des fréquences $\hat{b}(\mu)$ au delà de la limite de restitution compatible avec le bruit présent dans l'enregistrement.

Dans la méthode que nous allons exposer, nous nous sommes efforcés de combler ces deux lacunes, tout en conservant les avantages que pouvaient présenter l'une ou l'autre de ces méthodes.

CHAPITRE IX

PRINCIPE D'UNE METHODE DE DECONVOLUTION PARTIELLE

1 - EXPOSE DU PROBLEME -

Nous nous proposons de rechercher une nouvelle représentation du signal enregistré sous la forme :

$$(IX.1) \quad b_c^n(x) = \sum_{p=-n}^{+n} b_p \cdot \text{sinc } 2c (x - p/2c)$$

Cette fonction est définie par les propriétés suivantes :

$$\alpha) - \text{sa T.F. } \hat{b}_c^n(\mu) = \sum_{p=-n}^{+n} b_p e^{-j2\pi\mu p/c} \cdot \text{rect } \frac{\mu}{2c}$$

appartient à l'ensemble \mathcal{E} des combinaisons linéaires à n termes des fonctions de base $e^{-j2\pi\mu p/c} \cdot \text{rect } \frac{\mu}{2c}$, soit à l'ensemble des fonctions :

$$\hat{\psi}_N = \sum_{p=-n}^{+n} \psi_p e^{-j2\pi\mu p/c} \cdot \text{rect } \frac{\mu}{2c} \quad .$$

$$\beta) - \hat{b}_c^n(\mu) \text{ est de domaine } [-c, +c] \text{ , } c \geq a \quad .$$

$\gamma) -$ sur $[-c, +c]$, $\hat{b}_c^n(\mu)$ est la fonction $\hat{\psi}_N(\mu)$ qui minimise l'écart quadratique ;

$$(IX.2) \quad \sigma^2(c) = \int_{-c}^{+c} [\hat{b}(\mu) - \hat{\psi}_N(\mu)]^2 d\mu \quad .$$

Cependant, nous ne pouvons avoir accès directement à $\hat{b}_c^n(\mu)$ par le calcul de cet écart. En effet, non seulement nous ne connaissons $\hat{b}(\mu)$ que sur le domaine $[-a, +a]$ ($a \leq c$), mais encore sur ce domaine, $\hat{b}(\mu)$ est pondérée par $\hat{f}(\mu)$ et altérée par $\hat{n}(\mu)$.

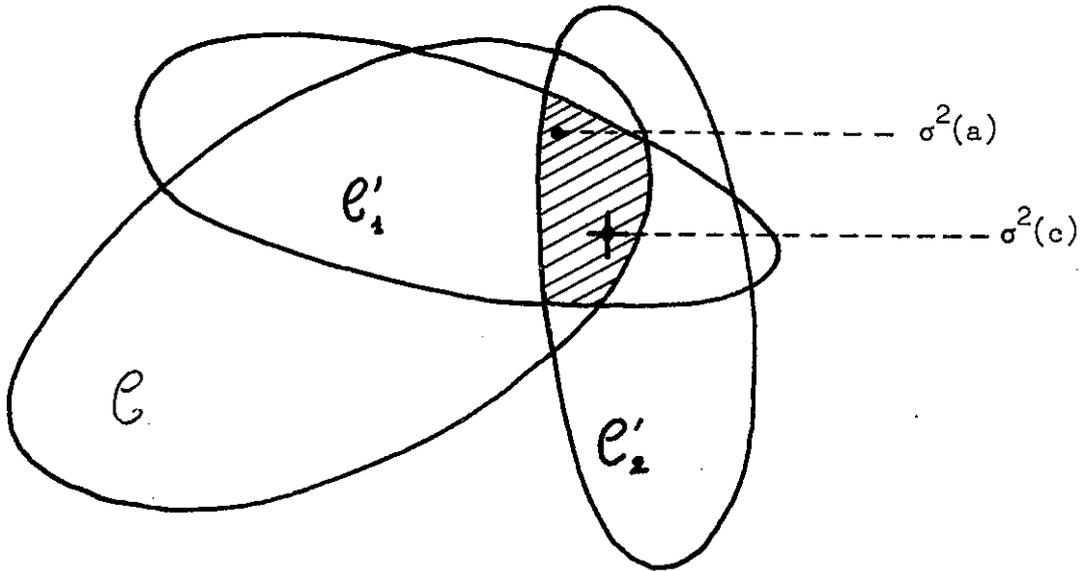


figure 26

- \mathcal{E} : ensemble des développements $\hat{\Psi}_N(\mu)$ tels que

$$\sigma^2(a) = \int_{-a}^{+a} (\hat{e}(\mu) - \hat{\Psi}_N(\mu) \times \hat{f}(\mu))^2 d\mu < \sigma^2 \text{ donné,}$$

- \mathcal{E}'_j : ensemble des développements $\hat{\Psi}_N(\mu)$ possédant une propriété connue a priori de $\hat{b}_c(\mu)$,

- en grisé: intersection dans laquelle se trouve $\hat{b}_c^N(\mu)$. Dans cette classe on confondra $\hat{b}_c^n(\mu)$ (qui minimise $\sigma^2(c)$) avec le développement $\hat{\Psi}_N(\mu)$ qui minimise $\sigma^2(a)$.

Précédemment, nous avons vu (chapitre VIII, § 3.1) que le développement $\hat{b}_c^n(\mu)$, confère à l'écart

$$\sigma^2(a) = \int_{-a}^{+a} [\hat{e}(\mu) - \hat{\Psi}_N(\mu) * \hat{f}(\mu)]^2 d\mu,$$

$$\sigma^2(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e(x) - \Psi_N(x) * f(x)]^2 dx$$

une valeur qui, tout en restant faible, ne se confond pas avec l'écart minimum $\sigma_{\min}^2(a)$. Cet écart n'étant pas l'écart minimum, il existe non pas une fonction mais un sous ensemble \mathcal{C} de \mathcal{E} qui se définit par cette valeur $\sigma^2(a)$. Pour distinguer $\hat{b}_c^n(\mu)$ parmi les éléments de l'ensemble \mathcal{C} , il nous faut disposer d'informations supplémentaires. Toute propriété de $\hat{b}_c^n(\mu)$ connue a priori et se traduisant par une propriété analytique de $\hat{b}_c^n(\mu)$, définit une classe \mathcal{C}' de développements. On peut en déduire que $\hat{b}_c^n(\mu)$ appartient à l'intersection \mathcal{J} des classes \mathcal{C}' et \mathcal{C} .

Si l'on connaît k propriétés de $\hat{b}_c^n(\mu)$ et les classes \mathcal{C}'_k des fonctions $\hat{\Psi}_N$ correspondantes, leur intersection \mathcal{J} , qui contient $\hat{b}_c^n(\mu)$ devient une classe étroite de fonctions. Dans cette classe d'extension réduite, on peut, sans erreur importante, confondre la solution recherchée $\hat{b}_c^n(\mu)$ avec le développement $\hat{\Psi}_N$ qui minimise l'écart $\sigma^2(a)$. (cf. figure 26).

En pratique, on opère dans l'espace "conjugué", et l'on recherche dans l'ensemble $\mathcal{J}(x)$, le développement $b_c^n(x)$ qui minimise :

$$(IX.3) \quad \sigma^2(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e(x) - \Psi_N(x) * f(x)]^2 dx.$$

2 - EXPLOITATION DES INFORMATIONS CONNUES A PRIORI -

Les informations que l'on possède a priori sur les signaux sont diverses et dépendent de la nature du problème traité. Les plus banales sont les suivantes :

a) $b(x)$ est une fonction à support fini. (Un simple examen de $e(x)$ permet de fixer les limites approximatives de ce support).

$\Re\{b(x)\} \geq 0$ - . Les signaux les plus souvent utilisés en spectroscopie sont, en effet, des répartitions d'énergie.

Dans d'autres problèmes, tels ceux qui concernent les profils de raie, les informations peuvent être plus précises. Par exemple, le signal recherché décroît de part et d'autre du maximum central. Il est souvent symétrique.

Nous allons tout d'abord montrer comment les deux premiers types d'informations peuvent être exploités. Nous verrons ensuite que les méthodes ainsi mises en oeuvre permettent d'exploiter aussi, bien d'autres données et, en particulier, celles que nous venons de citer.

3 - $b(x)$ EST UNE FONCTION NON NEGATIVE A SUPPORT FINI -

3.1) Lorsque nous recherchons $b_c(x)$ sous la forme

$$b_c(x) = b(x) * 2c \operatorname{sinc} 2cx ,$$

nous perdons le bénéfice des deux informations ci-dessus. La fonction $\operatorname{sinc} 2cx$ a, en effet, des pieds négatifs relativement grands : le premier est à 0.2, ils s'atténuent très lentement. Il en résulte que $b_c(x)$ n'a aucune raison d'être une fonction partout positive. Il est en outre difficile de fixer le nombre N des bases $\operatorname{sinc} (x - ph)/h$ nécessaires pour la décrire convenablement.

Pour éviter cette perte d'informations, nous nous proposons de rechercher une autre représentation $b'_c(x)$ de $b(x)$ dont la définition sera la suivante :

$$b'_c(x) = b(x) * A_c(x) .$$

Nous désignons ici par $A_c(x)$ une fonction choisie à priori, possédant les propriétés suivantes :

α) - $A_c(x)$ est une fonction de type réponse impulsionnelle dont la finesse est du même ordre que celle de $\operatorname{sinc} 2cx$. Sa T.F. a pour domaine $[-c, +c]$ ($c > a$).

$\beta) - A_c(x)$ est très fortement "apodisée" : le domaine de $b'_c(x)$ est donc pratiquement égal à la somme des domaines de $b(x)$ et du "corps" de $A_c(x)$.

$\gamma) - A_c(x)$ est enfin partout non négative [figure 27] .

Remarques.

Cette fonction $A_c(x)$ est du type de celles que nous avons introduites dans le chapitre VII (§ 5). Ces fonctions, rappelons le, permettent de déterminer non seulement le gain en résolution qu'il est raisonnable de rechercher, compte tenu du bruit de l'enregistrement, mais encore d'avoir une estimation de l'exactitude des résultats obtenus.

La fonction $b'_c(x)$ ainsi définie constitue, comme $b_c(x)$, une meilleure représentation de $b(x)$ que ne l'est $e(x)$ mais, à la différence de $b_c(x)$, $b'_c(x)$ est, à la précision des calculs*, une fonction à support fini. $b'_c(x)$ et sa T.F. $\hat{b}'_c(\mu)$ sont donc pratiquement toutes deux à support fini.

3.2) Propriétés de $b'_c(x)$.

$b'_c(x)$ n'est plus solution de l'équation de convolution

$$e(x) = b(x) * f(x).$$

Toutefois, nous pouvons déterminer une autre équation de convolution admettant $b'_c(x)$ pour solution.

*

En fait $b'_c(x)$ est une fonction à support $-\infty, +\infty$, mais, par suite du choix que nous avons fait de $A_c(x)$ les valeurs de $b'_c(x)$ sont négligeables à l'extérieur d'un domaine fini.

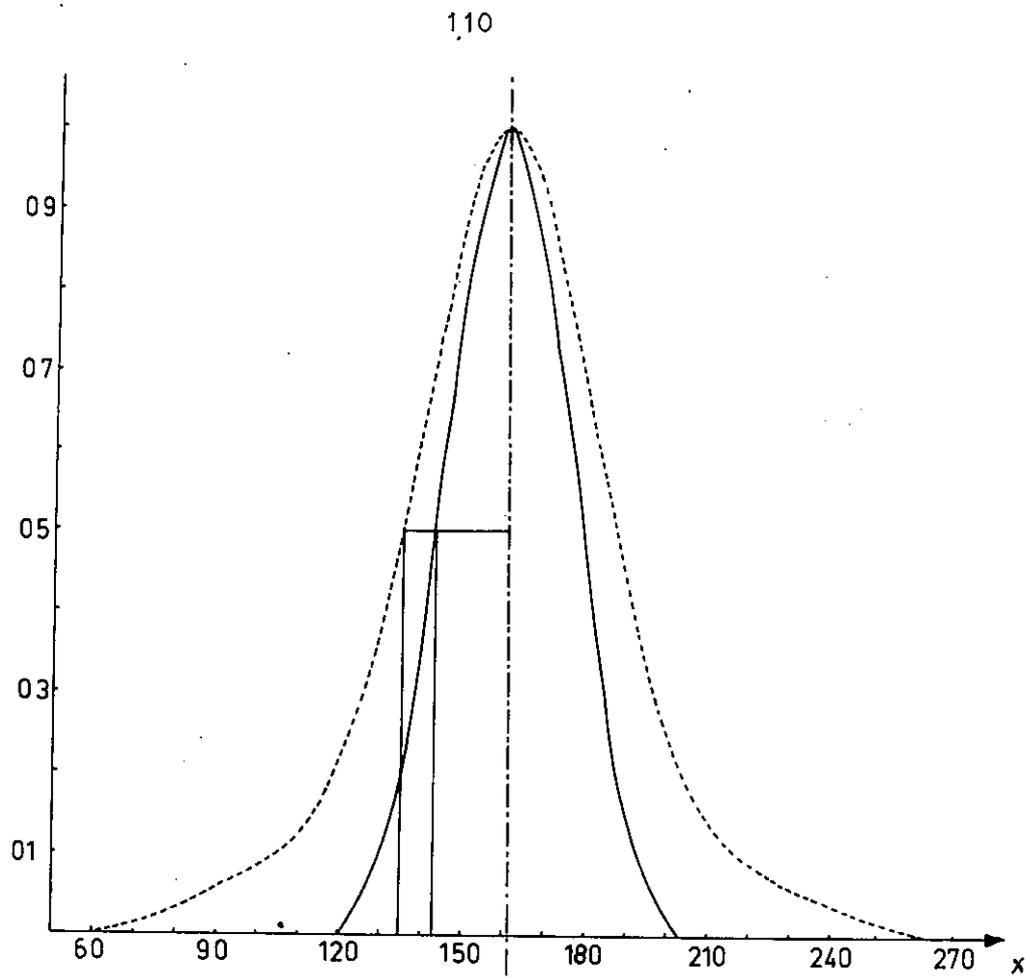


figure 27

- en pointillé : fonction d'appareil $f(x)$;

- en traits pleins : fonction $A_c(x)$.

En tout point, $A_c(x) < f(x)$.

En effet,

$$b'_c(x) * f(x) = e'(x) \quad , \quad \text{où } e'(x)^* \text{ n'est autre que}$$

$$e'(x) = b(x) * A_c(x) * f(x) = e(x) * A_c(x) .$$

Le processus de recherche de $b'_c(x)$ à partir de $e'(x)$ est donc le même que celui de $b_c(x)$ à partir de $e(x)$. Cependant, nous connaissons à présent un caractère distinctif de $b'_c(x)$ soit :

$$b'_c(x) \geq 0 \quad .$$

3.3) Détermination de $b'_c(x)$.

Comme précédemment, nous recherchons $b'_c(x)$ sous la forme :

$$b'_c(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b'_c\left(\frac{p}{2c}\right) \text{ sinc } 2c(x - p/2c) \quad .$$

Cependant, si $A_c(x)$ a les caractères que nous venons d'énoncer, $b'_c(x)$ est une fonction sans pieds de domaine pratiquement limité. Tous les termes d'échantillonnage sont pratiquement nuls à partir d'un certain ordre $N = 2n + 1$ que nous estimons par l'examen de $e'(x)$.

$$(IX.4) \quad b'_c{}^n(x) = \sum_{p=-n}^{+n} b'_c\left(\frac{p}{2c}\right) \cdot \text{ sinc } 2c(x - p/2c)$$

constitue donc une excellente approximation en moyenne quadratique de $b'_c(x)$ sur $-\infty, +\infty$. On en déduit que l'écart entre $b'_c(x)$ et $b'_c{}^n(x)$ est partout inférieur à une certaine borne $\varepsilon(n)$ (inconnue mais petite dès que n est assez grand). On a donc :

$$b'_c(x) - \varepsilon \leq b'_c{}^n(x) \leq b'_c(x) + \varepsilon .$$

En particulier, puisque $b'_c(x)$ est partout positif, les valeurs

* $e'(x)$, produit de convolution de $e(x)$ par $A_c(x)$ se calculera très aisément si nous représentons $A_c(x)$ par une combinaison linéaire à nombre fini de termes des bases $\text{ sinc } 2c(x - p/2c)$.

négatives de $b_c^{n'}(x)$ ne sauraient dépasser $\xi(n)$. Dans une première approche, nous posons que le développement cherché $b_c^{n'}(x)$ appartient à la classe des développements qui sont partout positifs.

3.4) $b_c'(x)$, telle que nous l'avons définie, est le produit de convolution de $b(x)$, fonction inconnue, par une fonction que nous connaissons $A_c(x)$. Jusqu'à présent, nous n'avons utilisé que partiellement cette information. Il est en effet possible de mieux l'exploiter grâce à un choix particulier de $A_c(x)$. Normons en effet $A_c(x)$ en posant $A_c(0) = f(0)$ et choisissons cette fonction telle que :

$$A_c(x) \leq f(x) \quad , \quad \text{pour tout } x \quad [\text{figure 27}] .$$

Si f est, comme b et A , une fonction non négative, nous pouvons écrire : $A_c(x) * b(x) \leq f(x) * b(x)$, soit :

$$b_c'(x) \leq e(x) \quad .$$

Grâce aux propriétés de $b_c^{n'}(x)$, une relation analogue s'applique à cette fonction :

$$b_c^{n'}(x) \leq e(x) \pm \xi(n) \quad ,$$

soit, dans une première étape :

$$(IX.5) \quad b_c^{n'}(x) \leq e(x)^* \quad .$$

Dans ces conditions, le développement :

$$b_c^{n'}(x) = \sum_{p=-n}^n b_p' \operatorname{sinc} 2c(x - p/2c) \quad ,$$

recherché est celui qui minimise l'écart $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [e'(x) - b_c^{n'}(x) * f(x)]^2 dx$

* Il est intéressant de posséder une telle borne supérieure pour les valeurs $b_c^{n'}(x)$. En effet, la pratique du calcul montre que les intensités relatives dans l'objet restitué sont facilement altérées. Des contraintes sur celles-ci ne peuvent qu'améliorer la restitution.

et qui satisfait aux relations :

$$\begin{cases} b_c^{'n}(x) \geq 0 & \text{pour tout } x, \\ b_c^{'n}(x) \leq e(x) & \text{pour tout } x. \end{cases}$$

4 - EXPLOITATION D'AUTRES INFORMATIONS -

Toute caractéristique du signal enregistré peut se traduire par une relation à laquelle satisfait la fonction $b(x)$. Un choix judicieux de $A_c(x)$ doit permettre à cette propriété de se refléter dans $b_c^{'n}(x)$ et de donner lieu à une traduction analytique commode. (Nous donnerons plus loin des exemples où cette idée s'applique).

5 - INFLUENCE DU BRUIT -

Comme nous l'avons signalé dans la remarque du § 3.1, les fonctions $A_c(x)$ que nous introduisons dans ce chapitre sont du type de celles que nous avons introduites dans le chapitre VII. Nous serons naturellement amenés à utiliser ces mêmes fonctions pour évaluer notre gain en résolution.

En particulier, nous avons vu que l'objet restitué ne pouvait être connu qu'à une convolution près, la convolution par la fonction $A_{c \max}(x)$, la plus large à mi-hauteur (chapitre VII, § 5.2). Grâce aux propriétés $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ (§ 3.1) des fonctions que nous utilisons ici, la T.F. $\hat{A}_{c \max}(\mu)$, fonction de support fini $[-c \max, +c \max]$, délimite le domaine sur lequel il est utile de restituer $\hat{b}'(\mu)$, compte tenu des informations en notre possession et du bruit présent dans l'enregistrement. En effet, toute restitution dans ce domaine n'est donnée qu'à une multiplication près, le multiplication par $\hat{A}_{c \max}(\mu)$.

6 - REMARQUES -

Nous avons déjà souligné que la fonction $b'_c(x)$ et sa T.F. $\hat{b}'_c(\mu)$ sont toutes deux des fonctions à support fini.

Dans ces conditions, $b'_c(x)$ peut se représenter indifféremment par les deux séries :

$$b'_c(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{b}_p \cos 2\pi\mu \frac{x}{x_0} \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0}, \text{ où } \hat{b}_p = \hat{b}'_c\left(\frac{p}{2x_0}\right),$$

et :

$$b'_c(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p \text{sinc } 2c(x - p/2c), \text{ où } b_p = b'_c\left(\frac{p}{2c}\right).$$

De plus,
$$\begin{cases} \hat{b}_p = 0 & \text{pour } p > m, \text{ tel que } c = \frac{m}{2x_0}; \\ b_p = 0 & \text{pour } p > n, \text{ tel que } x_0 = \frac{n}{2c}. \end{cases}$$

Il revient donc au même de rechercher $b'_c(x)$ à l'aide de la série finie :

$$\sum_{p=-m}^m b_p \cos 2\pi\mu \frac{p}{x_0} \cdot \text{rect} \frac{x}{2x_0},$$

ou de :

$$\sum_{p=-n}^n b_p \text{sinc } 2c(x - p/2c).$$

Nous avons choisi cette seconde représentation de $b'_c(x)$, pour les raisons suivantes:

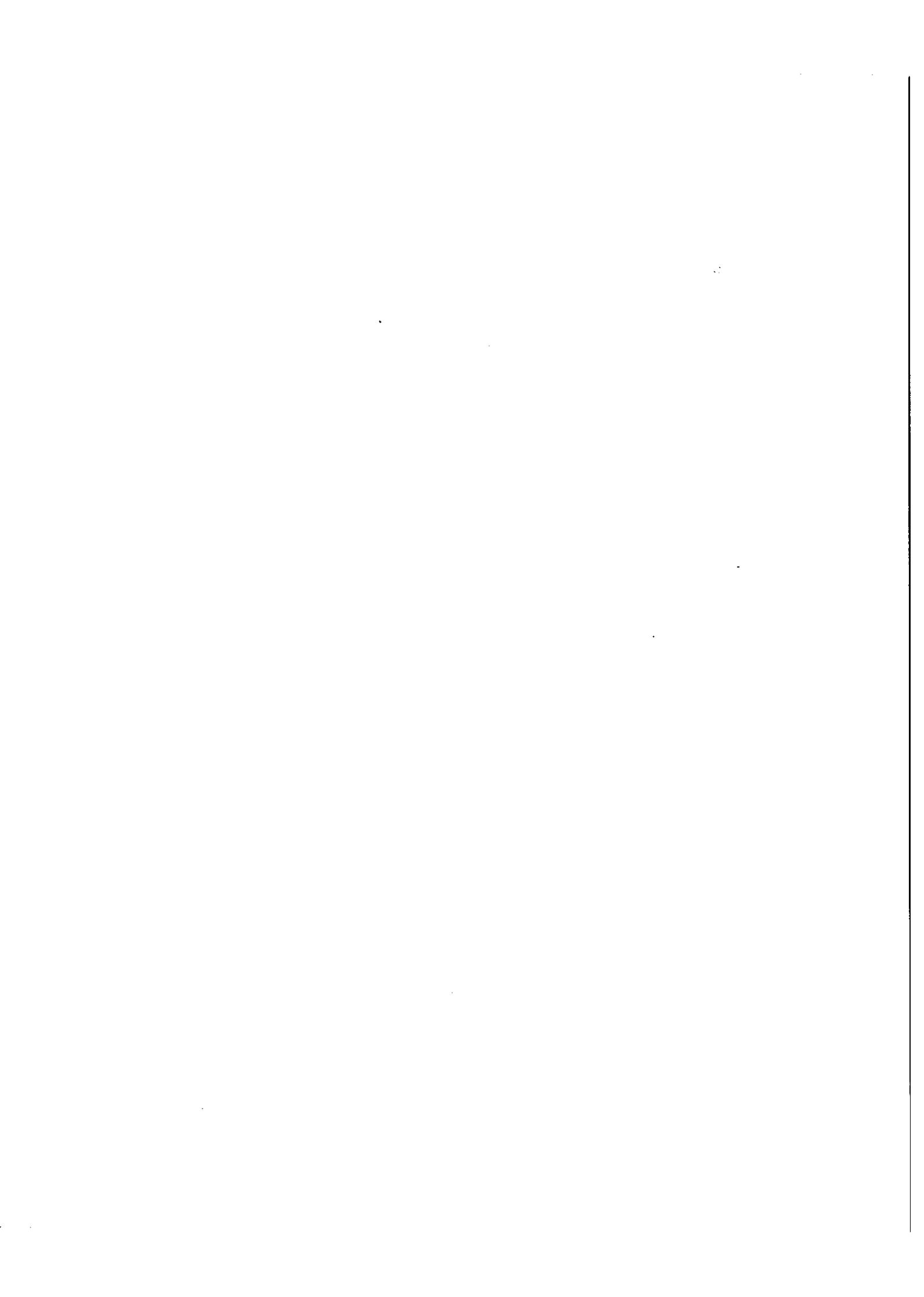
- Les coefficients b_p sont des valeurs de $b'_c(x)$; on peut donc en avoir une première estimation par $e(x)$.

- Le produit de convolution numérique de cette représentation par la fonction d'appareil $f(x)$ s'exprime aisément et exactement.

7 - CONCLUSIONS -

Nous avons montré que la restitution partielle d'un signal $b(x)$ par synthèse de toutes les informations revient à substituer à la fonction d'appareil $f(x)$, une fonction plus fine $A_c(x)$. Dans le domaine des T.F., cette méthode vise à restituer certaines fréquences $\hat{b}(\mu)$ supprimées par $\hat{f}(\mu)$ en les pondérant par $\hat{A}_c(\mu)$.

A présent, nous allons exposer les méthodes numériques utilisées pour concrétiser un tel projet.



CHAPITRE X

MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE DECONVOLUTION PARTIELLE

1 - INTRODUCTION -

Nous devons résoudre les problèmes suivants :

α : choix de $A_c(x)$, fonction d'appareil "affinée". (Rappelons que ce choix doit être tel que tout caractère de $b(x)$, signal enregistré, puisse se traduire par une propriété correspondante du signal restitué $b'_c(x) = b(x) * A_c(x)$).

β : traduction analytique de toutes les propriétés connues de $b_c^n(x)$ et caractérisation de l'ensemble \mathcal{J} des développements :

$$\Psi_N(x) = \sum_{p=-n}^{+n} \Psi_p \operatorname{sinc} 2c(x - p/2c) ,$$

où se trouve $b_c^n(x)$.

δ : calcul numérique de

$$(X.1) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [e(x) * A_c(x) - \Psi_n(x) * f(x)]^2 dx .$$

γ : étude d'un procédé de minimisation adaptable à notre problème et détermination de la fonction appartenant à \mathcal{J} , qui rend minimum σ^2 .

2 - ETUDE DU CAS GENERAL -

- $b_c(x)$ est non négative;
- l'étendue de son support est connue.

2.1) Choix de $A_c(x)$.

Pour que $b'_c(x) = b_c(x) * A_c(x)$ reflète les propriétés de $b_c(x)$ énoncées ci-dessus, il est nécessaire de conférer à $A_c(x)$ les propriétés suivantes (cf. chapitre IX § 3) :

$$\alpha) A_c(x) \geq 0 : b(x) \geq 0 \text{ entraîne alors } b_c(x) \geq 0 .$$

$\beta) A_c(x)$ "apodisée" : $b(x)$ de support fini entraîne alors $b_c(x) \cong 0$ si $x \geq x_m$. L'abscisse x_m est estimée par l'examen de $e(x)$ et de $A_c(x)$.

De plus, la définition même de $A_c(x)$ entraîne :

$$\gamma) \hat{A}_c(\mu) = 0 \text{ pour } |\mu| \geq c .$$

Nous avons déterminé la fonction $A_c(x)$ à l'aide d'une méthode désormais classique (B. Dossier, [1956]). Elle consiste à développer $A_c(x)$ suivant les bases $\text{sinc } 2c(x - p/2c)$:

$$A_c(x) = \sum_{p=0}^n a_p \text{sinc } 2c(x - p/2c).$$

Les coefficients a_p sont les coefficients qui rendent maximale "l'énergie encadrée":

$$E(x) = \frac{\int_0^{x_m} A_c^2(x) dx}{\int_0^{\infty} A_c^2(x) dx} .$$

Pour $x_m = 1/c$, $n = 5$, nous avons obtenu la fonction :

$$\begin{aligned} (X.2) \quad A_c(x) = & \text{sinc } 2cx + 0.59954 [\text{sinc}(2cx + 1) + \text{sinc}(2cx - 1)] \\ & + 0.09997 [\text{sinc}(2cx + 2) + \text{sinc}(2cx - 2)] \\ & + 0.00109 [\text{sinc}(2cx + 4) + \text{sinc}(2cx - 4)] \\ & + 0.00031 [\text{sinc}(2cx + 5) + \text{sinc}(2cx - 5)] \end{aligned}$$

Cette fonction, que nous avons déjà représentée sur la figure 27 appelle les remarques suivantes :

α) En changeant la valeur du paramètre c , on détermine des fonctions $A_c(x)$, se déduisant de $A_c(x)$ par contraction d'abscisse.

Deux valeurs limites c_{\min} et c_{\max} sont utiles à considérer :

a) l'une représente la valeur minimum qu'il convient d'attribuer au paramètre c : elle est de l'ordre de \underline{a} . Plus précisément nous la prendrons telle que :

$$(X.3) \quad c \geq c_{\min} \implies A_c(x) / A_c(0) \leq f(x) / f(0) \text{ pour tout } x ;$$

b) l'autre c_{\max} , représente la valeur maximum c_{\max} qui peut être attribuée à c . Elle est définie par :

$$(X.4) \quad c \leq c_{\max} \implies |e'(x) / e'(0) - e(x) / e(0)| \geq n(x) \text{ pour tout } x,$$

$$\text{avec : } e'(x) = e(x) * A_c(x) .$$

Les équations (X.3) et (X.4) permettent une estimation simple de c_{\min} et c_{\max} .

β) $A_c(x)$ est très fortement apodisée. Les pieds sont de faible amplitude pour $|x| > 2/c$ (de l'ordre de $2 \cdot 10^{-4}$). Etant donnée la précision avec laquelle nous travaillons ils peuvent être considérés comme nuls.

δ) $A_c(x)$ est une combinaison linéaire à N termes (ici $N = 11$) des bases $\text{sinc } 2c(x - p/2c)$. Le produit de convolution de $A_c(x)$ par toute fonction qui possède un plus petit domaine de fréquences se calcule exactement (cf. chapitre II, § 5). En particulier, on a rigoureusement

$$A_c(x) * e(x) = \sum_{p=-5}^{+5} A_c\left(\frac{p}{2c}\right) e(x - p/2c) .$$

2.2) Caractérisation du sous-ensemble \mathcal{J} des développements auquel $b_c^n(x)$ appartient.

Le sous-ensemble \mathcal{J} auquel appartient $b_c^n(x)$ est caractérisé par les propriétés suivantes :

$\alpha)$ c'est un sous-ensemble de l'ensemble \mathcal{L} des combinaisons linéaires Ψ_N à N termes des bases $\text{sinc } 2c(x - p/2c)$:

$$\Psi_N = \sum_{p=-n}^{+n} \Psi_p \text{sinc } 2c(x - p/2c) .$$

Les coefficients Ψ_p sont définis sur tout l'axe réel .

$\beta)$ Il appartient à l'intersection des classes $\mathcal{C}, \mathcal{C}'_1$ de \mathcal{L} ainsi définies :

- toute fonction Ψ_N appartenant à \mathcal{C} rend petit l'écart

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (e'(x) - \Psi_N(x) * f(x))^2 dx ;$$

- toute fonction Ψ_N appartenant à \mathcal{C}'_1 est une fonction non négative :

$$\Psi_N(x) \geq 0 .$$

Pour traduire commodément cette propriété nous introduisons un écart

$$\rho_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_-^2(x) dx$$

où $\Psi_-(x)$ est défini par les relations suivantes :

$$(X.5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_-(x) = 0 & \text{si } \Psi_N(x) \geq 0 \\ \Psi_-(x) = \Psi_N(x) & \text{si } \Psi_N(x) \leq 0 \end{array} \right.$$

les fonctions $\Psi_N(x)$ appartenant à \mathcal{C}'_1 , sont les fonctions de \mathcal{C} pour lesquelles ρ_1^2 est nul.

γ) En outre, le fait que $A_c(x)$ satisfasse à la relation :

$$A_c(x) / A_c(0) \leq f(x) / f(0),$$

entraîne (chapitre IX § 3) que \mathcal{J} appartient aussi à la classe \mathcal{E}'_2 des développements de \mathcal{E} tels que :

$$\Psi_N(x) \leq e(x) .$$

Nous constatons que les fonctions de \mathcal{E} qui appartiennent à \mathcal{E}'_2 annulent l'écart :

$$\rho_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\text{inf}}^2(x) dx ,$$

si l'on pose :

$$(X.6) \quad \begin{cases} \Psi_{\text{inf}}(x) = \Psi_N(x) - e(x) , & \text{si } \Psi_N(x) > e(x) ; \\ \Psi_{\text{inf}}(x) = 0 & , \quad \text{si } \Psi_N(x) \leq e(x) . \end{cases}$$

Les fonctions qui appartiennent à \mathcal{J} sont donc les fonctions qui annulent les écarts ρ_1^2 , ρ_2^2 et qui rendent petit l'écart :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [e'(x) - \Psi(x) * f(x)]^2 dx .$$

2.3) Détermination de $b_c^n(x)$.

Parmi les fonctions appartenant à \mathcal{J} , nous identifierons $b_c^n(x)$ au développement $\Psi_N(x)$ qui minimise l'écart σ^{2*} .

* $b_c^n(x)$ n'est pas en général le développement qui minimise σ^2 . Cependant, si la classe des fonctions appartenant à \mathcal{J} est étroite, nous avons vu que l'erreur commise, en procédant de cette manière, était peu importante.

Or, pour toute fonction $\Psi_N(x)$ appartenant à \mathcal{J} , ρ_1^2 et ρ_2^2 sont nuls. Pour ces fonctions, il est équivalent de minimiser soit l'écart σ^2 , soit un écart ρ^2 égal à σ^2 augmenté d'une combinaison linéaire des écarts ρ_1^2 et ρ_2^2 .

$$(X.7) \quad \rho^2 = \sigma^2 + A \rho_1^2 + B \rho_2^2, \quad A \text{ et } B \text{ cstes.}$$

Pour toute fonction Ψ_N n'appartenant pas à \mathcal{J} , ρ^2 ne se réduit pas à σ^2 ; nous désirons éliminer ces fonctions. Le processus utilisé pour minimiser ρ^2 les éliminera automatiquement si toute valeur de ρ_1^2 et ρ_2^2 non nulle confère à ρ^2 une valeur élevée. Il suffit pour cela de choisir pour A et B des constantes de valeur élevée; on a alors :

$$\rho^2 = \sigma^2 + A \rho_1^2 + B \rho_2^2 \gg \sigma^2.$$

Le développement minimisant ρ^2 se situe nécessairement dans l'ensemble \mathcal{J} (avec $\rho_1^2 = \rho_2^2 = 0$) et minimise σ^2 .

En fait, on sait que $b_c^n(x)$ ne constitue qu'une approximation de $b_c(x)$ et qu'elle peut, à la différence de $b_c(x)$, comporter des parties faiblement négatives. De même $b_c^n(x)$ peut, en certains points, dépasser faiblement les cotes de $e(x)$. Les écarts ρ_1^2 et ρ_2^2 correspondant à $b_c^n(x)$ ne sont donc pas identiquement nuls. On tient compte de ce fait en ajustant par tâtonnements les coefficients A et B en cours de calcul.

2.4) Calcul numérique de ρ^2 .

2.4.1) Nous avons à calculer pour toute fonction Ψ_N appartenant à \mathcal{J} les valeurs de :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [e(x) * A_c(x) - \Psi_N(x) * f(x)]^2 dx$$

Nous avons vu que le choix des formes analytiques de Ψ_N et A_c entraîne :

$$e(x) * A_c(x) = \sum_{p=-5}^{+5} A_c\left(\frac{p}{2c}\right) e(x - p/2c) , \text{ exactement } ;$$

$$\text{et } \Psi_N(x) * f(x) = \sum_{p=-n}^{+n} \Psi_p f(x - p/2c) , \text{ exactement } .$$

Posons

$$g(x) = \Psi_N(x) * f(x) - A_c(x) * e(x) ,$$

il vient :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) dx .$$

La T.F. $\hat{g}(\mu)$ de $g(x)$ est une fonction à support fini $[-a, +a]$. Si l'on prend un pas d'échantillonnage $h \leq h_0 = 1/2a$ on montre facilement* que :

$$\sigma^2 = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h g^2(ph) .$$

Pour les fonctions $\Psi_N(x)$ qui nous intéressent**, $g(x)$ est de domaine fini (domaine de l'enregistrement) et nous limiterons σ^2

*

La démonstration est analogue à celle que nous avons utilisée pour le produit de convolution numérique chap. II § 2.

**

Pour les autres fonctions $\Psi_N(x)$, n'appartenant pas à \mathcal{J} il n'est pas vrai que $\sigma^2 \cong \sum_{p=-m}^{+m} h g^2(ph)$; cependant, pour ces fonctions, il n'est pas nécessaire de calculer exactement σ^2 , mais seulement une approximation de cet écart. Il s'avère que la quantité (X.8) constitue une approximation suffisante pour permettre l'élimination des développements parasites et la convergence des Ψ_N vers l'ensemble \mathcal{J} .

aux échantillons $g(ph)$ couvrant ce domaine :

$$(X.8) \quad \sigma^2 = \sum_{p=-m}^{+m} h g^2(ph) .$$

2.4.2) Calcul de ρ_1^2 et ρ_2^2 .

$$\text{soit} \quad \rho_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_-^2(x) dx \quad \rho_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\text{inf}}^2(x) dx .$$

Le développement $\Psi_N(x)$ a, par construction, une T.F. $\hat{\Psi}_N(\mu)$ de domaine $[-c, +c]$. Nous ne pouvons en dire autant des fonctions $\Psi_-(x)$ et $\Psi_{\text{inf}}(x)$ telles que nous les avons définies par les relations (X.5) et (X.6) .

Il semble toutefois raisonnable de relier l'étendue des domaines de $\hat{\Psi}_-(\mu)$ et $\hat{\Psi}_{\text{inf}}(\mu)$ à celui de $\hat{\Psi}_N(\mu)$ $[-c, +c]$. En pratique, nous constatons qu'en utilisant un pas $h = \frac{1}{4} \times 1/2c$, c'est-à-dire en supposant que $\hat{\Psi}_-(\mu)$ et $\hat{\Psi}_{\text{inf}}(\mu)$ couvrent au plus un domaine 4 fois supérieur à celui de $\hat{\Psi}_N(\mu)$, l'annulation des écarts :

$$\rho_1'^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} h \Psi_-^2(ph) ,$$

$$\rho_2'^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} h \Psi_{\text{inf}}^2(ph)$$

entraîne celle de ρ_1^2 et ρ_2^2 .

Cet écart est de nouveau calculé seulement sur le domaine de l'enregistrement.

Finalement l'écart ρ^2 que nous calculons effectivement est représenté par la somme :

$$(X.9) \quad \rho^2 = \sum_{p=-m}^{+m} h [g^2(ph) + A \Psi_-^2(ph) + B \Psi_{\text{inf}}^2(ph)] ,$$

$$\text{avec } h = (1/2c) / 4 .$$

2.5) Choix du processus de minimisation de ρ^2 .

2.5.1) Nous avons adapté à notre problème le programme de minimisation écrit par D. Taupin pour l'Univac 1108 d'Orsay. L'algorithme utilisé est très proche de celui que décrivent Nelder et Mead (Nelder et Mead [1965]). Nous en rappelons l'organigramme en appendice de ce travail et n'en exposons ici que brièvement le principe.

Sous sa forme générale, le problème posé est de minimiser une expression, fonction d'un nombre N de paramètres $f(a_1, a_2, \dots, a_N)$. Pour cela, plaçons nous dans l'espace à N dimensions dont les points A ont pour coordonnées les valeurs (a_1, a_2, \dots, a_N) . A chaque point A de cet espace, on peut associer la valeur $f(a_1, a_2, \dots, a_N)$ de la fonction f .

Partons d'un point A_1 quelconque, auquel correspond la valeur $f(A_1)$ de f . Donnons aux coordonnées de A_1 les accroissements $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_N$ et définissons $N+1$ points ainsi que les valeurs associées de f , par les conditions ci-dessous :

coordonnées de A_1 : a_1, a_2, \dots, a_N et $f(A_1)$,

coordonnées de A_2 : $a_1 + \Delta a_1, a_2, \dots, a_N$ et $f(A_2)$,

coordonnées de A_3 : $a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_N$ et $f(A_3)$,

coordonnées de A_{N+1} : $a_1, a_2, \dots, a_N + \Delta a_N$ et $f(A_{N+1})$.

Partant de ces $N+1$ points, remplaçons le moins bon, c'est-à-dire celui auquel correspond la valeur maximum f_{\max} de f par un meilleur et ainsi de suite. Le calcul est arrêté lorsqu'on aboutit à un tableau dans lequel la différence relative $(f_{\max} - f_{\min}) / f$ est inférieure à une valeur fixée a priori.

2.5.2) D'une manière générale, ce processus nous permet de soumettre la solution cherchée à n'importe quelle contrainte, même lorsque celle-ci ne peut être traduite sous forme d'un écart à annuler. En effet, les points A que nous considérons dans notre problème ont pour coordonnées les coefficients $(\Psi_n, \dots, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ du développement $\Psi(x)$. A chacun de ces points nous pouvons convenir d'associer la fonction $f(A)$ dont les valeurs sont ainsi définies :

- si $\Psi_N(x) = \sum \Psi_p \operatorname{sinc} 2c(x - p/2c)$ satisfait à la contrainte qu'il a été décidé de lui imposer alors $f(A) = \rho^2$ est effectivement calculé,

- si $\Psi_N(x)$ ne satisfait pas à cette contrainte, nous attribuons à $f(A)$ une valeur arbitrairement grande afin de rejeter le développement Ψ_N correspondant.

Cependant un raisonnement rapide peut nous convaincre qu'il est préférable de traduire la contrainte imposée à $\Psi_N(x)$ sous la forme d'un écart ρ_j^2 qu'il s'agit d'annuler. En effet, on peut ainsi accorder à $f(A) = \rho^2$, un poids plus ou moins grand selon l'allure de la fonction $\Psi_N(x)$ qui lui est associée. Le processus ainsi conduit, aboutit normalement à la fonction recherchée.

Si par contre, quelle que soit $\Psi_N(x)$ ne satisfaisant pas à

la contrainte qu'il a été décidé de lui imposer, nous attribuons à $f(A)$ une valeur arbitrairement grande constante, il peut arriver qu'aucun des $N+1$ développements Ψ_N , correspondant aux $N+1$ premiers points A_i définis ci-dessus, ne satisfasse non plus à cette contrainte. Les valeurs associées $f(A_i)$ sont toutes égales à la constante et le processus s'arrête sur une fausse solution. Il est nécessaire de recommencer le calcul avec une fonction de départ Ψ_N plus proche de la solution cherchée et le choix de cette fonction de départ peut être délicat à faire.

3 - RESULTATS -

3.1) La méthode ci-dessus a été appliquée à l'exemple suivant : l'enregistrement représenté sur la figure 28 a été obtenu à l'aide d'un Fabry-Perot. (Les unités choisies sont des unités arbitraires u.a.). S. Gerstenkorn, qui en connaît la structure, nous l'a confié afin de tester l'efficacité de la méthode. Cette structure comporte 14 raies groupées en un doublet. Toutefois, afin de contrôler nos résultats, nous ne nous servons ici que des informations suivantes :

- le signal enregistré est de support fini :

$$b(x) = 0 \text{ pour } x < 100 \text{ u. a. , et } x > 260 \text{ u. a. ;}$$

- $b(x) \geq 0$.

3.1.1) détermination de $f(x)$.

La méthode que nous venons de décrire suppose connue exactement la réponse impulsionnelle $f(x)$. Ce n'est pas tout à fait le cas ici, on sait seulement que $f(x)$ est le résultat d'une convolution entre

une fonction d'Airy $f_1 = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \left[\sin \frac{\pi}{\Delta\sigma} x \right]^2}$,

une fonction Doppler $f_2 = \exp \left[-\frac{x^2}{2s^2} \right]$,

une fonction exploratrice $f_3 = \text{rect } \frac{x}{t}$.

Or, les paramètres R , s et t ne sont pas connus avec exactitude ; ils sont estimés suivant certaines données de l'expérience. Il subsiste donc une certaine incertitude sur la fonction $f(x)$; nous pouvons estimer que cette incertitude équivaut à un bruit de l'ordre de 5 pour 100.

3.1.2) détermination des valeurs a et c max.

- La T.F. $\hat{f}(\mu)$ de $f(x)$ nous fournit la fréquence de coupure a . Nous avons estimé cette valeur en repérant l'abscisse μ telle que, pour $|\mu| > a$, $\hat{f}(\mu) / \hat{f}(0)$ reste inférieur à $5 \cdot 10^{-3}$. Nous obtenons $a = 0,02 \text{ u. a}$.

- L'incertitude systématique dont nous avons parlé plus haut est en "moyenne" de l'ordre de 0.05. Ceci nous permet de définir le gain en résolution qu'il serait illusoire de dépasser. Ce gain correspond à la valeur c max de c telle que

$$| A_{c \text{ max}}(x) * e(x) - e(x) | \leq 0.05 ;$$

dans cette formule $A_{c \text{ max}}(x) * e(x)$ et $e(x)$ sont des fonctions normalisées, à valeur 1 au centre. Nous trouvons $c = 0.04 \text{ u.a}$: nous ne devons donc pas restituer $b_c^n(\mu)$ au delà de $c \text{ max} = 2a$.

3.1.3) Représentations successives de $b(x)$.

3.1.3 - 1) Connaissant $f(x)$ représentée figure 27 , nous sommes en mesure de choisir une première valeur de c , soit $c = 1,5 a$ cette valeur.

Il nous suffit alors de 10 termes $\text{sinc}(x - ph) / h$ pour représenter $b_c^n(x)$. La minimisation de l'écart ρ^2 (X.9) nous

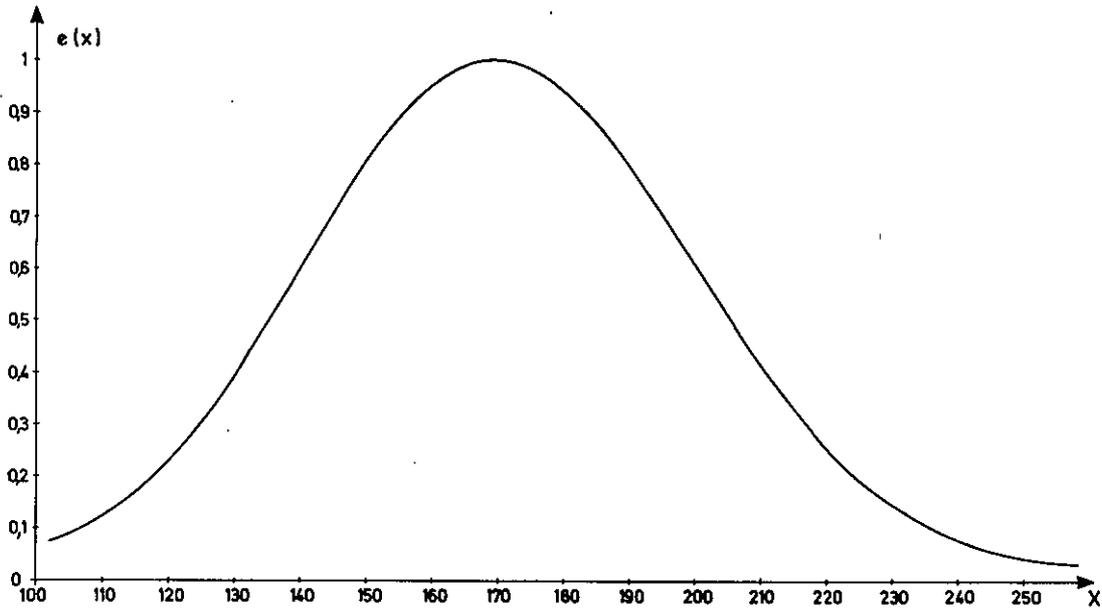


figure 28

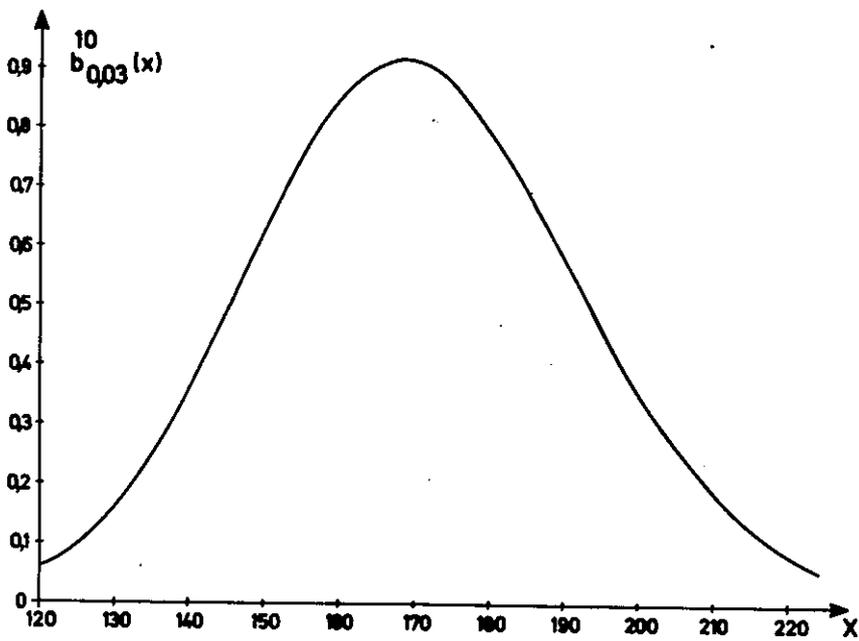
enregistrement $e(x)$.

figure 29

restitution $b'_c(x)$ pour $c = 1,5 a$.

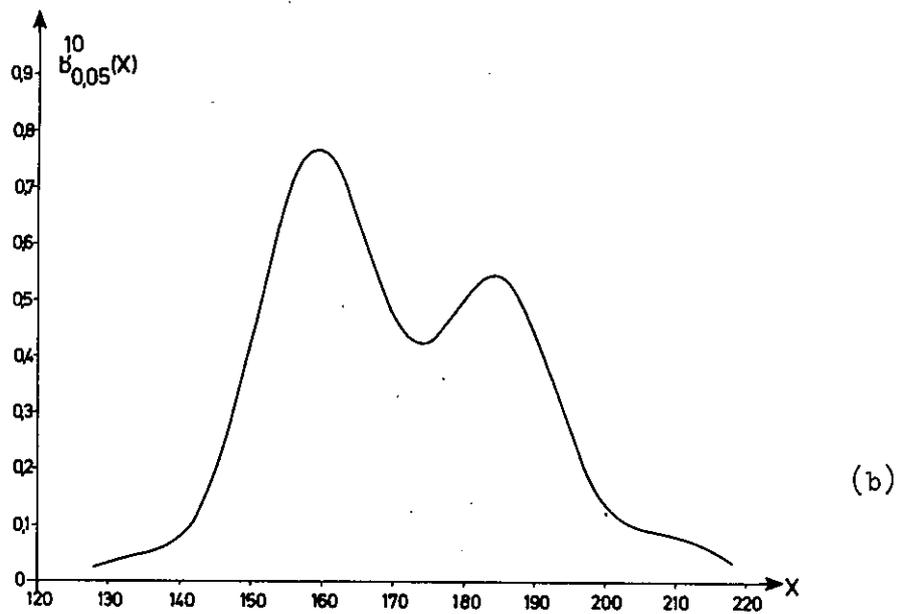
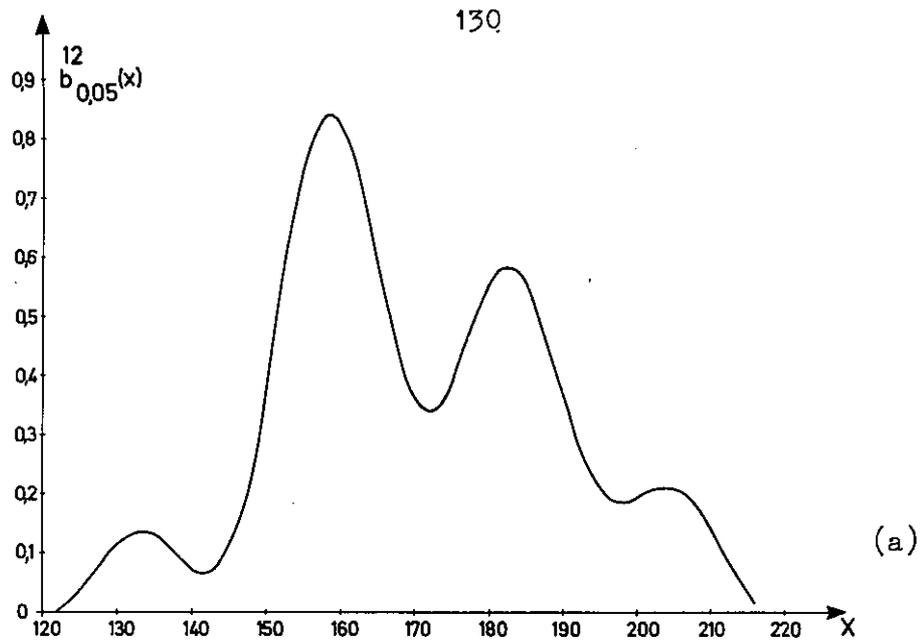


figure 30

- a) Restitution $b_c'(x)$ pour $c = 2,5 a$, valeur interdite.
Des structures parasites apparaissent sur les bords de la courbe.
- b) Bonne Restitution $b_c'(x)$ pour $c = 2,5 a$.

fournit la fonction correspondante : le doublet n'est pas encore apparent mais la dissymétrie s'est fortement accentuée (cf. figure 29) La solution est obtenue en moins de 2 minutes sur Univac 1108.

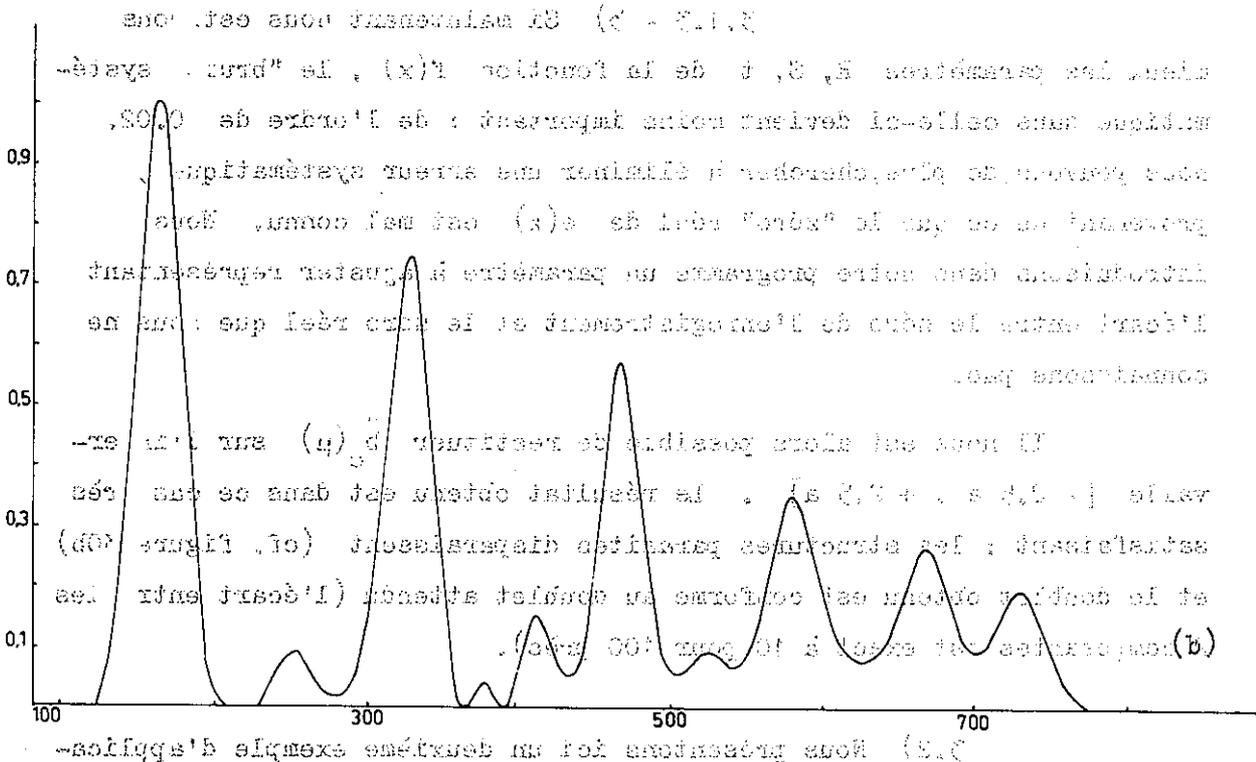
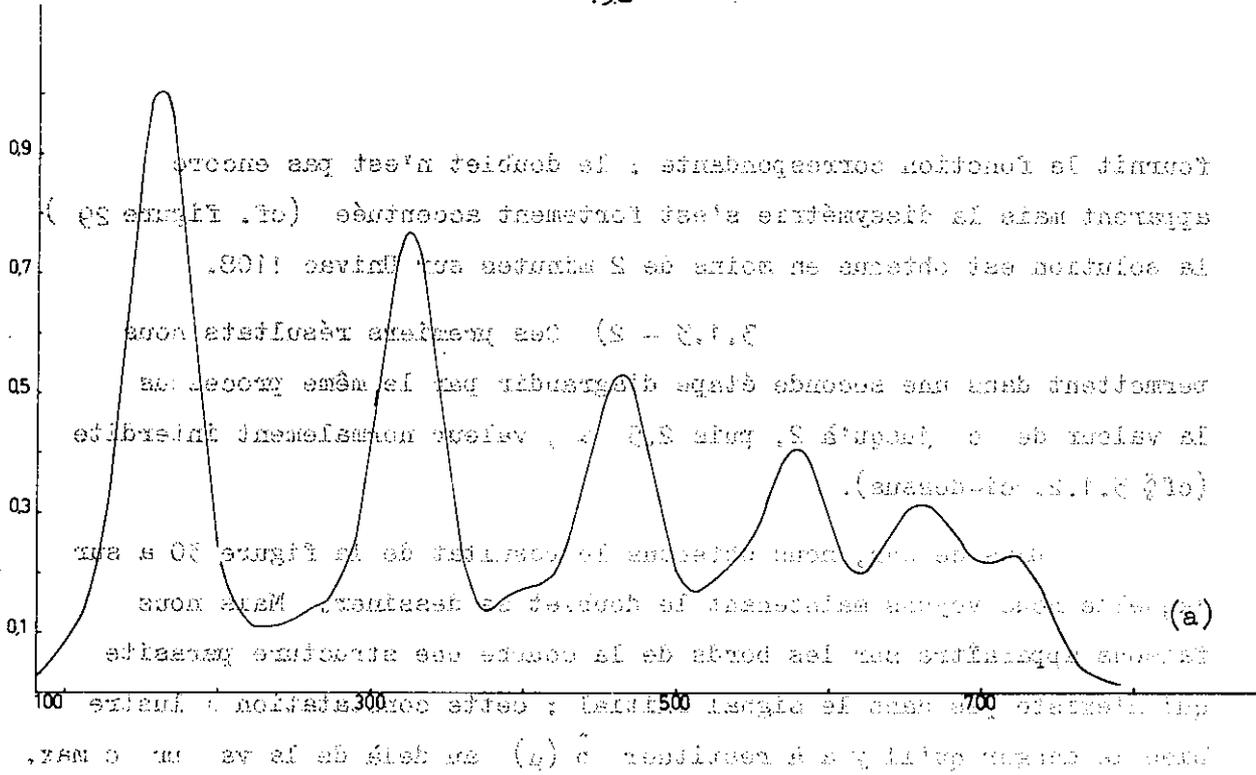
3.1.3 - 2) Ces premiers résultats nous permettent dans une seconde étape d'agrandir par le même processus la valeur de c jusqu'à 2, puis 2.5 a , valeur normalement interdite (cf § 3.1.2. ci-dessus).

Dans ce cas, nous obtenons le résultat de la figure 30 a sur laquelle nous voyons maintenant le doublet se dessiner. Mais nous faisons apparaître sur les bords de la courbe une structure parasite qui n'existe pas dans le signal initial : cette constatation illustre bien le danger qu'il y a à restituer $\hat{b}(\mu)$ au delà de la valeur c max.

3.1.3 - 3) Si maintenant nous estimons mieux les paramètres R, S, t de la fonction $f(x)$, le "bruit" systématique dans celle-ci devient moins important : de l'ordre de 0.02. Nous pouvons, de plus, chercher à éliminer une erreur systématique provenant de ce que le "zéro" réel de $e(x)$ est mal connu. Nous introduisons dans notre programme un paramètre à ajuster représentant l'écart entre le zéro de l'enregistrement et le zéro réel que nous ne connaissons pas.

Il nous est alors possible de restituer $\hat{b}_c(\mu)$ sur l'intervalle $[- 2,5 a, + 2,5 a]$. Le résultat obtenu est dans ce cas très satisfaisant : les structures parasites disparaissent (cf. figure 30b) et le doublet obtenu est conforme au doublet attendu (l'écart entre les 2 composantes est exact à 10 pour 100 près).

3.2) Nous présentons ici un deuxième exemple d'application de notre méthode. Il s'agit de l'enregistrement, toujours au



- a) Enregistrement filtré de la structure hyperfine d'une raie de Mn.
- b) Restitution de cette raie pour $c = 2a$.

Fabry - Pérot, de la structure hyperfine d'une raie de Mn, effectué par P. Luc au Laboratoire (figure 31a).

Il est légitime de supposer que le 1/2 profil externe de la raie la plus intense n'est pas altéré par les autres composantes, il nous fournit une bonne approximation de la fonction d'appareil. Le problème de déconvolution que nous avons à résoudre est plus délicat que dans le cas précédent ; en effet le support Δx de $b_c^n(x)$ représente 8 à 9 fois celui de la fonction d'appareil et nous avons à déterminer plus de 60 paramètres. Les problèmes à résoudre sont de deux ordres :

- tout d'abord un problème de calcul numérique lié au grand nombre de paramètres à déterminer. Nous l'avons résolu en faisant varier les paramètres par groupes successifs. Ceci est en effet possible car les paramètres qui sont, rappelons-le, les points de $b_c(x)$ équidistants de $1/2 c$, ont surtout une action locale sur $e'(x)$ *. Le procédé est encore acceptable puisqu'il conduit à une solution en une dizaine de minutes sur Univac 1108.

- Le deuxième problème est d'ordre analytique : en effet, il n'est pas ici possible de prolonger Δu au delà de $c = 2a$ car, parmi les développements à 60 termes, il existe plusieurs solutions qui donnent pour ρ^2 la même valeur minimum, à la précision où sont définis ces écarts.

Pour $c = 2a$, la représentation que nous obtenons (figure 31b) est satisfaisante ; en particulier, la position de la première raie, telle que nous l'avons déterminée, a permis à P. Luc de justifier la décomposition qu'il proposait pour cette structure.

* En effet, rappelons que
$$e'(x) = \sum_{p=-n}^{+n} b_c\left(\frac{p}{2c}\right) f(x - p/2c).$$

Pour p fixé, un paramètre $b_p = b_c\left(\frac{p}{2c}\right)$ apporte à $e'(x)$ une contribution non négligeable pour les valeurs x pour lesquelles $f(x - p/2c)$ est elle-même non négligeable.

4 - CONCLUSIONS -

Les considérations que nous avons développées et les résultats que nous avons obtenus montrent que les limites de la méthode sont de 3 ordres :

Tout d'abord, nous l'avons vu, elle est très rapidement limitée par un mauvais rapport s/b . Dans les exemples traités, s/b était bon puisque de l'ordre de 100. Cependant, en présence d'un bruit faible, les causes d'échec tiennent à une indétermination systématique sur $e(x)$ ou $f(x)$, indétermination qui, nous l'avons admis, joue un rôle comparable à celui du bruit. Dans les enregistrements que nous avons eus à traiter, ce sont très nettement ces erreurs qui ne nous ont pas permis d'accroître, autant que nous l'aurions désiré, le domaine des fréquences restituées.

Enfin, un dernier obstacle peut se présenter lorsqu'il faut, pour définir l'objet, déterminer un très grand nombre de paramètres. La variété des fonctions Ψ_N est alors telle, qu'à la précision des calculs près, il existe plusieurs fonctions $b_c^n(x)$ conduisant au même écart minimum ρ^2 et satisfaisant à toutes les conditions du problème.

CHAPITRE XI

PROBLEME DE DECOMPOSITION

1 - INTRODUCTION -

Nous avons traité jusqu'ici le problème de la restitution d'un signal $b(x)$ à partir d'un enregistrement

$$e(x) = b(x) * f(x) + n(x)$$

dans le cas où $f(x)$ est connue et où l'on ne possède sur $b(x)$ que très peu d'informations [$b(x)$ est une fonction non négative à support fini]. Nous avons montré que, dans ce cas, seule une partie des fréquences manquantes peut, en pratique, être restituée.

Nous traitons séparément à présent un cas différent, très fréquent en Spectroscopie. L'enregistrement $b(x)$ est de la forme

$$e(x) = \sum_{i=1}^M a_i f(x - x_i) + n(x) \quad *$$

Il s'agit donc de la convolution d'une fonction profil $f(x)$ par une fonction formée de M pics de Dirac, dont les abscisses x_i , ainsi que les intensités a_i sont inconnues.

* Ceci est le cas lorsqu'on enregistre à l'aide d'une fonction d'appareil $f_1(x)$, un signal formé de M signaux d'intensités différentes a_i ($i = 1, \dots, M$), mais de même profil $f_2(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} e(x) &= \sum_{i=1}^M a_i f_2(x - x_i) * f_1(x) + n(x) \\ &= \sum_{i=1}^M a_i f(x - x_i) + n(x) \end{aligned}$$

Si la fonction $f(x)$ est connue, nous sommes ramenés au problème précédent, à la différence près que la connaissance de la structure en pics constitue une information supplémentaire. D'ailleurs, l'importance de celle-ci est telle qu'il est possible de restituer totalement le signal. Cette restitution se fait au mieux grâce aux méthodes dites de " fitting " (Larson, H. P. et Andrew, K.L., [1967], par exemple).

Pourtant, il arrive souvent que ce profil $f(x)$ soit inconnu : il faut, en ce cas, le déterminer en même temps que les autres paramètres. Certains auteurs ont traité ce problème en conférant à $f(x)$ un profil présumé (exponentiel, profil de Voigt, etc, cf. Huhnermann, H., [1967]). La méthode de fitting donne dans ce cas encore de bons résultats, dans la mesure où l'hypothèse sur $f(x)$ se trouve justifiée.

Nous nous proposons d'étudier ce problème sous une forme plus générale : nous supposons le profil $f(x)$ inconnu, et n'émettons aucune hypothèse quant à sa forme analytique. Nous admettons seulement que ce profil peut être représenté par une fonction non négative, souvent symétrique, décroissante, de part et d'autre du maximum central, du type filtre passe-bas de fréquence de coupure $\frac{a}{2}$ (connue).

2 - EXPOSE DU PROBLEME -

L'enregistrement $e(x)$ que nous possédons est tel que :

$$(XI.1) \quad e(x) = \sum_{i=1}^M a_i \delta(x - x_i) * f(x) + n(x)$$

soit, en passant dans le domaine des T.F.

$$(XI.2) \quad \hat{e}(\mu) = \sum_{i=1}^M a_i e^{-j2\pi\mu x_i} \hat{f}(\mu) + \hat{n}(\mu).$$

Avec un peu d'habitude, l'examen de $\hat{e}(\mu)$ permet de déterminer la fréquence de coupure \underline{a} ; au-delà de celle-ci, en effet, seules subsistent les fréquences $\hat{n}(\mu)$. Si l'on introduit la valeur de \underline{a} , on peut représenter la fonction profil $f(x)$ par :

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f_p \operatorname{sinc} 2a(x - p/2a).$$

Rappelons que les coefficients f_p sont les valeurs de la fonction $f(x)$ aux points $p/2a$. $f(x)$ n'étant pas donnée, ces coefficients sont des inconnues de notre problème. Toutefois nous pouvons à partir de $e(x)$ estimer le nombre maximum N de coefficients nécessaire pour approcher correctement $f(x)$. En outre, si $f(x)$ est symétrique, (ceci est souvent le cas dans les enregistrements que nous avons à traiter), nous avons :

$$f(x) = \sum_{p=0}^N f(p/2a) (\operatorname{sinc} 2a(x - p/2a) + \operatorname{sinc} 2a(x + p/2a)).$$

Ceci donne pour $e(x)$, somme de M signaux de profil $f(x)$, d'intensités a_i , d'abscisses x_i :

$$(XI.3) \quad e(x) = \sum_{i=1}^M a_i \sum_{p=0}^N f_p (\operatorname{sinc} 2a(x - x_i - p/2a) \dots + \operatorname{sinc} 2a(x - x_i + p/2a)) + n(x).$$

Supposons que $n(x)$ est un bruit stationnaire, indépendant du signal **. On peut alors, pour estimer les paramètres a_i , f_p et x_i , proposer de rendre minimum l'écart :

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^J [e(x_j) - \sum a_i f(x_j - x_i)]^2.$$

De plus, si nous voulons spécifier que $f(x)$ est une fonction positive et décroissante (f.p.d.) de part et d'autre du maximum central $f(0)$, il est commode d'introduire les écarts :

* Si a n'est pas bien connu, on peut, sans changer les résultats, prendre une valeur supérieure qu'on estimera au mieux.

** Nous verrons (chapitre XII) quelle fonction minimiser pour d'autres types de bruit.

$$\rho_1^2 = \sum_{k=-k_1}^{k_1} f_-^2(x_k) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_-(x_k) = 0 & \text{si } f(x_k) \geq 0 \\ f_-(x_k) = f(x_k) & \text{si } f(x_k) < 0 \end{cases}$$

$$(XI.4) \quad \rho_2^2 = \sum_{k=-k_2}^{k_2} f_*^2(x_k) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_*(x_k) = 0 & \text{pour } f(x_k) > f(x_{k-1}) \text{ si } x_k \leq 0 \\ f_*(x_k) = 0 & \text{pour } f(x_k) < f(x_{k-1}) \text{ si } x_k > 0 \\ f_*(x_k) = |f(x_k) - f(x_{k-1})| & \text{pour } f(x_k) < f(x_{k-1}) \text{ si } x_k \leq 0 \\ f_*(x_k) = |f(x_k) - f(x_{k-1})| & \text{pour } f(x_k) > f(x_{k-1}) \text{ si } x_k > 0. \end{cases}$$

Pour l'ensemble des fonctions $f(x)$, les f.p.d. solutions de (XI.1) rendent donc minimum à la fois σ^2 , ainsi que ρ_1^2 et ρ_2^2 .

Pour tenir compte de cette caractéristique de la fonction cherchée, nous introduisons dans nos calculs l'écart :

$$\rho^2 = \sigma^2 + A \rho_1^2 + B \rho_2^2$$

et nous déterminerons la fonction $f(x)$ par un processus qui assure la minimisation simultanée de ρ^2 et σ^2 . Le choix des paramètres A et B dépend ici encore de l'importance que nous voulons accorder aux écarts ρ_1^2 et ρ_2^2 . (cf. chapitre X § 2.3).

3 - METHODES NUMERIQUES -

3.1) Les paramètres que nous avons à déterminer sont de deux ordres :

- les uns (les paramètres $f(p/2a)$) sont des paramètres qui dépendent de la forme du profil $f(x)$. Il peut exister entre eux des relations qui traduisent les propriétés de la fonction profil (non-négativité, etc.). Leur influence se fait sentir sur la longueur totale du spectre.

- Les autres (les paramètres a_i et x_i) dépendent de chaque raie. Il peut aussi exister des relations entre eux (lois reliant les intensités respectives de chaque raie par exemple). L'influence de ces paramètres est plus locale. En général, il n'existe aucune relation entre ces deux groupes de paramètres.

Pour minimiser l'expression ρ^2 , tout en tenant compte des relations existant au sein de chaque groupe de paramètres, nous avons à nouveau utilisé la

méthode de Mead et Nelder. Nous ne rappellerons pas cette méthode déjà mentionnée dans le chapitre précédent. Cependant, nous nous sommes heurtés à quelques nouvelles difficultés que nous allons exposer.

3.2)

3.2.1) Plus les paramètres sont nombreux, plus le nombre de minimums locaux de l'expression à minimiser est élevé et plus le "minimum minimorum" recherché est difficile à atteindre. En particulier, lorsqu'un des paramètres p recherché a, dans l'expression ρ^2 , un rôle d'une plus grande importance que les autres, le processus converge vers le minimum local le plus proche de la valeur de départ choisie pour p . Nous avons trouvé qu'il était intéressant dans ce cas de se fixer successivement plusieurs valeurs p_i de ce paramètre et de rechercher pour chacune de ces valeurs le minimum ρ_i^2 de ρ^2 en faisant varier uniquement les paramètres restants. A partir de la courbe donnant ces minima ρ_i^2 en fonction de p_i , on détermine graphiquement une valeur approchée de la valeur de p qui conduit au minimum minimorum : nous donnons un exemple de l'application de cette méthode au § 4.3.

3.2.2) Lorsqu'il n'est pas possible de donner aux paramètres f_p du profil des valeurs de départ proches des valeurs recherchées, la méthode a tendance à accorder trop d'importance aux portions de $e(x)$ de cote élevée. En ces points les écarts entre l'enregistrement et la courbe reconstituée sont grands. Le processus cherche à diminuer rapidement ces écarts sans diminuer simultanément les petits écarts voisins. On converge de ce fait vers une fonction partout mal ajustée.

Or, le critère du σ^2 n'est pas le seul possible. On peut songer à en employer successivement plusieurs qui accordent chacun un poids différent aux écarts considérés. Les minimums locaux indésirables correspondent pour chaque critère à une fonction $f(x)$ différente. Seul le minimum minimorum correspond pour tous à la même fonction, celle justement que nous cherchons. Dans ce but, nous avons étudié en plus de σ^2 les écarts :

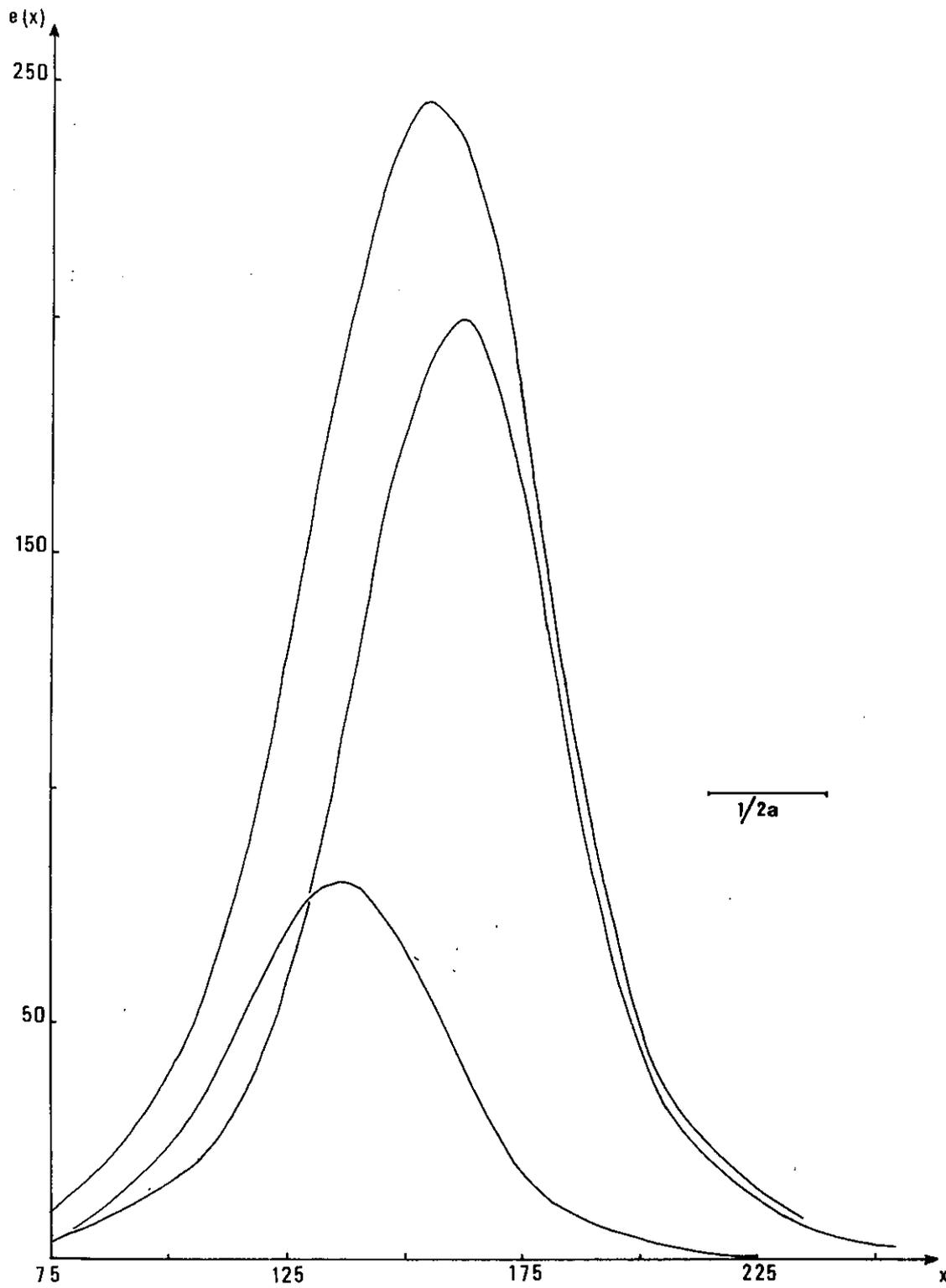


figure 32
enregistrement synthétique de 2 composantes de même
profil et décomposition obtenue.

$\epsilon = \sum | e(x_j) - \sum a_i f(x_j - x_i) |$: soit la somme des valeurs absolues des écarts,

$$\eta = \sum | e(x_j) - \sum a_i f(x_j - x_i) |^{1/n} \quad n = 2, 3, \dots$$

et :

$$\gamma = \sum p_j | e(x_j) - \sum a_i f(x_j - x_i) | \quad \text{avec } p_j = \frac{1}{e(x_j)} .$$

Nous avons constaté que la minimisation de ϵ conduit à un heureux compromis et permet une bonne détermination des paramètres inconnus. Par contre la minimisation des écarts η et γ tend à accorder, à l'inverse de σ^2 , trop d'importance aux " ailes " (cotes de valeurs peu élevées); le "corps" de $f(x)$ est alors mal déterminé.

Rappelons que la méthode de minimisation utilisée est très souple et que le même programme peut être utilisé pour minimiser n'importe lequel de ces écarts : il suffit seulement de changer l'expression de la fonction ρ^2 .

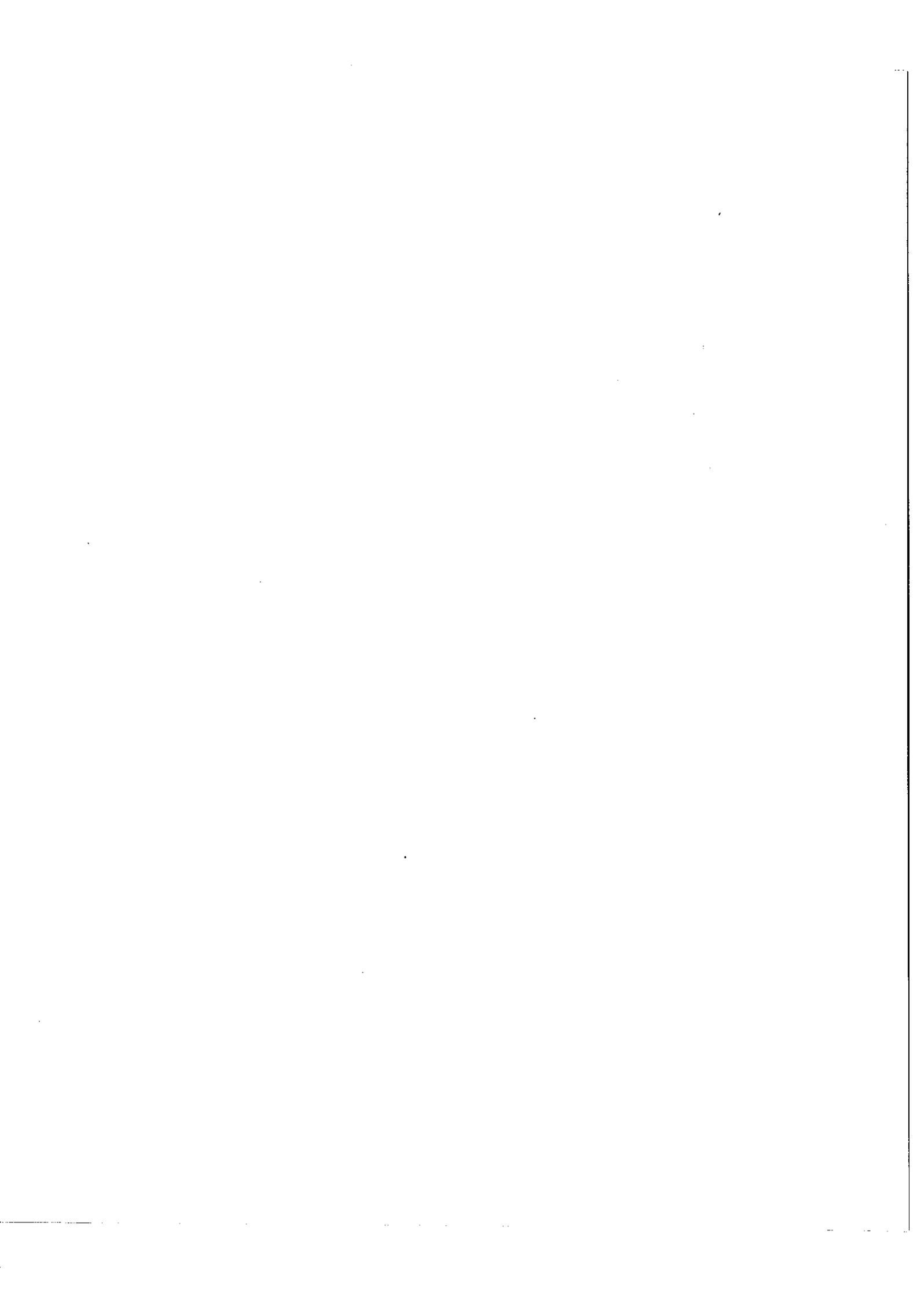
La méthode de travail que nous avons utilisée est la suivante : une première minimisation, celle de $\rho^2 = \epsilon + A \rho_1^2 + B \rho_2^2$ permet d'approcher correctement les paramètres. Nous affinons ensuite cette approximation en minimisant des expressions de la forme σ^2 ou γ qui tiennent mieux compte du bruit de l'enregistrement (bruit stationnaire σ^2 , bruit de photons γ . cf. chapitre XII).

Nous proposons à présent d'analyser brièvement les résultats obtenus en tenant compte de ces remarques..

4 - RESULTATS -

Nous avons utilisé cette méthode d'approche sur plusieurs types d'enregistrements. Nous ne présentons ici que certains résultats susceptibles d'illustrer les remarques faites ci-dessus.

4.1) Tout d'abord nous avons construit l'équivalent d'un enregistrement $e(x)$ (enregistrement " synthétique ") en utilisant une fonction profil $f(x)$ enregistrée sur un Fabry-Pérot (cf. figure 32).



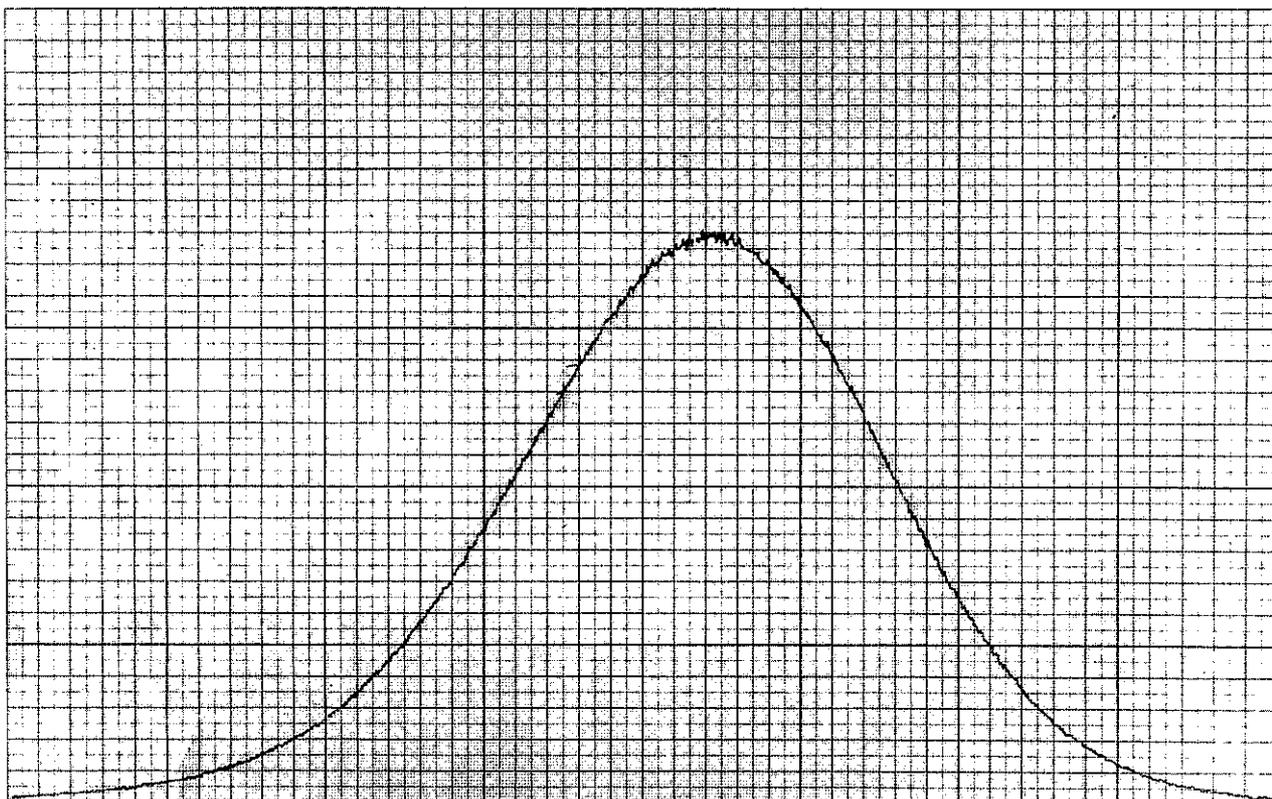
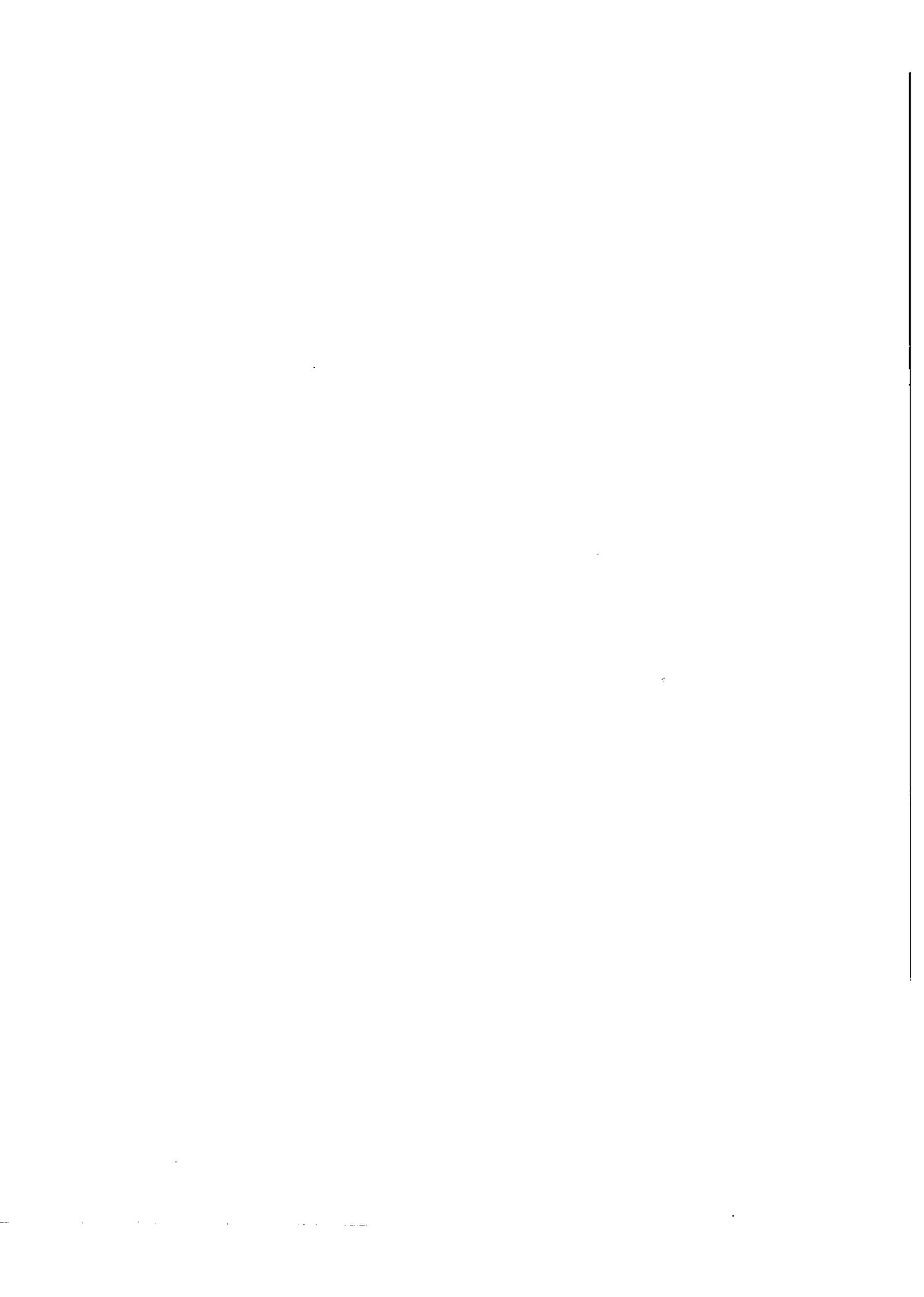


figure 33

enregistrement de la structure isotopique de la raie 5477 de Ni I .



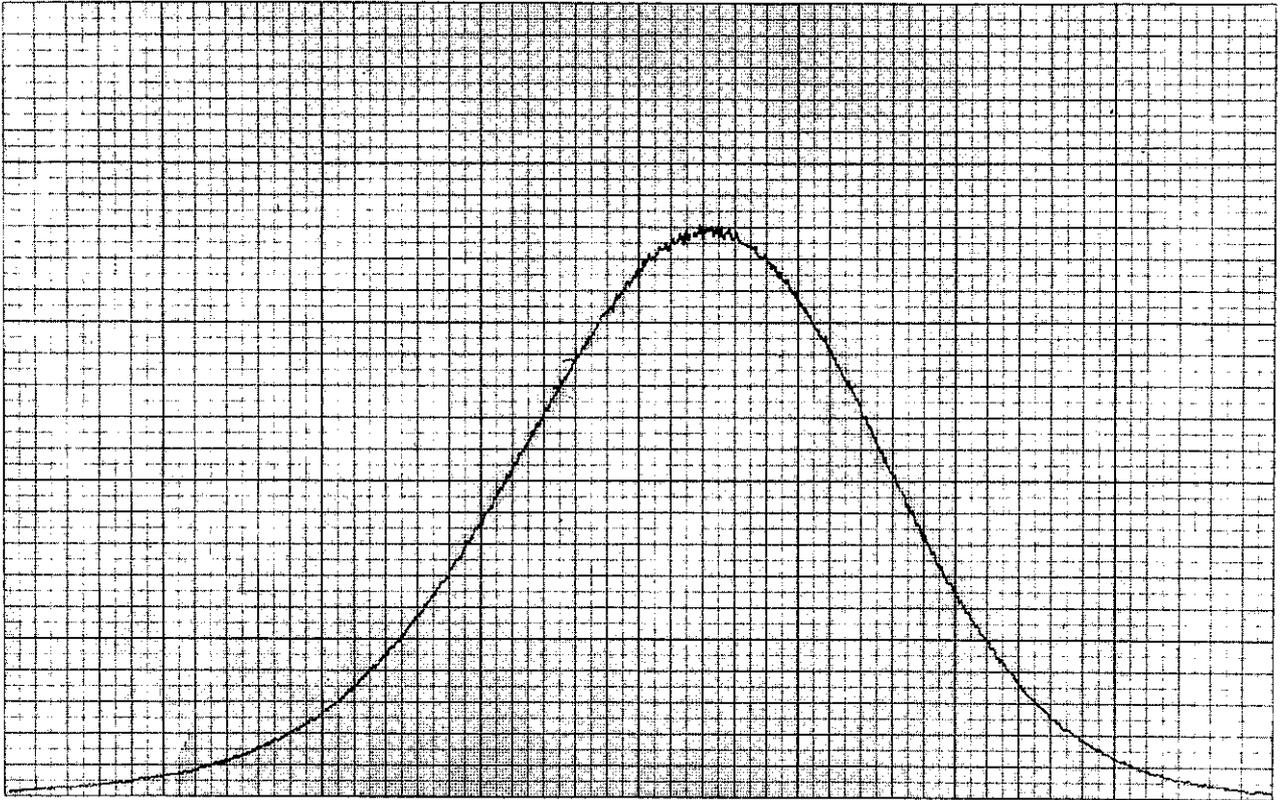
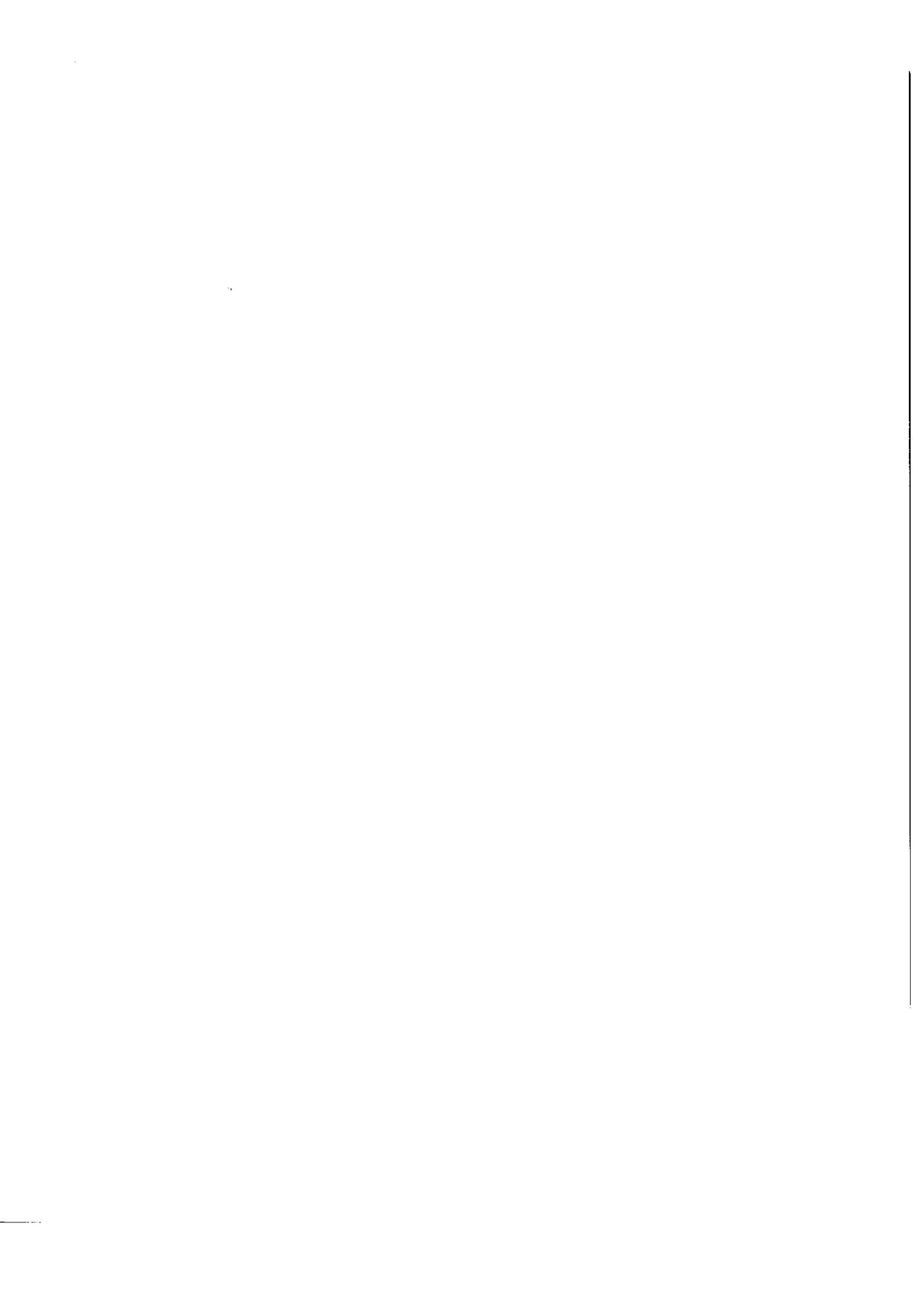


figure 33

enregistrement de la structure isotopique de la raie 5477 de Ni I .



Nous avons tracé la figure qui correspondrait à l'enregistrement de 2 raies d'intensités inégales (avec un rapport d'intensités 0,4), distantes de $\Delta x = 0,5/a$. A partir de cette figure nous cherchons à reconstituer les 2 raies, leur profil et leur intensité en minimisant l'expression $\rho^2 = \epsilon + A \rho_1^2 + B \rho_2^2$. Les résultats sont très encourageants. En effet, nous trouvons :

$$A_2/A_1 = 0,43$$

$$\Delta x = 0,504/a$$

De plus, nous vérifions que si nous recommençons les calculs en nous donnant a priori le rapport des intensités A_2/A_1 , cet apport d'information se traduit bien par un gain de la précision sur Δx . Il vient en effet :

$$\Delta x = 0,5006/a.$$

4.2) Nous avons ensuite testé notre méthode sur un enregistrement de la raie 5 477 de Ni I effectué par P. Luc sur Fabry-Pérot à la demande de J. Bauche (J. Bauche, [1969]). Cette raie est formée de 4 composantes d'intensités respectives 1,2 - 3,7 - 26,2 - 67,7 - unités arbitraires (ou u.a.), dont l'écart permet de mesurer le déplacement isotopique Ni⁵⁸ - Ni⁶⁰ (cf. figure 33). Le rapport s/b dans l'enregistrement que nous traitons est de l'ordre de 1/100 : nous ne pouvons pas, par conséquent, espérer localiser la plus faible des composantes et nous la négligeons. Nous possédons une information supplémentaire dont il nous faudrait en toute rigueur tenir compte : les raies sont équidistantes. Afin de tester la méthode, nous avons choisi d'ignorer cette information. Les résultats trouvés sont les suivants :

$$x_2 = 127 \text{ u.a.}, \quad x_3 = 175 \text{ u.a.}, \quad x_4 = 227 \text{ u.a.}$$

Les écarts entre ces 3 composantes sont respectivement :

$$\Delta x_{3-2} = 48 \text{ u.a.}$$

$$\Delta x_{4-3} = 52 \text{ u.a.}$$

Ces résultats sont excellents puisqu'ils ont donné $\Delta x \cong \text{cste}$, renseignement que nous avons choisi d'ignorer.

4.3) Un large champ d'application de cette méthode concerne les enregistrements des structures hyperfines des raies. En effet, les positions des composantes ne sont pas indépendantes (elles suivent la règle de Casimir). Elles peuvent être déterminées à partir d'un petit nombre de paramètres. Par contre, le nombre de composantes est relativement élevé et ces dernières peuvent être fortement imbriquées les unes dans les autres. Dans l'exemple que nous rapportons ici (figure 34), l'enregistrement est formé de 11 composantes. Toutefois, nous savons que l'écart entre celles-ci est fonction de deux paramètres seulement.

L'enregistrement nous est fourni avec un nombre surabondant de points (1692) équidistants d'une unité arbitraire (u.a.) et les intensités des raies sont connues. Le détail des calculs nous permettant de déterminer $f(x)$ ainsi que les positions des 11 raies est le suivant :

- estimation de a , fréquence de coupure de l'enregistrement $e(x)$ par l'examen de sa T.F. $\hat{e}(\mu)$; nous avons fixé cette valeur de sorte que pour $|\mu| > a$, les fréquences $\hat{e}(\mu) / \hat{e}(0)$ soient inférieures à 0.005. Au-delà, seules subsistent les fréquences $\hat{h}(\mu)$ (cf. figure 35) : nous avons obtenu $a = 0,010$ u.a.

- détermination du nombre N de bases $\text{sinc } 2a(x - \frac{p}{2a})$ nécessaires pour représenter correctement $f(x)$. Nous savons que $f(x)$ est une fonction symétrique. Nous la représentons par :

$$f(x) = \sum_{p=0}^5 f_p \left[\text{sinc } 2a(x - p/2a) + \text{sinc } 2a(x + p/2a) \right].$$

Ceci revient à admettre que la fonction $f(x)$ couvre au plus 500 points de l'enregistrement.

- choix de la fonction à minimiser. Nous minimisons l'expression :

$$\rho^2 = \epsilon + A \rho_1^2 + B \rho_2^2$$

avec :

$$\alpha) \quad \epsilon = \sum_{k=1}^K |e(kh) - \sum_{j=1}^M a_j f(jh - x_j) - C|$$

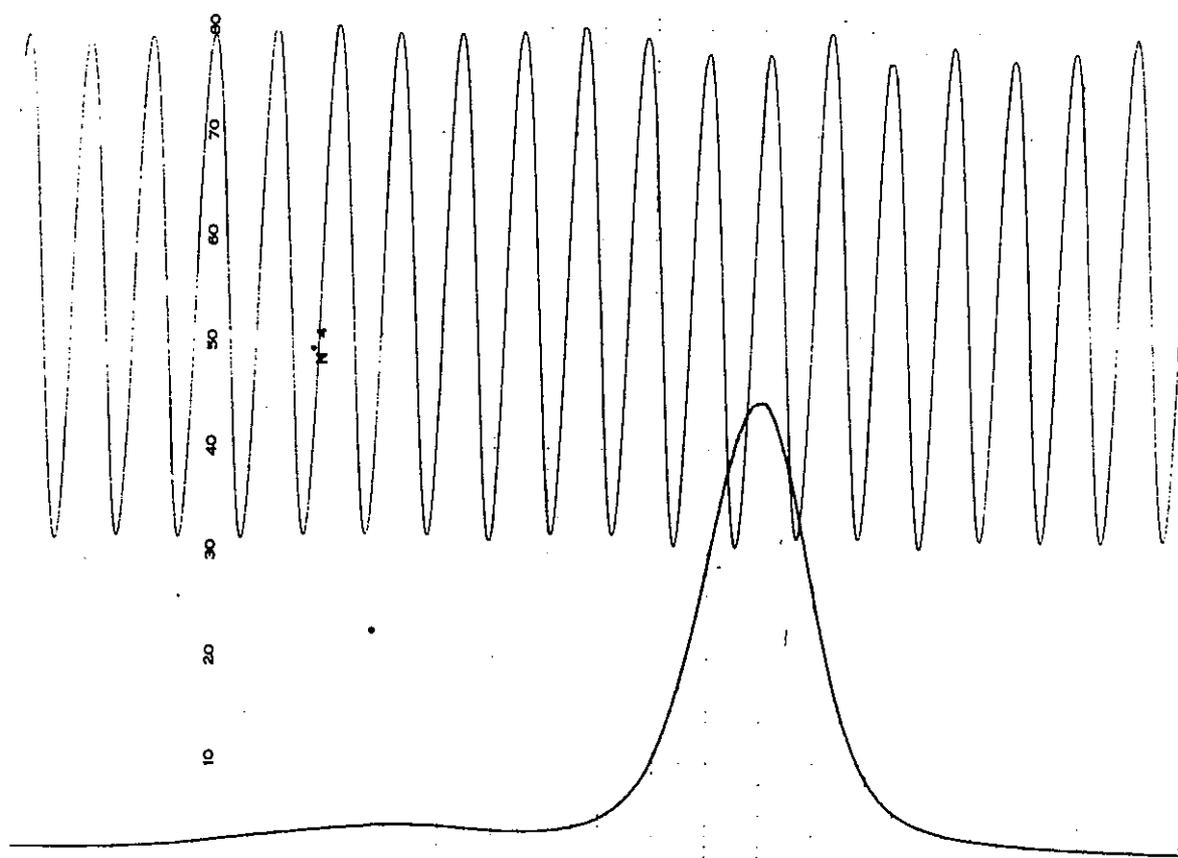


figure 34

enregistrement $e(x)$ de la structure hyperfine de la raie 5139 de Pr .

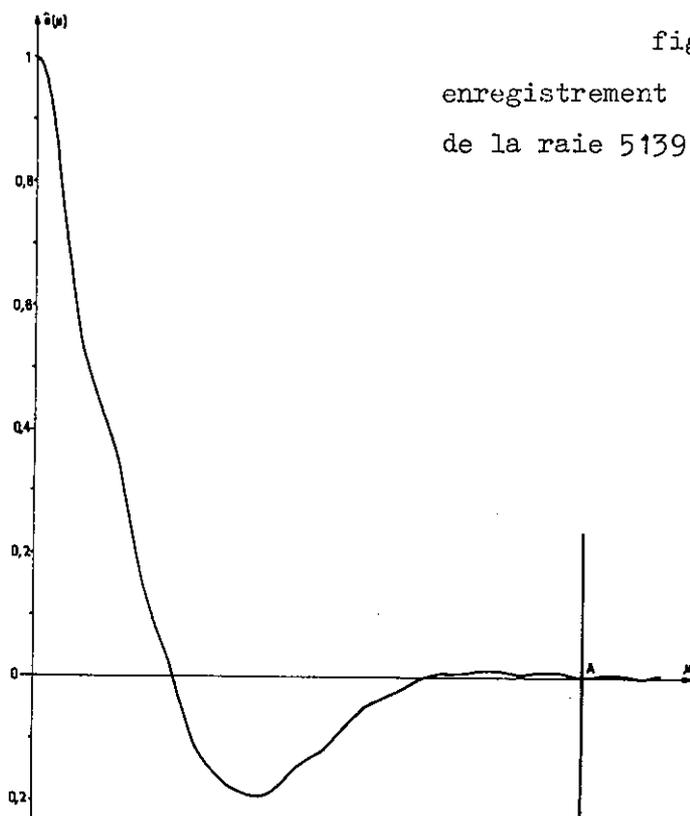


figure 35

T.F. $\hat{e}(\mu)$ de l'enregistrement de la figure 34. A partir de A, seules subsistent les fréquences $\hat{M}(\mu)$

expression dans laquelle :

$h = (1/2a) / 5 = 10$ u.a. (il s'est avéré suffisant d'utiliser un point sur 10 de l'enregistrement).

Les coefficients a_j représentent les intensités connues des différentes raies, les coefficients x_j leurs abscisses. Ces dernières obéissent à la loi de Casimir et la distance d'une raie quelconque à une raie de référence d'abscisse x_0 est donnée par une loi de la forme :

$$x_j = x_0 + f(A, A').$$

Les abscisses des 11 raies dépendent donc de 3 paramètres x_0 , A , A' .

Le coefficient C est une constante à déterminer représentant l'erreur sur le zéro de l'enregistrement.

$$\beta) \begin{cases} A = 100 \\ k_1 \\ \rho_1^2 = \sum_{-k_1}^{k_1} f_-^2(x_k) \end{cases} .$$

$$\gamma) \begin{cases} B = 100 \\ k_1 \\ \rho_2^2 = \sum_{-k_1}^{k_1} f_*^2(x_k) \end{cases} .$$

Les fonctions f_- et f_* sont ici les fonctions définies par les relations (XI.4). Les valeurs x_k sont distantes de 10 u.a. et la borne k_1 est choisie de façon que :

$$|x_{k_1}| = N \times \frac{1}{2a} = 300 \text{ u.a.}$$

soit $k_1 = 30$.

L'expression ρ^2 que nous avons à minimiser contient donc 10 paramètres inconnus. Une première minimisation nous fournit, entre autres, une approximation A_0 et A'_0 des valeurs A et A' ; nous attribuons ensuite successivement au paramètre A , 4 valeurs A_1 , A_2 , A_3 , A_4 proches de A_0 . A chacune de ces valeurs A_i , correspond un certain minimum de ρ^2 noté

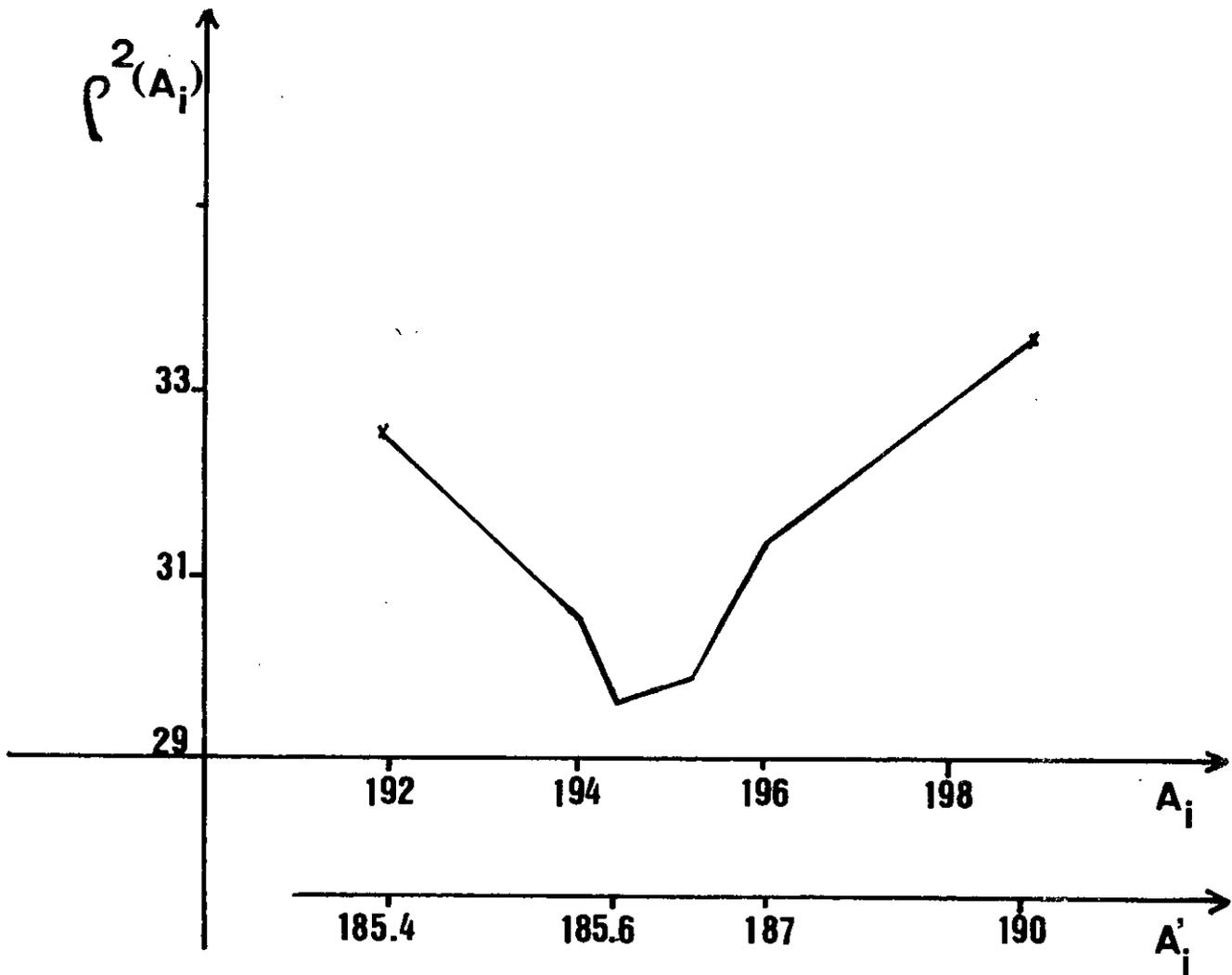


figure 36

valeurs du minimum de ρ^2 en fonction du paramètre A_i et valeurs
du paramètre A'_i correspondant.

$\rho^2 (A_i)$ (fig. 36) et une valeur A'_i du second paramètre. A la plus faible des valeurs $\rho^2 (A_i)$ correspond le couple de valeurs A, A' solution du problème. Dans le cas étudié nous vérifions que la valeur du paramètre A correspond à la valeur trouvée pour ce même paramètre par l'étude d'une autre raie mieux résolue.

5 - CONCLUSION -

Nous avons dans ce chapitre utilisé plusieurs informations connues a priori sur le signal enregistré. Ces informations sont les suivantes :

- le signal est formé d'un nombre donné de pics de Dirac, d'abscisses x_i inconnues, d'intensités a_i connus ou inconnus.

- la réponse impulsionnelle est une fonction symétrique, décroissante de part et d'autre du maximum central.

- dans certains des exemples traités, les intensités relatives des pics de Dirac sont connues; dans d'autres ce sont les positions de ces pics qui sont reliées entre elles par une loi connue.

Les informations, regroupées, sont traduites dans un écart ρ^2 à minimiser; cette méthode nous a conduits, dans les exemples traités, à une reconstitution complète du signal enregistré, reconstitution en accord avec les résultats prévus par la théorie dans deux des exemples choisis.

CHAPITRE XII

PROBLEMES DE FILTRAGE

1 - INTRODUCTION -

Nous avons déjà eu l'occasion de rappeler les méthodes classiques de filtrage dans un chapitre précédent (chapitre VI § 3). Nous proposons ici une méthode de filtrage non linéaire qui tient compte de la nature statistique du bruit qui perturbe l'enregistrement. Cette méthode s'appuie, ici encore, sur les propriétés du théorème d'échantillonnage. Elle fait également appel à la notion du maximum de vraisemblance d'un échantillon de variables aléatoires.

2 - LE FILTRAGE NON LINEAIRE -

Nous avons à filtrer un enregistrement $e(x)$ tel que :

$$e(x) = i(x) + n(x) .$$

Filtrer $e(x)$ revient donc à reconstituer le mieux possible $i(x)$.

Or, ici encore, $i(x)$ est le produit de convolution de $f(x)$ et $b(x)$

$$i(x) = f(x) * b(x) \quad ,$$

$$\text{soit :} \quad \hat{i}(\mu) = \hat{f}(\mu) \times \hat{b}(\mu) \quad ;$$

et puisque $\hat{f}(\mu) = 0$ pour $|\mu| > a$, nous avons également :

$$\hat{i}(\mu) = 0 \quad \text{pour} \quad |\mu| > a .$$

En général, nous ne connaissons pas \underline{a} . Toutefois, l'examen de $\hat{e}(\mu)$ nous en fournit une valeur approchée : nous attribuons à \underline{a} la valeur

μ_e à partir de laquelle toutes les fréquences $\hat{e}(\mu)$ sont du même ordre que celles $\hat{n}(\mu)$ (cf. figure 35). A partir de ces données, nous pouvons appliquer le théorème d'échantillonnage à $i(x)$ et écrire :

$$i(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} i_p \operatorname{sinc} 2a(x - p/2a).$$

Nous pouvons, ici encore, estimer, par l'examen de $e(x)$, le nombre N de fonctions de base $\operatorname{sinc} 2a(x - p/2a)$ nécessaires pour approcher convenablement $i(x)$. Nous négligeons en effet les coefficients i_p qui correspondent à des valeurs $e(p/2a)$ pour lesquelles manifestement il n'y a plus que du bruit. Nous avons alors :

$$e(p/2a) \cong n(p/2a),$$

et nous posons :

$$i(x) = \sum_{p=-n}^{+n} i_p \operatorname{sinc} 2a(x - p/2a) + \varepsilon(x),$$

$$\text{avec : } \varepsilon(x) \ll n(x).$$

Filtrer l'enregistrement $e(x)$ revient donc à déterminer $N = 2n + 1$ coefficients i_p . Pour les déterminer, nous disposons d'un nombre M de points d'enregistrement, donc de M équations :

$$e(x_j) = i(x_j) + n(x_j) = \sum_{p=-n}^{+n} i_p \operatorname{sinc} 2a(x_j - p/2a) + \varepsilon(x_j) + n(x_j).$$

Pour simplifier nos notations, adoptons les conventions suivantes :

$$e(x_j) \rightarrow e_j,$$

$$\operatorname{sinc} 2a(x_j - p/2a) \rightarrow s_{pj},$$

$$n(x_j) \rightarrow n_j;$$

de plus, puisque $\varepsilon(x_j)$ est très petit par rapport à $n(x_j)$, nous pouvons

le négliger devant celui-ci. Nos M équations s'écrivent à présent :

$$e_j = \sum_{p=-n}^{+n} i_p s_{pj} + n_j \quad .$$

Nous supposons que nous connaissons la loi statistique de $n(x)$ en tout point x . Nous pouvons facilement en déduire celle suivie par $e(x)$. Celle-ci déterminée, nous attribuons aux coefficients i_p inconnus les valeurs qui maximisent la fonction de vraisemblance de l'échantillon e_1, e_2, \dots, e_M . Pour cela, rappelons l'expression de cette fonction lorsque les erreurs n_1, n_2, \dots, n_M sont indépendantes et suivent chacune une loi normale, centrée sur 0 de variance connue σ_j^2 .

3 - EXPRESSION DE LA FONCTION DE VRAISEMBLANCE

Cas d'erreurs indépendantes (cf. Y.V. Linnik, [1963])

3.1) La variable n_j est aléatoire, centrée sur 0.

L'espérance mathématique de e_j s'écrit donc :

$$E(e_j) = \sum_{p=-n}^{+n} i_p s_{pj}$$

e_j est donc une variable aléatoire normale dont la densité de probabilité s'écrit :

$$f_j(e_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_j} \exp - \frac{(e_j - \sum_{p=-n}^{+n} i_p s_{pj})^2}{2\sigma_j^2} .$$

La fonction de vraisemblance de l'échantillon e_1, e_2, \dots, e_M s'écrit alors :

$$L(e_1, e_2, \dots, e_M) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \prod_j \sigma_j} \exp - \sum_{j=1}^M \frac{(e_j - \sum_{p=-n}^{+n} i_p s_{pj})^2}{2\sigma_j^2}$$

Les coefficients i_p que nous recherchons maximisent cette quantité, ou ce qui revient au même le logarithme de celle-ci. Nous devons donc rechercher les coefficients qui minimisent la quantité :

$$(XII.1) \quad \epsilon = \sum_{j=1}^M \frac{(e_j - \sum_{p=-n}^{+n} i_p s_{pj})^2}{\sigma_j^2} .$$

3.2) Cas d'observations d'égale importance.

On a alors σ_j^2 constant pour toutes les observations : c'est le cas par exemple d'un bruit blanc. L'expression (XII.1) à minimiser s'écrit alors :

$$\epsilon = \sum_{j=1}^M (e_j - \sum_{p=-n}^{+n} i_p s_{pj})^2 .$$

Cette expression est bien connue : c'est l'expression dite des moindres carrés, obtenue lorsque l'on cherche à minimiser l'écart quadratique entre la courbe enregistrée et la courbe reconstituée. Remarquons qu'au sens du maximum de vraisemblance, elle correspond à un type de bruit bien particulier. Les coefficients i_p sont obtenus à partir des équations normales :

$$\sum_{j=1}^M (e_j - \sum_{p=-n}^{+n} i_p s_{pj}) s_{qj} = 0, \quad q = -n, \dots, +n,$$

soit :

$$(XII,2) \quad \sum_{j=1}^M e_j s_{qj} = \sum_{p=-n}^{+n} i_p \sum_{j=1}^M s_{pj} s_{qj} .$$

Pour un pas $h = \Delta x$ suffisamment petit, et des observations e_j suffisamment nombreuses sur l'axe réel nous avons

$$\sum_{j=1}^M e_j s_{qj} \cong \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} e(x) \operatorname{sinc} 2a(x - qh) dx = \frac{1}{h} e'(qh),$$

$$\sum_{j=1}^M s_{pj} s_{qj} \cong \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} \operatorname{sinc} 2a(x - qh) \operatorname{sinc} 2a(x - ph) dx = \frac{1}{h} \delta_{pq}$$

En reportant la valeur de ces deux sommes dans l'expression (XII.2), nous obtenons :

$$i_p = e'(ph) ,$$

où $e'(ph)$ est la valeur obtenue au point $x = ph$ lorsqu'on filtre l'enregistrement $e(x)$ à l'aide du filtre $\text{sinc } 2ax$.

Nous obtenons dans ce cas une coïncidence entre la méthode classique de filtrage (élimination des fréquences du bruit supérieures à a) et la méthode du maximum de vraisemblance.

3.3) Cas d'observations d'inégale importance.

C'est un cas très fréquent en spectroscopie. Souvent, en effet, le bruit qui perturbe l'enregistrement est composé de 2 termes : le premier terme est dû au récepteur et son σ^2 est constant le long de l'enregistrement, le σ^2 du second, par contre, est proportionnel à l'intensité du signal reçu.

Au dessous d'un certain seuil S , le 1er terme est prépondérant. Au dessus de S , le second terme le devient.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sigma_j^2 &= \text{cte} \quad \text{pour } \sum i_p s_{pj} < S \\ \sigma_j^2 &= k \sum i_p s_{pj} \quad \text{pour } \sum i_p s_{pj} > S . \end{aligned}$$

En pratique, nous obtenons une valeur satisfaisante de σ_j^2 en confondant $\sum i_p s_{pj}$ et e_j . L'expression à minimiser s'écrit alors :

$$\varepsilon = \sum_{j < j_{\text{inf}}} \frac{(e_j - \sum i_p s_{pj})^2}{\sigma_j^2} + \sum_{j > j_{\text{inf}}} \frac{(e_j - \sum i_p s_{pj})^2}{\sigma_j^2} .$$

4 - CAS GENERAL

Dans le cas général d'observations non indépendantes, la fonction de vraisemblance de l'échantillon est plus compliquée et il faut faire intervenir la matrice de covariance du vecteur $E(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On a alors :

$$(E) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sqrt{||\mathcal{M}||} \exp \left[-\frac{1}{2} [E - M]^t \mathcal{M}^{-1} [E - M] \right] .$$

où - E est le vecteur normal de composantes e_1, e_2, \dots, e_n .

- M est le vecteur moyenne de E . Ses composantes sont donc :

$$m_j = \sum_i i_p s_{pj} .$$

- \mathcal{M}^{-1} est la matrice de covariance des échantillons e_1, e_2, \dots, e_n .

5 - INTERÊT DE LA METHODE

La méthode du maximum de vraisemblance nous a semblé intéressante à appliquer du fait des propriétés des estimateurs qu'elle introduit. La plus importante de celles-ci stipule en effet que les estimateurs des paramètres obtenus par cette méthode sont non biaisés, c'est-à-dire $E(i_p) = i_p$.

Une telle méthode appliquée au filtrage permet donc de converger en probabilité vers le signal enregistré : elle élimine toute erreur systématique que l'on introduit trop souvent en filtrant d'une manière non propre. Notons en particulier la mauvaise habitude de nombreux expérimentateurs de lisser les enregistrements manuellement. Nous avons comparé 3 enregistrements identiques filtrés manuellement et le même enregistrement filtré par la méthode proposée ci-dessus en calculant l'écart quadratique entre ces différents résultats et le signal initial. Nous avons trouvé :

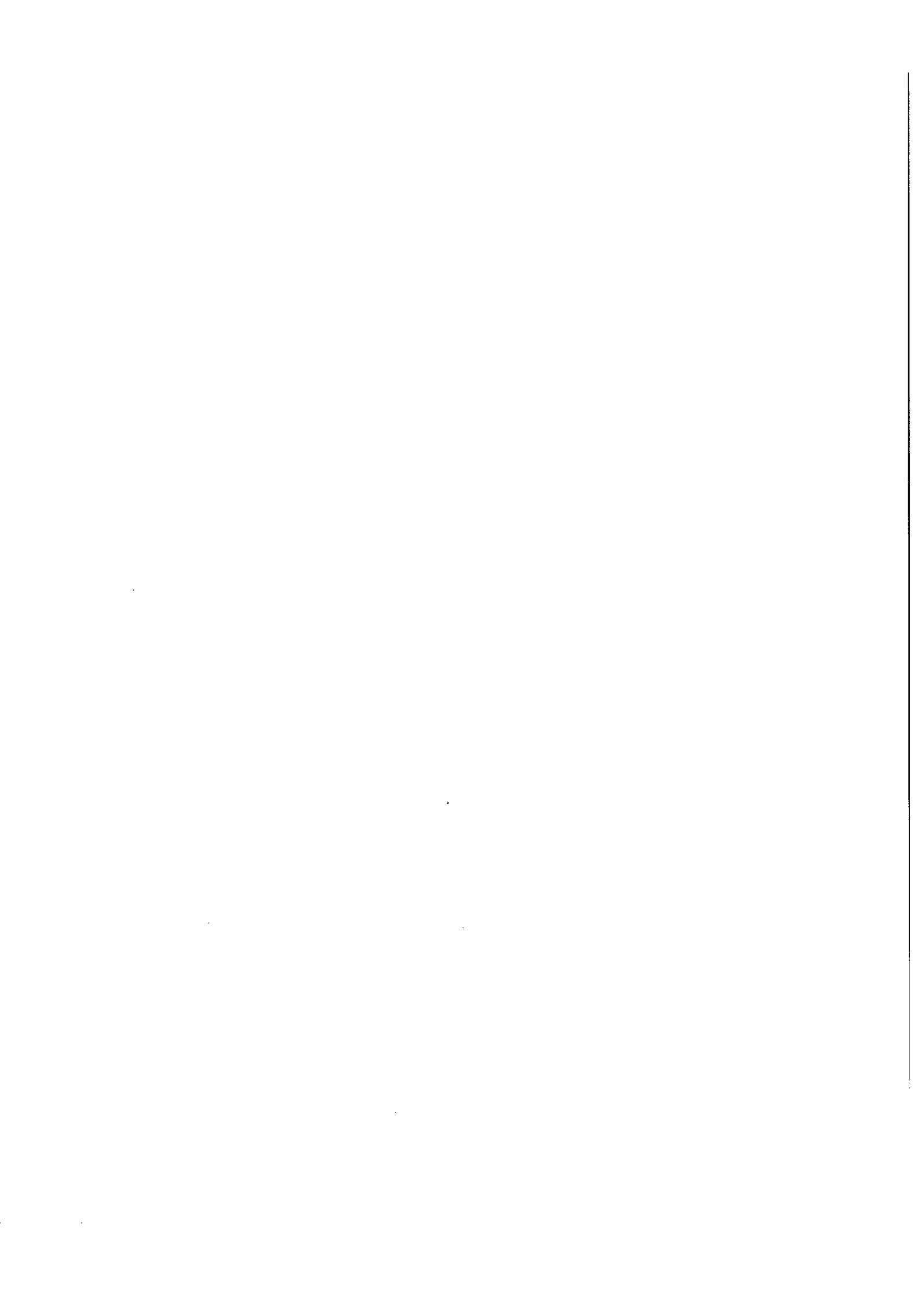
$$\sigma_1 = 0,074 \quad , \quad \sigma_2 = 0,061 \quad , \quad \sigma_3 = 0,054 \quad , \quad \sigma_4 = 0,053$$

On voit que , si dans l'un des cas (expérimentateur chanceux n° 3), l'enregis-

trement filtré manuellement peut conduire à un bon résultat, ce fait n'est pas général. Au contraire, les résultats ci-dessus montrent que sur 3 enregistrements, un seul conduit à un résultat du même ordre que celui trouvé par filtrage numérique.

CONCLUSION

Ici encore le théorème d'échantillonnage a pu nous permettre de trouver une forme analytique simple de l'enregistrement filtré. De plus, l'ordre de grandeur des paramètres i_p recherchés est connue a priori puisque le signal filtré est du même ordre de grandeur que le signal non filtré. Ceci nous facilite une convergence rapide du processus de minimisation. Cependant, la rapidité de la convergence décroît très vite avec l'accroissement du nombre de paramètres et ce procédé semble donc devoir être réservé aux enregistrements de faible étendue.



CONCLUSION

Nous rassemblons ici les conclusions que nous avons tirées tout au long de ce travail :

Nous avons vu que le théorème d'échantillonnage peut prendre une forme plus générale que sa forme classique, soit :

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{h}{h'} (nh) \operatorname{sinc} (x - ph)/h' ,$$

avec les conditions $h \leq h_0 \leq h' \leq 1/2a$ ou $2a$ est le domaine de $\hat{f}(\mu)$, T.F. de $f(x)$.

Nous avons souligné que les séries finies :

$$f_{N,h}(x) = \sum_{p=-n}^{+n} f(ph) \operatorname{sinc} (x - ph)/h ,$$

constituent les approximations en moyenne quadratique sur $-\infty, +\infty$ à $N = 2n + 1$ termes de la fonction $f(x)$ dans le système des fonctions de base $\operatorname{sinc} (x - ph)/h$. La qualité de ces approximations, une fois le nombre de termes fixé, dépend de h , c'est-à-dire des fonctions de base utilisées. Il est donc important de choisir correctement le pas d'échantillonnage : nous avons montré que l'approximation la meilleure est obtenue pour $h = 1/2a$.

Nous avons mis en évidence le fait que la série :

$$\varphi_N(y) = \sum_{p=-n}^{+n} h f(ph) g(x - ph) ,$$

exprime le produit de convolution exact de la fonction $g(x)$ par l'approximation correspondante $f_{N,h}(x)$.

Ces premiers résultats nous ont permis de faire une étude critique des méthodes de traitement des enregistrements utilisées à ce jour. Nous avons ainsi analysé :

- la méthode dite "de correction par convolution". Elle consiste, rappelons le, à convoluer l'enregistrement $e(x)$ par une fonction correc-

trice $c(x)$ judicieusement choisie. En tant que méthode numérique elle est d'emploi facile mais son efficacité est limitée par deux facteurs : d'une part les seules corrections possibles consistent en une pondération différente des fréquences $\hat{b}(\mu)$ sur le domaine $[-a, +a]$; aucune des fréquences perdues n'est donc restituée. D'autre part, cette méthode entraîne une modification du bruit dans l'enregistrement, modification qui peut aller à l'encontre du résultat souhaité.

- les diverses méthodes dites "de déconvolution" parues à ce jour dont le but est de résoudre l'équation intégrale $e(x) = b(x) * f(x) + n(x)$ lorsqu'on connaît $e(x)$ et $f(x)$. Nous avons souligné leurs insuffisances à l'aide d'une étude critique de l'équation de convolution.

Lors de cette dernière étude, il est apparu évident que la présence de bruit entraîne l'existence non pas d'une solution unique $b(x)$ à support borné, mais d'une infinité de solutions qui s'écartent plus ou moins de la solution cherchée $b(x)$. Pour éliminer la plupart d'entre elles, nous avons souligné qu'il est indispensable d'utiliser les caractéristiques de $b(x)$ connues a priori ; cependant, certaines solutions parasites peuvent fort bien répondre aux critères ainsi introduits et s'écarter néanmoins de $b(x)$ (c'est le cas lorsque leur T.F. couvre un domaine plus grand que celui qu'il est possible d'atteindre compte tenu du bruit).

Nous avons donc défini un critère de qualité qui permet de trouver la fréquence la plus élevée qu'il est significatif de restituer, compte tenu du bruit perturbant l'enregistrement. Nous avons alors proposé un algorithme de déconvolution qui utilise à la fois ce critère et une méthode originale de rejet des solutions ne correspondant pas aux caractéristiques du signal recherché. Cet algorithme appliqué à des cas concrets nous a fourni des résultats dont nous avons par ailleurs vérifié l'exactitude.

Enfin, nous avons montré que la connaissance de la fonction $f(x)$ n'est pas toujours indispensable à la reconstitution du signal $b(x)$. Certaines autres informations, telle la structure du signal en pics de Dirac par exemple, sont utilisables et permettent en fait une restitution presque parfaite de $b(x)$ en même temps que la détermination a posteriori de $f(x)$.

L'ensemble de ces remarques nous conduit aux conclusions finales suivantes :

1) Avant d'entreprendre un calcul de déconvolution, il faut rassembler le maximum d'informations. Ceci fait, l'algorithme général que nous proposons peut être utilisé.

2) Compte tenu du bruit, le gain en résolution qui résulte d'un apport donné d'informations est limité. Dans ces conditions, il est important d'évaluer la largeur du domaine des fréquences qui peut être ainsi restitué. Nous proposons un critère permettant d'estimer cette largeur, préliminairement à tout calcul.

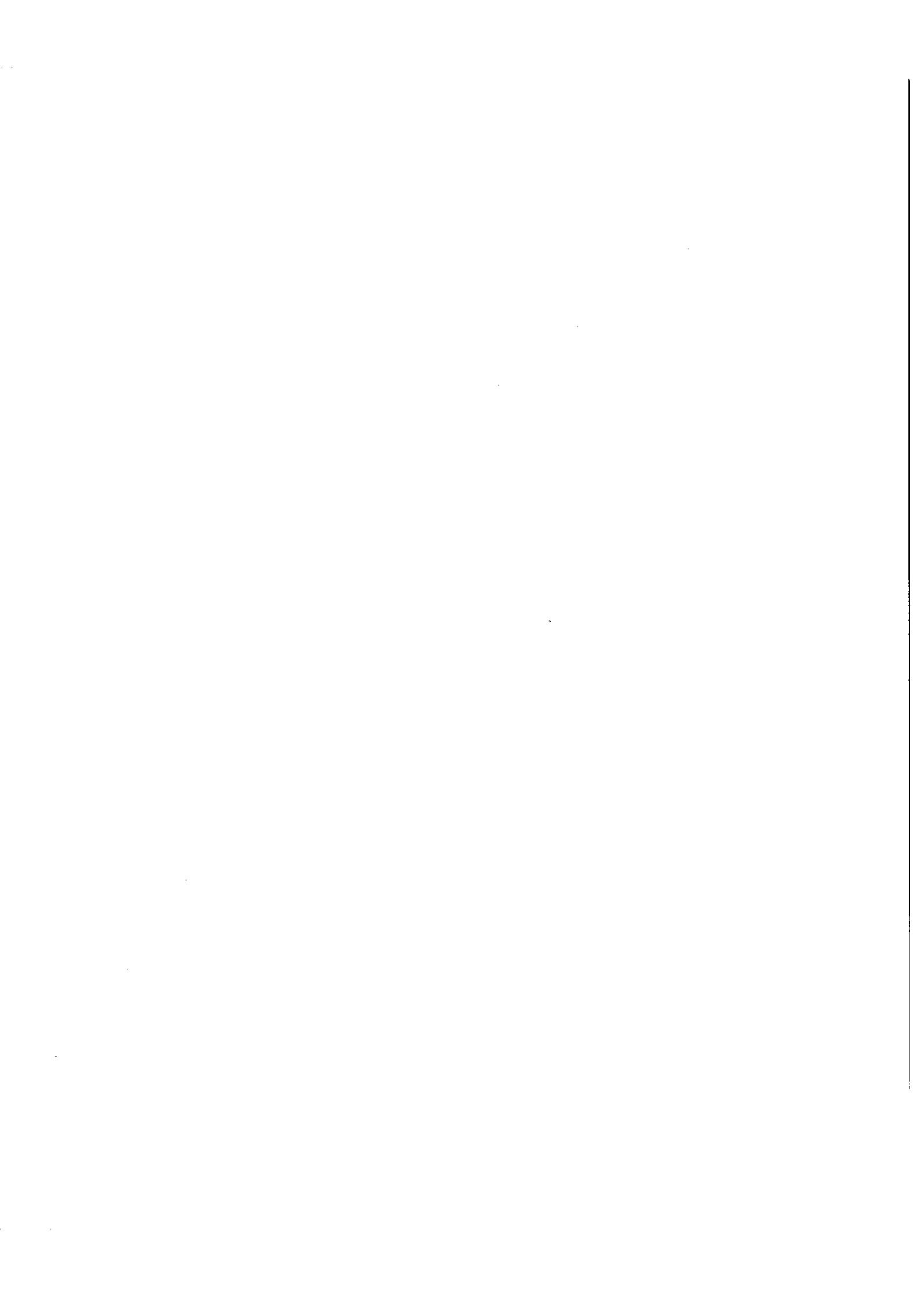
Si l'on cherche à restituer un plus grand domaine de fréquence, les résultats obtenus ne seront pas significatifs, quelle que soit la méthode de calcul.

A la fin de ce travail, remarquons que le cadre du laboratoire Aimé COTTON nous a incités à améliorer nos méthodes pour le traitement d'enregistrements unidimensionnels. Nous avons en effet appliqué celles-ci à de nombreux enregistrements fournis par les chercheurs de ce laboratoire, ou par ceux de laboratoires extérieurs : enregistrements de structures hyperfines, de déplacement isotopique, de spectres d'absorption en Spectroscopie cristalline ou moléculaire. La recherche de constantes physiques diverses, but de la résolution de chacun de ces enregistrements, a ainsi suscité notre intérêt.

Cependant, les méthodes de traitement que nous proposons peuvent facilement être généralisées au cas d'enregistrements multidimensionnels et en particulier, grâce aux propriétés des séries finies de Dini-Bessel, à celui de la déconvolution d'un produit de fonctions radiales.

TROISIEME PARTIE

APPENDICES



APPENDICE 1

CALCUL DES COEFFICIENTS β_{pqj}

Ces coefficients sont, rappelons-le, les coefficients du développement sur $[0,1]$ de la fonction $J_0(\lambda_p r), J_0(\lambda_q r)^*$, suivant les fonctions de base $J_0(\lambda_j r)$. Soit :

$$J_0(\lambda_p r) J_0(\lambda_q r) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{pqj} J_0(\lambda_j r) .$$

Ils sont donnés par la formule :

$$\beta_{pqj} = \frac{\int_0^1 J_0(\lambda_p r) J_0(\lambda_q r) J_0(\lambda_j r) 2\pi r dr}{\int_0^1 J_0(\lambda_j r)^2 2\pi r dr}$$

Nous aurons donc :

$$\beta_{pqj} = \beta_{qpj} .$$

Nous donnons sur les pages suivantes les valeurs de ces coefficients pour p et q variant de 0 à 9 et j de 0 à 19.

* où les " λ_j " sont les racines de $J_1(u) = 0$

$P = 0$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	1.0000000	.9000000	.8100000	.7290000	.6561000	.5904900	.5314410	.4782969	.4304672	.3874205
1	.9000000	1.0000000	.9000000	.8100000	.7290000	.6561000	.5904900	.5314410	.4782969	.4304672
2	.8100000	.7290000	1.0000000	.9000000	.8100000	.7290000	.6561000	.5904900	.5314410	.4782969
3	.7290000	.6561000	.5904900	1.0000000	.9000000	.8100000	.7290000	.6561000	.5904900	.5314410
4	.6561000	.5904900	.5314410	.4782969	1.0000000	.9000000	.8100000	.7290000	.6561000	.5904900
5	.5904900	.5314410	.4782969	.4304672	.3874205	1.0000000	.9000000	.8100000	.7290000	.6561000
6	.5314410	.4782969	.4304672	.3874205	.3513509	.3169855	1.0000000	.9000000	.8100000	.7290000
7	.4782969	.4304672	.3874205	.3513509	.3169855	.2854334	.2558919	1.0000000	.9000000	.8100000
8	.4304672	.3874205	.3513509	.3169855	.2854334	.2558919	.2282270	.2023413	1.0000000	.9000000
9	.3874205	.3513509	.3169855	.2854334	.2558919	.2282270	.2023413	.1780561	.1552561	1.0000000
10	.3513509	.3169855	.2854334	.2558919	.2282270	.2023413	.1780561	.1552561	.1338254	.1136894
11	.3169855	.2854334	.2558919	.2282270	.2023413	.1780561	.1552561	.1338254	.1136894	.0947729
12	.2854334	.2558919	.2282270	.2023413	.1780561	.1552561	.1338254	.1136894	.0947729	.0771354
13	.2558919	.2282270	.2023413	.1780561	.1552561	.1338254	.1136894	.0947729	.0771354	.0616327
14	.2282270	.2023413	.1780561	.1552561	.1338254	.1136894	.0947729	.0771354	.0616327	.0481125
15	.2023413	.1780561	.1552561	.1338254	.1136894	.0947729	.0771354	.0616327	.0481125	.0364433
16	.1780561	.1552561	.1338254	.1136894	.0947729	.0771354	.0616327	.0481125	.0364433	.0271471
17	.1552561	.1338254	.1136894	.0947729	.0771354	.0616327	.0481125	.0364433	.0271471	.0197917
18	.1338254	.1136894	.0947729	.0771354	.0616327	.0481125	.0364433	.0271471	.0197917	.0141257
19	.1136894	.0947729	.0771354	.0616327	.0481125	.0364433	.0271471	.0197917	.0141257	.0100753

P = 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.102215	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
1	.352277	.260157	.002042	-.101249	.101049	-.000015	.000004	-.000033	.000000
2	.479320	.301159	.224435	.101922	-.000432	.000099	-.000030	.000012	-.000006
3	.000074	.421312	.232012	.001519	.004504	-.000045	.000134	-.000043	.000019
4	-.000043	.001430	.400043	.234510	.317113	.004979	-.000020	.000156	-.000051
5	.000207	-.001109	.001405	.001736	.287953	.322030	.005238	-.000671	.000173
6	-.000075	.001274	-.001047	.001322	.384321	.287089	.320923	.005423	-.000709
7	.000022	-.000090	.000029	-.000108	.001233	.374231	.260562	.330092	.005557
8	-.000020	.000042	-.000103	.000304	-.001054	.001158	.375519	.260211	.332399
9	.000000	-.000023	.000053	-.000111	.000305	-.000150	.007090	.372690	.285971
10	-.000012	.000006	-.000025	.000035	-.000114	.000004	-.001044	.007030	.370464
11	-.000005	-.000010	.000011	-.000023	.000057	-.000115	.000301	-.001035	.006989
12	-.000011	-.000002	-.000011	.000018	-.000024	.000058	-.000115	.000298	-.001029
13	-.000010	-.000010	.000000	-.000017	.000021	-.000026	.000060	-.000121	.000294
14	-.000007	-.000012	-.000007	.000017	-.000008	.000019	-.000030	.000056	-.000119
15	-.000006	-.000000	.000000	-.000015	.000007	-.000007	.000015	-.000025	.000000
16	-.000007	-.000005	-.000007	.000002	-.000003	.000007	-.000005	.000023	-.000020
17	-.000013	-.000014	-.000004	-.000003	.000004	.000004	.000021	.000002	.000031
18	-.000004	-.000000	-.000000	-.000004	-.000000	.000008	.000006	.000017	.000006
19	-.000005	-.000000	-.000000	.000001	.000000	.000004	.000012	.000014	.000038

P = 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
1	.167600	.163482	.162173	-.000240	.000055	-.000017	.000006	-.000003	
2	.155449	.153584	.152494	.000416	-.000442	.000111	-.000038	.000015	
3	.221852	.144363	.154070	.204070	.004129	-.000576	.000155	-.000056	
4	.357951	.201476	.141525	.155577	.213476	.004585	-.000666	.000167	
5	.007971	.329056	.192184	.139692	.156980	.220069	.004898	-.000733	
6	-.001228	.007941	.313937	.188831	.138805	.158158	.224948	.005128	
7	.000353	-.001284	.007322	.303905	.183464	.138265	.159133	.228712	
8	-.000140	.000393	-.001293	.007697	.296932	.181083	.137916	.159944	
9	.000064	-.000159	.000406	-.001241	.007509	.291805	.179331	.137673	
10	-.000035	.000077	-.000166	.000413	-.001281	.007493	.287873	.177988	
11	.000016	-.000041	.000382	-.000169	.000410	-.001270	.007411	.284763	
12	-.000014	.000024	-.000342	.000383	-.000171	.000408	-.001260	.007340	
13	.000003	-.000017	.000326	-.000042	.000399	-.000174	.000407	-.001251	
14	-.000007	.000009	-.000015	.000390	-.000047	.000388	-.000172	.000407	
15	-.000000	-.000010	.000009	-.000018	.000387	-.000043	.000391	-.000170	
16	-.000006	.000003	-.000007	.000380	-.000013	.000382	-.000043	.000394	
17	-.000006	-.000011	.000002	-.000010	.000381	-.000011	.000380	-.000034	
18	-.000004	-.000000	-.000003	.000377	-.000004	.000380	-.000003	.000393	
19	-.000003	-.000003	.000003	-.000011	.000382	.000010	-.000038	.000399	

P = 3

	3	4	5	6	7	8	9
0	.002355	.003300	.003300	.003300	.003300	.003300	.000000
1	.112551	.110010	.091702	-.002219	.003052	-.000010	.000007
2	.100285	.100059	.141274	.002859	-.003599	.000107	-.000039
3	.113095	.095015	.119251	.154300	.003529	-.000030	.000151
4	.125559	.107015	.090055	.011910	.104052	.003973	-.000024
5	.170484	.117709	.100075	.000000	.114107	.170705	.004290
6	.297825	.164574	.110020	.104555	.095723	.115082	.175757
7	.007872	.270055	.157570	.111045	.103524	.090047	.117330
8	-.001345	.007721	.200251	.157955	.107294	.102040	.090356
9	.000450	-.001558	.007572	.200121	.149697	.100035	.102385
10	-.000103	.000447	-.001555	.007459	.254102	.147258	.107086
11	.000090	-.000194	.000452	-.001342	.007325	.249458	.145569
12	-.000051	.000047	-.000190	.000455	-.001351	.007227	.245770
13	.000050	-.000055	.000101	-.000199	.000451	-.001315	.007147
14	-.000021	.000051	-.000058	.000105	-.000198	.000452	-.001302
15	.000015	-.000021	.000050	-.000057	.000109	-.000199	.000453
16	-.000012	.000012	-.000021	.000059	-.000050	.000111	-.000193
17	.000004	-.000010	.000015	-.000017	.000045	-.000048	.000123
18	-.000000	.000011	-.000000	.000022	-.000014	.000058	-.000014
19	.000007	-.000010	.000015	-.000010	.000040	.000020	.000203

P = 4

u	4	5	6	7	8	9
0	.047081	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
1	.085099	.093212	.0011464	-.001132	.000040	-.000015
2	.074815	.082000	.115011	.002427	-.000353	.000099
3	.063974	.072910	.035577	.125450	.003042	-.000477
4	.054030	.071200	.073327	.005577	.134137	.003466
5	.047910	.069945	.077612	.074030	.091037	.140589
6	.107635	.092395	.070324	.070933	.074845	.093035
7	.151133	.102339	.039242	.177090	.076643	.075530
8	.200385	.143059	.090790	.087214	.076318	.076532
9	.007544	.247735	.137691	.096306	.085808	.075791
10	-.001372	.007371	.236761	.135851	.094505	.084781
11	.000404	-.001305	.007222	.232131	.133904	.093224
12	-.000200	.000409	-.001352	.007093	.226945	.126717
13	.000102	-.000212	.000403	-.001357	.006907	.222032
14	-.000050	.000100	-.000212	.000472	-.001322	.006094
15	.000032	-.000050	.000115	-.000213	.000473	-.001304
16	-.000021	.000040	-.000062	.000118	-.000207	.000479
17	.000019	-.000020	.000044	-.000055	.000124	-.000178
18	-.000010	.000020	-.000015	.000057	-.000024	.0000251
19	.000015	-.000001	.000007	.000018	.0000191	-.0000169

P = 5

u	s	t	v	w	x
0	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
1	.000010	.000010	.000020	-.000010	.000010
2	.000005	.000020	.000010	.000009	-.000014
3	.000000	.000005	.000007	.000003	.000001
4	.000012	.000020	.000007	.000007	.000010
5	.000014	.000001	.000003	.000004	.000017
6	.000022	.000010	.000020	.000017	.000010
7	.000001	.000022	.000020	.000010	.000005
8	.000011	.000005	.000007	.000000	.000004
9	.000007	.000000	.000004	.000004	.000007
10	.000003	.000000	.000003	.000004	.000001
11	.000003	.000007	.000000	.000000	.000001
12	-.000001	.000000	.000002	.000002	.000001
13	.000004	-.000004	.000000	.000007	.000001
14	-.000004	.000000	-.000000	.000003	.000000
15	.000001	-.000001	.000000	-.000003	.000000
16	-.000000	.000001	-.000000	.000000	-.000000
17	.000000	-.000000	.000000	-.000000	.000000
18	-.000000	.000000	-.000000	.000000	-.000000
19	.000000	.000000	.000000	-.000000	-.000000

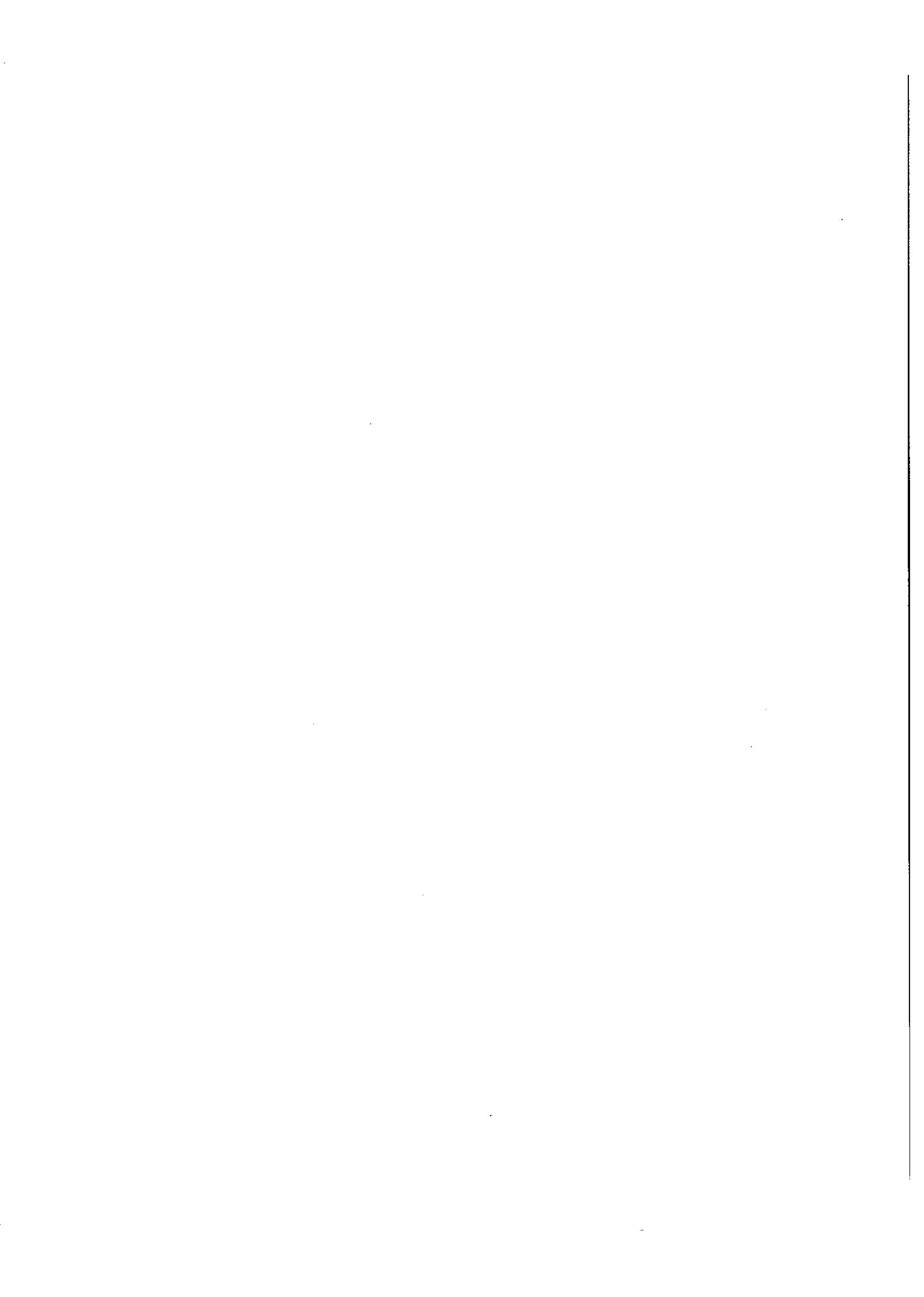
P = 6

u	6	7	8	9
J				
0	.052423	.003330	.053333	.000000
1	.057382	.005544	.001084	-.000142
2	.049967	.050934	.050977	.001848
3	.054383	.049778	.000258	.091393
4	.053200	.052314	.050995	.001203
5	.057135	.051430	.051971	.002093
6	.058093	.054721	.050727	.001111
7	.063478	.053032	.053478	.004455
8	.066959	.003332	.054478	.002739
9	.077125	.064374	.059154	.053542
10	.087213	.074385	.062390	.057978
11	.122085	.083993	.071913	.061287
12	.214842	.117524	.051598	.073241
13	.006848	.207111	.114059	.079745
14	-.001323	.000098	.201243	.111343
15	.000480	-.001307	.000977	.198553
16	-.000218	.003409	-.001288	.001518
17	.000134	-.003193	.000887	-.003358
18	-.000034	.003249	-.000317	.000343
19	.000183	-.003173	-.000018	-.000430

P = 7

u	7	8	9
J			
0	.027951	.003330	.000000
1	.049378	.005544	.003958
2	.042908	.049383	.073970
3	.040407	.043335	.052598
4	.045194	.044328	.044278
5	.047884	.043394	.044384
6	.040131	.040330	.043498
7	.051337	.040078	.045242
8	.052888	.049428	.045321
9	.057723	.051339	.048224
10	.061408	.053388	.049788
11	.073741	.053328	.054192
12	.068513	.005328	.057799
13	.112712	.077019	.060511
14	.199278	.109054	.073918
15	.000547	.193157	.138244
16	-.001288	.000331	.140119
17	.000583	-.001385	.000187
18	-.000313	.003348	-.001420
19	-.000011	-.003309	.000239

P = 8			P = 9		
u	v	w	u	v	w
0	.024555	.030106	0	.021907	
1	.043333	.039132	1	.030021	
2	.057011	.043019	2	.033436	
3	.040515	.057958	3	.035973	
4	.039315	.039425	4	.034823	
5	.041337	.033302	5	.036430	
6	.041270	.039919	6	.036211	
7	.043437	.041033	7	.037797	
8	.044187	.041971	8	.036101	
9	.047059	.042706	9	.040082	
10	.048842	.043014	10	.041002	
11	.053312	.047326	11	.043719	
12	.057032	.051038	12	.045018	
13	.065735	.053340	13	.049800	
14	.075170	.055334	14	.053403	
15	.105302	.072020	15	.061351	
16	.160095	.112374	16	.070599	
17	.036141	.131011	17	.090841	
18	-.031410	.033027	18	.176074	
19	.030243	-.031371	19	.005513	



APPENDICE 2

ORGANIGRAMME DU SIMPLEX NON LINEAIRE

Sous-programme de minimisation d'une fonction

$$y = f(X(1), X(2) \dots X(N))$$

écrit par D. Taupin pour l'Univac 1108 d'Orsay, d'après l'algorithme de Nelder, J.A. et Mead, R., [1965]

Arguments d'entrée :

- jeu initial des paramètres $X(1), X(2), \dots, X(N)$
- accroissements initiaux correspondants $dX(1), dX(2), \dots, dX(N)$
- ϵ valeur relative pour laquelle on déclare la minimisation atteinte.

A : Construction de la matrice $XT (N, N+1)$.

$$[XT] = \begin{bmatrix} X(1) & , & X(1) + DX(1) & \dots & X(1) \\ X(2) & , & X(2) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X(N) & , & X(N) & \dots & X(N) + DX(N) \end{bmatrix}$$

Chaque colonne correspond aux coordonnées d'un point $A(I)$ dans l'espace à N dimensions.

B Calcul des $N+1$ valeurs $YT(I) = f(A(I))$ correspondantes.

C Recherche de la valeur maximum $YMAX = YT(IMAX) \rightarrow A(IMAX)$,
Recherche de la valeur minimum $YMIN = YT(IMIN) \rightarrow A(IMIN)$.

Si $|(Y_{MAX} - Y_{MIN})/Y_{MAX}| < \epsilon$, la minimisation est atteinte, retour au programme initial.

D Recherche du centre de gravité des $N + 1$ points $A(I)$. (coordonnées XG)

E Essai du point symétrique du moins bon $A(IMAX)$ par rapport au centre de gravité :

on obtient $A1$ de coordonnées $X1$ et la valeur $Y1$ correspondante :
 $Y1 = f(A1)$.

Trois possibilités :

$Y1 > Y_{MAX}$: mauvaise direction, aller en H

$Y_{MIN} < Y1 < Y_{MAX}$, on remplace $A(IMAX)$ par $A1$. Retour en D

F $Y1 < Y_{MIN}$. On continue dans la même direction.

On obtient $A2$ de coordonnées $X2$ et la valeur $Y2$ correspondante $Y2 = f(A2)$.

G On remplace $A(IMAX)$ par le meilleur des 2 points $A1$ et $A2$: retour en D .

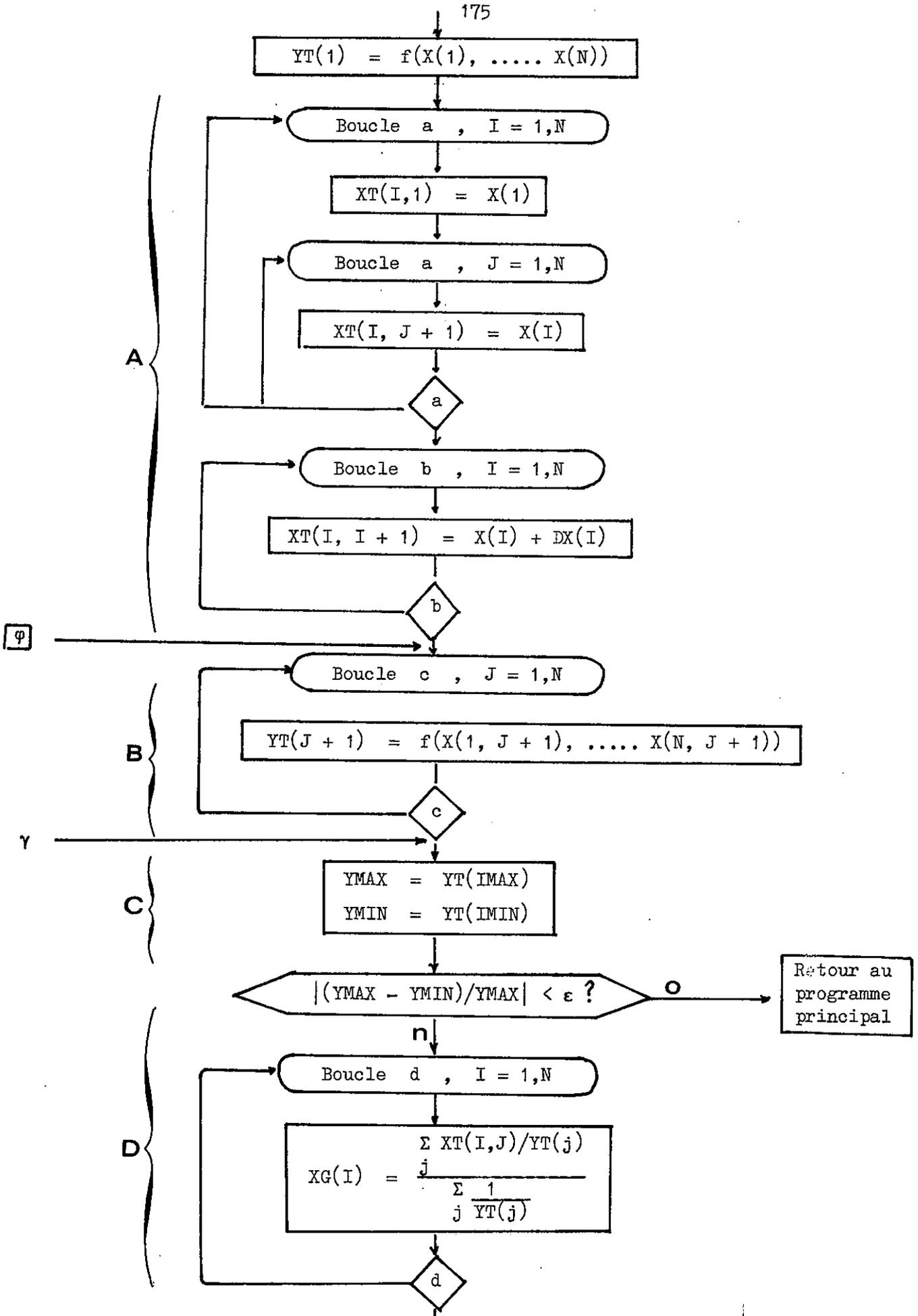
H Essai du point milieu entre le moins bon ($A(IMAX)$) et le centre de gravité

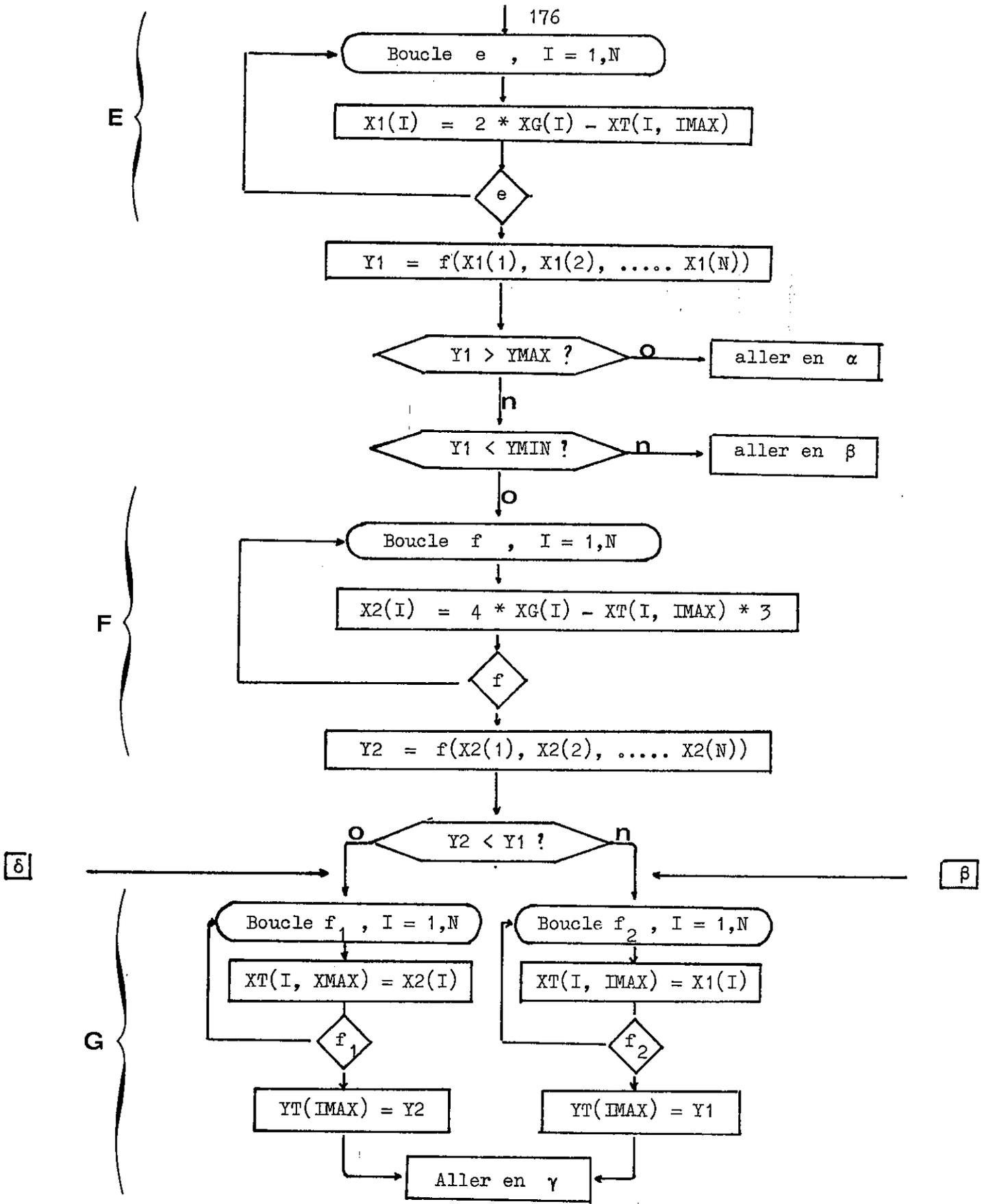
On obtient $A2$ et la valeur $Y2$ correspondante : $Y2 = f(A2)$.

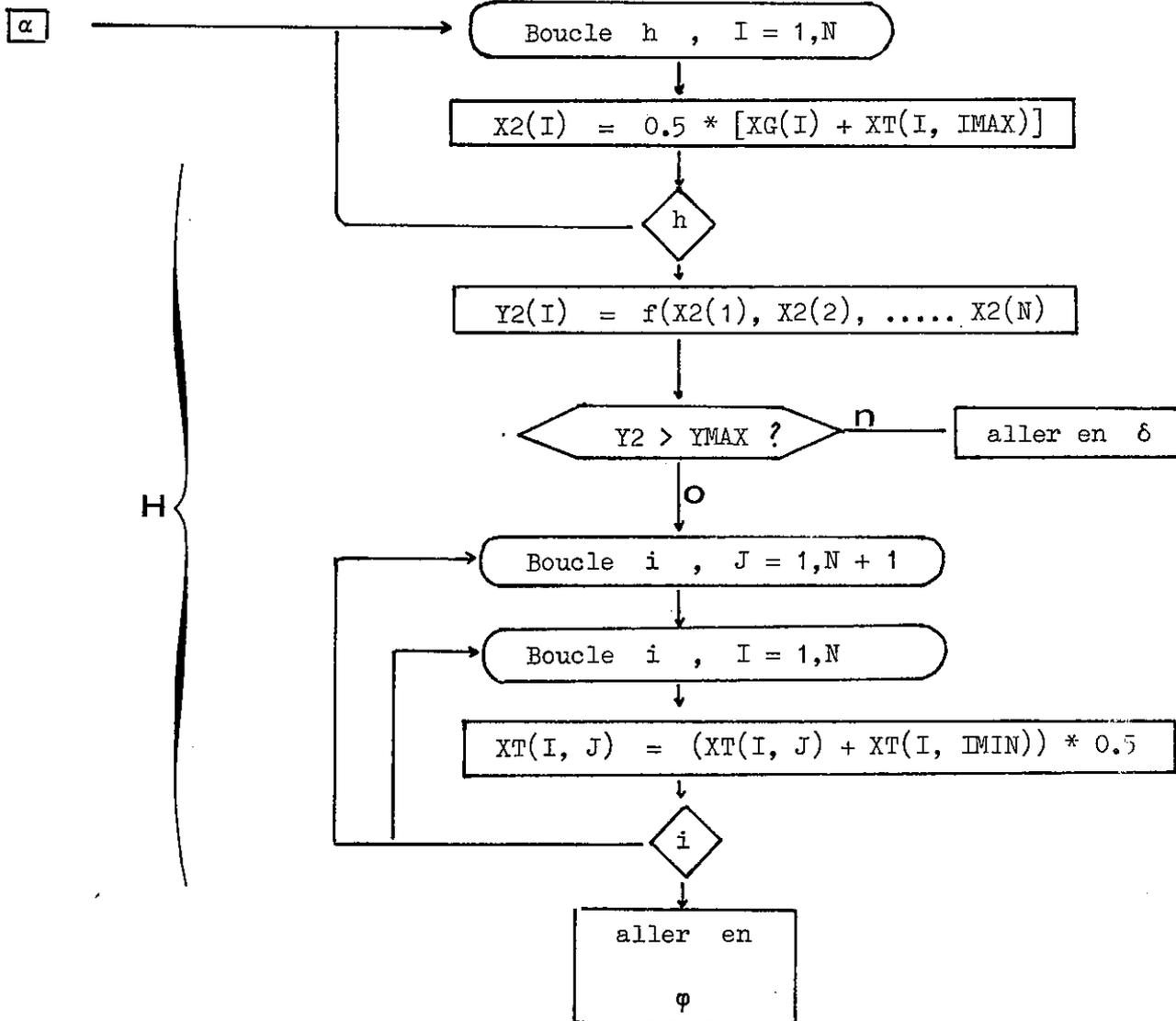
Si $A2$ est meilleur que $A(IMAX)$, ($Y2 < Y_{MAX}$) , $A2$ remplace $A(IMAX)$.

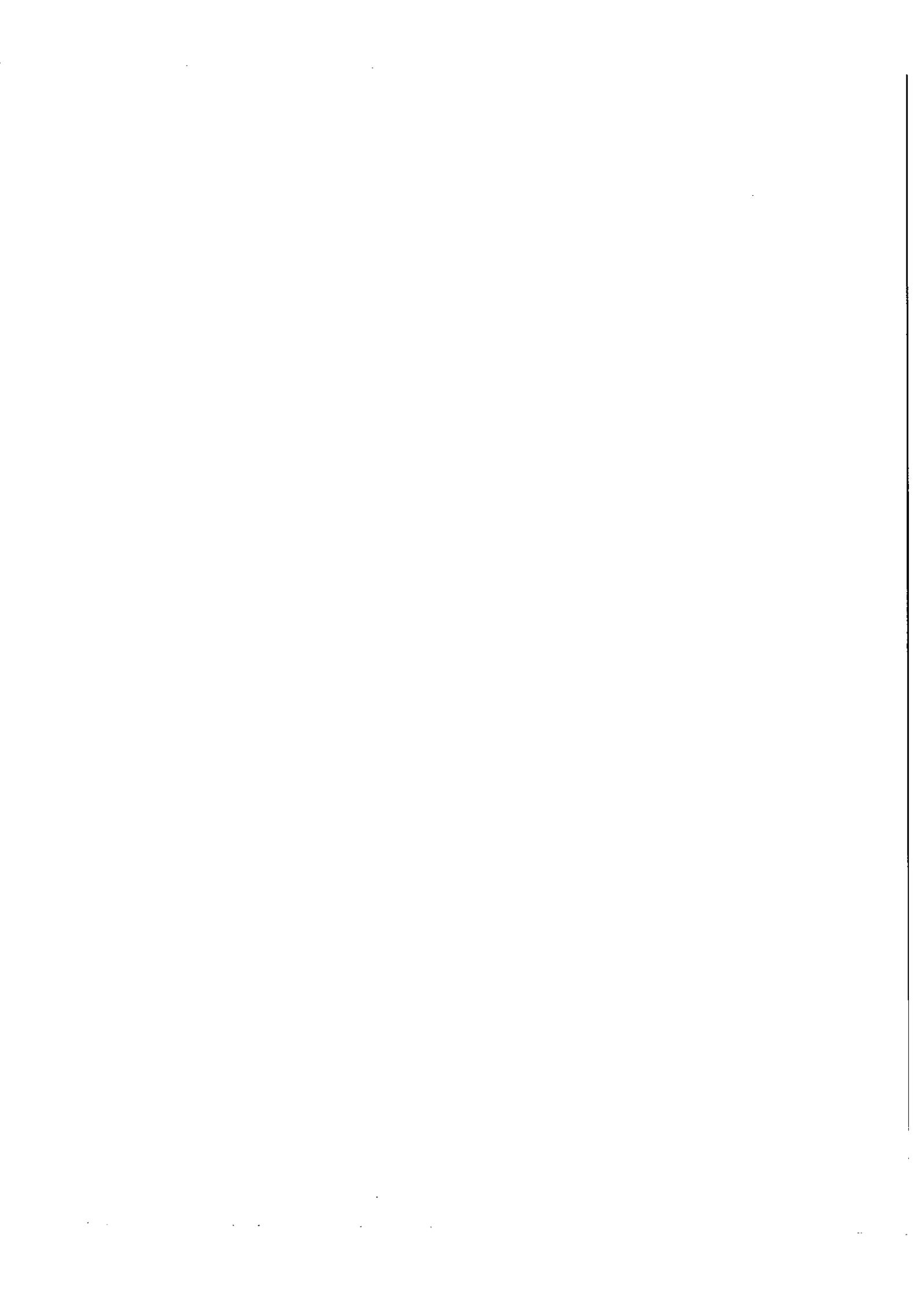
Retour en D .

Si $A2$ est moins bon, ($Y2 > Y_{MAX}$) on pense que l'estimation initiale était proche d'un minimum et on constitue un nouvel ensemble de points en comprimant tous les points vers le meilleur. Retour en B.









B I B L I O G R A P H I E

Les auteurs dont les noms sont précédés d'un astérisque ne sont pas cités dans le texte, mais leurs travaux se rapportent au sujet traité dans le chapitre correspondant .

GENERALITES :

- [1] ARSAC, J., Transformation de Fourier et théorie des distributions,
1961, (Paris : Dunod)

CHAPITRES I et II

- [2] * KOHLENBERG, A., J1 appl. Physics, 24, 1953, p. 1432
- [3] * ROBAUX, O., et ROIZEN - DOSSIER, B., Optica Acta, 16, 1969, p. 269
- [4] SHANNON, C., Bell Syst. techn. J1, 8, 1948, p. 47 - 379
- [5] WOODWARD, P. M., 1960, Probability and Information Theory with Applications to Radar (Londres : Pergamon Press), p. 28

CHAPITRES III et IV

- [6] ANGOT, A., Complément de Mathématiques, 1961, (Ed. Rev. d'Optique), p. 366
- [7] DOSSIER, B., Thèse, 1954 (Paris)
- [8] JACQUINOT, P. et ROIZEN - DOSSIER, B., Progress in Optica, 1964, 3, p. 62

[9] WATSON, G. N., Theory of Bessel functions, 1922, (Cambridge : Univ. Press)

CHAPITRE VI

ANGOT, A., cf [6], p. 682

ARSAC, J., cf [1], p. 296, p. 254

[10] BARAKAT, R., J. Opt. Soc. Am., 52, 1962, p. 264

[11] * CONNES, J. et NOZAL, V., J1 Phys., 22, 1961, p. 359

[12] CONNES, J., Thèse, 1960 (Paris), p. 82

DOSSIER, B., cf [7], p. 61

[13] FRIEDEN, B. R., Optica Acta, 16, 1969, p. 795

[14] HELSTROM, C. W., J. Opt. Soc. Am., 57, 1967, p. 297

[15] * JACQUINOT, P. et ROIZEN - DOSSIER, B., C. R. Acad. Sc., 256, 1963, p. 4384

JACQUINOT, P. et ROIZEN - DOSSIER, B., cf [9], p. 122

[16] JACQUINOT, P., Optique, 1959, (Paris : Masson), p. 244

[17] LINNIK, Y. V., Méthode des moindres carrés, 1963, (Paris : Dunod)

[18] * OSTERBERG, H. and WILKINS, J. E., J. Opt. Soc. Am., 39, 1949, p. 553

[19] ROBAUX, O., et ROIZEN - DOSSIER, B., J1 Phys., 28, 1967, p. 330

- [20] * SLEPIAN, D., J. Opt. Soc. Am., 57, 1967, p. 918
- [21] TOURNARIE, M., Bull. Soc. Franc. Miner. Crist. LXXXI, 1958, p. 278
- [22] TOUSSAINT, P., Lissage des fonctions expérimentales, 1966, (Centre de Calcul Scientifique de l'Armement).
- [23] * TUVIKENE, L. M., Optics and Spectroscopy, 10, 1961, [2] p. 144
- [24] WILKINS, J. E., J. Opt. Soc. Am., 51, 1961, p. 911

CHAPITRE VII

ARSAC, J., cf [1], p. 210

- [25] WOLTER, H., Progress in Optics, 1961, 1, ch. V., (Amsterdam : North Holland Publ. Co., Ed. Wolf)

CHAPITRE VIII

- [26] BARNES, C. W., J. Opt. Soc. Am., 56, 1966, p. 575
- [27] BIRAUD, Y., Astron. and Astrophys., 1, 1969, p. 124
- [28] BOAS, R. and KAC, Jr., Duke Math. J., 12, 1945, p. 189
- [29] BURGER, H. C. and VAN CITTERT, P. H., Z. Phys., 79, 1932, p. 722 et 1933, p. 428
- [30] FRIEDEN, B. R., J. Opt. Soc. Am., 57, 1967, p. 1013

- [31] FRIEDEN, B. R., Technical Report, 1971, 67, Optical Sciences Center
(Univ. of Arizona)
- [32] GIRARD, A., Note Technique, 1968, 121, O.N.E.R.A. (Paris)
- [33] GIRARD, A. et LEMAITRE, M. P., Optica Acta, 14, 1967, p. 329
- [34] * HARRIS, J. L., J. Opt. Soc. Am., 54, 1964, p. 931
- [35] JANSSON, P. A., HUNT, R. H. and PLYLER, E. K., J. Opt. Soc. Am., 60,
1970, p. 596
- [36] * JONES, R. N. and VENKATARAGHAVAN, R. and HOPKINS, J. W., Spectr.
Chimica Acta, 23A, 1967, p. 925
- [37] LECLERC, J. C., Thèse, 1969, Liège, Belgique
- [38] * LOUER, D. et WEIGEL, G., Acta Crist., A25, 1969, p. 335
- [39] RINO, C. L., J. Opt. Soc. Am., 59, 1969, p. 547
- [40] RUSFORTH, C. K. and HARRIS, R. W., J. Opt. Soc. Am., 58, 1968, p. 539
- [41] SCHEIDECKER, J. P., Thèse de 3^o Cycle, 1968, Paris
- [42] SLEPIAN, D., POLLACK, H. O. and LANDAU, H. S., Bell System Tech. J.,
40, 1961, p. 43 ; 40, 1961, p. 65 ; 41, 1962, p. 1295
- [43] TORALDO DI FRANCIA, G., J. Opt. Soc. Am., 59, 1969, p. 799
- [44] * TOURNARIE, M., C. R. Acad. Sc., 245, 1957, p. 1301

CHAPITRE IX

DOSSIER, B., cf [7]

[45] * ROBAUX, O. et ROIZEN - DOSSIER, B., *Optica Acta*, 17, 1970, p. 733

CHAPITRE X

[46] NELDER, J. A. et MEAD, R., *Computer J.*, 7, 1965, p. 308

[47] * ROBAUX, O., *Optica Acta*, 17, 1970, p. 811

CHAPITRE XI

[48] BAUCHE, J., Thèse, 1969, Orsay

[49] HUHNERMANN, H., *J. Phys. Rad.*, 28, 1967, C2-260

[50] LARSON, H. P. and ANDREW, K. L., *Appl. Optics*, 6, 1967, p. 1701

[51] * ROBAUX, O., *Optica Acta*, 1971, à paraître

CHAPITRE XII

[52] KENDALL, M. G. and STUART, A., *The Advanced Theory of Statistics*,
1963, (Londres : Charles Griffin and C^o Limited)

[53] LINNIK, Y. V., cf [17]

