

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR
EN SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-François ROCH

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE
DE MESURES QUANTIQUES NON-DESTRUCTIVES
DE L'INTENSITÉ D'UN FAISCEAU LUMINEUX,
RÉALISÉES À L'AIDE DE NON-LINEARITÉS À DEUX PHOTONS.

Soutenue le 13 février 1992 devant la commission d'examen

MM.	C.	IMBERT	Président
	A.	ASPECT	
	J.A.	BESWICK	
	P.	GRANGIER	
	S.	HAROCHÉ	
	S.	REYNAUD	
	L.A.	LUGIATO	Membre invité

*“... mesurer, peser, déduire
et se méfier des déductions produites,
faire dans le faux la part du vrai
et tenir compte dans le vrai
de l'éternelle admixtion du faux”.*

*Marguerite YOURCENAR
“L'Oeuvre au Noir”*

ABSTRACT

The subject of this work is the study of Quantum Non-Demolition (QND) Measurements in Optics. We show, both theoretically and experimentally, that such measurements can be performed using a non-linear coupling between two light beams. This interaction is obtained with a two-photon transition, inside a sodium atomic beam. The principle of this experiment is to use the crossed-phase modulation (crossed-Kerr effect), so as to transfer non-destructively the quantum intensity fluctuations of a laser beam, taken as the "signal", to the phase fluctuations of another beam, used as the "meter". The non-linear medium is located in a cavity. It is then possible to enhance the coupling between the two beams, and also to use the cavity as an interferometric detector, which allows one to read out the phase fluctuations of the meter beam.

The QND measurement can be characterized by simple parameters, which are directly measured. The experimental results that we obtained clearly show that our set-up has an actual efficiency above the quantum limit, appearing in standard coupling devices such as a beam-splitter.

An analysis of a two-photon double-beam bistable device, in the dispersive and high-finesse limits, is also presented. The experimental results are compared with a simple crossed-phase modulation model, and also with a numerical solution of the interaction between the cavity fields and three-level atoms, using the Optical Bloch Equations. Finally, we analyze several new quantum noise reduction effects, allowed by this system.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à l'Institut d'Optique. Je remercie Monsieur le Professeur Christian IMBERT de m'avoir accueilli dans son laboratoire, et d'avoir accepté la présidence de mon jury.

Dans tous les domaines, qu'il s'agisse des expériences ou des calculs théoriques, Philippe GRANGIER a été mon guide. Ces quelques lignes ne peuvent exprimer à quel point son enthousiasme, sa persévérance et sa rigueur m'ont impressionné. Je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir fait découvrir tant d'aspects du travail scientifique qui m'étaient, à l'origine, complètement inconnus. Enfin, merci pour le soutien qu'il m'a apporté pendant les quelques moments (heureusement passagers !) un peu difficiles.

Comme à son habitude, l'apport de Gérard ROGER a été décisif dans ce travail. S'il ne m'appartient pas de louer son efficacité et sa compétence, je le remercie très amicalement pour son aide quotidienne et sa chaleur humaine.

Merci à Patrick GEORGES, qui sans être directement impliqué dans nos expériences, m'a donné de nombreux conseils pratiques. Grâce à ses commentaires, tant avisés qu'humoristiques, mes premiers essais de réglage de laser resteront un bon souvenir ! De façon générale, l'ambiance créée par tous les membres du Groupe Femtoseconde a constitué un cadre très agréable à ce travail. Je les en remercie.

Merci à Jean-Philippe POIZAT pour ses commentaires sur le manuscrit.

Merci également à Monsieur Serge REYNAUD et Monsieur le Professeur Alberto BESWICK, pour avoir bien voulu être les rapporteurs de ce (long ...) mémoire. Je remercie Monsieur le Professeur Alain ASPECT et Monsieur le Professeur Serge HAROCHE de l'intérêt qu'ils ont bien voulu témoigner vis-à-vis de ce travail, en acceptant de faire partie du jury.

Les travaux sur la bistabilité à deux photons ont été réalisés en collaboration avec le Professeur Luigi LUGIATO. Je le remercie de l'honneur qu'il me fait, en venant participer à ce jury. Merci également à tout son groupe, et particulièrement à Enrico PESSINA.

Mes remerciements vont également à Michel ALLAIN pour m'avoir si souvent dépanné devant des problèmes informatiques, qui me semblaient insolubles, à Jean-Claude RODIER pour la construction des détecteurs et les discussions que nous avons eues, à Alain AIDE et André VILLING pour tous les appareils et montages électroniques réalisés. Enfin, c'est grâce aux soins apportés par Mr. BOUCHOT dans la conception d'ensemble, puis par tout l'Atelier de Mécanique dans la réalisation des pièces, que de nombreuses difficultés pratiques ont pu, soit être évitées, soit être résolues.

Enfin, un très grand merci à Melle Nelly BONAVENT, qui, avec beaucoup de gentillesse et d'efficacité, s'est chargée de la frappe et de la mise en page de ce manuscrit. Merci également à Mme DELMOTTE, qui en a assuré la reprographie et la reliure, dans des impératifs horaires pas toujours raisonnables.

TABLE DES MATIERES

Introduction	1
I. Du microscope de Heisenberg aux barres de Weber.....	3
II. De la Mécanique à l'Optique.....	5
III. L'introduction de l'Optique Non-Linéaire.....	5
IV. Organisation du mémoire.....	6
Chapitre Un - Les mesures Quantiques Non-Destructives : généralités et cas particulier d'une mesure en Optique	9
<i>A. Qu'est-ce qu'une mesure QND ?</i>	11
I. Perturbation induite par une mesure.....	11
II. Variable QND.....	12
1. Définition.....	12
2. Cas d'une particule libre.....	13
3. Cas d'un oscillateur harmonique.....	15
III. Couplage de détection tranquille ("back-action evasion").....	20
1. Hypothèses simplificatrices.....	20
2. Mesure QND idéale des composantes de quadrature.....	21
3. Discussion du modèle.....	25
<i>B. Mesure QND en Optique</i>	26
I. Description des fluctuations quantiques en Optique.....	26
1. Principe de la description semi-classique.....	26
2. Notations : fluctuations d'intensité et composantes de quadrature.....	29
3. Quantité associée à une mesure à l'aide d'un analyseur de spectre.....	30
II. Réponse linéaire du dispositif de couplage.....	34
1. Transformation entrée-sortie des fluctuations des champs.....	34
2. Transformation entrée-sortie des covariances.....	35
III. Caractérisation d'une mesure QND idéale.....	36
1. Objectifs d'une mesure QND.....	36
2. Préparation d'état quantique.....	36
3. Caractérisation de l'efficacité d'un "écouteur discret".....	40

IV. Perturbation induite par une mesure.	45
1. Association de coupleurs en cascade.....	45
2. Existence d'une limite quantique standard.	47
3. Comment circonvenir la limite quantique standard.....	53
<i>C. Réalisation expérimentale du couplage paramétrique : principe</i>	26
I. Mesure QND effectuée par un effet Kerr croisé.	57
1. Hamiltonien de couplage.....	57
2. Evolution des composantes de quadrature.	58
3. Cas réel : influence des pertes.	60
II. Récapitulatif des résultats obtenus dans les réalisations expérimentales antérieures.	62
<i>D. Conclusion</i>	64
Chapitre Deux - Dispersion à deux photons : étude théorique et réalisation expérimentale pour une transition à deux photons dans un jet atomique de sodium	65
<i>A. Introduction</i>	67
<i>B. Etude théorique pour un système fermé à trois états</i>	70
I. Généralités.	70
1) Notations.....	71
2) Evolution du système atomique.	72
3) Forme alternative des Equations de Bloch Optiques.	73
II. Propagation des champs dans le milieu non-linéaire	75
III. Résolution par traitement perturbatif.....	77
IV. Résolution analytique : élimination du niveau relais.	82
V. Validité des différents modèles.	85
1) Ordre de grandeur des déphasages non-linéaires.....	85
2) Comparaison des différents modèles avec la résolution numérique.....	87
VI. Autre façon de réaliser la dispersion à deux photons dans une transition atomique en échelle	90

<i>C. Dispersion à deux photons pour le système réel étudié.....</i>	92
I. Système étudié.....	92
1) Critères de choix.	92
2) Structure de la transition.....	94
II. Déphasages non-linéaires correspondant à la dispersion à deux photons	96
1) Expressions générales.	96
2) Application à notre système réel.....	97
3) Déphasages non-linéaires pour l'interaction la plus favorable.	102
 <i>D. Description du dispositif expérimental.....</i>	 106
I. Les Lasers.....	106
1) Influence du mode spatial du laser de pompe.....	107
2) Les lasers à colorant.	108
II. La cavité optique.	109
1) Description.....	109
2) Choix du type de la cavité.....	111
3) Réalisation expérimentale du mode-matching.	113
4) Mesure des paramètres de la cavité.....	116
5) Détermination expérimentale des paramètres de la cavité.....	118
III. Le jet atomique.	120
1) Description.....	120
2) Etude du régime effusif pour une galette de micro-tubes.....	122
3) Prévisions théoriques et résultats pour la configuration utilisée.....	126
 <i>E. Etude expérimentale de la dispersion à deux photons</i>	 129
I. Mise en évidence de la transition à deux photons.	129
II. Mesure du couplage non-linéaire.....	131
1) Mise en évidence de la non-linéarité cubique par détection hétérodyne.....	131
2) Observation directe du déphasage non-linéaire à l'aide d'une cavité	134
 <i>F. Conclusion du Chapitre II.....</i>	 138

Chapitre Trois - Réalisation expérimentale d'une mesure QND	139
<i>A. Introduction</i>	<i>141</i>
<i>B. Etude théorique à la limite paramétrique</i>	<i>143</i>
I. Le modèle.	143
II. Cavité à une longueur d'onde.....	144
1) Champs moyens.....	144
2) Analyse linéaire de la transformation des fluctuations quantiques.....	144
III. Cavité à deux longueurs d'onde.....	152
1) Stabilité des champs moyens.	152
2) Transformation entrée-sortie des fluctuations quantiques.	153
<i>C. Résultats expérimentaux obtenus avec une cavité à une longueur d'onde.....</i>	<i>155</i>
I. Description du dispositif expérimental.....	155
II. Analyse du transfert de modulation classique.....	156
1) Modulation et détection.....	156
2) Résultats expérimentaux obtenus sans cavité.	157
3) Augmentation du couplage non-linéaire à l'aide d'une cavité optique.	159
III. Observation de corrélations quantiques entre les deux faisceaux, à la sortie du dispositif.	167
IV. Points importants mis en évidence expérimentalement.	172
1) Prévisions du modèle paramétrique.....	172
2) Résultats expérimentaux : importance du signe du désaccord à un photon.....	174
3) Comparaison avec le modèle paramétrique.....	176
4) Conclusion.....	177
<i>D. Résultats expérimentaux obtenus avec une cavité à deux longueurs d'onde.....</i>	<i>181</i>
I. Nouvelle configuration expérimentale.	181
II. Mise en évidence du couplage non-linéaire.	182
III. Résultats expérimentaux.....	183
1) Evolution des spectres de bruit.	183
2) Caractérisation de la mesure.	184
3) Comparaison avec les autres résultats	185

Chapitre Quatre - Etude théorique et mise en évidence expérimentale de la bistabilité à deux photons en régime non-dégénéré	187
<i>A. Introduction</i>	189
<i>B. Etude du bistable à la limite cubique dispersive</i>	191
I. Modèle théorique.....	191
1) Intensités intra-cavité.	191
2) Etude de la stabilité des champs moyens.	193
II. Résultats expérimentaux.....	198
1) Mise en évidence de l'effet de bistabilité à deux photons.....	198
2) Comparaison avec le modèle cubique dispersif.....	199
<i>C. Etude du bistable à deux photons en dehors de la limite cubique dispersive</i>	203
I. Equations théoriques.....	203
1) Notations.....	203
2) Paramètres normalisés.....	204
3) Equations d'évolution semi-classiques	205
II. Approximation cubique dispersive.....	206
1) Expressions générales des champs intra-cavité.....	206
2) Cas d'une relaxation purement radiative	207
3) Effet des collisions.....	207
4) Evolution dynamique.....	209
III. Comparaison théorie-expérience	209
1) Résultats numériques pour les champs moyens.	209
2) Etude des oscillations.....	214
IV. Conclusion de l'étude sur les champs moyens	217
<i>D. Effets sur les fluctuations quantiques</i>	218
I. Etude des champs moyens.	218
1) Condition de stabilité.	218
2) Courbes de bistabilité à deux photons.	220
II. Fluctuations quantiques des champs sortant.	222
1) Transformation entrée-sortie des fluctuations quantiques.....	222

2) Désaccord nul : couplage QND.....	223
3) Compression des fluctuations d'intensité.	224
Conclusion.....	227
Annexes.....	231
<i>Annexe I :</i>	
<i>Photodétecteurs.....</i>	<i>233</i>
<i>Annexe II :</i>	
<i>Analyse de la mesure QND par effet Kerr croisé en représentation de Schrödinger....</i>	<i>238</i>
<i>Annexe III :</i>	
<i>Etat de l'art des réalisations expérimentales de mesure QND en Optique.....</i>	<i>245</i>
<i>Annexe IV :</i>	
<i>Etude de la dispersion à deux photons par la méthode de l'hamiltonien effectif</i>	<i>255</i>
<i>Annexe V :</i>	
<i>Détermination de la densité du jet atomique</i>	<i>261</i>
Références bibliographiques.....	271

INTRODUCTION

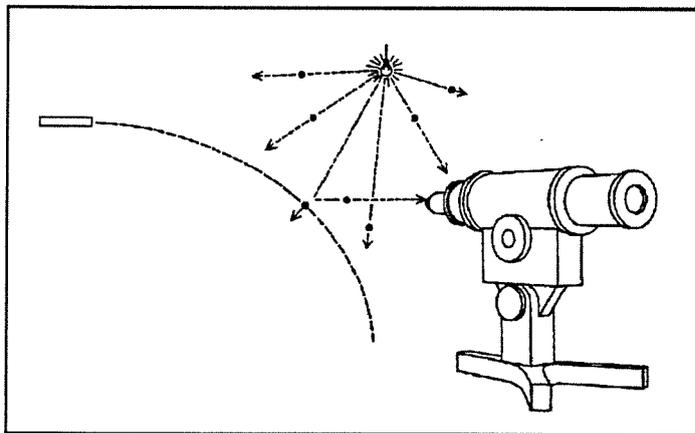


Figure Introduction-1 :
Expérience du microscope de Heisenberg (tiré de [Gamow 58]) : un observateur tente de détecter un seul électron en mesurant à l'aide d'un microscope sa position. Les relations de dispersion montrent que pour un système quantique, cette observation ne peut être faite sans le perturber.

La description d'une mesure en Mécanique Quantique est un problème fondamental, dans lequel apparaissent des différences considérables avec la Mécanique Classique. En particulier, la détermination simultanée des diverses quantités physiques utilisées pour décrire classiquement un système, se trouve restreinte par les relations de dispersion de Heisenberg. Il en résulte qu'une mesure en Mécanique Quantique doit, en général, et suivant l'expression consacrée, "perturber de façon incontrôlable le système étudié". Nous allons préciser ce point en prenant l'exemple d'une mesure de position pour une particule quantique, ce qui nous permettra d'introduire la notion de mesure quantique non-destructive.

I. DU MICROSCOPE DE HEISENBERG AUX BARRES DE WEBER.

Le concept de mesure en Mécanique Quantique, a souvent été illustré par des "expériences de pensée", ayant une finalité à la fois heuristique et pédagogique. Un exemple célèbre est l'expérience du "microscope de Heisenberg" [Bohr 28][Gamow 58] : si l'on cherche à mesurer la position d'une particule (par exemple un électron) en l'éclairant sous un microscope (figure Introduction-1), les chocs avec les photons émis par la lampe modifieront, de manière incontrôlable, l'impulsion de cette particule.

Pour diminuer l'effet de ces impacts, il est a priori possible de réduire l'énergie des photons incidents, en utilisant une lumière de plus courte fréquence. Dans ce cas, le mouvement de l'électron n'est plus perturbé par le dispositif d'observation, mais l'augmentation de la longueur d'onde des photons interdit alors de mesurer précisément sa position, à cause du phénomène de diffraction (figure Introduction-2).

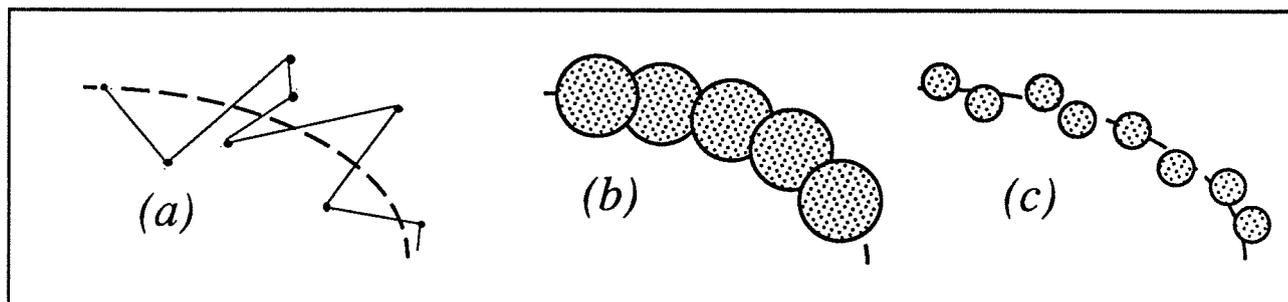


Figure Introduction-2 :

Mesure de la position d'une particule, à l'aide de photons ayant trois longueurs d'onde différentes. En (a), le photon a une grande énergie : s'il permet de localiser la particule, il introduit une "action en retour", correspondant à une perturbation incontrôlée de la trajectoire ; la mesure de la position à l'instant t ne permet donc pas de connaître celle à un instant ultérieur. Dans le cas représenté en (b), le photon a une énergie beaucoup plus faible et la trajectoire de la particule n'est plus perturbée par la mesure ; par contre, la précision de la mesure est limitée par la longueur d'onde du photon et, dans ce cas, cette mesure de position est faite avec une grande incertitude. Le cas (c) correspond à un compromis entre précision de la mesure et perturbation introduite sur le système.

On peut alors vérifier, sur chaque exemple particulier de dispositif de mesure, que les dispersions Δx sur la position, et Δp sur l'impulsion, sont reliées par l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar / 2 \quad (\text{Intro. 1})$$

On pourrait néanmoins se satisfaire du fait que la position ait pu en principe, être mesurée avec une précision arbitraire, au détriment de l'introduction d'une très grande dispersion sur l'impulsion. Une question se poserait alors : qu'advierait-il de cette précision, une fois la mesure réalisée ? La position de la particule de masse M étant reliée à l'impulsion par $x(t+\tau)=x(t=0)+p \cdot \tau/M$, l'incertitude, initialement sur l'impulsion, serait alors rapidement réintroduite sur la position. L'incertitude après la mesure augmenterait ainsi, d'autant plus rapidement que la mesure initiale aurait été précise. Remarquons que x et p ne jouent pas le même rôle : l'impulsion d'une particule libre étant une constante du mouvement, une mesure initiale très précise de p ne serait pas dégradée par l'évolution libre ultérieure.

Ces considérations simples ont pris une importance cruciale dans le contexte des ondes gravitationnelles. En effet, l'action d'une telle onde serait de provoquer un déplacement très faible d'un objet massif, qui, dans les premières études, était un détecteur massif d'environ une dizaine de tonnes ("barres de Weber"). La restriction précédente sur la mesure de position, conséquence de l'inégalité de Heisenberg entre x et p , conduit donc à une limitation fondamentale de la sensibilité de ce type de détecteur.

Pour améliorer la résolution au-delà de cette "limite quantique", on a alors imaginé de mesurer des quantités physiques particulières, telles que deux mesures successives ne soient pas incompatibles, et puissent être réalisées avec le même appareil sans perte de précision. Ces

quantités ont ainsi été appelées "variables quantiques non-destructives", leur mesure étant alors désignée par l'acronyme QND, ayant la même signification en français ("mesure Quantique Non-Destructive") qu'en anglais ("Quantum Non-Demolition measurement"). Pour l'exemple vu précédemment d'une particule libre, l'impulsion correspond à une variable QND, tandis que cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas de la position.

De façon plus générale, une quantité, constante du mouvement au cours de l'évolution libre du système, sera une variable QND. L'identification de ces variables est donc en pratique assez simple, tandis que la réalisation de la mesure QND elle-même est en général beaucoup plus délicate. En particulier, nous allons voir maintenant que dans le domaine optique, les méthodes de détection usuelles ne sont pas "non-destructives".

II. DE LA MECANIQUE A L'OPTIQUE.

L'application des relations de dispersion à la lumière n'est pas aussi immédiate que pour une particule matérielle. S'il n'est pas possible de définir un opérateur position pour le photon, le champ électromagnétique est en fait quantifié en "modes" de vibration, chaque mode correspondant à un oscillateur harmonique. Le vecteur de Fresnel représentant le mouvement oscillatoire à la fréquence ω dans le référentiel tournant peut alors être décomposé en composantes de quadrature, qui, comme nous le montrerons, sont des variables QND, et peuvent donc être mesurées de façon non-destructive. La réalisation d'une telle mesure en suivant une méthode différente des tentatives précédentes [Levenson 86][LaPorta 89], est le but essentiel de ce travail.

Pour un faisceau lumineux se propageant librement, le flux de photons est également une variable QND, qui peut être mesurée très simplement à l'aide d'un photodétecteur. Ce type de mesure est évidemment totalement destructive, car les photons du faisceau sont alors complètement absorbés. Nous montrerons plus loin que la solution "naïve" qui consisterait à ne détecter qu'une fraction du faisceau, conduit, de la même façon que la mesure représentée schématiquement sur la figure Intro-2 pour la position d'une particule matérielle, à un compromis entre la qualité de la mesure et la "non-destruction" du faisceau initial. Il nous faut donc déterminer l'appareil de mesure capable de mesurer de façon non-destructive les fluctuations d'intensité d'un faisceau.

III. L'INTRODUCTION DE L'OPTIQUE NON-LINEAIRE.

Une solution consiste à utiliser un faisceau de "mesure", couplé au faisceau "signal" par un milieu non-linéaire. En particulier, l'effet Kerr optique, par lequel l'intensité d'un faisceau lumineux modifie l'indice de réfraction d'un matériau non-linéaire transparent, apparaît bien adapté à la réalisation d'une mesure QND. Un tel couplage est en effet non-destructif pour les fluctuations d'intensité des faisceaux, qui ne sont pas modifiées par la traversée d'un milieu transparent. Par contre, les phases de chacun des faisceaux seront perturbées, proportionnellement à l'intensité de l'autre faisceau, en raison du changement d'indice dû à l'effet Kerr. En mesurant à l'aide d'un dispositif interférométrique le déphasage subi par le faisceau de mesure, il est alors possible d'obtenir l'information recherchée sur l'intensité du faisceau signal. D'après les relations d'Heisenberg, la mesure introduit une perturbation sur le

faisceau signal, correspondant dans ce cas à une augmentation de ses fluctuations de phase. L'intensité et la phase du signal évoluant indépendamment pour un faisceau se propageant librement, cette "action en retour" n'apparaît pas sur les fluctuations d'intensité.

Afin de pouvoir mettre en oeuvre ce principe séduisant, il faut disposer d'un milieu non-linéaire présentant un effet Kerr important. La première tentative expérimentale, réalisée en 1986 à IBM [Levenson 86], utilisait une fibre optique en silice : la valeur très faible du coefficient non-linéaire était alors compensée par la très grande longueur de propagation dans le guide (quelques centaines de mètres). Néanmoins, de nombreux problèmes pratiques ont diminué considérablement l'efficacité de ce dispositif. Dans ce travail, nous nous proposons de montrer, à la fois théoriquement et expérimentalement, qu'il est possible d'obtenir un important couplage entre deux faisceaux dans une transition atomique à deux photons, lorsque les désaccords des fréquences des deux lasers par rapport aux résonances, sont grands devant les largeurs des niveaux correspondants. Ce couplage permet alors de réaliser une mesure QND des fluctuations d'intensité d'un de ces deux faisceaux, pris comme signal.

IV. ORGANISATION DU MEMOIRE.

- *Chapitre I :*

Nous reviendrons sur la notion de mesure QND, en montrant que celle-ci correspond à une mesure quantique, au sens de la Théorie de la Mesure. Cette étude peut par exemple, éclairer le corollaire peut-être le plus troublant et, en tout cas, un des plus "magiques" de cette théorie, à savoir la notion de projection du vecteur d'onde après lecture du résultat de la mesure.

Nous nous restreindrons ensuite au domaine des mesures QND en Optique, dans le cas de faisceaux de grande intensité, et où la quantification du champ électromagnétique se manifeste par des fluctuations d'origine quantique autour de l'amplitude moyenne du champ. Il est alors possible de traiter la transformation de ces fluctuations quantiques par une linéarisation autour de l'évolution classique des champs moyens [Reynaud 90]. Le formalisme utilisé nous permettra ainsi de redéfinir de façon plus précise, les notions générales introduites précédemment. En particulier, les mesures QND réelles ne correspondront pas à une mesure idéale et il sera donc nécessaire de les caractériser du point de vue pratique, de façon à pouvoir déterminer leur efficacité. Les différents schémas de couplage pourront ensuite être comparés à des dispositifs "classiques", tels qu'une simple lame semi-transparente.

• *Chapitre II :*

Nous montrerons comment une interaction par effet Kerr croisé, où chaque faisceau est déphasé proportionnellement à l'intensité de l'autre faisceau, peut être obtenue dans une transition à deux photons. Cette interaction apparaît sous certaines approximations, correspondant à ce que nous qualifierons par la suite de "*limite cubique dispersive*".

Nous décrirons ensuite les différentes parties du dispositif expérimental, le milieu non-linéaire choisi étant en particulier un jet atomique de sodium. Nous montrerons qu'il est effectivement possible d'obtenir expérimentalement pour les champs moyens, des déphasages non-linéaires correctement décrits par le modèle de la dispersion croisée à deux photons.

• *Chapitre III :*

Nous démontrerons théoriquement que le couplage des fluctuations quantiques peut être renforcé par une cavité optique, et qu'il est possible d'utiliser directement cette cavité pour obtenir la détection interférométrique des fluctuations de phase du faisceau de mesure. Enfin, dans le résultat essentiel de ce travail, nous montrerons que cette interaction permet bien, du point de vue expérimental, d'obtenir des corrélations quantiques entre les deux faisceaux. Néanmoins, pour décrire correctement ceux-ci, il sera nécessaire de tenir compte des fluctuations rajoutées par le milieu non-linéaire.

• *Chapitre IV :*

Les déphasages non-linéaires obtenus peuvent facilement être de l'ordre de grandeur de la largeur de la cavité optique entourant le milieu non-linéaire. Il est donc possible d'observer des phénomènes de bistabilité optique à deux photons, qui, pour une certaine gamme de paramètres, pourront être correctement décrits par le simple modèle de la dispersion croisée.

Nous comparerons ensuite nos résultats expérimentaux avec un modèle plus général, où l'interaction couplée des atomes avec les champs électromagnétiques intra-cavité, est décrite par le système complet des Equations de Bloch Optiques. Il apparaît alors de nouveaux effets d'instabilités (oscillations temporelles, chaos), dont certains ont été effectivement observés dans l'expérience.

Enfin, nous décrirons un modèle théorique idéalisé, permettant de prédire l'obtention, grâce au bistable à deux photons, d'une compression des fluctuations quantiques, soit sur la somme, soit sur la différence des intensités des deux faisceaux. Cette réduction des bruits quantiques apparaît d'autant plus importante, que le point de fonctionnement est proche des seuils d'instabilité sur les champs moyens. De tels effets restent à étudier expérimentalement.

CHAPITRE UN

Les Mesures
Quantiques Non - Destructives :
généralités et cas particulier
d'une mesure en Optique

A. QU'EST-CE QU'UNE MESURE QND ?

Afin de montrer les principes de base définissant une mesure QND, nous considérerons des mesures de position et d'impulsion pour une particule matérielle, soit libre, soit constituant un oscillateur harmonique. En effet, les premières tentatives de mise en évidence des ondes gravitationnelles à l'aide de détecteurs mécaniques (tels les barres de Weber) [Gravité 83], ont montré qu'il était nécessaire de tenir compte des fluctuations quantiques induites par le phénomène de mesure [Braginsky 80] [Thorne 78] [Unruh 79] [Caves 80]. Les détecteurs étant des objets macroscopiques dont la masse est de l'ordre de 10^4 kg, l'apparition de limites quantiques sur leur sensibilité peut paraître tout à fait surprenante.

I. PERTURBATION INDUITE PAR UNE MESURE.

Le couplage des ondes gravitationnelles avec de tels détecteurs est si faible, que le déplacement prévu est de l'ordre de 10^{-21} m. Si cette longueur est six ordres de grandeur plus faible que la dimension d'un noyau atomique, elle détermine en réalité la position du centre de gravité du détecteur et donc celle d'un point matériel correspondant à un degré de liberté collectif, ce qui autorise a priori une telle précision. Avant l'éventuelle interaction avec l'onde gravitationnelle, il est nécessaire de mesurer la position de cette "particule" avec une incertitude initiale plus faible que le déplacement attendu :

$$\delta x_i < 10^{-21} m \quad (\text{I.A.1})$$

Une telle mesure va alors perturber la variable conjuguée, en l'occurrence l'impulsion, d'une quantité donnée par l'inégalité de Heisenberg :

$$\delta p \sim \frac{\hbar}{2\delta x_i} \quad (\text{I.A.2})$$

Dans le cas d'une particule libre de masse M , l'évolution de la position est couplée à celle de l'impulsion par l'hamiltonien $\mathcal{H}_{\text{libre}} = \hat{p}^2 / (2M)$.

Au bout du temps τ , la position du détecteur est alors définie avec une incertitude finale :

$$\delta x_f = \frac{\hbar \tau}{2M \delta x_i} \quad (\text{I.A.3})$$

Pour τ correspondant à la durée estimée de "l'impulsion" gravitationnelle soit $\tau \sim 10^{-3} \text{s}$, l'incertitude δx_f est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-21} \text{m}$, si bien que la perturbation introduite dans la mesure initiale de la position empêche donc de détecter par une deuxième mesure de contrôle, s'il y a eu ou non action de l'onde gravitationnelle pendant l'intervalle de temps séparant ces deux mesures.

II. VARIABLE QND.

1. Définition.

Si par contre, la mesure initiale est faite sur l'impulsion, la perturbation est alors induite sur la position du détecteur et n'est pas couplée ultérieurement à l'évolution de l'impulsion. On peut donc, pour une particule libre, effectuer une mesure répétée de cette observable, qui, en absence de toute perturbation extérieure, donnera un résultat prévisible. L'impulsion correspond à une variable QND pour le cas particulier d'une masse libre (figure A.I.1).

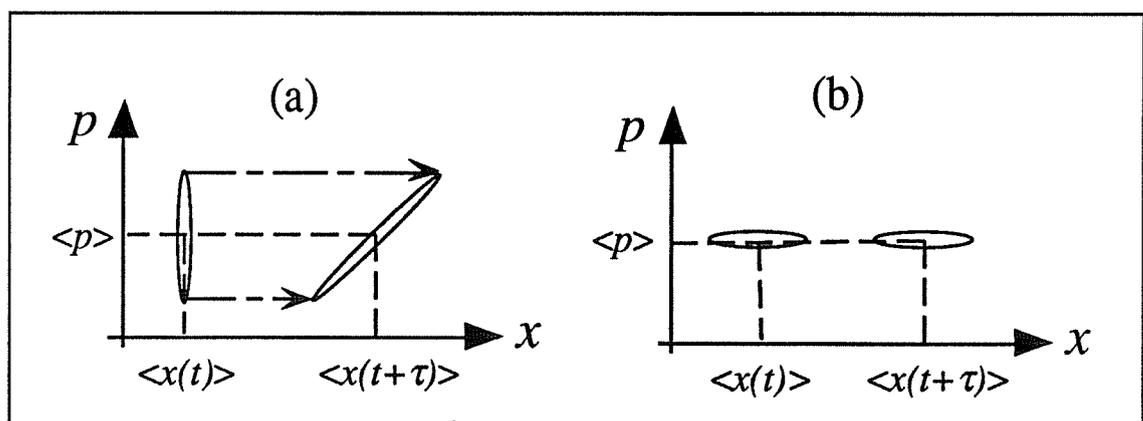


FIGURE I.A.1 :

Effet de deux mesures successives de la position aux instants t et $t+\tau$ d'une masse libre (a). La première mesure, est effectuée avec une précision δx_i qui introduit une perturbation sur l'impulsion, et modifie ensuite l'évolution de la position. La précision δx_f avec laquelle celle-ci est mesurable à $t+\tau$ est alors fixée par le principe d'incertitude de Heisenberg. Cette limite n'existe pas pour une mesure d'impulsion (b), car la modification introduite sur x au cours de la première mesure n'est pas répercutée sur p .

Remarque : Du point de vue Théorie de la Mesure, la mesure de la position place le détecteur dans un état propre $|x_i\rangle$, qui sous l'effet de $\mathcal{H}_{\text{libre}}$, évolue au cours du temps. Il est donc nécessaire de tenir compte de l'évolution propre, pendant les intervalles de temps séparant des mesures successives de la position. Il n'en est par contre pas de même pour l'impulsion, car les états propres $|p\rangle$ sont stationnaires pour une particule libre. Cette différence, a posteriori très naturelle, a été remarquée dès les débuts de la Mécanique Quantique [Landau 31], mais ce n'est que quarante ans plus tard que les études sur les détecteurs mécaniques d'onde gravitationnelle en ont montré toute l'importance.

De façon générale, une observable \hat{X} correspondra à une variable QND si, en représentation de Heisenberg, elle vérifie la condition d'évolution :

$$[\hat{X}(t), \hat{X}(t')] = 0 \quad (\text{I.A.4})$$

Lorsque cette relation est vérifiée, il existe des états propres communs à $\hat{X}(t)$ et à $\hat{X}(t')$, pour lesquels des mesures successives aux instants t et t' correspondants, donneront des résultats sans dispersion associée. D'après la relation (I.A.4), les observables constantes du mouvement sont des variables QND.

2. Cas d'une particule libre.

L'énergie et l'impulsion sont des variables QND, tandis que ce n'est pas le cas pour l'observable position :

$$\hat{x}(t + \tau) = \hat{x}(t) + \hat{p} \frac{\tau}{M} \quad (\text{I.A.5})$$

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(t + \tau)] = i \frac{\hbar \tau}{M} \quad (\text{I.A.6})$$

d'où la limite quantique :

$$\Delta x(t) \cdot \Delta x(t + \tau) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{x}(t), \hat{x}(t + \tau)] \rangle \right| = \frac{\hbar \tau}{2M} \quad (\text{I.A.7})$$

qui correspond bien à la relation (I.A.3) entre δx_i et δx_f déterminée précédemment.

Remarque : L'inégalité (I.A.7) fixe une limite à la précision avec laquelle il est possible de mesurer une variation δl de longueur entre les positions $x(t)$ et $x(t+\tau)$, aux instants t et $t+\tau$:

$$\delta l = x(t + \tau) - x(t)$$

La variance associée à cette variation est donnée par :

$$\Delta(\delta l)^2 \geq \Delta x(t + \tau)^2 + \Delta x(t)^2$$

exprimant le fait qu'en absence de mesure précise à ces deux instants, le résultat pour la mesure de la variation δl est complètement imprévisible. La relation précédente suppose également que les deux mesures à t et à $t+\tau$ sont statistiquement indépendantes. Compte-tenu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\Delta(\delta l)^2 \geq 2\Delta x(t + \tau)\Delta x(t) \geq \frac{\hbar\tau}{M}$$

Il apparaît ainsi une borne inférieure, communément appelée limite quantique standard (LQS) [Caves 80] :

$$\Delta(\delta l) \geq [\Delta x]_{LQS} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{M}}$$

Néanmoins, comme toute limite quantique "fondamentale", celle-ci est valable pour toutes les mesures habituelles, mais il reste possible de la contourner de façon astucieuse, par exemple en corrélant les deux mesures successives [Yuen 83]. Cette idée a été l'objet d'une controverse portant sur l'existence réelle de la LQS [Caves 85a]. Ozawa a ainsi montré théoriquement qu'il est possible de construire un hamiltonien d'interaction, permettant de mesurer une position [Ozawa 88] [Ozawa 90], et tel que :

- (i) *la mesure initiale à t donne sur le système de mesure, une distribution de probabilité correspondant à la dispersion initiale $\Delta x_i(t)$,*
- (ii) *après cette première mesure, la particule se retrouve projetée dans un état "contractif" [Yuen 83], avec une dispersion $\Delta x(t) \geq [\hbar\tau / M]^{1/2}$. Cet état évolue en se contractant jusqu'à l'instant $t+\tau_c$, où $\Delta x(t + \tau_c) \leq [\hbar\tau_c / M]^{1/2}$, puis ensuite en se dilatant.*

Par conséquent, si on effectue la deuxième mesure à l'instant $t+\tau_c$, il est possible de mesurer la variation de longueur correspondante avec une précision meilleure que celle fixée par la LQS.

Remarquons également que dans les détecteurs d'ondes gravitationnelles actuellement en cours d'implantation [Brillet 85a,b], on utilise une méthode de détection interférométrique, qui ne correspond pas directement à une mesure de position. La LQS peut alors être dépassée [Jaekel 90].

2. Cas d'un oscillateur harmonique.

a) Evolution couplée de la position et de l'impulsion.

Les barres de Weber sont en fait, non pas des masses libres mais des oscillateurs mécaniques, dont le coefficient de qualité est très grand et qui, excités par l'onde gravitationnelle, vibrent suivant leur mode fondamental. Il est donc possible de les assimiler à un oscillateur harmonique quantique, pour lequel la position et l'impulsion sont définies en fonction des opérateurs création et annihilation :

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{I.A.8.a})$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (\text{I.A.8.b})$$

et qui évoluent suivant :

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_o e^{-i\omega t} \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}_o^\dagger e^{i\omega t} \quad (\text{I.A.9})$$

d'où pour les commutateurs :

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(t+\tau)] = i\frac{\hbar}{M\omega} \sin \omega\tau \quad (\text{I.A.10.a})$$

$$[\hat{p}(t), \hat{p}(t+\tau)] = i\hbar M\omega \sin \omega\tau \quad (\text{I.A.10.b})$$

Par conséquent, \hat{x} et \hat{p} ne correspondent pas à des observables QND, ce que l'on peut comprendre qualitativement à l'aide de la figure I.A.2, schématisant l'évolution de l'état dans un diagramme de Fresnel. Considérons initialement un état cohérent, dont on mesure la position, les fluctuations sur x sont alors réduites tandis que celles sur l'impulsion sont augmentées (état ψ_i). L'évolution cohérente fait alors tourner l'état et l'incertitude, initialement sur p , est alors répartie à la fois sur x et sur p . Remarquons qu'en effectuant une mesure tous les $\omega\tau = k\pi$, k entier, il est possible de retrouver la précision initiale sur x , qui apparaît ainsi comme une variable QND "stroboscopique" [Braginsky 80].

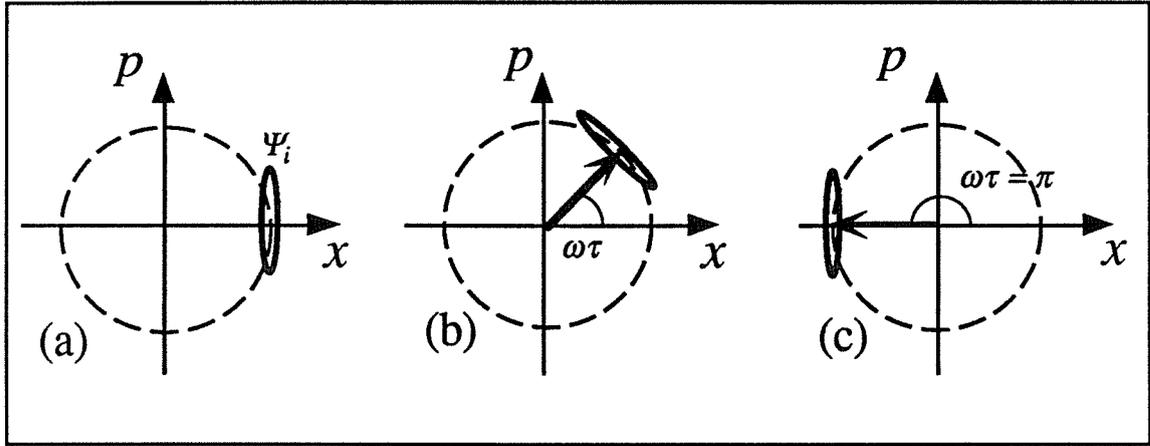


FIGURE I.A.2 :

Evolution cohérente d'un oscillateur harmonique, après une mesure initiale avec une résolution finie de sa position (a). La rotation de l'état ψ_i répercute l'incertitude, initialement uniquement sur p , sur les deux variables x et p (b). Si on attend l'instant τ défini par $\omega\tau = \pi$, pour effectuer une deuxième mesure de x , on retrouve la précision initiale (c) : x et p sont des variables QND "stroboscopiques".

b) De nouvelles variables QND : les composantes de quadrature.

Il est par contre intéressant de se placer dans le référentiel tournant. En définissant les composantes de quadrature :

$$\begin{cases} \hat{P} = \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \\ \hat{Q} = -i\hat{a}_0 + i\hat{a}_0^\dagger \end{cases} \quad (\text{I.A.11})$$

les observables \hat{x} et \hat{p} s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\hat{P} \cos \omega t + \hat{Q} \sin \omega t) \\ \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} (-\hat{P} \sin \omega t + \hat{Q} \cos \omega t) \end{cases} \quad (\text{I.A.12})$$

$$\begin{cases} \hat{P} = \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} \hat{x}(t) \cos \omega t - \sqrt{\frac{2}{\hbar M\omega}} \hat{p} \sin \omega t \\ \hat{Q} = \sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} \hat{x}(t) \sin \omega t + \sqrt{\frac{2}{\hbar M\omega}} \hat{p} \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{I.A.13})$$

\hat{P} et \hat{Q} sont donc des constantes du mouvement, et par conséquent des observables QND. En effet, ces variables évoluent avec la rotation de l'état dans le plan $\{x, p\}$: une mesure à $t = 0$ de la position correspond donc à une mesure de \hat{P} , qui ensuite n'est pas affectée par l'évolution libre de l'oscillateur harmonique.

Il est ainsi nécessaire de détecter non pas \hat{x} et \hat{p} , mais les quadratures \hat{P} et \hat{Q} . Ceci est possible en utilisant des dispositifs homodynes correspondant à un battement avec un oscillateur local oscillant à la fréquence ω , et d'intensité suffisamment forte pour être considéré comme un objet classique. En ajustant la phase de cet oscillateur local, il est ainsi possible d'extraire les composantes de quadrature \hat{P} et \hat{Q} de \hat{x} et \hat{p} . Malheureusement, de tels détecteurs sont extrêmement difficiles à réaliser pour des oscillateurs purement mécaniques. Les détections homodynes sont par contre beaucoup plus simples à réaliser dans le domaine optique : il suffit de faire interférer le signal à détecter avec un oscillateur local dont on peut contrôler la phase en modifiant le trajet optique. Si l'intérêt initial pour les mesures QND a été initié par le problème de la détection de très faibles forces agissant sur des systèmes mécaniques, il s'est aussi avéré que de tels dispositifs étaient plus faciles à implanter dans le domaine optique. Les mesures sont alors effectuées sur un mode du champ électromagnétique, considéré comme un oscillateur harmonique :

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E} [\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}] \quad (\text{I.A.14.a})$$

soit en termes de composantes de quadrature :

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E} [\hat{P} \cos \omega t + \hat{Q} \sin \omega t] \quad (\text{I.A.14.b})$$

Ces composantes vérifient une inégalité de Heisenberg $\Delta P \cdot \Delta Q \geq 1$, reliée à la relation de commutation $[P, Q] = 2i$. On désigne par état minimal [Glauber 64] les états correspondant à l'égalité $\Delta P \cdot \Delta Q = 1$.

Un premier exemple est obtenu par le vide $|n=0\rangle$, pour lequel :

$$\langle \hat{P} \rangle = \langle \hat{Q} \rangle = 0 \quad \Delta \hat{P} = \Delta \hat{Q} = 1 \quad (\text{I.A.15})$$

De la même façon, les états cohérents $|\alpha_0\rangle$, obtenus par une translation de l'état $|n=0\rangle$ d'une quantité α_0 dans le plan complexe, sont des états minimaux, dont l'évolution temporelle est donnée par :

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha_0\rangle e^{-i\omega t} \quad (\text{I.A.16})$$

soit pour les composantes de quadratures :

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle &= 2 \Re e [\alpha_0] \\ \langle \hat{Q} \rangle &= 2 \Im m [\alpha_0] \end{aligned} \quad \Delta \hat{P} = \Delta \hat{Q} = 1 \quad (\text{I.A.17})$$

L'état cohérent peut être représenté graphiquement (figure I.A.3) à l'aide d'un petit cercle, centré autour de l'extrémité du vecteur représentant l'état du système $|\alpha_0\rangle$ dans le plan complexe et symbolisant les relations d'incertitude. Cette représentation schématique peut être justifiée rigoureusement comme étant les lignes d'isoprobabilité de la distribution de Wigner, associée à cet état [Reynaud 90]. Remarquons que la relation $\Delta P \cdot \Delta Q = 1$ n'implique pas que les fluctuations soient équitablement réparties sur P et sur Q, i.e. $\Delta P = \Delta Q = 1$. Les états ne vérifiant pas cette propriété sont appelés "états comprimés" : ils correspondent à une déformation à surface constante du petit cercle et sont produits à l'aide d'effets non-linéaires [Squeezing 87].

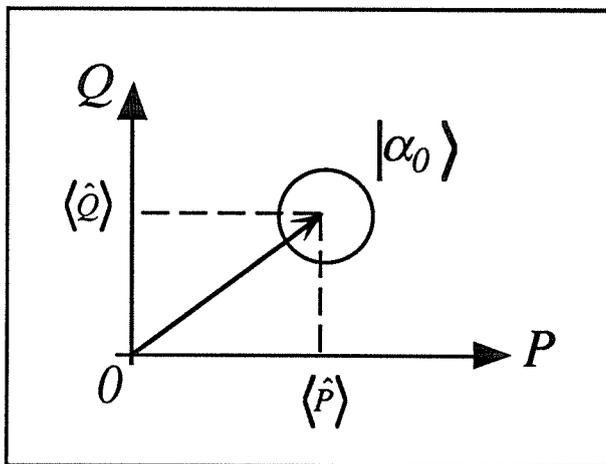


FIGURE I.A.3 :
Représentation schématique
dans le plan complexe des
relations de dispersion
associées à un état cohérent.

c) Intensité et phase.

Une autre variable QND pour un oscillateur harmonique est naturellement l'opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, correspondant au nombre de quanta d'excitation (photon). La variable conjuguée de cette observable correspond à la phase du système. Il est en effet possible de comprendre que ces deux variables sont liées par une inégalité de Heisenberg, à l'aide du raisonnement qualitatif suivant dans le cas d'un état cohérent $|\alpha_0\rangle$ (figure I.A.4) :

Compte-tenu du fait que l'amplitude $|\alpha_0|$ est reliée au nombre moyen de photons par :

$$OM^2 = |\alpha_0|^2 = \langle N \rangle \quad (\text{I.A.18})$$

on obtient en différentiant cette relation :

$$\Delta N \approx 2|\alpha_0|\Delta|\alpha_0| \quad (\text{I.A.19})$$

La distribution suivant une loi de poisson des nombres de quanta d'excitation correspond à :

$$\Delta N \approx \sqrt{\langle N \rangle} \quad (\text{I.A.20})$$

Les fluctuations de l'amplitude sont alors données par :

$$\Delta|\alpha_0| \approx 1/2 \quad (\text{I.A.21})$$

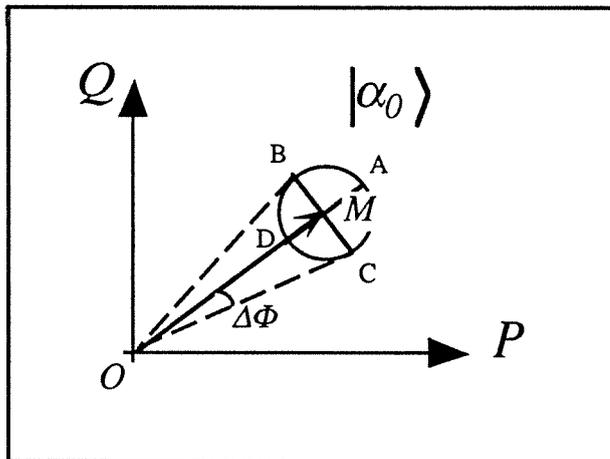


FIGURE I.A.4 :
Relation d'incertitude reliant le nombre de quanta de l'oscillateur et sa phase, pour un état cohérent.

soit pour le petit cercle : $MA = MB = MC = MD = 1/2$. L'incertitude sur la phase ϕ de l'état est alors donnée par :

$$\Delta\phi \approx \frac{MC}{OM} = \frac{1/2}{|\alpha_0|} \approx \frac{1/2}{\Delta N} \quad (\text{I.A.22})$$

d'où la relation de Heisenberg :

$$\Delta N \cdot \Delta\phi \approx \frac{1}{2} \quad (\text{I.A.23})$$

Cette relation peut être justifiée rigoureusement en utilisant les observables \hat{N} et $\hat{\phi}$, où $\hat{\phi}$ correspond à l'opérateur phase hermitique défini par Barnett et Pegg [Pegg 88] [Pegg 89] [Barnett 89]. Nous donnerons en Annexe III un exemple de couplage QND, interprétable en terme de mesure sur les opérateurs \hat{N} et $\hat{\phi}$.

Remarquons que lorsque les fluctuations du mode restent petites par rapport à son amplitude moyenne (i.e. $|\alpha_0| \gg 1/2$), il est possible de linéariser les fluctuations d'intensité et de phase :

$$\Delta\hat{N} = \Delta(\hat{a}^\dagger\hat{a}) \approx \langle\hat{a}\rangle\Delta\hat{a}^\dagger + \langle\hat{a}^\dagger\rangle\Delta\hat{a} \quad (\text{I.A.24})$$

En choisissant la référence de phase telle que $\langle\hat{a}\rangle$ soit réel, les fluctuations en nombre de photons valent alors :

$$\Delta\hat{N} \approx \langle\hat{a}\rangle(\Delta\hat{a} + \Delta\hat{a}^\dagger) \quad (\text{I.A.25})$$

soit :

$$\Delta\hat{N} \approx \langle\hat{a}\rangle\Delta\hat{P} \quad (\text{I.A.26})$$

Par un calcul analogue :

$$\Delta\phi \approx \frac{1}{2\langle\hat{a}\rangle}\Delta\hat{Q} \quad (\text{I.A.27})$$

La relation $\Delta N \cdot \Delta\phi \geq 1/2$ peut ainsi être considérée comme une autre forme de la relation de Heisenberg $\Delta P \cdot \Delta Q \geq 1$ entre les composantes de quadrature. Par conséquent, s'il est possible d'effectuer un traitement linéarisé des fluctuations quantiques autour des champs moyens, les composantes de quadrature \hat{P} et \hat{Q} suffisent à décrire les fluctuations d'intensité et de phase, et le recours aux opérateurs \hat{N} et $\hat{\phi}$ est inutile. Nous reviendrons sur ce point, très important en pratique, dans le § B.II, détaillant le formalisme semi-classique utilisé pour la description des fluctuations quantiques. Ceci permet de contourner la mesure expérimentale de $\hat{\phi}$: si cet opérateur est bien défini théoriquement, sa mesure expérimentale est beaucoup plus délicate [Noh 91].

III. COUPLAGE DE DETECTION TRANQUILLE ("back-action evasion").

1. Hypothèses simplificatrices.

Une fois déterminée une observable QND d'un système signal \mathcal{S} , que nous noterons \hat{X}_S , il est alors nécessaire pour la mesurer, de coupler \mathcal{S} à un système de mesure \mathcal{M} par un hamiltonien de couplage \mathcal{H}_{MS} , fonction de \hat{X}_S . Pour que ce couplage ne perturbe pas le signal

\hat{X}_S , une condition suffisante est que :

$$[\mathcal{H}_{MS}, \hat{X}_S] = 0 \quad (\text{I.A.28})$$

Le résultat de la mesure apparaît sur une observable \hat{Y}_M de \mathcal{M} telle que $[\mathcal{H}_{MS}, \hat{Y}_M] \neq 0$.

L'analyse du dispositif QND se décompose alors en deux parties. Dans une première étape, le système couplé {signal + mesure} évolue de façon unitaire et des corrélations quantiques entre \mathcal{S} et \mathcal{M} s'établissent. A un moment donné, l'évolution libre est stoppée et on mesure \hat{Y}_M^{out} , ce qui projette \mathcal{M} dans un état propre de cette observable et modifie l'état de \mathcal{S} . La deuxième étape de la mesure correspond ainsi à déterminer l'effet non-unitaire de la lecture de l'information portée par le faisceau de mesure.

2. Mesure QND idéale des composantes de quadrature.

Afin d'étudier plus en détail un exemple simple, supposons que \mathcal{S} et \mathcal{M} soient deux oscillateurs harmoniques, et que l'hamiltonien de couplage ait la forme :

$$H_{MS} = \hbar g \hat{X}_S \hat{X}_M \quad (\text{I.A.29})$$

où g est l'intensité du couplage (supposé constant au cours du temps), et \hat{X}_S et \hat{X}_M sont des quadratures des champs "signal" et "mesure". De façon évidente, \hat{X}_S est une observable QND satisfaisant la condition (I.A.28).

a) Transformation unitaire des observables entre l'entrée et la sortie :

L'évolution d'une observable \hat{A} est donnée, en représentation de Heisenberg, par :

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \mathcal{H}] \quad (\text{I.A.30})$$

soit, pour les composantes de quadrature \hat{X}_S et \hat{X}_M , ainsi que pour les observables conjuguées \hat{Y}_S et \hat{Y}_M vérifiant les relations de commutation $[\hat{X}_S, \hat{Y}_S] = [\hat{X}_M, \hat{Y}_M] = 2i$:

$$\begin{cases} \hat{X}_S^{out} = \hat{X}_S^{in} \\ \hat{Y}_S^{out} = \hat{Y}_S^{in} - 2gt \hat{X}_M^{in} \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{X}_M^{out} = \hat{X}_M^{in} \\ \hat{Y}_M^{out} = \hat{Y}_M^{in} - 2gt \hat{X}_S^{in} \end{cases} \quad (\text{I.A.31})$$

Ces relations de couplage entrée-sortie seront pour la suite de ce mémoire, regroupées sous la dénomination de "transformation paramétrique idéale". Pour le signal, toute la perturbation introduite par la mesure est reportée sur la quadrature conjuguée \widehat{Y}_S , et, à la limite des grands gains paramétriques ($|G| \rightarrow \infty$, avec G défini par $G = -2gt$), la composante \widehat{Y}_M^{out} est transformée en une copie macroscopique de la variable quantique \widehat{X}_S^{in} .

b) *Etat du système global après interaction [Cohen 90]*

α) Analyse de l'étape n° 1 :

Afin d'obtenir des images plus claires, nous nous replaçons en représentation de Schrödinger. L'opérateur d'évolution $U(t, 0)$ est donné par :

$$i\hbar \frac{dU(t,0)}{dt} = \hbar g \widehat{X}_S \widehat{X}_M U(t,0) \quad (\text{I.A.32})$$

\widehat{X}_S et \widehat{X}_M commutant entre eux, cette équation différentielle s'intègre immédiatement :

$$U(t,0) = e^{-igt \widehat{X}_S \widehat{X}_M} \quad (\text{I.A.33})$$

Pour décrire le système global, nous choisissons les bases correspondant pour le signal, aux états propres $\{x_i^S\}$ de \widehat{X}_S et pour la mesure, aux états propres $\{y_j^M\}$ de \widehat{Y}_M (que nous supposons discrètes et non-dégénérées afin de simplifier les notations)* :

$$\begin{cases} \widehat{X}_S |x_i^S\rangle = x_i^S |x_i^S\rangle \\ \widehat{Y}_M |y_j^M\rangle = y_j^M |y_j^M\rangle \end{cases} \quad (\text{I.A.34})$$

Considérons d'abord un état initial défini par :

$$|\psi(t=0)\rangle = |x_i^S\rangle \otimes |y_j^M\rangle = |x_i^S\rangle \otimes \sum \langle y_j^M | y^M \rangle |y_j^M\rangle \quad (\text{I.A.35})$$

* Considérons par exemple la mesure de l'impulsion d'une particule "signal" \mathcal{S} , qui est, comme montré précédemment, une variable QND. Les états propres correspondant sont alors la base des états $\{p\}$. Cette mesure peut être effectuée en couplant \mathcal{S} à une autre particule "mesure" \mathcal{M} , par un couplage $\hbar g P_S P_M$. L'information de mesure est alors obtenue en détectant le déplacement de la position de \mathcal{M} . Pour une mesure QND des composantes de quadrature d'un oscillateur harmonique, les états propres correspondant sont des états parfaitement comprimés, qui tout comme les états x et p n'ont pas de réalité physique.

où $|y^M\rangle$ correspond par exemple à un état cohérent, localisé en $\{x^M(0), y^M(0)\}$ avec des largeurs $\Delta x^M = \Delta y^M$. D'après (I.A.33) et (I.A.34), le système à l'instant t est décrit par la fonction d'onde :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-igt \hat{X}_s \hat{X}_M} |x_i^S\rangle \otimes |y^M\rangle \quad (\text{I.A.36})$$

$$|\psi(t)\rangle = |x_i^S\rangle \otimes e^{-igt \hat{x}_i^S \hat{X}_M} |y^M\rangle \quad (\text{I.A.37})$$

Compte-tenu de la relation de commutation $[\hat{X}_M, \hat{Y}_M] = 2i$, l'opérateur agissant sur y^M peut être interprété comme un opérateur de translation [Cohen 77], dont les éléments de matrice sont donnés dans la base $\{y_j^M\}$ par:

$$\langle y_j^M | e^{-igt \hat{x}_i^S \hat{X}_M} |y^M\rangle = \langle y_j^M + 2gt \hat{x}_i^S |y^M\rangle \quad (\text{I.A.38})$$

soit :

$$|\psi(t)\rangle = |x_i^S\rangle \otimes \sum_j \langle y_j^M + 2gt \hat{x}_i^S |y^M\rangle |y_j^M\rangle \quad (\text{I.A.39})$$

qui s'écrit encore :

$$|\psi(t)\rangle = |x_i^S\rangle \otimes |y^M(x_i^S)\rangle \quad (\text{I.A.40})$$

où $|y^M(x_i^S)\rangle$ correspond à un état de \mathcal{M} associé à l'état $|x_i^S\rangle$ de \mathcal{S} et défini par :

$$|y^M(x_i^S)\rangle = \sum_j \langle y_j^M |y^M\rangle |y_j^M - 2gt \hat{x}_i^S\rangle \quad (\text{I.A.41})$$

Après l'interaction, la quadrature \hat{Y}_M est en moyenne translatée d'une quantité $\langle Y^M \rangle = -2gt \hat{x}_i^S$, ce qui correspond bien au résultat (I.A.27) obtenu pour l'évolution des opérateurs en représentation de Heisenberg. La mesure de cette translation permet ainsi de déterminer, à Δy^M près, la valeur propre x_i^S associée à l'état initial du système signal.

Si on considère de façon plus générale un état initial de \mathcal{S} défini par :

$$|x_i^S\rangle = \sum_i c_i^S |x_i^S\rangle \quad (\text{I.A.42a})$$

soit :

$$|\psi(0)\rangle = \left\{ \sum_i c_i^s |x_i^s\rangle \right\} \otimes |y^M\rangle \quad (\text{I.A.42b})$$

le système $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ après interaction est alors donné par :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i^s |x_i^s\rangle \otimes |y^M(x_i^s)\rangle \quad (\text{I.A.42c})$$

soit :

$$\forall i : \left| \langle x_i^s | \psi(t) \rangle \right|^2 = \left| \langle x_i^s | \psi(0) \rangle \right|^2 \quad (\text{I.A.43})$$

Nous retrouvons ainsi la condition QND pour la quadrature \hat{X}_s , avec pour conséquence le fait que les probabilités d'occupation des différents états propres du système signal sont les mêmes avant et après l'interaction.

β) Analyse de l'étape n° 2 : détection du système de mesure.

Considérons le cas idéal où les différents états $|y^M(x_i^s)\rangle$ sont orthogonaux les uns aux autres :

$$\langle y^M(x_k^s) | y^M(x_i^s) \rangle = \delta_{ik} \quad (\text{I.A.44})$$

La probabilité \mathcal{P}_k de détecter Y_M dans un état donné $|y^M(x_k^s)\rangle$ est alors :

$$\mathcal{P}_k = \left| \langle y^M(x_k^s) | \psi(t) \rangle \right|^2 = |c_k^s|^2 \quad (\text{I.A.45})$$

l'état de \mathcal{S} après la mesure étant donné, au coefficient de normalisation près, par la projection de $|\psi(t)\rangle$ dans le sous-espace sous-tendu par $|y^M(x_k^s)\rangle$, soit $|x_k^s\rangle$.

En considérant les différents résultats possibles, l'état du système \mathcal{S} après la détection est alors donné par un mélange statistique de ces états :

$$\square \text{ avant la mesure : } \rho_{in}^s = |x_{in}^s\rangle \langle x_{in}^s| = \sum_i \sum_k c_i^s c_k^{s*} |x_i^s\rangle \langle x_k^s|.$$

$$\square \text{ après la mesure : } \rho_{out}^s = \sum_i |c_i^s|^2 |x_i^s\rangle \langle x_i^s|$$

Nous retrouvons ainsi les mêmes résultats qu'en appliquant les postulats de la mesure, en particulier celui de la réduction du paquet d'onde, lorsque l'on cherche à déterminer les résultats d'une mesure quantique de l'observable \hat{X}_S sur l'état $|x_{in}^s\rangle$ du système \mathcal{S} seul. Nous avons donc montré, pour ce cas particulier, qu'une mesure QND parfaite correspondait à une mesure quantique idéale, dont l'archétype est figuré par le dispositif de Stern et Gerlach.

3. Discussion du modèle.

Ce modèle très idéalisé ne correspond en fait que de très loin aux expériences qui seront exposées dans ce mémoire, lesquelles concernent des mesures effectuées sur deux faisceaux laser couplés dans un milieu non-linéaire. En particulier, les conditions (I.A.34) (états propres des observables constituant une base discrète) et (I.A.44) (orthogonalité des états de \mathcal{M} couplés aux différents états propres de \hat{X}_S) ne sont pas vérifiées dans nos conditions. Nous allons donc, dans la partie suivante introduire un formalisme plus adapté à une description réelle de nos expériences, et très relié à celui utilisé dans le contexte des états comprimés du rayonnement. Ceci nous permettra de définir des "critères" pratiques, caractérisant le fait que le couplage obtenu correspond effectivement à une mesure QND. La limite d'une mesure QND idéale devra évidemment s'identifier à l'exemple traité ci-dessus.

Récemment, des mesures QND sur des photons stockés dans une cavité micro-onde, très faiblement amortie, et couplés à des atomes ont été théoriquement proposées [Brune 90] [Holland 91], et sont actuellement en cours de réalisation expérimentale. Le système $\mathcal{S}+\mathcal{M}$ peut alors effectivement être décrit par des états discrets de \mathcal{S} , couplés à des états orthogonaux de \mathcal{M} , la détection de ces derniers permettant alors de déterminer l'état de \mathcal{S} correspondant. Ce type de situation est par conséquent conceptuellement beaucoup plus proche de la discussion précédente.

B. MESURE QND EN OPTIQUE

I. DESCRIPTION DES FLUCTUATIONS QUANTIQUES EN OPTIQUE.

Les champs laser utilisés dans les expériences exposées dans ce mémoire, sont des champs intenses, qui peuvent être décrits comme ayant une amplitude moyenne classique, avec des fluctuations quantiques dont les amplitudes sont très faibles comparées à l'amplitude moyenne du champ. Il est ainsi possible d'utiliser un formalisme semi-classique correspondant à un traitement linéaire des fluctuations quantiques, développé par S. Reynaud et A. Heidmann [Reynaud 89a]. Les auteurs ont montré que cette méthode est rigoureusement équivalente à l'analyse standard [Collett 84] [Gardiner 85], dans le cas des non-linéarités "paramétriques", pour lesquelles il est possible de définir un hamiltonien effectif mettant en jeu seulement les différents modes du champ couplés par le milieu non linéaire.

La méthode semi-classique est d'un abord relativement simple et conduit souvent à des expressions analytiques plus directes. De plus, la transformation des fluctuations quantiques dans un système optique correspond à une extension de l'analyse linéaire de stabilité autour du point de fonctionnement [Gibbs 85], si bien que les liens entre les effets d'instabilités et les effets sur les bruits quantiques apparaissent de façon naturelle. Nous nous contenterons simplement d'introduire son formalisme, en renvoyant aux différents articles de revue détaillant sa justification théorique [Reynaud 90] [Reynaud 91] [Fabre 90].

1. Principe de la description semi-classique.

Considérons un champ électromagnétique correspondant à une onde laser cohérente à la fréquence ω_0 . Le champ électrique oscillant en un point donné est défini classiquement par :

$$E(t) = \mathcal{E}(t) e^{-i \omega_0 t} + \mathcal{E}^*(t) e^{i \omega_0 t} \quad (\text{I.B.1})$$

et quantiquement par un opérateur :

$$\hat{E}(t) = E_0 [\hat{a}(t) e^{-i \omega_0 t} + \hat{a}^\dagger(t) e^{i \omega_0 t}] \quad (\text{I.B.2})$$

Nous cherchons à titre d'exemple à décrire l'effet des pertes optiques, en les modélisant par l'introduction sur le faisceau d'une lame semi-réfléchissante dont la transmission t^2 en intensité est égale à l'efficacité de détection η (figure I.B.1).

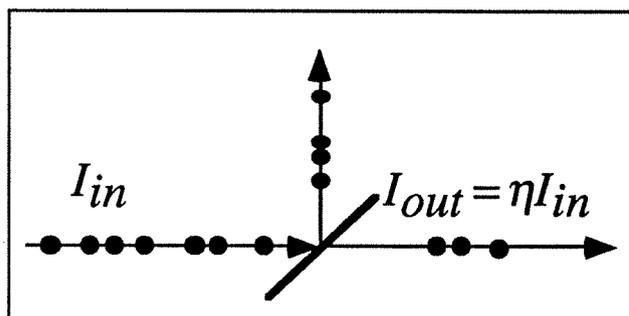


FIGURE I.B.1 :
Image corpusculaire de l'effet des pertes optiques : celles-ci peuvent être représentées par une lame semi-transparente distribuant aléatoirement les photons incidents sur les deux voies.

La transformation entre les composantes entrantes $\{\hat{a}_{in}, \hat{a}_{in}^\dagger\}$ et sortantes $\{\hat{a}_{out}, \hat{a}_{out}^\dagger\}$ doit préserver les relations de commutation :

$$[\hat{a}_{in}, \hat{a}_{in}^\dagger] = [\hat{a}_{out}, \hat{a}_{out}^\dagger] = 1 \quad (\text{I.B.3})$$

alors qu'il y a un amortissement des valeurs moyennes :

$$\langle \hat{a}_{out} \rangle = t \langle \hat{a}_{in} \rangle \quad (\text{I.B.4})$$

Il est pour cela nécessaire d'introduire un champ supplémentaire \hat{a}_{vide} , fluctuant autour d'une valeur moyenne nulle, tel que :

$$\hat{a}_{out} = t \hat{a}_{in} + \sqrt{1-t^2} \hat{a}_{vide} \quad (\text{I.B.5})$$

$$[\hat{a}_{in}, \hat{a}_{in}^\dagger] = [\hat{a}_{vide}, \hat{a}_{vide}^\dagger] = [\hat{a}_{out}, \hat{a}_{out}^\dagger] = 1 \quad (\text{I.B.6})$$

La théorie semi-classique permet de remplacer la moyenne d'ensemble au sens quantique par une moyenne classique sur une distribution de probabilité. Les opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger correspondent alors à des variables stochastiques classiques \mathcal{E} et \mathcal{E}^* , fluctuant autour des valeurs moyennes :

$$\bar{\mathcal{E}} = \langle \hat{a} \rangle \quad \bar{\mathcal{E}}^* = \langle \hat{a}^\dagger \rangle \quad (\text{I.B.7})$$

La valeur moyenne d'un opérateur, fonction de \hat{a} et \hat{a}^\dagger , est alors obtenue à l'aide d'une distribution de probabilité dont la forme dépend de l'ordre dans lequel ces opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger sont rangés. La description semi-classique que nous choisirons correspond au rangement dans l'ordre symétrique, pour lequel la distribution de probabilité est la fonction de Wigner $W(\xi, \xi^*)$:

$$\langle F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \int d\xi d\xi^* F(\xi, \xi^*) W(\xi, \xi^*) \quad (\text{I.B.8})$$

L'un des avantages de ce choix est que pour toute transformation linéaire canonique, dont un exemple est donné par la lame semi-transparente, la fonction W est constante [Reynaud 90] [Ekert 90] :

$$W(\xi_{in}, \xi_{in}^*) = W(\xi_{out}, \xi_{out}^*) \quad (\text{I.B.9})$$

ce qui est équivalent à la conservation des relations de commutation sur les opérateurs quantiques a_{in} et a_{out} (relation I.B.3). Cette propriété n'est par contre pas vérifiée pour les fonctions de distribution P et Q , correspondant aux rangements respectivement dans l'ordre normal et antinormal.

Les opérateurs peuvent ainsi être décrits par des champs classiques, ayant des fluctuations autour de leur valeur moyenne :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{in}(t) = \bar{\mathcal{E}}_{in} + \delta\mathcal{E}_{in}(t) \\ \mathcal{E}_{out}(t) = \bar{\mathcal{E}}_{out} + \delta\mathcal{E}_{out}(t) \end{cases} \quad (\text{I.B.10})$$

et dont la transformation est donnée par (eq. I.B.4 et I.B.5) :

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{E}}_{out} = t \bar{\mathcal{E}}_{in} \\ \delta\mathcal{E}_{out} = t \delta\mathcal{E}_{in} + \sqrt{1-t^2} \delta\mathcal{E}_{vide} \end{cases} \quad (\text{I.B.11})$$

Le terme $\sqrt{1-t^2} \delta\mathcal{E}_{vide}$, analogue semi-classique de \hat{a}_{vide} , peut être interprété comme les fluctuations du vide entrant par l'autre côté de la lame semi-transparente. Ces fluctuations ont une valeur moyenne nulle et leur densité spectrale de bruit sera donnée plus loin. Remarquons que ce bruit supplémentaire n'est pas indépendant de la transformation des champs moyens.

2. Notations : fluctuations d'intensité et composantes de quadrature.

Nous définissons l'intensité $\hat{I}(t)$, comme la mesure instantanée du flux de photons :

$$\hat{I}(t) = \hat{a}(t)^\dagger \hat{a}(t) \quad (\text{I.B.12})$$

qui correspond à la quantité mesurée par un photodétecteur idéal, éjectant un électron pour un photon absorbé.

Pour un champ laser de grande amplitude, cet opérateur peut être approximé par une fonction de \hat{a} et \hat{a}^\dagger , écrite dans l'ordre symétrique :

$$\hat{I}(t) \approx \frac{1}{2} [\hat{a}(t) \hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t)] \quad (\text{I.B.13})$$

ce qui correspond semi-classiquement à :

$$I(t) = |\mathcal{E}(t)|^2 \quad (\text{I.B.14})$$

En se limitant au premier ordre du développement, cette intensité peut ainsi être décomposée en sa valeur moyenne temporelle, avec des fluctuations :

$$\delta I(t) = \bar{\mathcal{E}} \delta \mathcal{E}^*(t) + \bar{\mathcal{E}}^* \delta \mathcal{E}(t) \quad (\text{I.B.15})$$

En considérant la transformée de Fourier $\delta I(\omega)$, définie par la transformation :

$$\delta I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta I(t) e^{i\omega t} \leftrightarrow \delta I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta I(\omega) e^{-i\omega t} \quad (\text{I.B.16})$$

la composante de Fourier à la fréquence ω s'écrit :

$$\delta I(\omega) = |\bar{\mathcal{E}}| p(\omega) \quad \text{avec} \quad p(\omega) = \frac{\bar{\mathcal{E}}^*}{|\bar{\mathcal{E}}|} \delta \mathcal{E}(\omega) + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{|\bar{\mathcal{E}}|} \delta \mathcal{E}(-\omega)^* \quad (\text{I.B.17})$$

qui apparaît comme un battement entre la fréquence centrale ω_0 du champ, et les fluctuations aux fréquences $\omega_0 \pm \omega$. De façon générale, la composante de quadrature θ est définie par :

$$p_\theta = e^{-i\theta} \frac{\bar{\mathcal{E}}^*}{|\bar{\mathcal{E}}|} \delta\mathcal{Z}(\omega) + e^{i\theta} \frac{\bar{\mathcal{E}}}{|\bar{\mathcal{E}}|} \cdot \delta\mathcal{Z}(-\omega)^* \quad (\text{I.B.18})$$

La quadrature correspondant à $\theta = 0$ représente ainsi les fluctuations d'amplitude, tandis que celle pour $\theta = \pi/2$ correspond aux fluctuations de phase, notées :

$$q(\omega) = -i \frac{\bar{\mathcal{E}}^*}{|\bar{\mathcal{E}}|} \delta\mathcal{Z}(\omega) + i \frac{\bar{\mathcal{E}}}{|\bar{\mathcal{E}}|} \cdot \delta\mathcal{Z}(-\omega)^* \quad (\text{I.B.19})$$

3. Quantité associée à une mesure à l'aide d'un analyseur de spectre.

a) Définition du spectre de bruit.

Considérons un système de détection idéal donnant, en sortie, un électron pour un photon incident. Ce détecteur est une photodiode, générant un courant $I_c(t)$ dont les fluctuations radiofréquence (typiquement entre 1 MHz et 1 GHz) reproduisent $p(\omega)$. La valeur moyenne temporelle (notée \bar{I}_c) correspond à la moyenne $\langle I(t) \rangle$, au sens semi-classique défini précédemment (éq.(I.B.8)) :

$$\bar{I}_c = e \langle I(t) \rangle \quad (\text{I.B.20})$$

Les fluctuations autour de cette valeur moyenne sont données par :

$$\delta I_c(t) = \sqrt{e\bar{I}_c} p(t) \leftrightarrow \delta I_c(\omega) = \sqrt{e\bar{I}_c} p(\omega) \quad (\text{I.B.21})$$

Un analyseur de spectre détecte le spectre de bruit associé à cette variable aléatoire. Ce spectre est donné par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, qui s'écrit en prenant la convention $\sqrt{e\bar{I}_c} = 1$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \iint dt dt' \langle \overline{\delta I_c(t) \delta I_c(t')} \rangle e^{i\omega(t'-t)} \quad (\text{I.B.22})$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \iint dt dt' \langle p(t) p(t') \rangle e^{i\omega(t'-t)} \quad (\text{I.B.23})$$

$$\langle p(t) p(t') \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint d\omega S(\omega) e^{-i\omega(t'-t)} \quad (\text{I.B.24})$$

Il est également possible de définir $S(\omega)$ à partir des fluctuations en fréquence de la quadrature $p(\omega)$ [Reynaud 90]. Définissons :

$$C_p(\omega, \omega') = \langle p(\omega) p(\omega') \rangle \quad (\text{I.B.25})$$

$$C_p(\omega, \omega') = \frac{1}{2\pi} \iint dt dt' e^{i\omega t + i\omega' t'} \langle p(t) p(t') \rangle \quad (\text{I.B.26})$$

qui s'inverse en :

$$\langle p(t) p(t') \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint d\omega d\omega' e^{-i\omega t - i\omega' t'} C_p(\omega, \omega') \quad (\text{I.B.27})$$

En identifiant à (I.B.24) ,

$$C_p(\omega, \omega') = 2\pi \delta(\omega + \omega') S(\omega) \quad (\text{I.B.28})$$

soit :

$$\langle p(\omega) p(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') S(\omega) \quad (\text{I.B.29})$$

Compte-tenu du fait que les fluctuations du vide ont un temps de corrélation nul :

$$\langle p(t) p(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (\text{I.B.30})$$

le spectre de bruit correspondant au vide est alors donné par :

$$S_{\text{vide}}(\omega) = 1 \quad (\text{I.B.31})$$

relation qui se généralise à toute quadrature p_θ définie par l'équation (I.B.18).

b) Variance du photocourant détecté

On montre que l'écart quadratique moyen des fluctuations de courant, est donné par :

$$\Delta i^2 = 2e\bar{I}_c B [1 + Q] \quad (\text{I.B.32})$$

où B correspond à la bande passante d'analyse, et Q au paramètre de Mandel, traduisant la statistique des photons.

Cette expression montre qu'il apparaît une unité naturelle, Δi_{SN}^2 , appelée bruit de photons ("shot-noise"), et dont la valeur est donnée par :

$$\Delta i_{SN}^2 = 2e \bar{I}_c B \quad (\text{I.B.33})$$

Cette variance est obtenue pour une répartition poissonnienne des photons, correspondant à $\langle p(t) p(t') \rangle = \delta(t - t')$, cette relation étant vérifiée pour tout état cohérent (y compris le vide).

Si les photons incidents sont corrélés de telle façon que $Q > 0$, la variance en courant est plus grande que celle correspondant au bruit de photons. Le faisceau possède alors de l'excès de bruit classique. Si par contre, $Q < 0$ alors, $\Delta i < \Delta i_{SN}$ et l'état du champ n'a pas de correspondant classique. La méthode que nous venons de développer pour la photodétection directe se généralise à tous les types de détection, en particulier au cas de la détection homodyne où, en ajustant la phase de l'oscillateur local, il est possible de mesurer les différentes composantes de quadratures $p_\alpha(\omega)$.

Afin de fixer un ordre de grandeur, considérons la détection des fluctuations dans une bande de 100 kHz, pour différentes valeurs du courant moyen :

$$\begin{array}{lll} \bar{I}_c = 1 \text{ mA} & \Delta i_{SN} \approx 6 \text{ nA} & \frac{\Delta i_{SN}}{\bar{I}_c} \approx 6 \cdot 10^{-7} \\ \bar{I}_c = 1 \text{ } \mu\text{A} & \Delta i_{SN} \approx 0.2 \text{ nA} & \frac{\Delta i_{SN}}{\bar{I}_c} \approx 2 \cdot 10^{-4} \\ \bar{I}_c = 1 \text{ nA} & \Delta i_{SN} \approx 6 \text{ pA} & \frac{\Delta i_{SN}}{\bar{I}_c} \approx 6 \cdot 10^{-3} \\ \bar{I}_c = 1 \text{ pA} & \Delta i_{SN} \approx 0.2 \text{ pA} & \frac{\Delta i_{SN}}{\bar{I}_c} \approx 0.2 \end{array} \quad (\text{I.B.34})$$

Les fluctuations relatives sont évidemment d'autant plus importantes que le courant moyen est faible. Par conséquent, si l'on cherche à détecter une variation très faible sur l'amplitude d'un champ électrique (ou similairement une variation extrêmement rapide, ce qui nécessite alors une grande bande d'analyse spectrale), le bruit de photons peut masquer le phénomène recherché. Actuellement, diverses techniques de mesure optique (telles que les mesures par spectroscopie hétérodyne [Spectro 85]), où toutes les sources de bruit technique ont pu être éliminées, ont une sensibilité proche de la limite quantique fixée par le bruit de photons.

Nous détaillerons en Annexe I, la réalisation pratique de photodétecteurs, ayant une sensibilité suffisante pour permettre la mesure de ce bruit de photons.

c) Rapport signal/bruit

En supposant que le signal soit proportionnel à l'intensité moyenne, le rapport signal sur bruit est donné par :

$$SNB \propto \sqrt{\frac{\bar{I}_c}{2eB}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+Q_{mes}}} \quad (\text{I.B.35})$$

Pour augmenter cette quantité, on peut donc, soit augmenter l'intensité moyenne, soit diminuer la largeur de la bande d'analyse (ce qui revient à compter les photons pendant une plus longue durée). Lorsque ces deux paramètres sont fixés, par exemple dans le premier cas par la puissance disponible, et dans le deuxième cas par la largeur spectrale du signal (qui doit être comprise dans la bande passante d'analyse), la seule solution consiste alors à produire des états non-classiques du champ (i.e. ayant un paramètre $Q < 0$). Diverses expériences ont ainsi montré qu'il était effectivement d'améliorer la sensibilité d'une mesure, à l'aide de faisceaux lumineux ayant une statistique non-classique [MinXiao 87] [Grangier 87] [Nabors 90].

d) Influence des pertes de détection.

En pratique, l'efficacité de détection η est limitée par le rendement quantique des photodétecteurs (rapport du nombre d'électrons produits en fonction du nombre d'électrons éjectés), ainsi que par les pertes optiques sur le trajet des faisceaux. Ces pertes modifient le courant moyen détecté, ainsi que la statistique des photons :

$$\Delta i^2 = \Delta i_{SN}^2 [1 + \eta Q_{mes}] \quad \text{avec} \quad \Delta i_{SN}^2 = 2e \eta \bar{I}_c B \quad (\text{I.B.36})$$

Par conséquent, l'introduction de pertes amène le bruit au niveau du bruit de photons, que ce soit pour un état présentant un excès de bruit ($Q > 0$) ou pour un état non-classique ($Q < 0$). Dans ce dernier cas, la présence de pertes est bien sûr extrêmement préjudiciable.

Nous allons maintenant appliquer ce formalisme pour décrire le couplage, entre un faisceau signal et un faisceau de mesure, dans un dispositif qui, pour cette partie, sera considéré comme une boîte noire.

II. REPONSE LINEAIRE DU DISPOSITIF DE COUPLAGE.

1. Transformation entrée-sortie des fluctuations des champs.

Les composantes de quadrature des modes de ces deux faisceaux peuvent être notées sous forme vectorielle :

$$\mathcal{F}(\omega) = \begin{bmatrix} X_S(\omega) \\ Y_S(\omega) \\ X_M(\omega) \\ Y_M(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{I.B.37})$$

Les champs moyens en sortie du dispositif (composé, comme nous le verrons, d'une cavité entourant un milieu non-linéaire couplant les deux modes), sont exprimés en fonction des champs entrant à l'aide des équations classiques de réflexion, de transmission et de propagation. La transformation entrée-sortie des fluctuations des champs, données par les vecteurs $\delta\mathcal{F}^{\text{in}}(\omega)$ et $\delta\mathcal{F}^{\text{out}}(\omega)$, est alors obtenue par une linéarisation autour de la solution pour les champs moyens [Courty 90][Courty 91] :

$$\delta\mathcal{F}^{\text{out}}(\omega) = \lambda(\omega) \delta\mathcal{F}^{\text{in}}(\omega) + \delta\mathcal{F}^{\text{ad}}(\omega) \quad (\text{I.B.38})$$

où $\lambda(\omega)$ représente la matrice de transfert classique, et $\delta\mathcal{F}^{\text{ad}}$ les fluctuations ajoutées par les autres degrés de liberté du dispositif (par exemple, les fluctuations du vide entrant par les pertes optiques du dispositif, ainsi que les modes du vide responsables de l'émission spontanée des atomes formant le milieu non-linéaire contenu dans la cavité).

La matrice de transfert classique $\lambda(\omega)$ est une matrice 4 x 4 que nous noterons sous la forme suivante [Grangier 91c]:

$$\lambda(\omega) = \begin{bmatrix} \alpha_{SS}(\omega) & \beta_{SS}(\omega) & \alpha_{SM}(\omega) & \beta_{SM}(\omega) \\ \gamma_{SS}(\omega) & \delta_{SS}(\omega) & \gamma_{SM}(\omega) & \delta_{SM}(\omega) \\ \alpha_{MS}(\omega) & \beta_{MS}(\omega) & \alpha_{MM}(\omega) & \beta_{MM}(\omega) \\ \gamma_{MS}(\omega) & \delta_{MS}(\omega) & \gamma_{MM}(\omega) & \delta_{MM}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{I.B.39})$$

2. Transformation entrée-sortie des covariances.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, les quantités mesurées correspondent à des covariances du type $W_{X_S X_M}(\omega) = \langle \delta X_S(\omega) \delta X_S(-\omega) \rangle$. Dans tout ce travail, nous cherchons à établir une corrélation entre deux quadratures, par exemple X_S et X_M ; il est donc naturel de définir un paramètre de corrélation [Meriz 91a,b] :

$$W_{X_S X_M}(\omega) = \langle \delta X_S(\omega) \delta X_M(-\omega) \rangle \quad (\text{I.B.40})$$

qui vérifie la propriété suivante :

$$W_{X_S X_M}(\omega) = W_{X_S X_M}(-\omega)^* = W_{X_M X_S}(\omega)^* \quad (\text{I.B.41})$$

conduisant à une inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|W_{X_S X_M}(\omega)|^2 \leq W_{X_S X_S}(\omega) W_{X_M X_M}(\omega) \quad (\text{I.B.42})$$

L'égalité est obtenue lorsque les fluctuations des deux quadratures sont proportionnelles : $\delta X_M(\omega) = \alpha(\omega) \delta X_S(\omega)$, ce qui correspond alors à une corrélation parfaite. Le cas où $W_{X_S X_M}(\omega) = 0$ est, par contre, obtenu lorsque les deux quadratures ont des fluctuations complètement décorréliées.

Remarquons, qu'à la différence de $W_{X_S X_S}(\omega)$, les paramètres de corrélation $W_{X_S X_M}(\omega)$ sont, en général, complexes et ne correspondent donc pas directement à de véritables spectres de bruit (d'où leur notation en italique).

Ces différentes quantités, spectres de bruit et paramètres de corrélation, peuvent être regroupées dans une matrice de covariance W , définie par :

$$\langle \delta \mathcal{F}(\omega) \delta \mathcal{F}(\omega')^t \rangle = \langle \delta \mathcal{F}(\omega) \delta \mathcal{F}(-\omega')^T \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') W(\omega) \quad (\text{I.B.43})$$

possédant la propriété d'être hermitique, et dont la transformation entrée-sortie est obtenue à partir de celle sur les fluctuations des champs (eq.I.B.38) :

$$W_{(\omega)}^{out} = \lambda(\omega) W_{(\omega)}^{in} \lambda(\omega)^\dagger + W^{ad}(\omega) \quad (\text{I.B.44})$$

Remarque : On peut montrer que les matrices $\lambda(\omega)$ et $W^{ad}(\omega)$ ne sont pas indépendantes [Courty 91], de façon à préserver les relations de commutation pour les champs en entrée et en sortie.

III. CARACTERISATION D'UNE MESURE QND IDEALE.

1. Objectifs d'une mesure QND.

Un premier but peut être de préparer le système signal \mathcal{S} dans un état connu d'une observable X_S^{out} , obtenu à partir de la détection de X_M^{out} sur le faisceau de mesure \mathcal{M} . Nous appellerons une telle expérience une "préparation d'état quantique". Il est alors possible, en effectuant une deuxième mesure de contrôle (pouvant être complètement destructive) sur le signal, de déceler une éventuelle action ayant eu lieu pendant l'intervalle de temps séparant les deux mesures.

Un deuxième objectif peut être de prélever une information sur une ligne de transmission, comportant une série de récepteurs, sans pour autant dégrader le signal transmis au récepteur suivant. Un tel dispositif sera appelé un "écouteur discret"*.

Un dispositif QND parfait, défini par la transformation paramétrique idéale, réalise ces deux objectifs simultanément. Dans le cas d'une mesure non parfaite, le dispositif peut être plus ou moins adapté à l'une ou l'autre de ces réalisations, et il est nécessaire d'introduire des paramètres de caractérisation [Holland 90] [Grangier 91c].

2. Préparation d'état quantique.

L'information est obtenue en détectant les fluctuations $\delta X_M^{out}(\omega)$ sur le faisceau de mesure, dont on attend qu'elles soient corrélées à la fois à $\delta X_S^{in}(\omega)$ et $\delta X_S^{out}(\omega)$. Pour une mesure QND idéale, la relation $\delta X_S^{out}(\omega) = \delta X_S^{in}(\omega)$ est vérifiée, (condition QND) et les deux types de corrélations sont équivalentes.

* Contrairement à la préparation d'état quantique ("quantum-state preparation"), cette dénomination d'écouteur discret est tout-à-fait personnelle. Elle correspondrait en référence à la littérature anglophone sur les communications par fibre optique, à un "quantum optical tap". Un tel dispositif pourrait ainsi être francisé sous l'appellation de "tappeur quantique" !

Considérons, à l'opposé, la mesure complètement destructive correspondant à détecter tous les photons du faisceau signal en le mesurant avec un détecteur. On obtient alors évidemment une information complète sur $\delta X_S^{in}(\omega)$, mais aucune sur $\delta X_S^{out}(\omega)$, qui est alors le vide. Dans le cas intermédiaire, il est possible de montrer l'existence de corrélations quantiques en détectant simultanément $\delta X_S^{out}(\omega)$ et $\delta X_M^{out}(\omega)$ et en recombinaison les courants électroniques associés (figure I.B.2). Le bruit associé à cette quantité est donné par :

$$W_{X_S \pm X_M}^{out}(\omega) = W_{X_S X_S}^{out}(\omega) + W_{X_M X_M}^{out}(\omega) \pm 2 \Re e [W_{X_S X_M}^{out}(\omega)] \quad (\text{I.B.45})$$

L'apparition d'une différence suivant le sens de recombinaison des deux photocourants traduit ainsi l'existence de corrélations quantiques entre \mathcal{S} et \mathcal{M} .

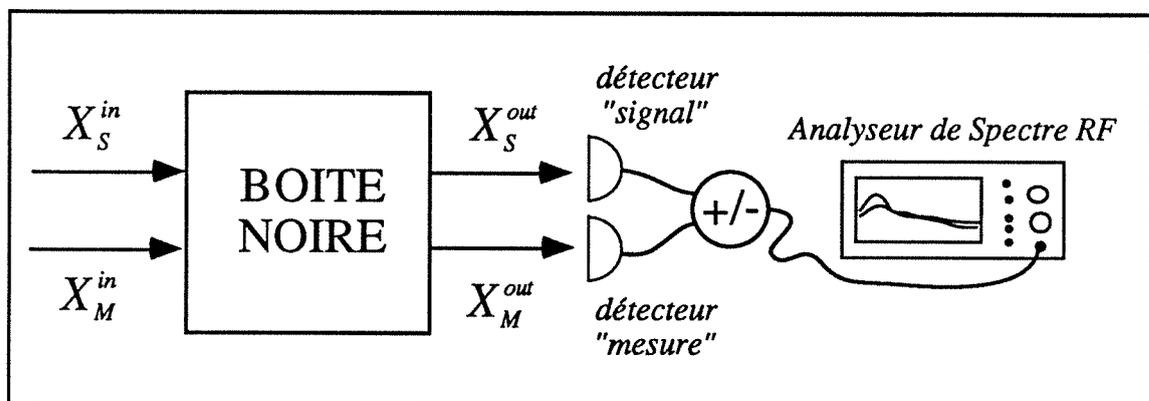


FIGURE I.B.2 :

Mise en évidence de corrélations éventuelles entre les deux faisceaux, à la sortie du dispositif de couplage. L'apparition d'une différence sur le spectre de bruit RF suivant la phase relative de recombinaison, traduit l'existence de corrélations entre les deux composantes de quadrature.

Remarque : Il est possible d'optimiser cette corrélation, i.e. rendre le terme $W_{X_S X_M}^{out}(\omega)$ réel. On introduit pour cela un facteur de phase $\varphi(\omega)$, à l'aide d'une ligne à retard électronique (i.e. en pratique un câble coaxial dont on ajuste la longueur) de façon à détecter le bruit associé à $\delta X_S(\omega) \pm \exp[i\varphi(\omega)] \cdot \delta X_M(\omega)$.

A titre de référence, considérons la transformation paramétrique idéale définie par les équations (I.A.31), écrites avec les notations de ce paragraphe (dans lesquelles l'information est lue sur la quadrature X_M , et non pas sur Y_M) sous la forme :

$$\begin{cases} X_S^{out} = X_S^{in} \\ Y_S^{out} = Y_S^{in} + G Y_M^{in} \end{cases} \quad \begin{cases} X_M^{out} = X_M^{in} + G X_S^{in} \\ Y_M^{out} = Y_M^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.46.a})$$

En supposant les deux modes initialement non-corrélés et au bruit de photons (fluctuations égales à celles du vide), la matrice d'entrée des covariances s'écrit :

$$W^{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.B.46.b})$$

En fonction de la matrice de transfert $\lambda(\omega)$ définie par (I.B.46a), et en reportant dans la transformation entrée-sortie des matrices de covariance (I.B.44), on obtient :

$$W^{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & G & 0 \\ 0 & 1+G^2 & 0 & G \\ G & 0 & 1+G^2 & 0 \\ 0 & G & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.B.46.c})$$

soit :

$$W_{X_S-X_M}^{out} = 1 + (1-G)^2 \quad (\text{I.B.47})$$

dont la variation en fonction de G est représentée sur la figure I.B.3 (courbe (a)). Cette quantité étant supérieure à 1, quel que soit le gain paramétrique G , les simples corrélations entre X_S^{out} et X_M^{out} ne sont pas suffisantes pour faire correspondre de façon univoque un état de la quadrature "mesure" X_M à un état de la quadrature "signal" X_S .

Au lieu de recombinaison directement les deux photocourants, il est préférable d'introduire un gain $g(\omega)$, dépendant du niveau de corrélation établi entre X_S et X_M (figure I.B.4) :

$$\delta X_{S-gM}^{out} = \delta X_S^{out}(\omega) - g(\omega) \delta X_M^{out}(\omega) \quad (\text{I.B.48})$$

De façon intuitive, ce gain doit être évidemment nul lorsqu'il n'existe pas de corrélation. Dans le cas extrême où $G \rightarrow \infty$, pour la transformation paramétrique idéale, les fluctuations $\delta X_M^{out}(\omega) = G \delta X_S^{out}(\omega)$ deviennent une copie macroscopique des fluctuations quantiques sur le

signal, et il est nécessaire de mettre un gain $g(\omega) = 1/G$, afin de les ramener au niveau quantique. De façon plus générale, la variance associée aux fluctuations recombinaison est :

$$W_{X_S - gX_M}^{out}(\omega) = W_{X_S X_S}^{out}(\omega) - g(-\omega) W_{X_S X_M}^{out}(\omega) - g(\omega) W_{X_M X_S}^{out}(\omega) + g(\omega) g(-\omega) W_{X_M X_M}^{out}(\omega) \tag{I.B.49}$$

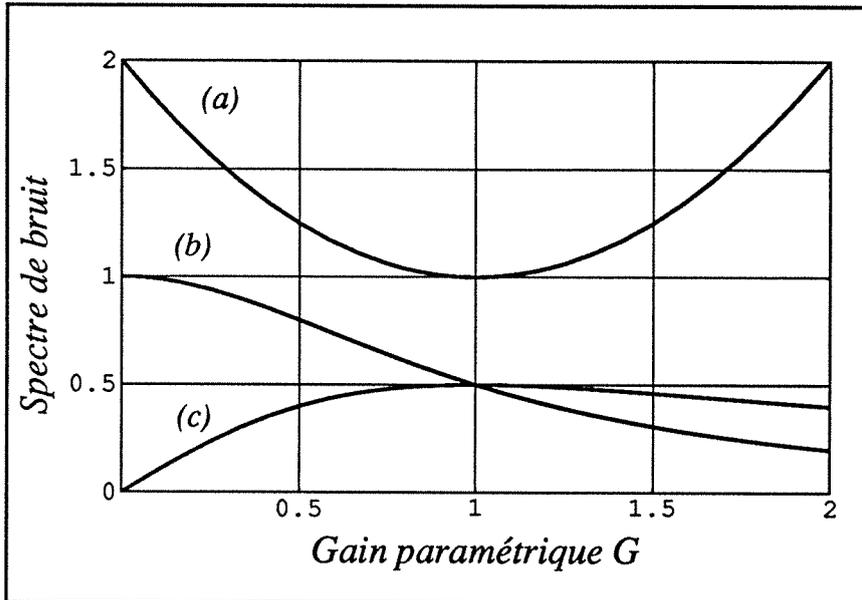


FIGURE I.B.3 : Evolution de la variance des photocourants directement recombinaison (a), de la variance conditionnelle (b) et du gain optimal à introduire entre les deux voies (c), en fonction du gain paramétrique G dans le coupleur.

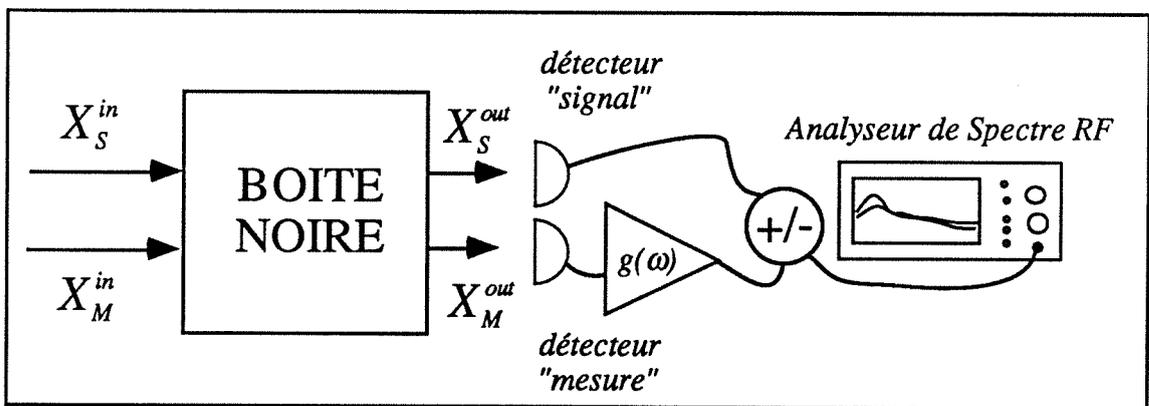


FIGURE I.B.4 : Mise en évidence d'une préparation quantique d'état : on introduit avant la recombinaison des deux photocourants, une atténuation électronique $g(\omega)$ sur la voie de mesure, dépendant du taux de corrélation effectivement obtenu dans le coupleur.

Il est ainsi possible, en utilisant l'information entre X_S et X_M , de réduire les fluctuations de δX_S^{out} en-dessous de leur niveau en sortie $W_{X_S X_S}^{out}(\omega)$. L'optimum, que nous appellerons

variance conditionnelle et noterons $W_{X_S|X_M}^{out}$, est obtenu en dérivant cette expression par rapport au gain électronique $g(\omega)$:

$$W_{X_S|X_M}^{out}(\omega) = W_{X_S X_S}^{out}(\omega) \left[1 - \frac{|W_{X_S X_M}^{out}(\omega)|^2}{W_{X_S X_S}^{out}(\omega) W_{X_M X_M}^{out}(\omega)} \right] \quad (\text{I.B.50.a})$$

$$W_{X_S|X_M}^{out}(\omega) = \langle \delta X_S^{out}(\omega) \delta X_S^{out}(-\omega) \rangle - \frac{\left| \langle \delta X_S^{out}(\omega) \delta X_M^{out}(-\omega) \rangle \right|^2}{\langle \delta X_M^{out}(\omega) \delta X_M^{out}(-\omega) \rangle} \quad (\text{I.B.50.b})$$

$$g_{opt}(\omega) = \frac{W_{X_S X_M}^{out}(\omega)}{W_{X_M X_M}^{out}(\omega)} = \frac{\langle \delta X_S^{out}(\omega) \delta X_M^{out}(-\omega) \rangle}{\langle \delta X_M^{out}(\omega) \delta X_M^{out}(-\omega) \rangle} \quad (\text{I.B.50.c})$$

Une approche tout à fait analogue a été utilisée par Mertz et al. pour rendre les fluctuations d'intensité d'un faisceau subpoissonniennes [Mertz 90]. En utilisant deux faisceaux corrélés en intensité ("photons jumeaux") produits par un oscillateur paramétrique (OPO), ces auteurs ont montré qu'il est possible, en détectant un des faisceaux, de corriger ensuite les fluctuations d'intensité de l'autre faisceau, par l'intermédiaire d'une rétroaction en aval de l'OPO.

Dans le cas du couplage QND paramétrique, le gain à introduire correspond à une atténuation d'un facteur :

$$g_{opt} = \frac{G}{1 + G^2} \quad (\text{I.B.51.a})$$

la réduction du bruit obtenue étant alors (figure I.B.3, courbes (b) et (c)) :

$$W_{X_S|X_M}^{out}(\omega) = \frac{1}{1 + G^2} \quad (\text{I.B.51.b})$$

3. Caractérisation de l'efficacité d'un "écouteur discret".

a) Position du problème.

La mise en évidence de corrélations quantiques entre les deux faisceaux en sortie du dispositif est une première caractéristique de la mesure QND. Néanmoins, la variance conditionnelle ne permet pas d'affirmer l'existence de corrélations entre le signal d'entrée et

respectivement, le signal en sortie et la mesure en sortie, soit les paramètres cruciaux pour l'efficacité d'un dispositif utilisé comme "écouteur discret".

Pour caractériser quantitativement le fonctionnement du dispositif, Holland et al. ont donc proposé d'utiliser les corrélations entre $\delta\mathcal{F}^{in}(\omega)$ et $\delta\mathcal{F}^{out}(\omega)$, définissant deux critères caractérisant respectivement [Holland 90] :

- l'efficacité du couplage de mesure, donnée par la corrélation entre la quadrature X_M^{out} mesurée par un détecteur, et la quadrature signal X_S^{in} incidente :

$$C_{X_S^{in} X_M^{out}}^2 = \frac{\left| \langle \delta X_S^{in}(\omega) \delta X_M^{out}(-\omega) \rangle \right|^2}{W_{X_S X_S}^{in} W_{X_M X_M}^{out}} \quad (\text{I.B.52})$$

- la dégradation apportée par la mesure sur le signal, donnée par la corrélation entre le signal entrant et le signal sortant :

$$C_{X_S^{in} X_S^{out}}^2 = \frac{\left| \langle \delta X_S^{in}(\omega) \delta X_S^{out}(-\omega) \rangle \right|^2}{W_{X_S X_S}^{in} W_{X_S X_S}^{out}} \quad (\text{I.B.53})$$

Ces deux paramètres tendent vers 1 pour une mesure QND idéale. Néanmoins, ils ne sont pas mesurables du point de vue expérimental, car leur détermination nécessite de connaître a priori les fluctuations $\delta X_S^{in}(\omega)$, et donc de disposer d'un premier dispositif QND idéal effectuant une préparation d'état quantique.

b) Caractérisation à l'aide des bruits équivalents ramenés à l'entrée.

Grangier, Courty et Reynaud ont proposé une autre approche, basée sur des paramètres directement mesurables du dispositif QND à caractériser, soit en l'occurrence les composantes des matrices W^{out} et $\lambda(\omega)$ [Grangier 91c]. A partir de la transformation entrée-sortie des fluctuations des champs (eq.I.B.38), on peut écrire une estimation linéaire des champs entrants en fonction des champs sortants :

$$\lambda(\omega)^{-1} \delta\mathcal{F}^{out}(\omega) = \delta\mathcal{F}^{in}(\omega) + \lambda(\omega)^{-1} \delta\mathcal{F}^{ud}(\omega) \quad (\text{I.B.54})$$

Cette équation n'est en fait pas utilisable directement, car toutes les composantes de $\delta\mathcal{F}^{out}$ ne sont pas accessibles simultanément : la mesure porte uniquement sur le bruit en sortie de deux de ces quadratures, par exemple X_S^{out} et X_M^{out} (celle des quadratures conjuguées est naturellement incompatible dans la même expérience). Ainsi, si l'on choisit les quadratures mesurées en sortie, les estimations linéaires pour la quadrature signal entrante δX_S^{in} seront données par :

$$\frac{1}{\alpha_{SS}} \delta X_S^{out} = \delta X_S^{in} + \frac{1}{\alpha_{SS}} [\beta_{SS} \delta Y_S^{in} + \alpha_{SM} \delta X_M^{in} + \beta_{SM} \delta Y_M^{in} + \delta X_S^{ad}] \quad (\text{I.B.55})$$

$$\frac{1}{\alpha_{MS}} \delta X_M^{out} = \delta X_S^{in} + \frac{1}{\alpha_{MS}} [\beta_{MS} \delta Y_S^{in} + \alpha_{MM} \delta X_M^{in} + \beta_{MM} \delta Y_M^{in} + \delta X_M^{ad}] \quad (\text{I.B.56})$$

où, afin de simplifier les notations, nous avons oublié la dépendance en fréquence ω , et où nous supposons le faisceau de mesure initialement non corrélé au faisceau signal.

Ces deux expressions montrent que, dans un dispositif QND non-idéal, l'efficacité de la mesure est réduite par trois bruits, de sources différentes :

- 1) le bruit de photon (X_M^{in}, Y_M^{in}) du faisceau de mesure ;
- 2) le bruit (X_S^{ad}, X_M^{ad}) rajouté par le milieu de couplage ;
- 3) la corruption de la quadrature signal X_S^{in} par sa quadrature conjuguée Y_S^{in} , qui apparaît lorsque le dispositif introduit une rotation des quadratures entrantes (nous verrons que cet effet peut par exemple être obtenu en réfléchissant un faisceau sur une cavité). Une telle dégradation est très gênante en pratique, car le bruit rajouté sur X_S^{in} dépend alors des caractéristiques du faisceau entrant, et non pas uniquement du dispositif de couplage. Dans les réalisations pratiques de coupleurs QND, on s'efforcera donc d'obtenir $\beta_{SS} = \beta_{MS} = 0$.

A titre d'exemple, revenons au cas de la transformation paramétrique idéale donnée par l'équation I.B.46.a. Le équations I.B.55-56 s'écrivent alors simplement : :

$$\delta X_S^{out} = \delta X_S^{in} \quad (\text{I.B.57.a})$$

$$\delta X_M^{out} / G = \delta X_S^{in} + \delta X_M^{in} / G \quad (\text{I.B.57.b})$$

La quantité $\delta X_M^{\text{in}}/G$ apparaît ainsi comme un bruit rajouté sur l'entrée de la voie mesure, bien que la transformation paramétrique idéale n'introduise aucun bruit supplémentaire sur l'ensemble des deux modes mesure et signal. Ceci est dû au fait que l'estimation du champ signal ignore les corrélations quantiques non-séparables établies entre les faisceaux signal et mesure. La Théorie Quantique de la Mesure montre que cette opération de projection introduit alors une perte d'information, qui peut être quantifiée par une augmentation de l'entropie du système [Von Neumann 55]. Ceci se traduit, dans notre formalisme, par un bruit supplémentaire rajouté dans le processus de mesure.

De façon générale, l'efficacité de la mesure, ainsi que la dégradation introduite sur la quadrature signal, peuvent être caractérisées en définissant deux bruits équivalents ramenés à l'entrée :

$$N_S^{\text{eq}} = \frac{1}{|\alpha_{SS}|^2} W_{X_S X_S}^{\text{out}} - W_{X_S X_S}^{\text{in}} \quad (\text{I.B.58.a})$$

$$N_M^{\text{eq}} = \frac{1}{|\alpha_{MS}|^2} W_{X_M X_M}^{\text{out}} - W_{X_S X_S}^{\text{in}} \quad (\text{I.B.58.b})$$

soit, d'après les relations (I.B.55) et (I.B.56) :

$$N_S^{\text{eq}} = \frac{1}{|\alpha_{SS}|^2} \left[|\beta_{SS}|^2 W_{Y_S Y_S}^{\text{in}} + |\alpha_{SM}|^2 + |\beta_{SM}|^2 + \beta_{SS}^* \alpha_{SS} W_{X_S Y_S}^{\text{in}} + \beta_{SS} \alpha_{SS}^* W_{Y_S X_S}^{\text{in}} + W_{X_S X_S}^{\text{ad}} \right] \quad (\text{I.B.59.a})$$

$$N_M^{\text{eq}} = \frac{1}{|\alpha_{MS}|^2} \left[|\beta_{MS}|^2 W_{Y_S Y_S}^{\text{in}} + |\alpha_{MM}|^2 + |\beta_{MM}|^2 + \beta_{MS}^* \alpha_{MS} W_{X_S Y_S}^{\text{in}} + \beta_{MS} \alpha_{MS}^* W_{Y_S X_S}^{\text{in}} + W_{X_M X_M}^{\text{ad}} \right] \quad (\text{I.B.59.b})$$

Ces deux quantités permettent d'effectuer une comparaison théorie-expérience complète, car elles sont :

- d'une part, calculables à partir de leurs formulations précédentes, une fois les matrices $\lambda(\omega)$ et W^{ad} connues ;
- d'autre part, mesurables à partir des spectres de bruit expérimentaux $W_{X_M X_M}^{\text{out}}$, $W_{X_S X_S}^{\text{out}}$ et $W_{X_S X_S}^{\text{in}}$, ainsi que des paramètres de gain, α_{SS} et α_{MS} , déterminés en introduisant une modulation classique, de faible intensité, sur X_S^{in} , et en mesurant son transfert sur les deux voies de sortie du dispositif:

$$\alpha_{SS} = \frac{d\langle X_S^{\text{out}} \rangle}{d\langle X_S^{\text{in}} \rangle} \quad \alpha_{MS} = \frac{d\langle X_M^{\text{out}} \rangle}{d\langle X_S^{\text{in}} \rangle} \quad (\text{I.B.60})$$

Remarquons que les bruits équivalents N_S^{eq} et N_M^{eq} ne sont pas positifs par construction. Par contre, l'examen des équations I.B.59 montre immédiatement que N_S^{eq} et N_M^{eq} seront toujours positifs, quel que soit le dispositif utilisé, si le champ entrant vérifie $W_{X_z Y_z}^{in} = 0$. Nous supposons donc cette égalité satisfaite dans toute la suite de ce travail. Cette condition est peu restrictive : elle peut toujours être satisfaite en faisant "tourner" les quadratures du champ signal avant le dispositif QND. De plus son interprétation est très simple : la quadrature X_S^{in} choisie comme variable QND ne doit pas être corrélée à la quadrature conjuguée Y_S^{in} . Enfin, la condition $W_{X_z Y_z}^{in} = 0$ est automatiquement satisfaite si le champ entrant est dans un état cohérent, ou de façon plus générale dans un état dont le bruit est indépendant de la phase.

c) *Rapport signal/bruit sur les deux voies de sortie.*

Remarquons que les bruits équivalents sont également un moyen commode pour caractériser le rapport signal-sur-bruit pour chaque voie de sortie ($[SNB]_S^{out}$ sur la voie de transmission - "signal" - et $[SNB]_M^{out}$ sur la voie d'écoute - "mesure"-), en fonction du rapport signal-sur-bruit $[SNB]_S^{in}$, initialement introduit. En supposant que l'information signal corresponde initialement à une amplitude de modulation \mathcal{E}_S ,

$$[SNB]_S^{in} = \frac{|\mathcal{E}_S|^2}{W_{X_S X_S}^{in}} \quad (\text{I.B.61})$$

d'où :

$$[SNB]_S^{out} = \frac{|\alpha_{SS}|^2 |\mathcal{E}_S|^2}{W_{X_S X_S}^{out}} \quad (\text{I.B.62.a})$$

$$[SNB]_M^{out} = \frac{|\gamma_{MS}|^2 |\mathcal{E}_S|^2}{W_{X_M X_M}^{out}} \quad (\text{I.B.62.b})$$

et, d'après les définitions (I.B.58) des bruits équivalents :

$$[SNB]_S^{out} = [SNB]_S^{in} \cdot \frac{I}{I + \frac{N_S^{eq}}{W_{X_S X_S}^{in}}} \quad (\text{I.B.63.a})$$

$$[SNB]_M^{out} = [SNB]_S^{in} \cdot \frac{1}{1 + \frac{N_M^{eq}}{W_{X_S X_S}^{in}}} \quad (\text{I.B.63.b})$$

Nous allons maintenant appliquer ces différents critères pour caractériser divers types de couplage, usuellement utilisés. Nous montrerons alors l'existence d'une limite quantique, et nous introduirons des dispositifs permettant de la franchir.

IV. PERTURBATION INDUITE PAR UNE MESURE.

1. Association de coupleurs en cascade.

Nous démontrons ici un résultat que nous utiliserons par la suite. Considérons l'association en cascade de deux coupleurs A et B, mis en série sur une ligne de transmission (figure I.B.5).

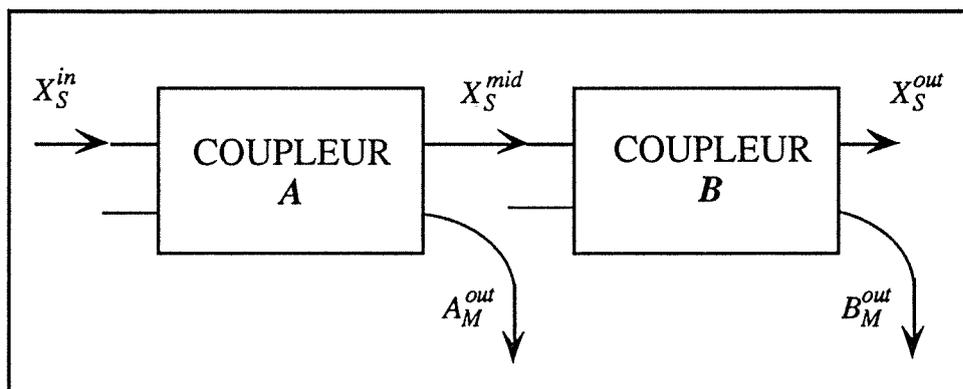


FIGURE I.B.5 :
Association en cascade de deux coupleurs

a) Dégradation du signal.

En appliquant les définitions (I.B.58.a), les bruits équivalents pour le signal sont :

$$N_S^{eq}(A) = \frac{W_{X_S X_S}^{mid}}{|\alpha_{SS}(A)|^2} - W_{X_S X_S}^{in} \quad (\text{I.B.64.a})$$

$$N_S^{eq}(B) = \frac{W_{X_S X_S}^{out}}{|\alpha_{SS}(B)|^2} - W_{X_S X_S}^{mid} \quad (\text{I.B.64.b})$$

L'association ($A \rightarrow B$) est caractérisé par un bruit équivalent défini par :

$$N_S^{eq}(A \rightarrow B) = \frac{W_{X_S X_S}^{out}}{|\alpha_{SS}(A)|^2 |\alpha_{SS}(B)|^2} - W_{X_S X_S}^{in} \quad (\text{I.B.65})$$

d'où, en combinant ces différentes définitions :

$$N_S^{eq}(A \rightarrow B) = N_S^{eq}(A) + \frac{N_S^{eq}(B)}{|\alpha_{SS}(A)|^2} \quad (\text{I.B.66})$$

Nous retrouvons ici un résultat bien connu en électronique : dans une association de quadripôles en série, et à la limite des grands gains, (soit $|\alpha_{SS}(A)| \rightarrow \infty$), le bruit en sortie de la chaîne est uniquement dû à l'étage d'entrée. Remarquons que cette formule montre que les associations A puis B, et B puis A ne sont pas équivalentes.

b) Mesure en sortie.

En fonction des définitions (I.B.58.b), les bruits équivalents sur les mesures A_M^{out} et B_M^{out} sont donnés par :

$$N_M^{eq}(A) = \frac{W_{A_M A_M}^{out}}{|\gamma_{MS}(A)|^2} - W_{X_S X_S}^{in} \quad (\text{I.B.67.a})$$

$$N_M^{eq}(B) = \frac{W_{B_M B_M}^{out}}{|\gamma_{MS}(B)|^2} - W_{X_S X_S}^{in} \quad (\text{I.B.67.b})$$

Le bruit équivalent sur la mesure finale est quant à lui défini par :

$$N_M^{eq}(A \rightarrow B) = \frac{W_{B_M B_M}^{out}}{|\alpha_{SS}(A)|^2 |\gamma_{MS}(B)|^2} - W_{X_S X_S}^{in} \quad (\text{I.B.68})$$

soit :

$$N_M^{eq}(A \rightarrow B) = N_S^{eq}(A) + \frac{N_M^{eq}(B)}{|\alpha_{SS}(A)|^2} \quad (\text{I.B.69})$$

Les formules (I.B.66) et (I.B.69) montrent que si l'étage d'entrée (A) est un dispositif QND parfait, les bruits équivalents en sortie sont uniquement fixés par le dernier coupleur (B).

2. Existence d'une limite quantique standard.

a) Coupleur linéaire : la lame séparatrice.

Considérons un coupleur transmettant, en amplitude, une fraction t du signal d'entrée et réfléchissant une partie r , servant à la mesure, avec $r^2 + t^2 = 1$ (figure I.B.6).

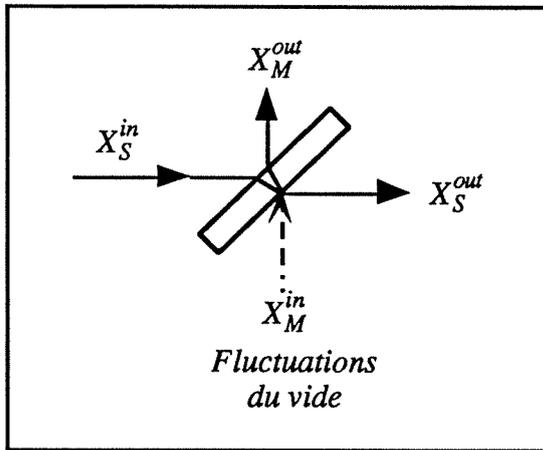


FIGURE I.B.6 :
Mesure d'une composante de quadrature du signal
par un coupleur linéaire : image ondulatoire

Le transfert classique est défini par :

$$\begin{cases} \alpha_{SS} = t \\ \gamma_{MS} = r \end{cases} \quad (\text{I.B.70})$$

tandis que la distribution aléatoire des photons sur la lame (ou similairement l'introduction des fluctuations du vide par l'autre voie d'entrée), rapproche d'une statistique poissonnienne les distributions de photons sur les deux voies de sortie :

$$W_{X_S X_S}^{out} = |t|^2 W_{X_S X_S}^{in} + |r|^2 W^{ad} \quad (\text{I.B.71.a})$$

$$W_{X_M X_M}^{out} = |r|^2 W_{X_S X_S}^{in} + |t|^2 W^{ad} \quad (\text{I.B.71.b})$$

soit :

$$N_S^{eq} = \left(\frac{r}{t}\right)^2 W^{ad} \quad (\text{I.B.72.a})$$

$$N_M^{eq} = \left(\frac{t}{r}\right)^2 W^{ad} \quad (\text{I.B.72.b})$$

En prenant pour les fluctuations du vide $W^{ad} = 1$, on obtient :

$$N_S^{eq} \cdot N_M^{eq} = 1 \quad (\text{I.B.73})$$

Le coupleur ne produit naturellement pas de corrélations quantiques entre les deux quadratures en sortie :

$$W_{X_S X_S}^{out} = 1 \quad (\text{I.B.74})$$

$$W_{X_S | X_M}^{out} = 1 \quad (\text{I.B.75})$$

b) Amplificateur linéaire insensible à la phase.

L'atténuation du faisceau signal semblant à première vue importante, il peut être a priori intéressant de diminuer l'effet de la lame en la précédant d'un amplificateur de gain g . Nous supposons que ce dispositif est insensible à la phase, ce qui correspond typiquement à un amplificateur laser (figure I.B.7).

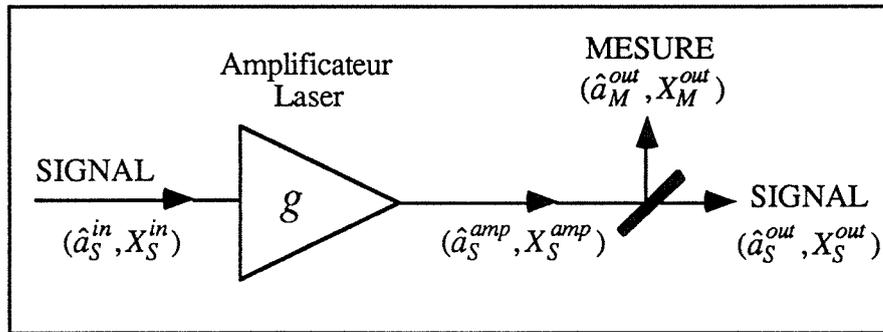


FIGURE I.B.7 : Compensation de l'atténuation de la lame par un préamplificateur laser, insensible à la phase du signal entrant.

La conservation des relations de commutation impose de rajouter des fluctuations au signal amplifié qui, dans le cas d'un amplificateur laser, correspondent aux fluctuations des moments dipolaires du milieu où l'on a créé l'inversion de population.

Lorsque l'amplificateur est limité par le bruit de photons, la transformation entrée-sortie en terme d'opérateurs (avec les notations de la figure I.B.7 et en fonction du gain g de l'amplificateur) est donnée par [Caves 82] :

$$\hat{a}_S^{amp} = g\hat{a}_S^{in} + \sqrt{g^2 - 1} \hat{a}_{vide}^\dagger \quad (\text{I.B.76})$$

La transformation des composantes de quadrature associées s'écrit alors, en notant A^{ad} la partie liée aux fluctuations du vide :

$$X_S^{amp} = gX_S^{in} + \sqrt{g^2 - 1} A^{ad} \quad (\text{I.B.77})$$

soit un transfert classique :

$$\alpha_{ss}(ampli) = g \quad (\text{I.B.78})$$

et un bruit équivalent sur le faisceau transmis :

$$N_s^{eq}(ampli) = 1 - \frac{1}{g^2} \quad (\text{I.B.79})$$

Lorsque g devient très grand, le bruit équivalent tend vers 1 : un signal introduit à l'entrée voit donc son rapport signal sur bruit divisé par deux (soit une atténuation de 3 dB).

En combinant les équations (I.B.70), (I.B.72) et en reportant dans les expressions (I.B.66) et (I.B.69) donnant les bruits équivalents pour l'association des deux dispositifs, on obtient directement :

$$N_s^{eq} = 1 - \frac{1}{g^2} + \frac{r^2}{t^2 g^2} \quad (\text{I.B.80})$$

$$N_M^{eq} = 1 - \frac{1}{g^2} + \frac{r^2}{r^2 g^2} \quad (\text{I.B.81})$$

La figure I.B.8 montre l'évolution du produit des bruits équivalents, en fonction de $T=t^2$ et $G=g^2$, correspondant à une inégalité toujours vérifiée :

$$N_s^{eq} \cdot N_M^{eq} \geq 1 \quad (\text{I.B.82})$$

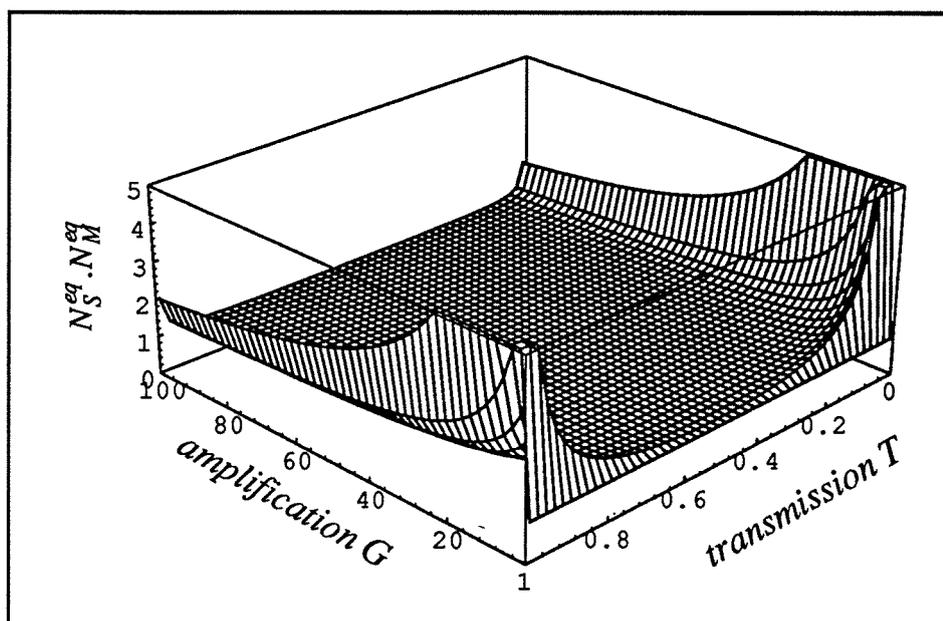


FIGURE I.B.8 : Evolution du produit des bruits équivalents en fonction de la transmission T et du gain de l'amplificateur.

On obtient l'égalité pour $g \rightarrow \infty$, ou bien pour un gain g fini, lorsque $r = t = \sqrt{2}$, soit pour une lame semi-transparente parfaite. Un cas particulier intéressant est celui où le système est tel que la préamplification compense exactement les pertes du coupleur, soit $gt = 1$ avec $g \rightarrow \infty$. Les équations précédentes montrent qu'alors :

$$N_S^{eq} \rightarrow 2 \quad ; \quad N_M^{eq} \rightarrow 1 \quad ; \quad N_S^{eq} N_M^{eq} \rightarrow 2 \quad (\text{I.B.83})$$

c) *Amplificateur paramétrique non-dégénéré.*

Regardons l'effet d'un amplificateur paramétrique non-dégénéré : le faisceau signal est alors amplifié, tandis que l'information en sortie est obtenue sur le faisceau complémentaire (figure I.B.9). Pour la transformation entrée-sortie des quadratures, il est nécessaire de tenir compte des fluctuations du vide correspondant au faisceau complémentaire [Caves 85] :

$$\begin{cases} X_S^{out} = gX_S^{in} + \sqrt{g^2 - 1} X_M^{in} \\ X_M^{out} = gX_M^{in} + \sqrt{g^2 - 1} X_S^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.84})$$

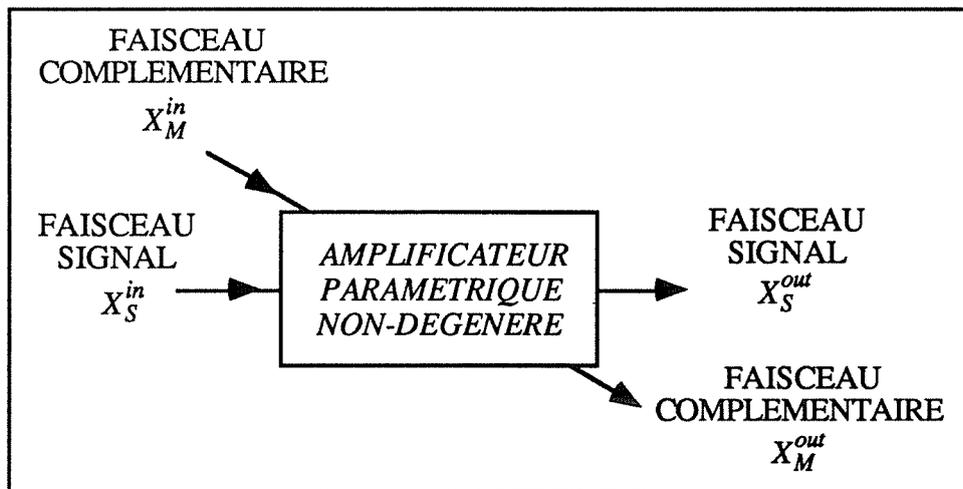


FIGURE I.B.9 : Utilisation d'un amplificateur paramétrique non-dégénéré.

soit :

$$\begin{cases} \alpha_{SS} = g \\ X_{MS} = \sqrt{g^2 - 1} \end{cases} \quad (\text{I.B.85})$$

$$\begin{cases} W_{X_S X_S}^{out} = g^2 W_{X_S X_S}^{in} + (g^2 - 1) W_{X_S X_S}^{in} \\ W_{X_M X_M}^{out} = (g^2 - 1) W_{X_S X_S}^{in} + (g^2 - 1) W_{X_M X_M}^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.86})$$

L'efficacité du dispositif est ainsi caractérisée par :

$$\begin{cases} N_S^{eq} = \frac{g^2 - 1}{g^2} W_{X_M X_M}^{in} \\ N_M^{eq} = \frac{g^2}{g^2 - 1} W_{X_M X_M}^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.87})$$

Le faisceau complémentaire étant initialement au bruit de photons, les bruits équivalents sont donc, quel que soit le gain g de l'amplificateur, reliés par :

$$N_S^{eq} N_M^{eq} = 1 \quad (\text{I.B.88})$$

Ce dispositif a néanmoins des propriétés quantiques. Si on suppose que les deux faisceaux sont initialement au bruit de photons, chaque faisceau pris séparément a, en sortie, un excès de bruit. Néanmoins, ces deux faisceaux sont corrélés quantiquement,

$$W_{X_S X_M}^{out} = 2g\sqrt{g^2 - 1} \quad (\text{I.B.89})$$

$$W_{X_S | X_M}^{out} = \frac{1}{2g^2 - 1} \quad (\text{I.B.90})$$

la variance conditionnelle tendant vers 0 pour un gain paramétrique infini. L'amplificateur paramétrique non-dégénéré peut ainsi produire deux faisceaux constitués de photons jumeaux : leurs fluctuations d'amplitude sont parfaitement corrélées quantiquement [Heidmann 87].

Nous voyons, sur cet exemple particulier, qu'il est effectivement nécessaire de bien séparer la notion de préparation d'état quantique, ici parfaitement réalisée, de la notion d'écouteur sans bruit, en-dehors des possibilités de ce dispositif.

d) Définition de la limite quantique.

Nous la définirons par l'inégalité suivante :

$$\boxed{N_S^{eq} N_M^{eq} \geq 1} \quad (\text{I.B.91})$$

qui correspond, d'après les relations (I.B.61) et (I.B.63), au fait qu'un rapport signal sur bruit à l'entrée est réparti sur les deux voies de transmission et de mesure avec, éventuellement, une dégradation [Yamamoto 90] :

$$[SNB]_S^{out} + [SNB]_M^{out} \leq [SNB]_S \quad (\text{I.B.92})$$

e) *Justification théorique*

Pour cette démonstration, nous utilisons la relation linéaire générale (I.B.38), dans laquelle les composantes X_S, Y_S, X_M, Y_M , composantes des vecteurs $\delta \mathcal{F}^{in}(\omega)$, $\delta \mathcal{F}^{out}(\omega)$ et $\delta \mathcal{F}^{ad}(\omega)$, sont des opérateurs vérifiant les relations de commutation $[X_A, Y_B] = 2i\delta_{AB}$.

Nous supposons comme précédemment que le champ entrant vérifie $W_{X_S Y_S}^{in} = 0$. De plus, nous supposons que la quadrature signal X_S^{out} a été définie de façon à vérifier $\beta_{SS} = \gamma_{SS} = 0$ dans la matrice $\lambda(\omega)$ caractérisant le dispositif de couplage. Ceci est toujours possible, moyennant une éventuelle rotation des composantes X_S^{out} et Y_S^{out} , et cette hypothèse ne restreint pas la généralité du calcul. Les quadratures X_S et Y_M sont alors données à la sortie du dispositif par :

$$X_S^{out} = \alpha_{SS} X_S^{in} + \mathcal{F}(X_M^{in}, Y_M^{in}, X_S^{ad}) \quad (\text{I.B.93a})$$

$$Y_M^{out} = \gamma_{SS} X_S^{in} + \delta_{SS} Y_S^{in} + \mathcal{G}(X_M^{in}, Y_M^{in}, Y_M^{ad}) \quad (\text{I.B.93b})$$

où \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des fonctions linéaires de leurs arguments, obtenues à partir de la matrice $\lambda(\omega)$. La conservation des relations de commutation entraîne que :

$$[X_S^{out}, Y_M^{out}] = 0 \quad (\text{I.B.94})$$

En introduisant les expressions précédentes et en tenant compte du fait que $[X_S^{in}, Y_S^{in}] = 2i$, on obtient :

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] = -2i \alpha_{SS} \delta_{SS} \quad (\text{I.B.95})$$

correspondant à la relation de dispersion :

$$\Delta \mathcal{F} \cdot \Delta \mathcal{G} \geq |\alpha_{SS}| \cdot |\delta_{SS}| \quad (\text{I.B.96a})$$

$$W_{\mathcal{F}} \cdot W_{\mathcal{G}} \geq |\alpha_{SS}|^2 \cdot |\delta_{SS}|^2 \quad (\text{I.B.96b})$$

En utilisant les définitions sur les bruits équivalents, on obtient alors :

$$N^{eq}(X_S^{in} \rightarrow X_S^{out}) = \frac{W_{\alpha\alpha}}{|\alpha_{ss}|^2} \quad (\text{I.B.97a})$$

$$N^{eq}(Y_S^{in} \rightarrow Y_M^{out}) \geq \frac{W_{\delta\delta}}{|\delta_{ss}|^2} \quad (\text{I.B.97b})$$

soit, compte-tenu des relations (I.B.96a,b) :

$$N^{eq}(X_S^{in} \rightarrow X_S^{out}) \cdot N^{eq}(Y_S^{in} \rightarrow Y_M^{out}) \geq 1 \quad (\text{I.B.98})$$

Il faut maintenant introduire le caractère "classique" du dispositif, ce qui peut se faire au moyen d'une hypothèse d'indépendance de phase : le dispositif de mesure doit pouvoir donner la même information sur les deux quadratures conjuguées X_S et Y_S . Il est commode de donner à cette hypothèse la forme suivante, qui est effectivement vérifiée dans tous les exemples étudiés précédemment :

$$N^{eq}(Y_S^{in} \rightarrow Y_M^{out}) = N^{eq}(X_S^{in} \rightarrow X_M^{out}) \quad (\text{I.B.99})$$

En reportant cette dernière équation dans (I.B.98), on obtient ainsi la relation :

$$N^{eq}(X_S^{in} \rightarrow X_S^{out}) \cdot N^{eq}(X_S^{in} \rightarrow X_M^{out}) \geq 1 \quad (\text{I.B.100})$$

Remarquons enfin que X_M^{out} peut être remplacée par toute autre quadrature du faisceau de mesure, ce qui permet d'écrire la limite quantique sous la forme donnée par la relation (I.B.91).

3. Comment circonvier la limite quantique.

a) Couplage linéaire avec un état comprimé.

Dans le coupleur linéaire et dans l'amplificateur paramétrique non dégénéré, la dégradation de la mesure et du signal provient des fluctuations du vide entrant dans l'autre voie. Il est donc possible de s'affranchir de ces fluctuations en introduisant, non plus le vide, mais un état comprimé dont les fluctuations suivant la quadrature utilisée pour transmettre le signal auraient une variance ξ^2 , plus faible que le bruit de photons ($\xi^2 < 1$) [Shapiro 80].

En reportant dans (I.B.72) et (I.B.87), on obtient alors :

$$\begin{cases} N_S^{eq} = K \cdot \xi^2 \\ N_M^{eq} = \frac{1}{K} \cdot \xi^2 \end{cases} \quad (\text{I.B.101})$$

avec $K = (r/t)^2$ pour le coupleur linéaire, ou $K = (g^2-1)/g^2$ pour l'amplificateur paramétrique non dégénéré. Ces deux expressions montrent que :

$$N_S^{eq} \cdot N_M^{eq} < 1 \quad (\text{I.B.102})$$

Dans le cas du coupleur linéaire, les deux quadratures en sortie, à l'origine non-corrélées, ont maintenant des fluctuations quantiques en partie corrélées :

$$\begin{cases} W_{X_S X_M}^{out} = rt(1 - \xi^2) \\ W_{X_S | X_M}^{out} = \frac{\xi^2}{1 - (1 - \xi^2)t^2} \end{cases} \quad \text{pour } W_{X_S X_S}^{in} = 1 \quad (\text{I.B.103})$$

soit une variance conditionnelle, qui pour $\xi^2 < 1$, est effectivement toujours plus petite que 1.

Ces différentes expressions montrent bien que les propriétés QND augmentent en même temps que le degré de compression, mais il reste néanmoins nécessaire de trouver un compromis sur la dégradation du signal [Yurke 85]. Une expérience, reliée dans son principe à un tel dispositif théorique, a été réalisée à l'Université d'Austin dans le groupe de Kimble, mais elle n'utilisait pas l'idée d'une mesure QND [MinXiao 88].

b) Couplage paramétrique idéal.

Il est défini par la transformation (I.A.31) qui, par rapport au cas précédent, présente l'avantage de ne pas perturber les fluctuations de la quadrature signal, quel que soit le gain paramétrique G . D'après les équations donnant les quadratures en sortie :

$$\begin{cases} \alpha_{SS} = 1 \\ \alpha_{SM} = G \end{cases} \quad (\text{I.B.104})$$

$$\begin{cases} W_{X_S X_S}^{out} = W_{X_S X_S}^{in} \\ W_{X_M X_M}^{out} = W_{X_M X_M}^{in} + G^2 W_{X_S X_S}^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.105})$$

d'où :

$$\begin{cases} N_S^{eq} = 0 \\ N_M^{eq} = \frac{1}{G^2} W_{X_M X_M}^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.106})$$

Dès qu'il existe un couplage paramétrique non nul, ce dispositif permet de s'affranchir ainsi de la limite quantique standard définie précédemment. Ce dispositif permet également d'obtenir des faisceaux corrélés quantiquement en sortie :

$$W_{X_S X_M}^{out} = W_{X_S X_S}^{in} \quad (\text{I.B.107})$$

$$W_{X_S | X_M}^{out} = \frac{W_{X_S X_S}^{in} W_{X_M X_M}^{in}}{W_{X_M X_M}^{in} + G^2 W_{X_S X_S}^{in}} \quad (\text{I.B.108})$$

Lorsque les faisceaux sont initialement au bruit de photons (ce que nous supposons par la suite), la variance conditionnelle est donnée par :

$$W_{X_S | X_M}^{out} = \frac{1}{1 + G^2} \quad (\text{I.B.109})$$

Pour un gain paramétrique infini (ce qui, en pratique, est très loin d'être obtenu), les deux quadratures en sortie X_S et X_M sont parfaitement corrélées et la variance conditionnelle tend vers zéro. Nous retrouvons ainsi le résultat obtenu avec le modèle du § A.III : la mesure X_S^{out} permet de caractériser parfaitement X_M^{out} .

c) Remarque.

Nous avons vu qu'il était possible d'obtenir des corrélations quantiques sur les deux quadratures en sortie, sans qu'il y ait pour autant des corrélations entrée-sortie. Comme nous allons le montrer sur l'exemple suivant, l'inverse est également réalisable. Considérons le dispositif représenté sur la figure I.B.10, composé d'un amplificateur paramétrique dégénéré, suivi d'une lame semi-transparente.

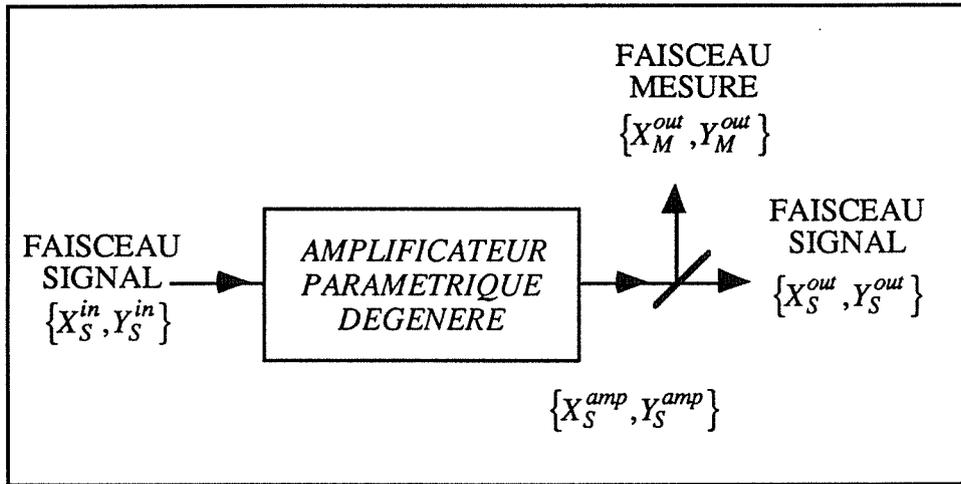


FIGURE I.B.10 : Ecouteur tranquille utilisant un amplificateur paramétrique dégénéré, mais ne créant pas de corrélations quantiques entre les deux faisceaux en sortie du dispositif.

Après l'amplificateur :

$$\begin{cases} X_S^{amp} = g X_S^{in} \\ Y_S^{amp} = \frac{1}{g} Y_S^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.110})$$

d'où :

$$\begin{cases} g_{ss} = g_{ms} = \frac{g}{\sqrt{2}} \\ W_{X_S X_S}^{out} = W_{X_M X_M}^{out} = \frac{1+g^2}{2} W_{X_S X_S}^{in} \end{cases} \quad (\text{I.B.111})$$

et :

$$N_S^{eq} = N_M^{eq} = \frac{1}{g^2} \quad (\text{I.B.112})$$

$$N_S^{eq} \cdot N_M^{eq} = \frac{1}{g^4} < 1 \quad \text{pour } g > 1 \quad (\text{I.B.113})$$

Néanmoins le dispositif ne permet pas d'obtenir des corrélations quantiques :

$$W_{X_S | X_M}^{out} = 2 \cdot \frac{g^2}{1+g^2} W_{X_S X_S}^{in} > W_{X_S X_S}^{in} \quad (\text{I.B.114})$$

En particulier, pour $g \rightarrow \infty$, on obtient alors deux faisceaux dont les fluctuations sont complètement non-corrélées : $W_{X_S | X_M}^{out} \rightarrow 2 W_{X_S X_S}^{in}$.

Nous nous proposons, maintenant, de revenir au cas du couplage paramétrique idéal et de montrer comment une telle interaction peut être réalisée expérimentalement.

C. REALISATION EXPERIMENTALE DU COUPLAGE PARAMETRIQUE : PRINCIPE

I. MESURE QND EFFECTUEE PAR UN EFFET KERR CROISE.

L'idée directrice de notre travail consiste à coupler les deux faisceaux à l'aide d'un effet Kerr croisé. Les champs étant alors uniquement affectés par une modification de l'indice du milieu, les fluctuations d'amplitude sont inchangées, tandis que les fluctuations de phase en sortie sont corrélées aux fluctuations d'intensité de l'autre faisceau (figure I.C.1) :

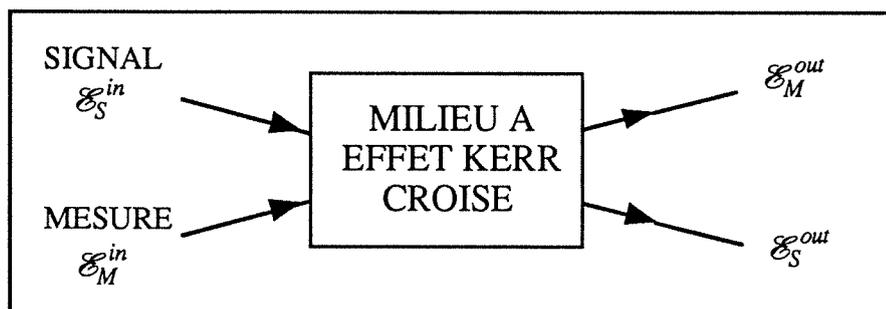


FIGURE I.C.1 :
Evolution des champs lors
de la traversée du milieu.

1. Hamiltonien de couplage.

Le couplage entre \mathcal{S} et \mathcal{M} peut être représenté par une interaction paramétrique,

$$\mathcal{H}_{MS} = \hbar f \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{a}_M^\dagger \hat{a}_M \quad (\text{I.C.1})$$

qu'il est possible d'interpréter comme l'absorption d'un photon provenant du faisceau signal \mathcal{S} et d'un autre provenant du faisceau de mesure \mathcal{M} , ensuite réémis simultanément sous la forme d'une nouvelle paire de photons. Un tel processus peut théoriquement être obtenu dans un mélange à quatre ondes auquel cas, l'intensité f caractérisant le couplage entre les deux faisceaux, est proportionnelle à la non-linéarité $\chi^{(3)}$. Pour notre part, nous tenterons de réaliser une telle interaction dans une transition à deux photons (voir Chapitre II).

La forme de (I.C.1) montre que les opérateurs nombre de photons sont des observables QND et que l'information donnée par la mesure, doit alors apparaître sur les quadratures conjuguées, i.e. les phases des deux faisceaux [Milburn 83] [Imoto 85].

Compte-tenu du fait que \hat{N}_s et \hat{N}_m sont des constantes au cours de l'interaction, les opérateurs \hat{a}_s et \hat{a}_m évoluent en représentation de Heisenberg suivant :

$$\begin{cases} \hat{a}_s(t) = \hat{a}_s(0) e^{-if \hat{N}_m t} \\ \hat{a}_M(t) = \hat{a}_M(0) e^{-if \hat{N}_s t} \end{cases} \quad (\text{I.C.2})$$

Les champs électriques moyens subissent un déphasage, proportionnel à l'intensité moyenne de l'autre faisceau, lors de la traversée du milieu. L'interaction correspond donc bien, pour les champs moyens, à un effet Kerr croisé.

La transition entrée-sortie pour les fluctuations quantiques est obtenue en remarquant que l'hamiltonien de couplage s'écrit à l'approximation linéaire :

$$\mathcal{H}_{MS} = \hbar f \left[\langle \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \rangle + \langle \hat{a}_S \rangle (\delta \hat{a}_S + \delta \hat{a}_S^\dagger) \right] \left[\langle \hat{a}_M^\dagger \hat{a}_M \rangle + \langle \hat{a}_M \rangle (\delta \hat{a}_M + \delta \hat{a}_M^\dagger) \right] \quad (\text{I.C.3})$$

$$\mathcal{H}_{MS} \approx \hbar f \langle \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \rangle \langle \hat{a}_M^\dagger \hat{a}_M \rangle + \hbar f \langle \hat{a}_S \rangle \langle \hat{a}_M \rangle \hat{P}_S \hat{P}_M \quad (\text{I.C.4})$$

où \hat{P}_s et \hat{P}_m sont les deux composantes de quadrature correspondant aux fluctuations d'amplitude des deux faisceaux. L'hamiltonien de couplage (I.C.1) est par conséquent, équivalent à celui utilisé au § A.III pour définir le couplage paramétrique idéal. Les expressions (I.C.1) et (I.C.4) montrent que \hat{N}_s et \hat{N}_m , ou de façon équivalente \hat{P}_s et \hat{P}_m , sont des observables QND.

2. Evolution des composantes de quadrature.

Nous utilisons le formalisme semi-classique introduit précédemment. L'évolution des champs moyens est donnée par les équations :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_S^{out} = \mathcal{E}_S^{in} e^{-i\phi_s} \\ \mathcal{E}_M^{out} = \mathcal{E}_M^{in} e^{-i\phi_m} \end{cases} \quad (\text{I.C.4.a})$$

avec des déphasages donnés par :

$$\begin{cases} \phi_S = \phi_S^0 + f I_M \\ \phi_M = \phi_M^0 + f I_S \end{cases} \quad (\text{I.C.4.b})$$

où ϕ_S^0 et ϕ_M^0 correspondent aux déphasages linéaires introduits dans la traversée du milieu, I_S et I_M aux intensités des deux faisceaux, exprimées en flux de photons, et définies par :

$$\begin{cases} I_S = \mathcal{E}_S \mathcal{E}_S^* \\ I_M = \mathcal{E}_M \mathcal{E}_M^* \end{cases} \quad (\text{I.C.4.c})$$

En différentiant ces équations d'évolution, la transformation entrée-sortie des fluctuations des champs à la fréquence ω est donnée par :

$$\delta \mathcal{E}_S^{out}(\omega) = e^{-i\omega\tau} \left\{ e^{-i\phi_S} \delta \mathcal{E}_S^{in}(\omega) - if \bar{\mathcal{E}}_S^{in} e^{-i\phi_S} \left[\bar{\mathcal{E}}_M^{in*} \delta \mathcal{E}_M^{in}(\omega) + \bar{\mathcal{E}}_M^{in} \delta \mathcal{E}_M^{in}(-\omega)^* \right] \right\} \quad (\text{I.C.5a})$$

$$\delta \mathcal{E}_M^{out}(\omega) = e^{-i\omega\tau} \left\{ e^{-i\phi_M} \delta \mathcal{E}_M^{in}(\omega) - if \bar{\mathcal{E}}_M^{in} e^{-i\phi_M} \left[\bar{\mathcal{E}}_S^{in*} \delta \mathcal{E}_S^{in}(\omega) + \bar{\mathcal{E}}_S^{in} \delta \mathcal{E}_S^{in}(-\omega)^* \right] \right\} \quad (\text{I.C.5b})$$

où τ est le temps de traversée des deux faisceaux dans le milieu non-linéaire. En choisissant \mathcal{E}_S^{in} et \mathcal{E}_M^{in} comme référence de phase pour chaque faisceau, et tenant compte des déphasages introduits sur les champs moyens, la transformation entrée-sortie des composantes de quadrature s'écrit :

$$\begin{bmatrix} p_S^{out}(\omega) \\ q_S^{out}(\omega) \\ p_M^{out}(\omega) \\ q_M^{out}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\kappa & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_S^{in}(\omega) \\ q_S^{out}(\omega) \\ p_M^{out}(\omega) \\ q_M^{in}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{I.C.6})$$

ce qui correspond bien à la transformation paramétrique idéale définie par l'équation (I.A.31), avec une efficacité de couplage entre le signal et la mesure donnée par :

$$\kappa = f \mathcal{E}_S^{in} \mathcal{E}_M^{in} = f \sqrt{I_S I_M} \quad (\text{I.C.7})$$

En supposant les deux faisceaux initialement non-corrélés et au bruit de photons (cf. eq. I.B.46b), la matrice des covariances en sortie est donnée par :

$$W^{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\kappa \\ 0 & 1+4\kappa^2 & -2\kappa & 0 \\ 0 & -2\kappa & 1 & 0 \\ -2\kappa & 0 & 0 & 1+4\kappa^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.C.8})$$

3. Cas réel : influence des pertes.

Il est nécessaire de tenir compte des pertes qui s'introduisent sur les deux voies et sont dues soit aux imperfections de l'optique, soit à l'efficacité de la détection (par exemple, lorsque le rendement quantique des photodiodes est plus petit que un). D'après le résultat obtenu en § BIV pour les associations de coupleurs en cascade, l'endroit où les pertes apparaissent (soit avant le coupleur, soit après le coupleur) est important (figure I.C.2). Nous considérerons le cas où les pertes apparaissent sur les deux voies après le coupleur. En notant η_S et η_M les efficacités correspondantes, la transformation entrée-sortie des fluctuations des champs est donnée par :

$$\begin{bmatrix} p_S^{out} \\ q_S^{out} \\ p_M^{out} \\ q_M^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\eta_S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta_S} & -2\kappa\sqrt{\eta_S} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\eta_M} & 0 \\ -2\kappa\sqrt{\eta_M} & 0 & 0 & \sqrt{\eta_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_S^{in} \\ q_S^{in} \\ p_M^{out} \\ q_M^{in} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{1-\eta_S} p_S^{ad} \\ \sqrt{1-\eta_S} q_S^{ad} \\ \sqrt{1-\eta_M} p_M^{ad} \\ \sqrt{1-\eta_M} q_M^{ad} \end{bmatrix} \quad (\text{I.C.9})$$

soit une matrice de covariances en sortie :

$$W^{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\sqrt{\eta_S\eta_M}\kappa \\ 0 & 1+4\eta_S\kappa^2 & -2\sqrt{\eta_S\eta_M}\kappa & 0 \\ 0 & -2\kappa & 1 & 0 \\ -2\sqrt{\eta_S\eta_M}\kappa & 0 & 0 & 1+4\eta_M\kappa^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.C.10})$$

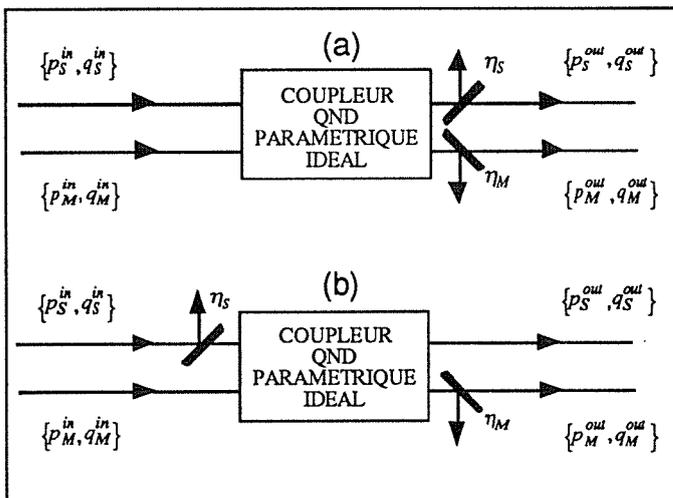


FIGURE I.C.2 :

Représentation de la position des pertes dans le dispositif de couplage : celles sur le faisceau signal peuvent s'introduire, soit après le coupleur (a), soit avant le coupleur (b). Une autre possibilité est qu'elles soient réparties le long de la propagation couplée (par exemple, à cause de l'absorption dans le milieu non-linéaire).

En choisissant les composantes de quadrature p_s^{out} pour le signal, et q_M^{out} pour la mesure, l'efficacité effective du couplage est alors définie par :

$$\begin{cases} \alpha_{SS} = \sqrt{\eta_S} \\ \gamma_{MS} = -2\kappa\sqrt{\eta_M} \end{cases} \quad (\text{I.C.11})$$

En fonction de ces expressions et de celles des covariances en sortie du dispositif, on en déduit les critères d'efficacité :

$$N_s^{eq} = \frac{1 - \eta_S}{\eta_S} \quad (\text{I.C.12.a})$$

$$N_M^{eq} = \frac{1}{4\kappa^2\eta_M} \quad (\text{I.C.12.b})$$

$$W_{p_s|q_M}^{out} = \frac{1 + 4(1 - \eta_S)\eta_M\kappa^2}{1 + 4\eta_M\kappa^2} \quad (\text{I.C.12.c})$$

Ces expressions montrent que les pertes sur les deux voies ont des conséquences très différentes. Celles sur le faisceau de mesure correspondent à une diminution du gain paramétrique et pourraient être compensées en augmentant ce dernier, tandis que celles sur le signal détruisent partiellement l'information obtenue : elles dégradent irréversiblement les corrélations quantiques en sortie, ainsi que la condition QND sur le signal d'entrée.

En particulier, le produit des bruits équivalents est maintenant donné par :

$$N_s^{eq} \cdot N_M^{eq} = \frac{1 - \eta_S}{\eta_S} \cdot \frac{1}{4\kappa^2\eta_M} \quad (\text{I.C.13})$$

Dès que ce produit devient supérieur à 1, le dispositif, considéré du point de vue "écouteur discret", est moins efficace qu'une simple lame semi-transparente transmettant une fraction η_S du signal. Nous avons ainsi représenté sur la figure I.C.3, les régions dans le plan $\{\eta_S, 4\kappa^2\eta_M\}$ accessibles uniquement par des dispositifs "non-classiques" (région QND). Ces résultats montrent clairement que, quel que soit le but recherché pour la mesure, *les pertes sur le faisceau signal sont très critiques.*

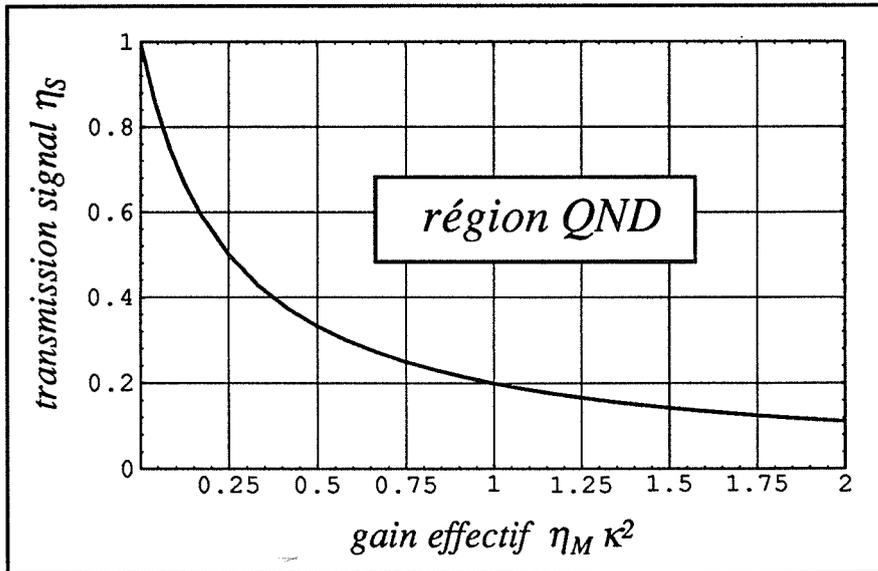


FIGURE I.C.3 : Caractérisation du dispositif de couplage par rapport à la lame semi-transparente équivalente.

Remarque : Considérons le cas représenté sur la figure I.C.2b, où les pertes sur le signal apparaissent avant le coupleur QND idéal. La transformation entrée-sortie des covariances est alors donnée par :

$$W^{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\kappa\eta_S\sqrt{\eta_M} \\ 0 & 1+4\eta_S\kappa^2 & -2\kappa\eta_M\sqrt{\eta_S} & 0 \\ 0 & -2\kappa\eta_M\sqrt{\eta_S} & 1 & 0 \\ -2\kappa\eta_S\sqrt{\eta_M} & 0 & 0 & 1+4\eta_M\kappa^2 \end{bmatrix}$$

soit:

$$N_S^{eq} = \frac{1-\eta_S}{\eta_S} \quad N_M^{eq} = \frac{1}{4\eta_S\eta_M\kappa^2}$$

$$W_{PS|QM}^{out} = \frac{1+4\eta_M\kappa^2(1-\eta_S^2)}{1+4\eta_M\eta_S\kappa^2}$$

qui montrent par rapport aux équations (I.C.12) une dégradation supplémentaire de l'efficacité de la mesure (η_S étant changé en η_S^2).

II. RECAPITULATIF DES RESULTATS OBTENUS DANS LES REALISATIONS EXPERIMENTALES ANTERIEURES.

Deux expériences, réalisées en 1986 à IBM [Levenson 86] et en 1989 aux Bells Labs [La Porta 89], ont montré la faisabilité d'une mesure QND en Optique. Une analyse détaillée de ces deux expériences est effectuée en Annexe II, de façon à redéfinir leur efficacité en fonction des critères définis précédemment. Précisons que ceci est néanmoins un exercice "périlleux", car les paramètres significatifs dégagés par Grangier, Courty et Reynaud en 1991, n'étaient évidemment pas directement mesurés dans ces expériences, ni-même dans celles exposées dans ce mémoire ! Il est donc nécessaire de les reconstituer à partir de données plus ou moins partielles fournies par les auteurs dans leurs différentes publications. A partir des calculs

effectués en Annexe II, nous proposons ainsi de redéfinir leurs résultats de la façon suivante :

- Expérience de Levenson *et al.*:

$$N_S^{eq} = 1.4 \quad \text{et} \quad N_M^{eq} = 7.2 \quad \text{(I.C.14)}$$

$$N_S^{eq} \cdot N_M^{eq} = 10.4 \quad \text{et} \quad W_{S/M}^{out} = 0.95(-0.2 \text{ dB}) \quad \text{(I.C.15)}$$

- Expérience de La Porta *et al.*:

$$N_S^{eq} = 1.0 \quad \text{et} \quad N_M^{eq} = 3.0 \quad \text{(I.C.16)}$$

$$N_S^{eq} \cdot N_M^{eq} = 3.0 \quad \text{et} \quad W_{S/M}^{out} = 0.88(-0.6 \text{ dB}) \quad \text{(I.C.17)}$$

Dans les deux cas, l'efficacité de la mesure s'est trouvée être limitée par les différentes pertes. De plus, dans l'expérience de Levenson *et al.*, le couplage était obtenu par effet Kerr optique (effet non-linéaire de type $\chi^{(3)}$) dans une fibre optique. Contrairement à l'autre expérience, utilisant un cristal non-linéaire de type $\chi^{(2)}$, ce milieu introduisait un excès de bruit de phase non-corrélé qui dégradait fortement l'information portée par la phase du faisceau de mesure. Les résultats de ces deux expériences sont représentés sur la figure I.C.4, en portant en abscisse le produit des bruits équivalents, et en ordonnée la variance conditionnelle. Le point de coordonnées {1,1}, représente ainsi tout coupleur linéaire indépendant de la phase (par exemple, une lame semi-transparente) et délimite clairement les domaines correspondant à un dispositif classique, à une préparation d'état quantique, à un écouteur discret, ou à un dispositif QND. Ce dernier présente l'avantage de pouvoir réaliser à la fois une écoute discrète et une préparation d'état quantique.

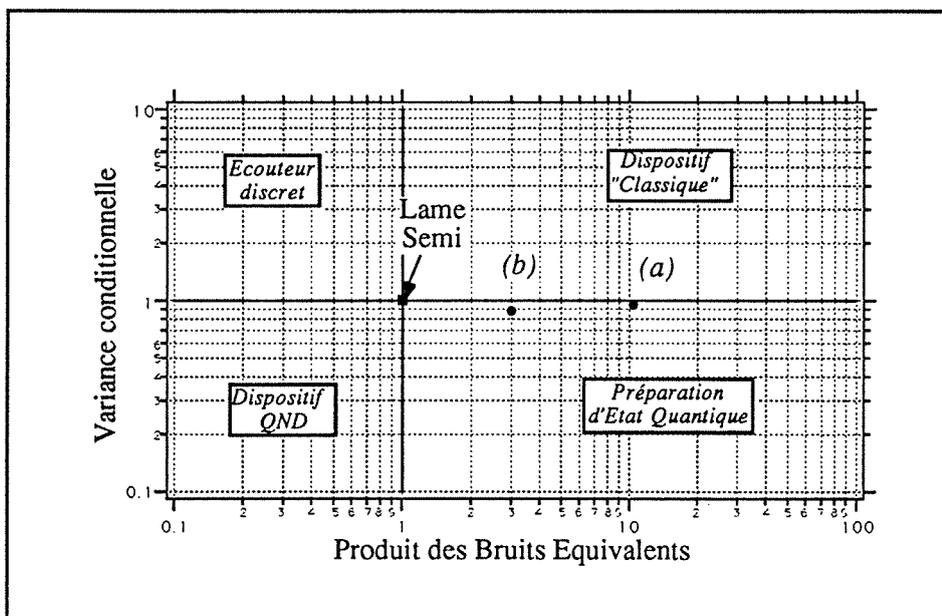


FIGURE I.C.4 : Représentation des résultats précédemment obtenus : le point {1,1} représente simplement une lame semi-transparente, tandis que les deux autres points schématisent les résultats obtenus par Levenson *et al.* (IBM - 1986) (a) et de La Porta *et al.* (BellLabs - 1988) (b). Ces deux expériences correspondent donc à une préparation d'état quantique.

D. CONCLUSION

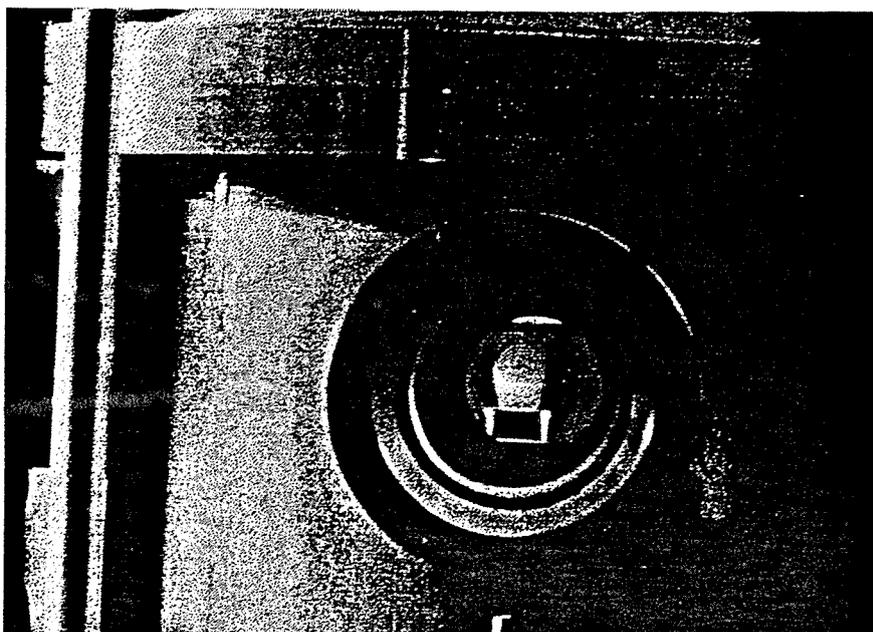
Nous avons montré théoriquement sur un modèle simple qu'une mesure QND correspondait à la réalisation d'une mesure quantique au sens de Von Neumann, i.e. décrite par les postulats habituels de la Mécanique Quantique (obtention des valeurs propres de l'observable mesurée, puis projection de la fonction d'onde). Dans le cas de faisceaux continus se propageant librement, et lorsque les fluctuations quantiques ont des amplitudes beaucoup plus petites que celles des champs moyens, il est possible d'utiliser une description semi-classique des champs. Les opérateurs sont alors remplacés par des variables stochastiques classiques. Pour décrire correctement les transformations des champs, il est nécessaire, dans cette description de type ondulatoire, de faire intervenir les fluctuations du vide dont le bruit associé correspond à la perturbation introduite par la mesure sur le système.

Dans cette situation, nous avons caractérisé la non-idéalité d'une mesure par l'introduction de trois paramètres (variance conditionnelle entre le signal et la mesure en sortie du dispositif, et bruits équivalents ramenés à l'entrée), qui sont expérimentalement mesurables sur le dispositif à étudier.

Les techniques usuelles de mesure de l'intensité d'un faisceau lumineux, réalisées en prélevant une fraction des photons de ce faisceau (par exemple, par une lame semi-transparente), définissent une "limite quantique" pour une mesure quantique d'une composante de quadrature. Cette détection, par contre, peut se faire de façon non-destructive (mesure QND) en couplant le faisceau signal à un faisceau de mesure par une non-linéarité de type effet Kerr croisé. Nous nous proposons donc dans le chapitre suivant de montrer qu'une telle interaction pour les champs moyens peut être réalisée grâce à une transition à deux photons.

CHAPITRE DEUX

Dispersion à deux photons :
Etude théorique et réalisation expérimentale
pour une transition à deux photons
dans l'atome de sodium



Jet atomique de sodium
excité à résonance : on
aperçoit la fluorescence sur
toute la longueur du jet.

A. INTRODUCTION

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre I, il est possible théoriquement de réaliser une mesure QND des fluctuations d'intensité d'un faisceau, en le couplant à un faisceau de mesure par un effet Kerr croisé. Les champs moyens sont alors déphasés proportionnellement à l'intensité de l'autre faisceau.

Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il est possible, pour les champs moyens, de réaliser une telle interaction dans une transition à deux photons. En effet, les relations de Kramers-Krönig imposent que l'absorption due à une résonance atomique s'accompagne d'une modification de la dispersion du milieu.

Il est bien connu que la section efficace d'absorption à deux photons correspond à la limite des faibles intensités à une non-linéarité de type $\chi^{(3)}$ et varie, pour un des deux faisceaux, proportionnellement à l'intensité de l'autre faisceau. La dispersion associée doit donc, a priori, posséder la même dépendance par rapport à ces paramètres. Nous commencerons par rappeler deux effets liés à cette dispersion à deux photons, qui furent mis en évidence à la suite des premières expériences d'absorption à deux photons.

a) Activité optique induite.

Dans une transition à deux photons entre niveaux s , les règles de couplage [Cagnac 73], imposent que les faisceaux aient des polarisations circulaires opposées : deux polarisations contraires (i.e. σ_+ et σ_-) sont couplées par le milieu non-linéaire tandis que des polarisations identiques (i.e. σ_+ et σ_+) se propagent indépendamment l'une de l'autre. A l'aide d'un faisceau de contrôle polarisé circulairement, on peut ainsi déphaser l'une par rapport à l'autre les deux composantes circulaires d'une polarisation rectiligne signal, induisant ainsi une rotation de la direction de polarisation.

Ce phénomène est ainsi l'analogie de l'effet Faraday, le faisceau de contrôle remplaçant le champ magnétique.

L'expérience a été réalisée par Liao et Bjorklund [Liao 76], en utilisant les transitions $3s_{1/2} \rightarrow 3p_{1/2} \rightarrow 5s_{1/2}$ du sodium, avec des atomes en cellule.*

Pour un processus correspondant à la limite cubique dispersive, l'angle de rotation de la polarisation du faisceau signal est proportionnel à l'intensité du faisceau de contrôle. Il doit également varier suivant une courbe de dispersion, au voisinage de la résonance à deux photons (pour un désaccord à un photon fixé). Les auteurs ont montré [Liao 77] que ces caractéristiques pouvaient facilement être masquées, par d'autres phénomènes de dispersion provenant :

- des transferts de population sur les niveaux supérieurs, dus à des transitions assistées par collision.
- des corrections d'ordre supérieur provenant des déplacements lumineux des niveaux d'énergie de l'atome.

et qui induisent également une rotation de polarisation.

b) Bistabilité à deux photons.

La dépendance de l'indice de propagation en fonction de l'intensité lumineuse conduit directement à des phénomènes de bistabilité dispersive. La bistabilité à deux photons a été mise en évidence pour la première fois par Giacobino *et al.* : le milieu non-linéaire était une cellule d'atomes de rubidium, excités suivant la transition à deux photons égaux $3s_{1/2} \rightarrow 5d_{5/2}$ ($\lambda = 777.9$ nm). La bistabilité était mise en évidence en analysant la forme des pics de transmission à travers la cavité Fabry-Pérot entourant la cellule [Giacobino 80].

Tout comme dans l'expérience précédente, le déphasage non-linéaire et donc les effets de bistabilité associés, doivent, de part et d'autre de la résonance à deux photons, varier en suivant une courbe de dispersion. Expérimentalement cette propriété fondamentale n'était pas observée et, pour reproduire les résultats expérimentaux, un calcul complet de la non-linéarité (et non plus un simple traitement perturbatif à la limite cubique) a été nécessaire.

* La structure hyperfine des raies, ainsi que leur largeur Doppler, pouvait être négligée dans cette expérience. En effet, les faisceaux lumineux étaient des lasers pulsés, de largeur spectrale environ 0.02 nm, et les désaccords étaient suffisamment grands (typiquement 0.1 nm) pour pouvoir effectuer une nouvelle sommation tenant compte des composantes hyperfines. Pour notre dispositif expérimental, ceci ne sera plus vérifié et nous devons tenir compte de la structure réelle de l'atome de sodium.

Les auteurs [Grynberg 80] [Devaud 80] ont pu ainsi mettre en évidence l'importance des phénomènes concurrents tels que, à nouveau :

- les déplacements lumineux des niveaux d'énergie.
- les variations de population consécutives à l'absorption à deux photons.

En l'absence d'une théorie complète pouvant décrire la transformation des fluctuations, ainsi que le bruit rajouté par le milieu atomique (matrice de transfert classique $\lambda(\omega)$ et $\delta\mathcal{F}^{\text{ad}}(\omega)$), notre démarche initiale (en 1988) a été de supposer, que pour des désaccords par rapport aux résonances atomiques suffisamment grands, les fluctuations introduites par l'émission spontanée étaient négligeables. La transformation entrée-sortie des fluctuations quantiques est alors uniquement donnée par $\lambda(\omega)$, dont la forme pour une non-linéarité correspondant à l'effet Kerr croisé est donnée par (I.C.6). Dans la partie B, nous rappellerons d'abord l'origine de la dispersion à deux photons pour un système fermé à trois états (§BIII), apparaissant lorsque certaines approximations, correspondant à ce que nous appellerons la limite cubique dispersive, sont réalisées. Nous comparerons ensuite ces calculs approchés, à un calcul non-perturbatif pour les fréquences de Rabi, dans un modèle à deux niveaux effectifs (§BIV), où, pour des grands désaccords à un photon, le niveau relais peut être éliminé des équations. Nous retrouverons ainsi que le processus correspondant à la dispersion croisée peut être facilement masqué par les effets déjà cités de déplacements lumineux et de transfert de population, provenant de la saturation des transitions. Enfin, tous ces résultats seront comparés à la résolution numérique des Equations de Bloch Optiques (E.B.O.) (§BV).

Pour le système réel choisi, en l'occurrence l'atome de sodium et les transitions $3s_{1/2} \rightarrow 3p_{3/2} \rightarrow 3d_{5/2}$ (qui, a priori, sont loin de constituer un système fermé à trois états !), nous calculerons dans la partie C le déphasage non-linéaire en tenant compte des différents sous-niveaux fins et hyperfins.

La partie D sera consacrée à la description du dispositif expérimental utilisé dans nos expériences (jet atomique, lasers à colorant et cavité optique). Les différentes mesures du déphasage non-linéaire seront enfin détaillées dans la partie E. Nous verrons que pour certaines conditions précises, le déphasage non-linéaire obtenu expérimentalement présente effectivement une forme de dispersion autour de la résonance à deux photons, et peut être bien modélisé par la simple limite cubique dispersive.

B. ETUDE THEORIQUE POUR UN SYSTEME FERME A TROIS ETATS

I. GENERALITES.

Considérons le système formé par un état fondamental g et un état excité e , couplés entre eux par une transition à deux photons utilisant le niveau relais r (figure II.B.1). Nous noterons Δ et δ les désaccords à un et deux photons, entre les lasers de fréquences ω_1 et ω_2 et les niveaux d'énergie.

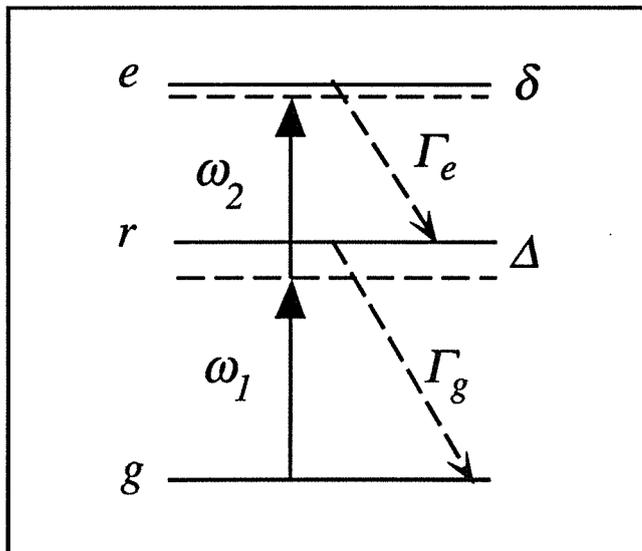


FIGURE II.B.1 :

Système fermé à trois niveaux en échelle, utilisé pour effectuer la transition à deux photons.

Nous supposons ω_1 différent de ω_2 . Cette configuration présente en effet l'avantage, par rapport à l'excitation de la transition avec le même laser (transition à deux photons égaux en énergie), de pouvoir faire varier Δ , et obtenir ainsi des effets résonnants à la fois en δ et en Δ [Bjorkholm 76]. L'inconvénient étant qu'il n'est alors plus possible de supprimer complètement l'effet Doppler, si bien que l'expérience que nous avons réalisée ne pourrait être transposée à des atomes en cellule à température ordinaire.

1) Notations.

L'hamiltonien atomique s'écrit, en prenant comme origine des énergies le niveau fondamental g :

$$\mathcal{H}_{at} = \hbar\omega_r |r\rangle \langle r| + \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| \quad (\text{II.B.1})$$

En notant le champ électrique total :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (\text{II.B.2.a})$$

où \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont respectivement les champs électriques associés aux lasers accordés sur les transitions de g vers r , et de r vers e :

$$\vec{E}_1 = \mathcal{E}_1 \vec{\epsilon}_1 [e^{-i\omega_1 t} + e^{i\omega_1 t}] \quad \vec{E}_2 = \mathcal{E}_2 \vec{\epsilon}_2 [e^{-i\omega_2 t} + e^{i\omega_2 t}] \quad (\text{II.B.2.b})$$

l'hamiltonien de couplage champs/atome s'écrit, à l'approximation dipolaire électrique, et en supposant que E_1 n'agit que sur la transition entre g et r , et E_2 sur la transition entre r et e :

$$\mathcal{V} = -\vec{d}_{gr} [|r\rangle \langle g| + |g\rangle \langle r|] \cdot \vec{E}_1 - \vec{d}_{re} [|e\rangle \langle r| + |r\rangle \langle e|] \cdot \vec{E}_2 \quad (\text{II.B.3})$$

En supposant, sans perte de généralité, que les amplitudes \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont réelles, ce couplage s'écrit à l'approximation du champ tournant :

$$\mathcal{V} = -\vec{d}_{rg} \cdot \epsilon_1 \mathcal{E}_1 [e^{-i\omega_1 t} |r\rangle \langle g| + e^{i\omega_1 t} |g\rangle \langle r|] - \vec{d}_{er} \cdot \epsilon_2 \mathcal{E}_2 [e^{-i\omega_2 t} |e\rangle \langle r| + e^{i\omega_2 t} |r\rangle \langle e|] \quad (\text{II.B.4})$$

En utilisant les fréquences de Rabi, définies par:

$$\hbar\Omega_1 = - \mathcal{E}_1 \vec{d}_{rg} \cdot \vec{\epsilon}_1 \quad \hbar\Omega_2 = - \mathcal{E}_2 \vec{d}_{er} \cdot \vec{\epsilon}_2 \quad (\text{II.B.5})$$

le terme de couplage s'écrit :

$$\mathcal{V} = \hbar\Omega_1 [|r\rangle \langle g| e^{-i\omega_1 t} + |g\rangle \langle r| e^{i\omega_1 t}] + \hbar\Omega_2 [|e\rangle \langle r| e^{-i\omega_2 t} + |r\rangle \langle e| e^{i\omega_2 t}] \quad (\text{II.B.6})$$

Les calculs seront effectués pour des atomes immobiles (donc sans tenir compte de l'effet Doppler). Ceci est justifié par le fait que nous nous placerons à la limite dispersive, correspondant à des désaccords à deux photons δ grands devant la largeur Doppler (typiquement δ sera de l'ordre du GHz, alors que la largeur Doppler totale à mi-hauteur, due à la répartition des vitesses transverses dans le jet atomique, sera d'environ 200 MHz).

2) Evolution du système atomique.

Nous utiliserons le formalisme de la matrice densité, en ajoutant les termes d'amortissement Γ_g et Γ_e décrivant l'effet de l'émission spontanée respectivement de r vers g et de e vers r [Whitley 76] :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}_a + \mathcal{V}, \rho] + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{relaxation}} \quad (\text{II.B.7})$$

Les vitesses de variation rapides sont éliminées par le changement de variable suivant :

$$\rho_{ii} = \sigma_i \quad i = g, r, e \quad (\text{II.B.8.a})$$

$$\rho_{rg} = \sigma_{rg} e^{-i\omega_1 t} \quad \rho_{gr} = \sigma_{gr} e^{i\omega_1 t} \quad (\text{II.B.8.b})$$

$$\rho_{er} = \sigma_{er} e^{-i\omega_2 t} \quad \rho_{re} = \sigma_{re} e^{i\omega_2 t} \quad (\text{II.B.8.c})$$

$$\rho_{eg} = \sigma_{eg} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \quad \rho_{ge} = \sigma_{ge} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \quad (\text{II.B.8.d})$$

En posant :

$$\Delta = \omega_1 - \omega_{rg} \quad (\text{II.B.9.a})$$

$$\Delta' = \omega_2 - \omega_{er} \quad (\text{II.B.9.b})$$

représentant les désaccords à un photon par rapport aux deux transitions, le désaccord à deux photons étant donné par :

$$\delta = \omega_1 + \omega_2 - (\omega_{rg} + \omega_{er}) = \Delta + \Delta' \quad (\text{II.B.9.c})$$

nous obtenons en reportant dans (II.B.8) la forme habituelle des Equations de Bloch Optiques :

$$\dot{\sigma}_g = \Gamma_g \sigma_r - i\Omega_1(\sigma_{rg} - \sigma_{gr}) \quad (\text{II.B.10.a})$$

$$\dot{\sigma}_r = -\Gamma_g \sigma_r + \Gamma_e \sigma_e + i\Omega_1(\sigma_{rg} - \sigma_{gr}) - i\Omega_2(\sigma_{er} - \sigma_{re}) \quad (\text{II.B.10.b})$$

$$\dot{\sigma}_e = -\Gamma_e \sigma_e + i\Omega_2(\sigma_{er} - \sigma_{re}) \quad (\text{II.B.10.c})$$

$$\dot{\sigma}_{gr} = -(\Gamma_g / 2 + i\Delta)\sigma_{gr} - i\Omega_1(\sigma_r - \sigma_g) + i\Omega_2\sigma_{ge} \quad (\text{II.B.10.d})$$

$$\dot{\sigma}_{rg} = -(\Gamma_g / 2 - i\Delta)\sigma_{rg} + i\Omega_1(\sigma_r - \sigma_g) - i\Omega_2\sigma_{eg} \quad (\text{II.B.10.e})$$

$$\dot{\sigma}_{re} = -(\Gamma_g + \Gamma_e) / 2 + i\Delta'\sigma_{re} - i\Omega_2(\sigma_e - \sigma_r) - i\Omega_2\sigma_{ge} \quad (\text{II.B.10.f})$$

$$\dot{\sigma}_{er} = -(\Gamma_g + \Gamma_e) / 2 - i\Delta'\sigma_{er} + i\Omega_2(\sigma_e - \sigma_r) + i\Omega_2\sigma_{eg} \quad (\text{II.B.10.g})$$

$$\dot{\sigma}_{ge} = -(\Gamma_e / 2 + i\delta)\sigma_{ge} - i\Omega_1\sigma_{re} + i\Omega_2\sigma_{gr} \quad (\text{II.B.10.h})$$

$$\dot{\sigma}_{eg} = -(\Gamma_e / 2 - i\delta)\sigma_{eg} + i\Omega_1\sigma_{er} - i\Omega_2\sigma_{rg} \quad (\text{II.B.10.i})$$

Ces équations vérifient évidemment la relation de conservation des populations :

$$\sigma_g + \sigma_r + \sigma_e = 1 \quad (\text{II.B.11})$$

3) Forme alternative des équations de Bloch optiques.

Nous introduisons les variables :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{gr} + \sigma_{rg}) \\ v_1 = -\frac{i}{2}(\sigma_{gr} - \sigma_{rg}) \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{re} + \sigma_{er}) \\ v_2 = -\frac{i}{2i}(\sigma_{re} - \sigma_{er}) \end{cases} \quad \begin{cases} u_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{ge} + \sigma_{eg}) \\ v_3 = -\frac{i}{2}(\sigma_{ge} - \sigma_{eg}) \end{cases} \quad (\text{II.B.11})$$

où (u_1, v_1) et (u_2, v_2) représentent les composantes du dipôle atomique respectivement en phase et en quadrature avec les champs excitateurs.

La valeur moyenne de \vec{d} s'écrit en effet :

$$\langle \vec{d} \rangle = T_r[\sigma \vec{d}] = 2\vec{d}_{gr}(u_1 \cos \omega_1 t - v_1 \sin \omega_1 t) + 2\vec{d}_{er}(u_2 \cos \omega_2 t - v_2 \sin \omega_2 t) \quad (\text{II.B.13})$$

Les vitesses d'évolution de ces nouvelles variables sont données par :

$$\dot{u}_1 = -\frac{\Gamma_g}{2} u_1 + \Delta v_1 - \Omega_2 v_3 \quad (\text{II.B.14.a})$$

$$\dot{v}_1 = -\Delta u_1 - \frac{\Gamma_g}{2} v_1 + \Omega_2 u_3 + \Omega_1 (\sigma_g - \sigma_r) \quad (\text{II.B.14.b})$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{\Gamma_g + \Gamma_e}{2} u_2 + \Delta' v_2 + \Omega_1 v_3 \quad (\text{II.B.14.c})$$

$$\dot{v}_2 = -\Delta' u_2 - \frac{\Gamma_g + \Gamma_e}{2} v_2 - \Omega_1 u_3 + \Omega_2 (\sigma_r - \sigma_e) \quad (\text{II.B.14.d})$$

$$\dot{u}_3 = -\frac{\Gamma_e}{2} u_3 + \delta v_3 - \Omega_2 v_1 + \Omega_1 v_2 \quad (\text{II.B.14.e})$$

$$\dot{v}_3 = -\delta u_3 - \frac{\Gamma_e}{2} v_3 + \Omega_2 u_1 - \Omega_1 u_2 \quad (\text{II.B.14.f})$$

Les vitesses d'évolution des populations s'expriment maintenant par :

$$\dot{\sigma}_g = \Gamma_g \sigma_r - 2\Omega_1 v_1 \quad (\text{II.B.14.g})$$

$$\dot{\sigma}_r = -\Gamma_g \sigma_r + \Gamma_e \sigma_e + 2\Omega_1 v_1 - 2\Omega_2 v_2 \quad (\text{II.B.14.h})$$

$$\dot{\sigma}_e = -\Gamma_e \sigma_e + 2\Omega_2 v_2 \quad (\text{II.B.14.i})$$

En éliminant la population sur le niveau fondamental, on obtient huit équations indépendantes, qu'il est commode d'écrire sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_e \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma_g & \Gamma_e & 0 & 2\Omega_1 & 0 & -2\Omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_e & 0 & 0 & 0 & 2\Omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Gamma_g}{2} & \Delta & 0 & 0 & 0 & -\Omega_2 \\ -2\Omega_1 & -\Omega_1 & -\Delta & -\frac{\Gamma_g}{2} & 0 & 0 & \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Gamma_g + \Gamma_e}{2} & \Delta' & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_2 & 0 & 0 & -\Delta' & -\frac{\Gamma_g + \Gamma_e}{2} & -\Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_2 & 0 & \Omega_1 & -\frac{\Gamma_e}{2} & \delta \\ 0 & 0 & \Omega_2 & 0 & -\Omega_1 & 0 & -\delta & -\frac{\Gamma_e}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_e \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.B.15})$$

soit, avec des notations évidentes :

$$\dot{V} = MV + S \quad (\text{II.B.16})$$

L'état du système atomique en régime permanent est donc défini par l'équation générale :

$$MV + S = 0 \quad (\text{II.B.17})$$

que nous nous proposons de résoudre de trois façons différentes :

- traitement perturbatif, correspondant à un développement en série en Ω_1 et Ω_2 (§BIII). La dispersion à deux photons apparaît alors à l'ordre trois, i.e. la limite cubique dispersive du développement.
- résolution approchée non-perturbative, obtenue en éliminant les variables liées au niveau relais. Le système se ramène ainsi à deux états, couplés par un hamiltonien effectif (§BIV).
- résolution numérique exacte (§BV) et comparaison avec les résultats des deux modèles précédents.

II. PROPAGATION DES CHAMPS DANS LE MILIEU NON-LINEAIRE.

Les champs électriques voient leurs propagations modifiées par l'existence de polarisations macroscopiques $\vec{P}_1(t)$ et $\vec{P}_2(t)$, oscillant respectivement à ω_1 et à ω_2 . En supposant le milieu suffisamment dilué (avec une densité n_{at}), pour négliger les effets de champ local, celles-ci sont données par :

$$\vec{P}_1(t) = n_{at} \langle \vec{d}_{gr} \rangle \quad \vec{P}_2(t) = n_{at} \langle \vec{d}_{er} \rangle \quad (\text{II.B.18})$$

D'après (II.B.13), ces deux polarisations peuvent se décomposer en :

$$\vec{P}_1(t) = \vec{\mathcal{P}}_1 e^{-i\omega_1 t} + \vec{\mathcal{P}}_1^* e^{i\omega_1 t} \quad \vec{P}_2(t) = \vec{\mathcal{P}}_2 e^{-i\omega_2 t} + \vec{\mathcal{P}}_2^* e^{i\omega_2 t} \quad (\text{II.B.19})$$

où les amplitudes complexes sont données par :

$$\vec{\mathcal{P}}_1 = n_{at} \vec{d}_{gr} (u_1 - iv_1) \quad \vec{\mathcal{P}}_2 = n_{at} \vec{d}_{er} (u_2 - iv_2) \quad (\text{II.B.20})$$

En utilisant l'équation de propagation non-linéaire à l'approximation de l'enveloppe lentement variable [Yariv 89], pour une propagation des faisceaux suivant l'axe z :

$$\frac{d \mathcal{E}_j}{dz} = i k_j \frac{\vec{\mathcal{P}}_j \cdot \vec{\epsilon}_j}{2 \epsilon_0} \quad j = 1, 2 \quad (\text{II.B.21})$$

En posant :

$$v_j = \chi''_j \quad \Omega_j = \chi''_j \left(\frac{-\vec{d}_j \cdot \vec{\epsilon}_j}{\hbar} \right) \mathcal{E}_j \quad u_j = \chi'_j \quad \Omega_j = \chi'_j \left(\frac{-\vec{d}_j \cdot \vec{\epsilon}_j}{\hbar} \right) \mathcal{E}_j \quad (\text{II.B.22})$$

les équations de propagation peuvent s'écrire :

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} = -\frac{n_{at} k_1}{2\hbar \epsilon_0} (\vec{d}_{rg} \cdot \vec{\epsilon}_1)^2 (\chi''_1 + i \chi'_1) \mathcal{E}_1 \quad (\text{II.B.23.a})$$

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{dz} = -\frac{n_{at} k_2}{2\hbar \epsilon_0} (\vec{d}_{rg} \cdot \vec{\epsilon}_2)^2 (\chi''_2 + i \chi'_2) \mathcal{E}_2 \quad (\text{II.B.23.b})$$

La transition entre r et g étant fermée, la durée de vie du niveau r et le dipôle effectif $\vec{d}_{rg} \cdot \vec{\epsilon}_g$ sont reliés par la relation :

$$\Gamma_g = \frac{1}{3\pi \epsilon_0} \frac{\omega_{rg}^3}{\hbar c^3} (\vec{d}_{rg} \cdot \vec{\epsilon}_1)^2 \quad (\text{II.B.24})$$

En supposant la fréquence ω_l proche de ω_{rg} , l'équation de propagation (II.B.23.a) se met sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} = -n_{at} \frac{3 \lambda_{rg}^2}{4\pi} \frac{\Gamma_g}{2} (\chi''_1 + i \chi'_1) \mathcal{E}_1 \quad (\text{II.B.25})$$

faisant ainsi apparaître l'expression de l'épaisseur optique à résonance, correspondant à une section efficace de diffusion en champ $3\lambda_{rg}^2 / (4\pi)$:

$$\alpha_0 = n_{at} \frac{3 \lambda_{rg}^2}{4\pi} \quad (\text{II.B.26})$$

soit :

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} = -\alpha_0 \frac{\Gamma_\varepsilon}{2} (\chi''_1 + i \chi'_1) \mathcal{E}_1 \quad (\text{II.B.27})$$

Si χ''_1 et χ'_1 (resp. χ''_2 et χ'_2) sont indépendants de \mathcal{E}_1 (resp. \mathcal{E}_2), cette équation permet directement d'obtenir les champs \mathcal{E}_1^{out} et \mathcal{E}_2^{out} en fonction des champs entrants \mathcal{E}_1^{in} et \mathcal{E}_2^{in} , pour une traversée du milieu de longueur ℓ :

$$\mathcal{E}_1^{out} = \mathcal{E}_1^{in} e^{-\alpha_1 \ell} e^{-i\phi_1} \quad \mathcal{E}_2^{out} = \mathcal{E}_2^{in} e^{-\alpha_2 \ell} e^{-i\phi_2} \quad (\text{II.B.28})$$

où α_1 (resp. α_2) et ϕ_1 (resp. ϕ_2) représentent le coefficient d'absorption et le déphasage pour le champ 1 (resp. champ 2) :

$$\alpha_1 = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\Gamma_\varepsilon}{2} \cdot \chi''_1 \quad \phi_1 = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\Gamma_\varepsilon}{2} \cdot \chi'_1 \quad (\text{II.B.29.a})$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\Gamma_\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \cdot \chi''_2 \quad \phi_2 = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\Gamma_\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \cdot \chi'_2 \quad (\text{II.B.29.b})$$

La partie d'absorption est donc reliée à χ''_1 et χ''_2 , i.e. à v_1 et v_2 , parties des dipôles oscillant en quadrature avec les champs excitateurs. Les termes χ'_1 et χ'_2 , i.e. u_1 et u_2 représentant les quadratures des dipôles en phase avec les champs, produisent quant à eux un déphasage au cours de la propagation (effet de dispersion).

III. RESOLUTION PAR TRAITEMENT PERTURBATIF.

Ce calcul correspond simplement à développer la réponse du système en série de puissance des fréquences de Rabi :

$$u_k = \sum_n \sum_{i,j} u_k^{(n)} \Omega_1^i \Omega_2^j \quad v_k = \sum_n \sum_{i,j} v_k^{(n)} \Omega_1^i \Omega_2^j \quad k=1,2 \quad (\text{II.B.30})$$

soit pour le système atomique défini par le vecteur V (en absence de champs, seul σ_z est non-nul, si bien que $V^{(0)} = 0$):

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} + \dots + V^{(4)} + \dots \quad (\text{II.B.31})$$

En remarquant que la matrice M se décompose en :

$$M = M_0 + M_1 \quad (\text{II.B.32})$$

où M_0 et M_1 , respectivement d'ordre 0 et d'ordre 1 en fréquences de Rabi, sont définies par :

$$M_0 = \begin{bmatrix} -\Gamma_g & \Gamma_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_g/2 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & -\Gamma_g/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\Gamma_g + \Gamma_e)/2 & \Delta' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta' & -(\Gamma_g + \Gamma_e)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma_e/2 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & -\Gamma_e/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.B.33a})$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\Omega_1 & 0 & -2\Omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_2 & 0 \\ -2\Omega_1 & -\Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_1 & 0 \\ \Omega_2 & -\Omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_2 & 0 & \Omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_2 & 0 & -\Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.B.33b})$$

le calcul de la réponse du système peut se faire de façon itérative :

• *Ordre (1) :*

$$V^{(1)} = -M_0^{-1} \cdot S \quad (\text{II.B.34})$$

• *Ordre (n) vers ordre (n+1) :*

$$V^{(n+1)} = -M_0^{-1} M_1 V^{(n)} \quad (\text{II.B.35})$$

On obtient ainsi pour les termes non-nuls :

• *Réponse d'ordre 1 :* elle est due à l'excitation de la transition entre g et r par le champ à ω_l .

$$u_1^{(1)} = \frac{\Delta}{\Delta^2 + \frac{\Gamma_g}{4}} \cdot \Omega_1 \quad v_1^{(1)} = \frac{\Gamma_g/2}{\Delta^2 + \frac{\Gamma_g}{4}} \cdot \Omega_1 \quad (\text{II.B.36})$$

• Réponse d'ordre 2 :

L'excitation par le champ à ω_1 de la cohérence entre g et r amène un transfert de population vers l'état r , tandis que l'effet conjugué du champ à ω_2 sur la cohérence entre g et r engendre une cohérence entre g et e , induisant la transition à deux photons proprement dite :

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{1}{\Delta^2 + \frac{\Gamma_g}{4}} \cdot \Omega_1^2 \quad (\text{II.B.37a})$$

$$u_3^{(2)} = \frac{\Delta\delta - \frac{\Gamma_g}{2} \frac{\Gamma_e}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma_e}{4}} \frac{1}{\Delta^2 + \frac{\Gamma_g}{4}} \Omega_1 \Omega_2 \quad v_3^{(2)} = \frac{\Delta \left(\frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\Gamma_g}{2} \right) + \Delta' \frac{\Gamma_g}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma_e}{4}} \cdot \frac{1}{\Delta^2 + \frac{\Gamma_g}{4}} \cdot \Omega_1 \Omega_2 \quad (\text{II.B.37b})$$

• Réponse d'ordre 3 :

Elle est composée de termes en Ω_1^3 , provenant de la saturation de la transition entre g et r par le champ ω_1 , ainsi que de termes en $\Omega_1^2 \Omega_2$ et $\Omega_1 \Omega_2^2$ correspondant à l'interaction croisée à deux photons :

$$u_1^{(3)} = \frac{\delta^2 \left(\Delta^2 - \frac{\Gamma_g^2}{4} \right) - \Gamma_g \Delta \frac{\Gamma_e}{2}}{\left[\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4} \right] \left[\Delta^2 + \frac{\Gamma_g^2}{4} \right]} \Omega_1 \Omega_2^2 - \frac{2\Delta}{\left(\Delta^2 + \frac{\Gamma_g^2}{4} \right)^2} \Omega_1^3 \quad u_2^{(3)} = \frac{\delta}{\left[\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4} \right] \left[\Delta^2 + \frac{\Gamma_g^2}{4} \right]} \Omega_1^2 \Omega_2 \quad (\text{II.B.38a})$$

$$v_1^{(3)} = \frac{\frac{\Gamma_e}{2} \left(\Delta^2 - \frac{\Gamma_g^2}{4} \right) - \Gamma_g \Delta \delta}{\left[\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4} \right] \left[\Delta^2 + \frac{\Gamma_g^2}{4} \right]} \Omega_1 \Omega_2^2 - \frac{2 \frac{\Gamma_g}{2}}{\left(\Delta^2 + \frac{\Gamma_g^2}{4} \right)^2} \Omega_1^3 \quad v_2^{(3)} = \frac{\frac{\Gamma_e}{2}}{\left[\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4} \right] \left[\Delta^2 + \frac{\Gamma_g^2}{4} \right]} \Omega_1^2 \Omega_2 \quad (\text{II.B.38b})$$

Pour une excitation de la transition à deux photons telle que le désaccord Δ soit grand devant les largeurs naturelles des niveaux, ainsi que devant le désaccord à deux photons δ , les expressions ci-dessus se simplifient, en effectuant simplement la substitution :

$$\Delta^2 \pm \Gamma_g^2 / 4 \rightarrow \Delta^2 \quad (\text{II.B.39})$$

Les équations se décomposent alors en une partie résonnante en $\delta=0$, et une autre partie correspondant à la saturation de la transition entre g et r par le champ ω_1 . Ces derniers termes deviennent négligeables à la limite des grands désaccords à un photon $|\Delta| \gg |\delta|$. En conclusion, nous retiendrons les expressions suivantes comme résultat du calcul à la limite cubique dispersive :

• *Termes de dispersion :*

$$u_1^{cub} = \frac{\Omega_1 \Omega_2^2}{\Delta^2} \cdot \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} + \frac{\Omega_1}{\Delta} - \frac{2\Omega_1^3}{\Delta^3} \quad u_2^{cub} = \frac{\Omega_1^2 \Omega_2}{\Delta^2} \cdot \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} \quad (\text{II.B.40a})$$

• *Termes d'absorption :*

$$v_1^{cub} = \frac{\Omega_1 \Omega_2^2}{\Delta^2} \cdot \frac{\frac{\Gamma_e}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} + \frac{\Omega_1}{\Delta^2} \frac{\frac{\Gamma_g}{2}}{\Delta^2} - \frac{2\Omega_1^3}{\Delta^4} \frac{\frac{\Gamma_g}{2}}{\Delta^4} \quad v_2^{cub} = \frac{\Omega_1^2 \Omega_2}{\Delta^2} \cdot \frac{\frac{\Gamma_e}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma_e^2}{4}} \quad (\text{II.B.40b})$$

Loin de la résonance à deux photons, i.e. pour $|\delta| \gg \Gamma_e / 2$, les effets d'absorption qui décroissent en $1/\delta^2$, deviennent négligeables devant les effets de dispersion décroissant seulement en $1/\delta$. A cette limite dispersive (figure II.B.2), les champs subissent alors uniquement des déphasages ϕ_1 et ϕ_2 dans la traversée du milieu. Si, pour le champ à ω_2 , le déphasage ϕ_2 est dû seulement au couplage à deux photons, le déphasage ϕ_1 sur le champ à ω_1 , est quant à lui, modifié par la dispersion linéaire et non linéaire à un photon :

$$\phi_1 = \phi_1^{lin} + \phi_1^{nl(1 \text{ photon})} + \phi_1^{nl(2 \text{ photons})} \quad (\text{II.B.42})$$

$$\phi_1^{lin} = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\Gamma_g / 2}{\Delta} \quad (\text{II.B.43a})$$

$$\phi_1^{nl(1 \text{ photon})} = -\alpha_0 \ell \cdot \frac{2\Omega_1^2 \Gamma_g / 2}{\Delta^3} \quad (\text{II.B.43b})$$

$$\phi_1^{nl(2 \text{ photons})} = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\Omega_2^2 \Gamma_g / 2}{\Delta^2 \delta} \quad (\text{II.B.43c})$$

$$\phi_2 = \phi_2^{nl(2 \text{ photons})} = \alpha_0 \ell \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \cdot \frac{\Omega_1^2 \Gamma_e / 2}{\Delta^2 \delta} \quad (\text{II.B.43d})$$

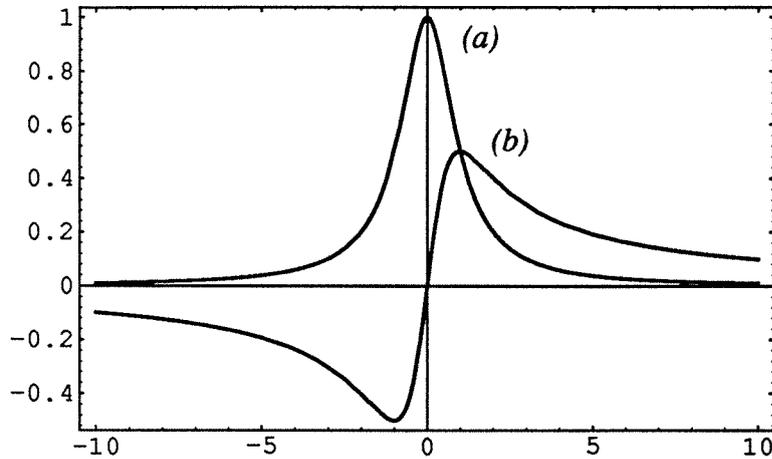


FIGURE II.B.2 :
 Comparaison entre une
 courbe d'absorption
 (lorentzienne (a)) et une
 courbe de dispersion (b).

En réutilisant les relations de définition des fréquences de Rabi (II.B.5a,b), la relation (II.B.24) reliant Γ_g au dipôle entre g et r , ainsi que la définition de l'épaisseur optique à résonance $\alpha_o \ell$ (II.B.26), les déphasages non-linéaires à deux photons peuvent être écrits sous une forme plus symétrique :

$$\phi_1^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \cdot \ell \cdot \frac{\omega_{rg} \omega_{er}}{2 \varepsilon_0 c} \frac{(\vec{d}_{rg} \cdot \vec{\varepsilon}_1)^2 (\vec{d}_{er} \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2}{(\hbar \Delta)^2 (\hbar \delta)} \cdot \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\omega_1} \quad (\text{II.B.44.a})$$

$$\phi_2^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \cdot \ell \cdot \frac{\omega_{rg} \omega_{er}}{2 \varepsilon_0 c} \frac{(\vec{d}_{rg} \cdot \vec{\varepsilon}_1)^2 (\vec{d}_{er} \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2}{(\hbar \Delta)^2 (\hbar \delta)} \cdot \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{\omega_2} \quad (\text{II.B.44b})$$

Ces expressions montrent que l'on peut exprimer les déphasages non-linéaires sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi_1^{nl(2 \text{ photons})} &= f I_2 \\ \phi_2^{nl(2 \text{ photons})} &= f I_1 \end{aligned}$$

(II.B.45)

où I_1 et I_2 sont les intensités des champs exprimés en flux de photons en supposant les faisceaux monomodes. En particulier, à nombre de photons égal (soit $I_1 = I_2$), les déphasages non-linéaires sont identiques : une telle relation est caractéristique d'un effet paramétrique, correspondant à l'absorption de deux photons puis à leur réémission.

IV. RESOLUTION ANALYTIQUE : ELIMINATION DU NIVEAU RELAIS.

Pour des grands désaccords à un photon, (i.e. $|\Delta|$ et $|\Delta'|$ grands devant toutes les autres grandeurs caractéristiques), une approximation usuelle consiste à éliminer dans les équations de Bloch les grandeurs liées au niveau relais, soit, pour les champs moyens en régime stationnaire, les variables (u_1, v_1) , (u_2, v_2) et σ_r .

D'après (II.B.14.h) :

$$\sigma_r = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_g} \sigma_e + \frac{2\Omega_1}{\Gamma_g} v_1 - \frac{2\Omega_2}{\Gamma_g} v_2 \quad (\text{II.B.46})$$

En reportant dans (II.B.14 a, b) et (II.B.14 e, d), on obtient les équations donnant (u_1, v_1) , et (u_2, v_2) en fonction de (u_3, v_3) et σ_e :

$$\begin{cases} -\frac{\Gamma_g}{2} u_1 + \Delta v_1 = \Omega_2 v_3 \\ \Delta u_1 + \left(\frac{\Gamma_g}{2} + \frac{4\Omega_1^2}{\Gamma_g} \right) v_1 - \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Gamma_g} v_2 = \Omega_2 u_3 + \Omega_1 - \Omega_1 \left(1 + \frac{2\Gamma_e}{\Gamma_g} \right) \sigma_e \end{cases} \quad (\text{II.B.47a})$$

$$\begin{cases} -\frac{\Gamma_g + \Gamma_e}{2} u_2 + \Delta' v_2 = -\Omega_1 v_3 \\ \Delta' u_2 + \left(\frac{\Gamma_g + \Gamma_e}{2} + \frac{4\Omega_2^2}{\Gamma_g} \right) v_2 - \frac{2\Omega_1\Omega_2}{\Gamma_g} v_1 = -\Omega_1 u_3 + \Omega_2 \left(\frac{\Gamma_e}{\Gamma_g} - 1 \right) \sigma_e \end{cases} \quad (\text{II.B.47b})$$

Pour $|\Delta|$ et $|\Delta'|$ grands devant les fréquences de Rabi Ω_1 et Ω_2 , et devant δ , ainsi que devant les taux de désexcitation Γ_g et Γ_e , ce système se simplifie en :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\Omega_1}{\Delta} + \frac{\Omega_2}{\Delta} u_3 - \frac{\Omega_1}{\Delta} \left(1 + \frac{2\Gamma_e}{\Gamma_g} \right) \sigma_e \\ v_1 = \frac{\Omega_2}{\Delta} v_3 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = -\frac{\Omega_1}{\Delta'} u_3 + \frac{\Omega_2}{\Delta'} \left(\frac{\Gamma_e}{\Gamma_g} - 1 \right) \sigma_e \\ v_2 = -\frac{\Omega_1}{\Delta'} v_3 \end{cases} \quad (\text{II.B.48})$$

La différence par rapport au modèle cubique apparaît dans la dépendance de u_1 et u_2 , en fonction de la population σ_e sur le niveau supérieur. En effet, l'absorption à deux photons induit un transfert de population de g vers e , qui est ensuite redistribué par relaxation vers les différents niveaux. Les variations de population entraînent alors une modification des indices pour les différentes transitions.

En reportant les équations données en (II.B.48) dans (II.B.14 e, f, i) on obtient ainsi l'évolution du système formé par g et e . Pour simplifier les équations, nous nous restreindrons au voisinage de la résonance à deux photons, pour laquelle $|\delta| \ll |\Delta|$ et $|\Delta'|$, soit $\Delta' \approx -\Delta$. Les équations d'évolution de u_3 , v_3 et σ_e s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{u}_3 = -\frac{\Gamma_e}{2} u_3 + \left(\delta - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} + \frac{\Omega_1^2}{\Delta} \right) v_3 \\ \dot{v}_3 = -\left[\delta - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} + \frac{\Omega_1^2}{\Delta} \right] u_3 - \frac{\Gamma_e}{2} v_3 + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \left[1 - \left(2 + \frac{\Gamma_e}{\Gamma_g} \right) \sigma_e \right] \\ \dot{\sigma}_e = -\Gamma_e \sigma_e + \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} v_3 \end{cases} \quad (\text{II.B.49})$$

Le régime stationnaire est donné par :

$$u_3^{st} = \frac{\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \left(\delta - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} + \frac{\Omega_1^2}{\Delta} \right)}{\left(\delta - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} + \frac{\Omega_1^2}{\Delta} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma_e}{2} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \right)^2 \left[2 + \frac{\Gamma_e}{\Gamma_g} \right]} \quad (\text{II.B.50.a})$$

$$v_3^{st} = \frac{\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \frac{\Gamma_e}{2}}{\left(\delta - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} + \frac{\Omega_1^2}{\Delta} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma_e}{2} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \right)^2 \left[2 + \frac{\Gamma_e}{\Gamma_g} \right]} \quad (\text{II.B.50.b})$$

$$\sigma_e^{st} = \frac{\left(\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \right)^2}{\left(\delta - \frac{\Omega_2^2}{\Delta} + \frac{\Omega_1^2}{\Delta} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma_e}{2} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \right)^2 \left[2 + \frac{\Gamma_e}{\Gamma_g} \right]} \quad (\text{II.B.50.c})$$

De façon évidente, un développement limité d'ordre deux en fréquences de Rabi redonne bien les résultats de (II.B.37 b et c) à l'approximation des grands désaccords à un photon :

$$\begin{cases} u_3^{st} \approx u_3^{(2)} \approx \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \frac{\delta}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma_e}{2} \right)^2} \end{cases} \quad (\text{II.B.51.a})$$

$$\begin{cases} v_3^{st} \approx v_3^{(2)} \approx \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta} \frac{\Gamma_e / 2}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma_e}{2} \right)^2} \end{cases} \quad (\text{II.B.51.b})$$

Ces équations montrent que, à cause des déplacements lumineux des niveaux atomiques sous l'action des deux champs lasers, la résonance à deux photons n'a plus lieu exactement en $\delta = 0$ mais en :

$$\delta_{\text{résonance}} = \frac{\Omega_2^2}{\Delta} - \frac{\Omega_1^2}{\Delta} \quad (\text{II.B.52})$$

Pour préserver l'accord avec le modèle cubique (donnant des phénomènes résonnants en $\delta=0$), on peut finalement utiliser les critères *qualitatifs* suivants :

• *Condition n° 1* : $|\delta_{\text{résonance}}| \ll |\delta|$, soit :

$$\varepsilon_1 = \frac{|\Omega_2^2 - \Omega_1^2|}{|\Delta| |\delta|} \ll 1$$

Afin de rendre l'élargissement des raies négligeables, il faut également, qu'à la limite dispersive, correspondant à $|\delta| \gg \Gamma_e / 2$:

• *Condition n° 2* : $\left(\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta}\right)^2 \left[2 + \frac{\Gamma_e}{\Gamma_g}\right] \ll \delta^2$, soit :

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\Omega_1 \cdot \Omega_2}{\Delta \cdot \delta}\right)^2 \left[2 + \frac{\Gamma_e}{\Gamma_g}\right] \ll 1$$

En pratique, nous verrons que les valeurs des paramètres expérimentaux choisis correspondront à $\Omega_1^2 / (\Delta \delta) \approx \Omega_2^2 / (\Delta \delta) \ll 1$, si bien que ces deux conditions seront effectivement vérifiées. En reportant (II.B.50) dans (II.B.48), on obtient les expressions de (u_1, v_1) et (u_2, v_2) , qui n'ont pas d'interprétation simple. On peut néanmoins remarquer que u_1 et u_2 sont composés d'une partie variant suivant une courbe de dispersion autour de la résonance à deux photons, ainsi que d'une partie variant suivant une courbe d'absorption. Le premier terme correspond directement au processus de dispersion croisée, tandis que le deuxième traduit la modification de l'indice du milieu lorsqu'il y a transfert de population entre les différents niveaux.

Pour un système atomique tel que $\Gamma_e \approx \Gamma_g$, on obtient en reportant dans l'équation (II.B.48) :

$$u_1^{st} \approx \frac{\Omega_1}{\Delta} + \frac{\Omega_2}{\Delta} u_3^{st} - \frac{3\Omega_1}{\Delta} \sigma_e^{st} \quad u_2^{st} \approx \frac{\Omega_1}{\Delta} u_3^{st} \quad (\text{II.B.53})$$

Puisqu'il ne peut apparaître de différence de population entre r et e en régime stationnaire lorsque $\Gamma_e = \Gamma_g$, u_2^{st} garde toujours une forme de dispersion. Par contre, sur u_1^{st} , les effets de population co-existent toujours avec les effets liés à la dispersion croisée. En particulier, si les premiers deviennent prépondérants, u_1^{st} peut varier suivant une courbe d'absorption autour de la résonance à deux photons.

En conclusion, ce modèle nous a permis de retrouver que la dispersion croisée d'ordre trois pour les champs moyens peut facilement être masquée par des effets de transfert de populations et par les déplacements lumineux des niveaux d'énergie.

V. VALIDITE DES DIFFERENTS MODELES : COMPARAISON AVEC LA RESOLUTION NUMERIQUE DES E.B.O.

La validité des différents modèles, et en particulier, celle de l'approximation cubique, est testée en comparant leurs résultats avec celui obtenu en effectuant une résolution numérique des E.B.O. pour le régime stationnaire, correspondant à l'équation matricielle (II.B.17).

1) Ordre de grandeur des déphasages non-linéaires.

Les déphasages non-linéaires $\phi_1^{nl(2 \text{ photons})}$ et $\phi_2^{nl(2 \text{ photons})}$ sont donnés par les équations (II.B.43.d) et (II.B.43.e), qui dépendent :

- de l'épaisseur optique à résonance $\alpha_o \ell$;
- des fréquences de Rabi Ω_1 et Ω_2 , caractérisant le couplage avec les deux transitions;
- des désaccords à un et deux photons Δ et δ , par rapport aux résonances atomiques

Le système expérimental utilise le niveau $3p_{3/2}$ du sodium comme niveau relais. La transition du bas correspond ainsi à la raie de résonance Δ_2 du sodium ($\lambda = 589.0$ nm), de largeur totale 10 MHz et ayant une intensité de saturation $I_{sat} \sim 6$ mW/cm².

Les expériences réalisées correspondent à des valeurs typiques pour les désaccords :

$$\begin{array}{lll} \Delta \sim 2 \text{ GHz} & \text{soit} & \Delta \sim 400 \cdot \Gamma_g / 2 \\ \delta \sim 0.5 \text{ GHz} & \text{soit} & \delta \sim 100 \cdot \Gamma_g / 2 \end{array}$$

Pour des intensités lumineuses de l'ordre de 600 mW/cm^2 , les fréquences de Rabi correspondantes sont déterminées par :

$$\frac{\Omega}{\Gamma_g / 2} \sim \sqrt{\frac{I}{I_{sat}}}$$

soit :

$$\Omega_1 \sim \Omega_2 \sim 20 \cdot \Gamma_g / 2$$

Pour une épaisseur optique à résonance :

$$\alpha_o \ell \sim 1000$$

correspondant à une densité dans le jet de $6.10^{11} \text{ atomes/cm}^3$, et pour une longueur d'interaction $\ell = 2 \text{ cm}$, le déphasage non-linéaire vaut :

$$\phi_1^{nl} \sim 6.10^{-3}$$

correspondant aux paramètres $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = 3.10^{-4}$, caractérisant la validité des deux conditions définies précédemment.

Il est intéressant de calculer l'indice non-linéaire correspondant, qui est défini par :

$$n = n_o + n_2 |E|^2$$

où $|E|$ est l'amplitude du champ électrique associé à l'onde lumineuse (pour $I \sim 600 \text{ mW/cm}^2$, $|E| \sim 2.10^3 \text{ V m}^{-1}$). Le déphasage non-linéaire étant donné par :

$$\phi_{nl} = n_2 |E|^2 \cdot 2\pi \frac{\ell}{\lambda}$$

on en déduit : $n_2 \sim 6.10^{-15} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-2}$. Pour comparaison, l'indice non-linéaire de la silice est typiquement $n_2 \sim 2.10^{-13} \text{ esu}$ [Stolen 73], soit environ $3.10^{-21} \text{ m}^2/\text{V}^2$. Dû au fait que le mécanisme non-linéaire dans la transition à deux photons est simultanément résonnant en Δ et δ , les non-linéarités intrinsèques que nous pouvons espérer atteindre pour notre dispositif sont beaucoup plus élevées que celles usuellement observées dans un milieu non-résonnant. Inversement, si l'on désire obtenir un couplage important par effet Kerr dans la silice il est nécessaire, d'une part d'augmenter la longueur d'interaction, et, d'autre part, d'augmenter l'intensité lumineuse en confinant l'onde dans un guide, ce qui justifie l'utilisation de fibres optiques dans l'expérience effectuée par Levenson *et al.* (cf. Chapitre I §CII et Annexe II).

2) Comparaison des différents modèles avec la résolution numérique.

a) Validité de l'approximation paramétrique.

La figure II.B.3 donne le résultat de la résolution numérique pour les paramètres suivants:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 5 \Gamma_g / 2 \quad \Delta = -400 \Gamma_g / 2 \quad \Gamma_e = 0.8 \Gamma_g$$

Le rapport des durées de vie correspond aux transitions du sodium utilisées dans l'expérience, entre $3s_{1/2}$ et $3p_{3/2}$ (ayant une durée de vie de 16.5 ns) et $3d_{3/2}$ (ayant une durée de vie de 20 ns). Les courbes représentent l'évolution de (u_1, v_1) et de (u_2, v_2) , ainsi que des populations (σ_e, σ_r) lorsque δ varie autour de la résonance à deux photons.

La figure II.B.4 compare le résultat pour u_1 et u_2 de la limite cubique, ainsi que du modèle à deux photons effectifs, avec des points obtenus par résolution numérique. Dans tous les cas, l'accord entre la résolution numérique exacte et les différents modèles est très bon et on vérifie les résultats suivants :

- loin de la zone d'absorption à deux photons (i.e. pour $|\delta| \gg \Gamma_e / 2$), le système peut être bien approximé par la limite cubique dispersive ;
- le modèle à deux niveaux effectifs décrit correctement l'évolution du système autour de la résonance à deux photons située : $\delta = 0$.

Ces résultats montrent qu'en particulier u_1 et u_2 évoluent suivant une forme de dispersion, tandis que v_1 et v_2 suivent des courbes d'absorption. La courbe donnant $u_1(\delta)$ est effectivement translatée de Ω_1/Δ , valeur correspondant au déphasage linéaire (eq. II.B.43). Une meilleure approximation consiste à centrer $u_1(\delta)$ sur la valeur correspondant à l'interaction à un photon entre le faisceau à ω_1 et la transition $g \rightarrow r$, donnée par :

$$u_1^{1 \text{ photon}} = \frac{\Delta \Omega_1}{\left(\frac{\Gamma_g}{2}\right)^2 + \Delta^2 + 2\Omega_1^2} \quad (\text{II.B.54})$$

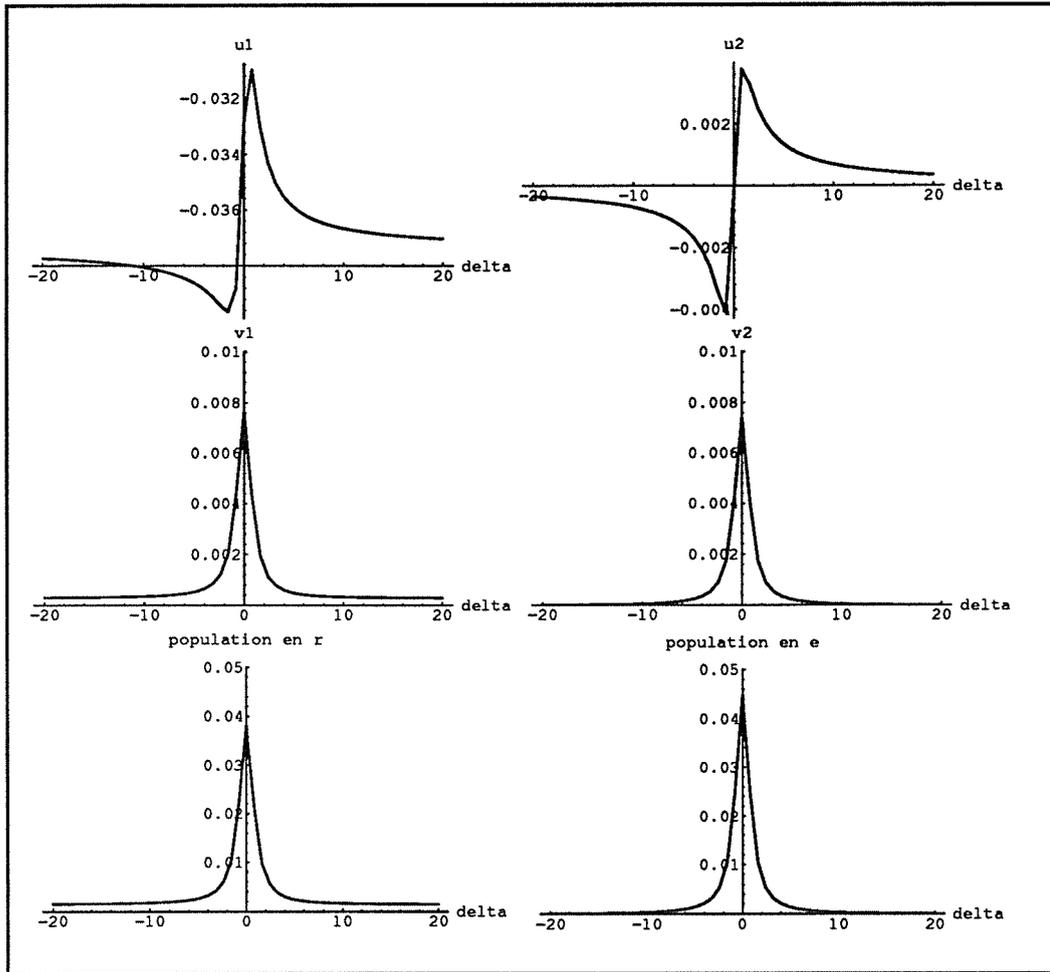


FIGURE II.B.3 :

Résultats de la résolution numérique des E.B.O., au voisinage de la résonance à deux photons.

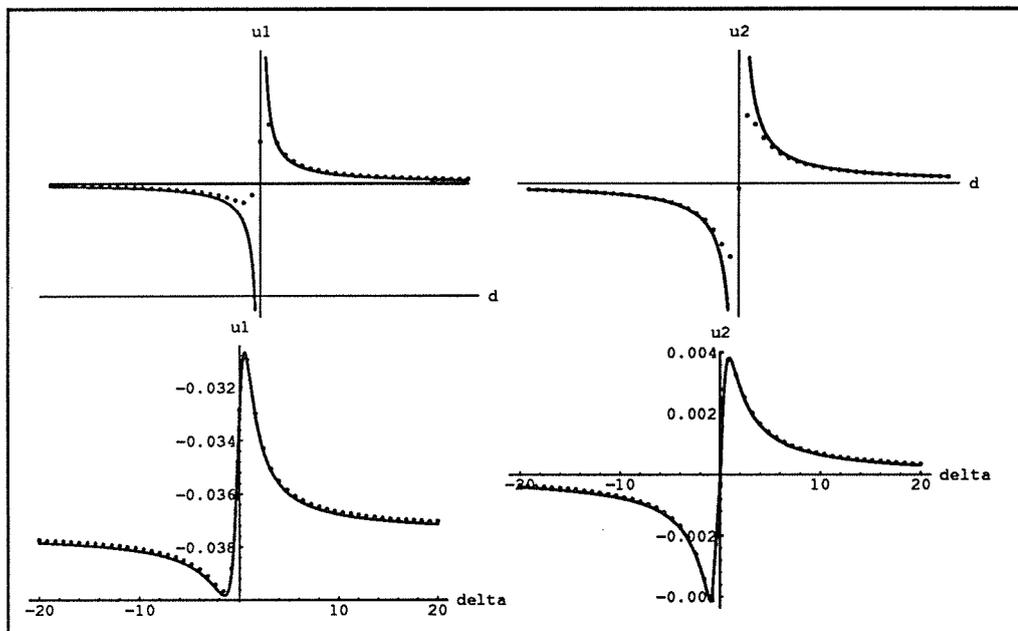


FIGURE II.B.4 :

Comparaison des deux modèles (limite cubique dispersive et élimination du niveau relais) avec la résolution numérique des EBO, pour les variations de $u1$ et de $u2$ autour de la résonance à deux photons.

La comparaison avec le modèle cubique peut alors être quantifiée à l'aide des paramètres d'erreur définis en fonction des valeurs de u_1 et u_2 calculées numériquement, par les relations :

$$\xi_1 = \frac{\frac{\Omega_2^2}{\Delta^2 \delta} - \left(\frac{u_1 - u_1^{l \text{ photon}}}{\Omega_1} \right)}{\frac{u_1 - u_1^{l \text{ photon}}}{\Omega_1}} \quad \xi_2 = \frac{\frac{\Omega_1^2}{\Delta^2 \delta} - \frac{u_2}{\Omega_2}}{\frac{u_2}{\Omega_2}} \quad (\text{II.B.54})$$

Les courbes donnant la variation de ξ_1 et ξ_2 autour de la résonance à deux photons sont représentées sur la figure II.B.5. Dans la zone de dispersion (ici, $|\delta| > 20\Gamma_g/2$), l'erreur introduite par le modèle cubique est inférieure à 1 %.

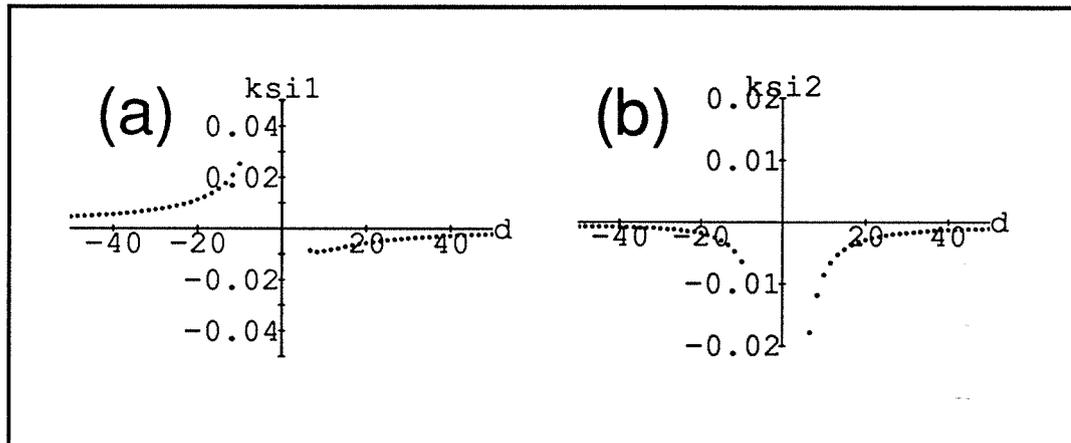


FIGURE II.B.5 :

Variation autour de la résonance à deux photons, des paramètres d'erreur caractérisant l'écart par rapport à la limite cubique dispersive, pour les déphasages subis par les champs moyens excitant respectivement les transitions de g vers r (a), et de r vers e (b).

b) Influence des différents paramètres

Pour augmenter le déphasage non-linéaire, il est a priori possible, soit d'augmenter Ω_1 , soit d'augmenter Ω_2 , soit de diminuer Δ .

En testant numériquement l'effet de ces différents paramètres, il apparaît qu'une augmentation de Ω_1 entraîne une forte distorsion des courbes de résonance. En particulier, la variation de u_1 s'effectue alors plutôt en forme de courbe d'absorption. Ceci est caractéristique (d'après les résultats du modèle à deux niveaux effectifs) du fait que les effets de population

deviennent prédominants et, qu'ainsi, la non-linéarité ne correspond plus au modèle cubique*. La déformation des courbes est par contre beaucoup plus faible dans le cas d'une augmentation de Ω_2 , ou d'une diminution de Δ . Pour conserver le meilleur accord avec le modèle cubique, il est néanmoins préférable de diminuer Δ plutôt que d'augmenter Ω_2 . Cette règle qualitative, énonçant que pour augmenter les déphasages non-linéaires, il est préférable de diminuer le désaccord à un photon plutôt que d'augmenter les intensités laser, s'est avérée être bien vérifiée expérimentalement.

c) Conclusion.

Cette étude détaillée peut paraître a priori fastidieuse, mais elle a été un guide très utile pour la suite du travail. L'espace des paramètres ($\delta, \Delta, \Omega_1, \Omega_2$) est à quatre dimensions et il nous fallait déterminer une région de cet espace où l'on puisse obtenir un déphasage non-linéaire pour les champs moyens le plus proche possible de la limite cubique dispersive. Comme indiqué au début de ce chapitre, notre idée directrice initiale a été d'optimiser les déphasages non-linéaires à la limite cubique dispersive, de façon que les désaccords à un et deux photons soient suffisamment grands pour supposer que les bruits rajoutés par les atomes soient négligeables. Néanmoins, cela n'exclut pas d'autres configurations.

VI. AUTRE FACON DE REALISER LA DISPERSION A DEUX PHOTONS DANS UNE TRANSITION ATOMIQUE EN ECHELLE.

Bachor et Fisk ont proposé d'obtenir le couplage QND en utilisant également une transition à deux photons dans un atome à trois niveaux. Si l'intensité d'un des faisceaux est suffisante pour induire un déplacement lumineux du niveau relais, il y aura une modification de l'indice de propagation vu par l'autre faisceau [Bachor 89]. Les auteurs proposent en particulier une configuration correspondant à l'effet Autler-Townes Optique [Fisk 86 a,b]. Un laser intense est accordé sur la résonance de la transition $r \rightarrow e$, tandis qu'un laser sonde peu intense est balayé autour de la résonance entre g et r . On obtient alors un profil d'absorption à deux pics (désigné usuellement comme doublet Autler-Townes), symétrique lorsque le laser intense est à résonance ($\Delta' = 0$) et devenant asymétrique lorsque le laser intense est désaccordé ($\Delta' \neq 0$) [Gray 78]. Pour $\delta_e = 0$, la séparation entre les deux pics est égale à $2\Omega_2$ (avec les notations utilisées dans ce mémoire), c'est-à-dire proportionnelle à la fréquence de Rabi caractérisant le couplage du laser intense avec la transition $r \rightarrow e$.

* Une évolution tout-à-fait similaire pour une transition à deux photons égaux, avait été calculée précédemment par Grynberg et al. [Grynberg 80].

Le laser sonde se trouve en fait couplé à deux états virtuels, avec une fréquence de Rabi $\Omega_1/2$ (puisque chaque état virtuel est composé de façon égale de l'état r et de e). En supposant son intensité suffisamment faible pour ne pas perturber le système, le faisceau sonde subira, loin des deux résonances, une simple dispersion, donnée par la somme des dispersions linéaires produites pour chaque résonance. La quadrature u_1 du dipôle s'écrit alors :

$$u_1 \approx \frac{\Omega_1/2}{\Delta - \Omega_2} + \frac{\Omega_1/2}{\Delta + \Omega_2} \quad (\text{II.B.55})$$

soit, pour un désaccord Δ grand devant la fréquence de Rabi Ω_2 ,

$$u_1 \sim \frac{\Omega_1}{\Delta} + \frac{\Omega_2^2}{\Delta^3} \Omega_1 \quad (\text{II.B.56})$$

redonnant ainsi le résultat que nous avons obtenu à la limite cubique (les désaccords correspondant à $\delta = \Delta$, puisque $\Delta' = 0$).

La proposition de Bachor et Fisk correspond simplement à une autre présentation de la dispersion à deux photons, qui est en fait le phénomène apparaissant à l'ordre le plus bas en fonction des déplacements lumineux des niveaux. Par contre, on peut montrer [Gheri 92] que pour les bruits atomiques, la situation qu'ils envisagent pour laquelle $\Delta' = 0$, avec Δ et δ grands devant les largeurs naturelles, est très différente au cas où Δ , Δ' et δ sont tous grands*. Les atomes introduisent alors un excès de bruit de phase sur la transition du haut. Si on utilise le laser résonnant avec cette transition comme faisceau signal, on peut toujours vérifier la condition QND pour les fluctuations d'intensité ; par contre, le bruit de phase introduit par la mesure est alors beaucoup plus grand que celui donné par la transformation paramétrique idéale. Evidemment, cet excès de bruit de phase est rédhibitoire si on utilise la configuration inverse, correspondant au faisceau de mesure résonnant avec la transition du haut, car, dans ce cas, l'information due à l'effet Kerr croisé est alors complètement masquée.

* Nous retrouverons également un tel phénomène pour nos observations expérimentales (Chapitre III).

C. DISPERSION A DEUX PHOTONS POUR LE SYSTEME REEL ETUDIE

I. SYSTEME ETUDIE.

1) Critères de choix.

En fonction des résultats obtenus précédemment, le système choisi doit répondre à des impératifs, à la fois théoriques et expérimentaux, que nous résumons ici :

- (i) ce doit être un système à trois niveaux atomiques pour lequel les longueurs d'onde des transitions sont facilement accessibles par des lasers à colorants monomodes.
- (ii) ce doit être un atome pour lequel il est possible d'atteindre de fortes densités en jet atomique ; en effet, les déphasages non-linéaires sont directement proportionnels à l'épaisseur optique à résonance $\alpha_0 \ell$.
- (iii) il est également commode de choisir un système à trois niveaux présentant des durées de vie approximativement égales pour les deux transitions ; dans ce cas, les effets de saturation dus à l'apparition de population sur le niveau excité sont minimisés.

Les points (i) et (ii) suggèrent d'utiliser des atomes alcalins, qui sont parfaitement connus sur le plan spectroscopique [Lindgard 77]. La figure II.C.1 schématise différentes transitions envisageables pour Li, Na, Rb et Cs. Le point (iii) restreint fortement le nombre de transitions utilisables. En effet, la force d'oscillateur de la transition supérieure est en général nettement plus faible que celle de la transition inférieure (raie de résonance). Ce critère exclut en particulier le rubidium (qui, en se référant aux expériences antérieures de bistabilité à deux photons, était a priori un bon candidat)*, ainsi que le césium qui possède une structure analogue.

* Le rubidium était également le seul atome dans lequel la transition à deux photons pouvait être excitée avec un seul laser (transitions à deux photons égaux), tout en gardant un désaccord à un photon Δ suffisamment faible, pour des non-linéarités résonnantes en Δ .

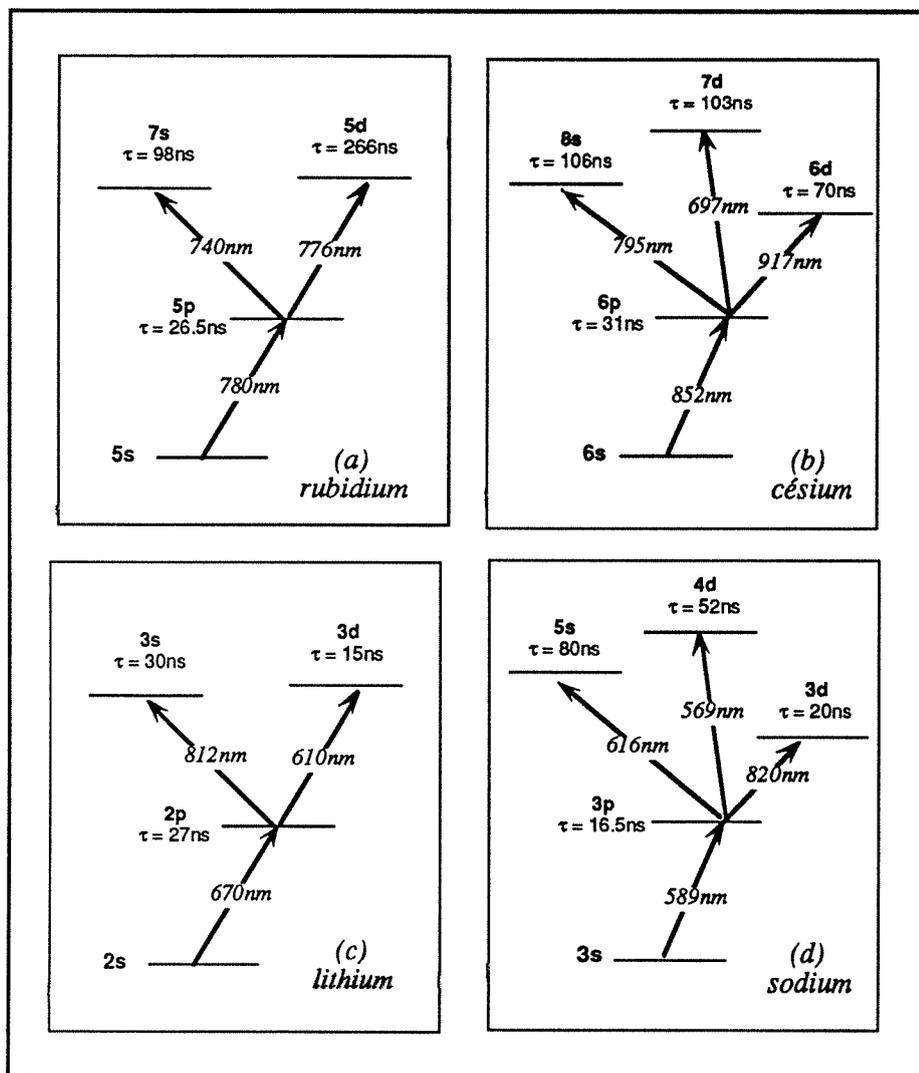
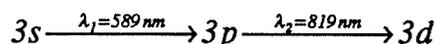


FIGURE II.C.1 : Quelques transitions envisageables parmi les atomes d'alcalins, permettant de réaliser un système à trois niveaux en échelle.

Des raisons de réactivité chimique (le Li étant nettement plus réactif que le Na), ainsi que la valeur faible de la pression de vapeur saturante de l'atome de lithium (ce qui nécessite, pour atteindre les densités souhaitées, de chauffer le four beaucoup plus fortement qu'avec les autres atomes), nous ont également conduit à choisir *l'atome du sodium*, pour les transitions suivantes :



Les durées de vie des niveaux 3p et 3d sont respectivement de 16.5 ns et 20 ns.

Remarque 1 :

L'atome de baryum possède une transition à deux photons $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$ très intense. Cette transition présente le grand avantage de correspondre à un système à trois états, sans structure hyperfine [Fisk 86a,b]. Malheureusement, le baryum est un alcalino-terreux et, en raison de sa pression de vapeur saturante faible, il est également nécessaire de chauffer beaucoup plus fortement qu'avec le sodium pour atteindre la densité souhaitée.

Remarque 2 :

Un autre critère de choix a été que les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 correspondant aux deux transitions soient nettement séparées. En effet, les diverses expériences utilisent toutes des doubles cavités, ayant une géométrie linéaire. Les miroirs doivent alors être doublement traités (par exemple, pour être R_{\max} à λ_1 et transmettre 2 % à λ_2), et il est d'autant plus facile d'obtenir ces spécifications que les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont différentes. Cet impératif constitue entre autre, une nouvelle raison de ne pas utiliser le lithium.

2) Structure de la transition.*a) Structure fine.*

Les différents sous-niveaux sont détaillés sur la figure II.C.2. Les sous-niveaux fins du niveau intermédiaire (dont les transitions vers le fondamental correspondent au doublet de résonance D_1 et D_2 du sodium) sont suffisamment différents en énergie pour que, dans le processus à deux photons, on ne considère qu'un seul de ces sous-niveaux comme niveau relais (Δ de l'ordre de quelques GHz, pour un écart entre les deux sous-niveaux de 516 GHz, correspondant à 0.6 nm). Les différentes transitions envisageables sont donc :

$$(a) : \quad 3s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 3p \ ^2P_{3/2} \rightarrow 3d \ ^2D_{3/2}$$

$$(b) : \quad 3s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 3p \ ^2P_{3/2} \rightarrow 3d \ ^2D_{5/2}$$

$$(c) : \quad 3s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 3p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 3d \ ^2D_{3/2}$$

Les processus (a) et (c) ne correspondent pas à un système à trois niveaux, car le niveau $3d \ ^2D_{3/2}$ peut se désexciter radiativement vers la composante fine distincte de celle utilisée comme niveau relais. Ce n'est évidemment pas le cas pour le processus (b), car le niveau $3d \ ^2D_{5/2}$, n'est couplé radiativement qu'au niveau $3p \ ^2P_{3/2}$.

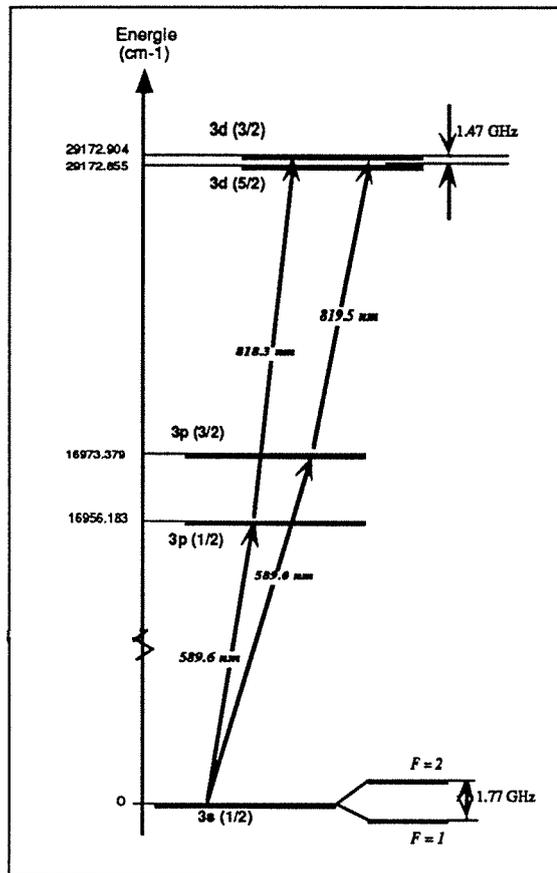


FIGURE II.C.2 :
Niveaux d'énergie de l'atome de sodium correspondant aux transitions retenues comme les plus favorables du point de vue expérimental.

b) Structure hyperfine.

Dans l'état fondamental, les deux sous-niveaux hyperfins ($F = 2$ puis $F = 1$) sont séparés de 1.77 GHz [Arimondo 77]. L'ordre de grandeur des écarts hyperfins pour les niveaux excités est typiquement de quelques MHz (par exemple, les écarts hyperfins du niveau $3p \ ^2P_{3/2}$ sont de l'ordre de 20 MHz), i.e. comparable aux largeurs naturelles des niveaux et nettement inférieur à l'effet Doppler résiduel dans le jet (200 MHz FWHM). La dispersion à deux photons étant obtenue pour des désaccords à résonance très supérieurs à ces valeurs, la structure hyperfine des niveaux supérieurs n'est pas résolue.

Pour des valeurs des désaccords très supérieures à la largeur Doppler, il est donc possible de considérer uniquement la structure fine des niveaux supérieurs, en traitant les deux sous-niveaux hyperfins du fondamental comme deux niveaux distincts. En négligeant les effets de pompage entre ces sous-niveaux (ce qui est cohérent avec les autres approximations), les intensités des raies partant de $F = 1$ (notée $I_{F=1}$) et de $F = 2$ (notée $I_{F=2}$) sont alors a priori dans le rapport des populations, et donc des dégénérescences des sous-niveaux (soit $I_{F=2}/I_{F=1} = 5/3$).

II. DEPHASAGES NON-LINEAIRES CORRESPONDANT A LA DISPERSION A DEUX PHOTONS (LIMITE CUBIQUE DISPERSIVE).

1) Expressions générales.

Pour obtenir les déphasages non-linéaires pour le système réel, il est nécessaire de tenir compte de l'interférence entre les différents chemins correspondant aux états $|J_g M_g\rangle$, $|J_e M_e\rangle$ et $|J_r M_r\rangle$. En tenant compte des polarisations des deux faisceaux (pouvant, a priori, être quelconques), les expressions (II.B.44.a) et (II.B.44.b) donnant les déphasages non-linéaires deviennent donc :

$$\begin{aligned} \Phi_1^{nl(2 \text{ photons})} &= n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_{rg} \omega_{er}}{2\epsilon_0 c} \frac{1}{(\hbar\Delta)^2} \frac{1}{\hbar\delta} \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{\omega_2} \cdot \\ &\frac{1}{2J_g + 1} \sum_{M_g} \sum_{M_r} \sum_{M_e} \sum_{M'_e} \langle J_g M_g | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_1^* | J_r M_r \rangle \langle J_r M_r | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_2^* | J_e M_e \rangle \\ &\langle J_e M_e | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_2 | J_r M'_r \rangle \langle J_r M'_r | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_1 | J_g M_g \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.C.1.a})$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{nl(2 \text{ photons})} &= n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_{rg} \omega_{er}}{2\epsilon_0 c} \frac{1}{(\hbar\Delta)^2} \frac{1}{\hbar\delta} \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\omega_1} \cdot \\ &\frac{1}{2J_g + 1} \sum_{M_g} \sum_{M_r} \sum_{M_e} \sum_{M'_e} \langle J_g M_g | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_1^* | J_r M_r \rangle \langle J_r M_r | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_2^* | J_e M_e \rangle \\ &\langle J_e M_e | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_2 | J_r M'_r \rangle \langle J_r M'_r | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_1 | J_g M_g \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.C.1.b})$$

La dépendance du problème, en fonction des polarisations des faisceaux et des structures fines des niveaux, est donc contenue dans un facteur de forme \mathcal{F} , homogène au carré d'un moment dipolaire et défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2J_g + 1} \sum_{M_g} \sum_{M_r} \sum_{M_e} \sum_{M'_e} \langle J_g M_g | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_1^* | J_r M_r \rangle \langle J_r M_r | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_2^* | J_e M_e \rangle \\ &\langle J_e M_e | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_2 | J_r M'_r \rangle \langle J_r M'_r | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_1 | J_g M_g \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.C.2})$$

2) Application à notre système réel.

a) Position du Problème.

Le facteur de forme peut se calculer de façon analytique. En introduisant un opérateur effectif à deux photons, il est en effet possible d'éliminer la sommation sur les niveaux relais puis, en utilisant des règles de somme, d'éliminer ensuite les différents sous-niveaux du fondamental et du niveau excité. On obtient, ainsi, des expressions simples qui ont l'avantage de découpler la dépendance en fonction du système atomique et en fonction des polarisations des faisceaux [Grynberg 77].

L'application de cette méthode aux transitions envisagées dans l'atome de sodium est détaillée en Annexe IV. Afin d'alléger la présentation, nous calculerons directement la sommation sur les différents sous-niveaux, pour les polarisations correspondant aux différents types d'interaction entre les deux champs. Nous avons naturellement vérifié que les formules, obtenues à partir de l'hamiltonien effectif, aboutissent bien aux mêmes résultats.

b) Processus à deux photons envisagés.

Considérons les deux transitions suivantes :

$$(a) : \quad J_g = \frac{1}{2} \rightarrow J_r = \frac{3}{2} \rightarrow J_e = \frac{3}{2}$$

$$(b) : \quad J_g = \frac{1}{2} \rightarrow J_r = \frac{3}{2} \rightarrow J_e = \frac{5}{2}$$

La figure II.C.3 donne les intensités des couplages pour les différentes transitions entre sous-niveaux Zeeman. Pour comparer l'efficacité des deux processus, il nous faut calculer les éléments de matrice réduits.

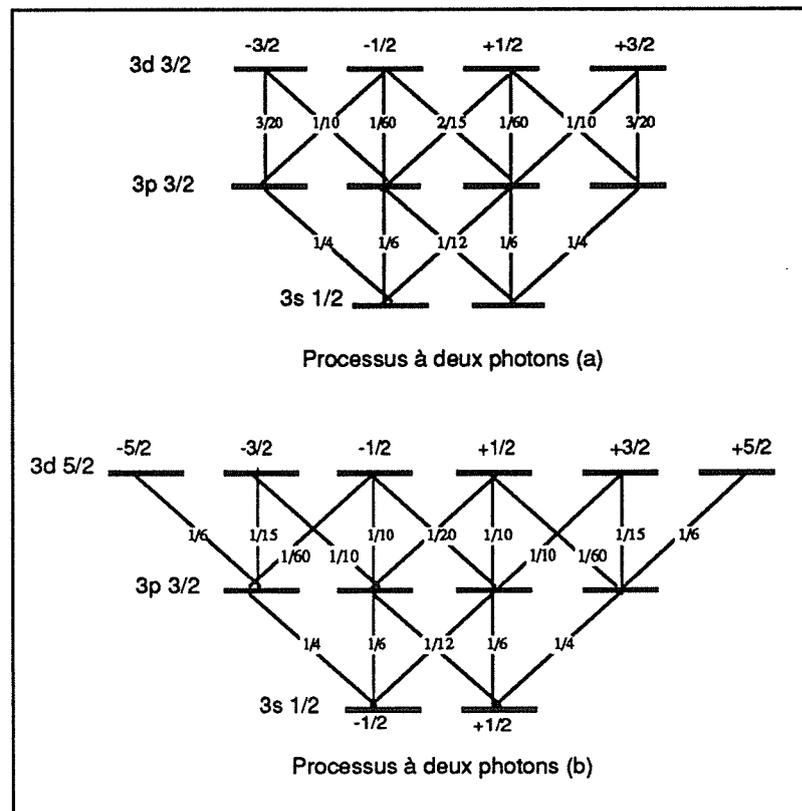


FIGURE II.C.3 :

L'atome de sodium n'est pas un atome à trois états !

La figure donne, pour chaque transition entre sous-niveaux Zeeman, l'intensité du couplage (carré de l'élément de matrice couplant les deux états considérés). Les éléments de matrice réduits caractérisant la transition du haut sont différents dans les deux processus (a) et (b) envisagés.

(i) Définitions des paramètres caractéristiques.

Pour une transition entre un niveau i et un niveau excité j , l'élément de matrice réduit s'exprime en fonction de la probabilité de transition de j vers i , notée Γ_{ji} , par :

$$\left| \langle j \| d^{(1)} \| i \rangle \right|^2 = \frac{3}{4} \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{\lambda_{ji}}{2\pi} \right)^3 \cdot (2J_j + 1) \hbar \Gamma_{ji} \quad (\text{II.C.3})$$

Les tables donnent usuellement les forces de raie en absorption [Lindgärd 77] :

$$f(3s \rightarrow 3p) = 0.95$$

$$f(3p \rightarrow 3d) = 0.84$$

On peut alors en déduire :

□ la force de raie en absorption pour les sous-niveaux fins : i.e. de (L_i, J_i) vers (L_i, J_j) :

$$f(L_i J_i \rightarrow L_j J_j) = (2L_i + 1)(2L_j + 1) \begin{Bmatrix} L_i & J_i & S \\ J_j & L_j & 1 \end{Bmatrix}^2 f(L_i \rightarrow L_j) \quad (\text{II.C.4})$$

□ la force de raie correspondante en émission :

$$f(L_j J_j \rightarrow L_i J_i) = \frac{2J_i + 1}{2J_j + 1} f(L_i J_i \rightarrow L_j J_j) \quad (\text{II.C.5})$$

□ le taux de transition de j vers i :

$$\Gamma_{ji} = 4\pi \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{h}{m\lambda_{ij}^2} f(L_j J_j \rightarrow L_i J_i) \quad (\text{II.C.6})$$

□ l'intensité de saturation de la transition entre ces deux niveaux, que nous choisissons de définir par :

$$\hbar\Gamma_{ji} = \left\langle j \left\| d^{(1)} \right\| i \right\rangle \cdot \left[\frac{I_{ij}^{sat}}{\epsilon_0 c} \right]^{1/2} \quad (\text{II.C.7})$$

et où le dernier terme représente l'amplitude complexe du champ électrique associé à une onde lumineuse d'intensité I_{ij}^{sat} . A l'aide de (II.C.3) et (II.C.7), on peut vérifier que :

$$I_{ij}^{sat} = \frac{8\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{2J_j + 1} \frac{\hbar c}{\lambda_{ij}^3} \Gamma_{ji} \quad (\text{II.C.8})$$

(ii) Valeurs numériques pour les transitions envisagées.

En négligeant la différence de longueur d'onde pour les transitions de $3p\ 3/2$ vers $3d\ 5/2$, et, de $3p\ 3/2$ vers $3d\ 3/2$, puis en calculant les coefficients 6-j intervenant dans les relations de définition à partir d'une table (par exemple, [Sobel'man 72, p.79]), le rapport des deux taux de transitions correspondant s'écrit :

$$\frac{\Gamma_{3d\ 5/2 \rightarrow 3p\ 3/2}}{\Gamma_{3d\ 3/2 \rightarrow 3p\ 3/2}} = \frac{\left\{ \begin{matrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 5/2 & 2 & 1 \end{matrix} \right\}^2}{\left\{ \begin{matrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{matrix} \right\}^2} = \frac{1/20}{1/120} = 6 \quad (\text{II.C.9})$$

En tenant compte des dégénérescences des niveaux, on obtient le rapport entre les éléments de matrice réduits correspondants :

$$\frac{\left| \left\langle 3d \ 5/2 \parallel d^{(1)} \parallel 3p \ 3/2 \right\rangle \right|^2}{\left| \left\langle 3d \ 3/2 \parallel d^{(1)} \parallel 3p \ 3/2 \right\rangle \right|^2} = 9 \quad (\text{II.C.10})$$

Le tableau (II.C.1) donne les valeurs numériques des différents paramètres caractérisant les transitions entre $3s \ ^2S_{1/2}$ et $3p \ ^2P_{3/2}$, entre $3p \ ^2P_{3/2}$ et $3d \ ^2D_{3/2}$ et entre $3p \ ^2P_{3/2}$ et $3d \ ^2D_{5/2}$.

Transition	$3s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 3p \ ^2P_{3/2}$	$3p \ ^2P_{3/2} \rightarrow 3d \ ^2D_{5/2}$	$3p \ ^2P_{3/2} \rightarrow 3d \ ^2D_{3/2}$
force de raie en absorption	0,63	0,76	0,08
force de raie en émission	0,32	0,51	0,08
taux de transition $j \rightarrow i$	$6,13 \cdot 10^7 \text{s}^{-1}$	$5,03 \cdot 10^7 \text{s}^{-1}$	$0,84 \cdot 10^7 \text{s}^{-1}$
durée de vie	16,5 ns	20,0 ns	20,0 ns
largeur naturelle	10 MHz	8 MHz	8 MHz
intensité de saturation	6,17 mW/cm ²	1,25 mW/cm ²	0,3 mW/cm ²

Tableau II.C.1 :

La valeur très différente entre les taux de transition pour les deux dernières transition s'explique par le fait que le niveau $3d \ ^2D_{3/2}$ est couplé essentiellement à l'autre composante fine du niveau intermédiaire ($3d \ ^2D_{1/2}$).

(iii) *Cas n° 1* : interaction entre une onde polarisée rectiligne et une onde polarisée circulaire.

Ce cas correspond à la configuration expérimentale que nous avons utilisée pour mesurer la dispersion à deux photons. En considérant les différents chemins possibles à partir des deux états fondamentaux^(*), les facteurs de forme $\mathcal{F}_{(a)}$ et $\mathcal{F}_{(b)}$ correspondant respectivement aux processus (a) et (b) valent :

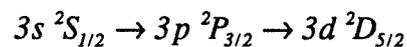
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(a)} &= \frac{2}{45} \cdot \left| \left\langle 3d \ \frac{3}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3p \ \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2 \left| \left\langle 3p \ \frac{3}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3s \ \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \\ \mathcal{F}_{(b)} &= \frac{7}{120} \cdot \left| \left\langle 3d \ \frac{5}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3p \ \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2 \left| \left\langle 3p \ \frac{3}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3s \ \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{II.C.11})$$

^(*) Pour un processus purement dispersif, on vérifie immédiatement, d'après les valeurs numériques des différents éléments de matrice, représentés sur la figure (II.C.3), que l'interaction $g \xrightarrow{\sigma_+ + \sigma_-} r \xrightarrow{\sigma_+} e$ est équivalente à $g \xrightarrow{\sigma_+} r \xrightarrow{\sigma_+ + \sigma_-} e$.

D'après (II.C.10) :

$$\frac{\mathcal{F}_{(b)}}{\mathcal{F}_{(a)}} = \frac{189}{16} \approx 12 \quad (\text{II.C.12})$$

Le déphasage non-linéaire obtenu par le processus (b) est donc environ douze fois plus faible que celui donné par le processus (a). Ce calcul approché ne tient naturellement pas compte du fait que la transition (a) n'est pas fermée, le niveau supérieur $3d \ 3/2$ pouvant se désexciter vers le niveau $3p \ 1/2$. L'interaction à deux photons la plus favorable, correspondant à un système fermé et donnant les couplages non-linéaires les plus importants, est donc celle correspondant au processus (b) :



(iv) Cas n° 2 : interaction entre deux polarisations circulaires dans le processus (b)

Il vient immédiatement :

$$\frac{\mathcal{F}(\sigma_+ / \sigma_-)}{\mathcal{F}(\sigma_+ / \sigma_+)} = \frac{1}{6} \quad (\text{II.C.13})$$

Deux ondes polarisées en sens contraire sont donc très faiblement couplées par la transition à deux photons, en comparaison du couplage obtenu pour deux polarisations identiques. En prenant un faisceau signal polarisé circulairement et un faisceau de mesure polarisé linéairement, la polarisation circulaire du faisceau de mesure qui n'est pas couplée au faisceau signal peut alors servir de référence de phase (figure II.C.4). Il est ainsi possible de réaliser des expériences d'activité optique induite, analogues à celles décrites dans la partie A de ce chapitre, et qui nous permettront de mesurer directement le déphasage non-linéaire.

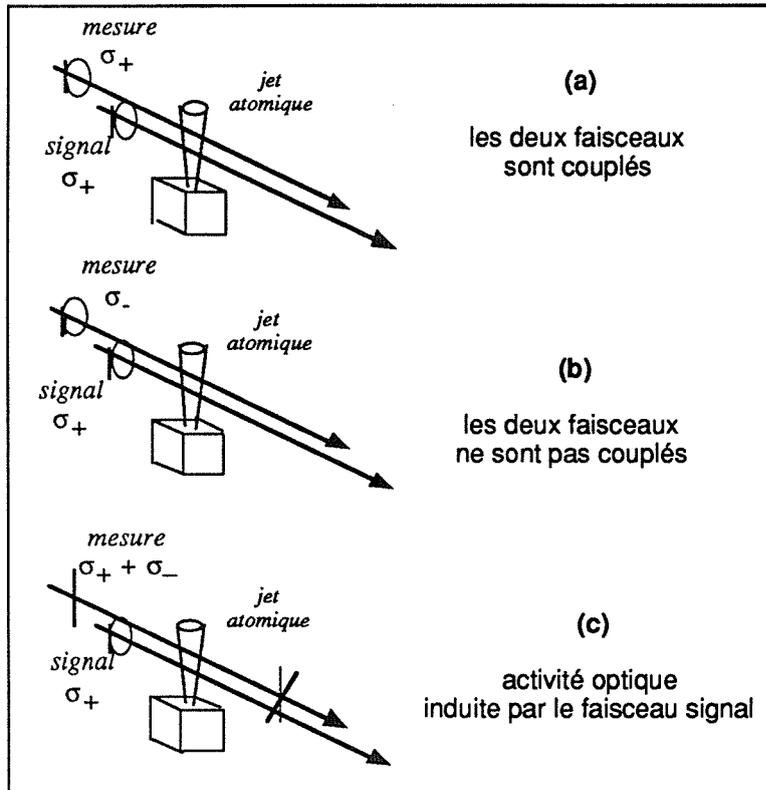


FIGURE II.C.4 :
Influence de la polarisation sur le couplage des faisceaux dans la transition à deux photons :
 $J_g = 1/2 \rightarrow J_r = 3/2 \rightarrow J_e = 5/2$.

3) Déphasages non-linéaires pour l'interaction la plus favorable.

a) Expressions.

Considérons le couplage entre deux ondes polarisées circulairement σ_+ dans le processus (b). En négligeant la différence de fréquence entre ω_l et ω_{rg} , et entre ω_2 et ω_{er} , les déphasages non-linéaires s'écrivent d'après (II.C.1.a) et (II.C.1.b).

$$\phi_1^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_{rg}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\hbar\Delta)^2} \frac{1}{\hbar\delta} |\mathcal{E}_2|^2 \cdot \mathcal{F} \quad (\text{II.C.14.a})$$

$$\phi_2^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_{er}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\hbar\Delta)^2} \frac{1}{\hbar\delta} |\mathcal{E}_1|^2 \cdot \mathcal{F} \quad (\text{II.C.14.b})$$

Le facteur de forme est obtenu à partir de la figure (II.C.3) :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \left| \left\langle 3p \frac{3}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3s \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \left| \left\langle 3d \frac{5}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3p \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2 \quad (\text{II.C.14.c})$$

Ces expressions peuvent naturellement se simplifier, en introduisant des paramètres réduits. Nous définissons d'abord les fréquences de Rabi effectives, notées Ω_1^{eff} et Ω_2^{eff} , par :

$$\hbar\Omega_1^{eff} = \mu_{1/2}^{3/2} |\mathcal{E}_1| = \left\langle J_r = 3/2, M_r = 3/2 \left| d^{(+)} \right| J_g = 1/2, M_g = 1/2 \right\rangle |\mathcal{E}_1| \quad (\text{II.C.15.a})$$

$$\hbar\Omega_2^{eff} = \mu_{3/2}^{5/2} |\mathcal{E}_2| = \left\langle J_e = 5/2, M_e = 5/2 \left| d^{(+)} \right| J_r = 3/2, M_r = 3/2 \right\rangle |\mathcal{E}_2| \quad (\text{II.C.15.b})$$

Compte-tenu des relations (II.C.3) entre les éléments de matrice réduits et les éléments de couplage ci-dessus, les deux moments dipolaires vérifient :

$$\mu_{1/2}^{3/2} = \frac{1}{2} \left\langle J_r = 3/2 \left\| d^{(I)} \right\| J_g = 1/2 \right\rangle \quad \mu_{3/2}^{5/2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle J_e = 5/2 \left\| d^{(I)} \right\| J_r = 3/2 \right\rangle \quad (\text{II.C.16})$$

d'où les fréquences de Rabi effectives :

$$\Omega_1^{eff} = \frac{1}{2} \left\langle J_r = 3/2 \left\| d^{(I)} \right\| J_g = 1/2 \right\rangle |\mathcal{E}_1| \quad \Omega_2^{eff} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle J_e = 5/2 \left\| d^{(I)} \right\| J_r = 3/2 \right\rangle |\mathcal{E}_2| \quad (\text{II.C.17})$$

Notons que ces fréquences de Rabi correspondent en fait à des formules, où l'interaction est sommée globalement sur tous les sous-niveaux Zeeman couplés dans la transition entre les deux niveaux fins considérés.

En reportant l'expression du facteur de forme, les déphasages non-linéaires sont maintenant donnés par :

$$\phi_1^{nl(2 \text{ photons})} = \frac{3}{5} \cdot \alpha_o \ell \cdot \frac{\Gamma_{rg}}{2} \cdot \frac{\Omega_2^{eff^2}}{\Delta^2} \quad (\text{II.C.18.a})$$

$$\phi_2^{nl(2 \text{ photons})} = \frac{3}{5} \cdot \alpha_o \ell \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma_{er}}{2} \cdot \frac{\Omega_1^{eff^2}}{\Delta^2} \quad (\text{II.C.18.b})$$

Ces expressions sont tout à fait similaires à (II.B.43 d,e), donnant les déphasages non-linéaires pour un système fermé à trois états. La différence est simplement contenue dans un facteur numérique $3/5$, "voisin de 1".

b) Calcul des fréquences de Rabi effectives.

En pratique, on mesure simplement les puissances lumineuses P_1 et P_2 , des deux faisceaux laser à l'aide d'un wattmètre. Connaissant les tailles (*waists*) des deux faisceaux dans la zone d'interaction, on en déduit les intensités lumineuses I_1 et I_2 correspondantes. Ces intensités sont reliées aux amplitudes complexes \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 des champs électriques par :

$$I_j = \epsilon_0 c^2 |\mathcal{E}_j|^2 \quad j = 1, 2 \quad (\text{II.C.19})$$

En utilisant la relation (II.C.8) entre l'intensité de saturation, le taux de transition et l'élément de matrice réduit, on obtient :

$$\Omega_j^{\text{eff}} = \frac{\Gamma_{rg}}{2} \sqrt{\frac{I_j}{I_{gr}^{\text{sat}}}} \quad \Omega_2^{\text{eff}} = \frac{\Gamma_{er}}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{I_2}{I_{er}^{\text{sat}}}} \quad (\text{II.C.20})$$

En pratique, il est préférable que ces paramètres soient normalisés de façon identique pour les deux transitions, soit, pour les fréquences de Rabi par rapport à $\Gamma_{rg}/2$, et pour les intensités lumineuses par rapport à I_{gr}^{sat} . Compte-tenu des valeurs du Tableau II.C.1 :

$$\Omega_j^{\text{eff}} = \frac{\Gamma_{rg}}{2} \sqrt{\frac{I_j}{I_{gr}^{\text{sat}}}} \quad \Omega_2^{\text{eff}} = 1.5 \frac{\Gamma_{rg}}{2} \sqrt{\frac{I_2}{I_{gr}^{\text{sat}}}} \quad (\text{II.C.21})$$

A l'aide de ces différentes expressions, il est possible donc possible de calculer les deux déphasages non-linéaires $\phi_1^{nl(2 \text{ photons})}$ et $\phi_2^{nl(2 \text{ photons})}$, à partir des valeurs des désaccords (Δ , δ) donnés et des intensités lumineuses I_1 et I_2 .

Remarque : Supposons que les atomes soient pompés optiquement dans l'état $Ug=1/2 \ Mg=1/2\rangle$. L'interaction σ_+/σ_+ correspond alors réellement à un système fermé à trois états et les déphasages non-linéaires s'écrivent :

$$\phi_1^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_1}{2\epsilon_0 c} \cdot \frac{1}{(\hbar\Delta)^2} \frac{1}{\hbar\delta} |\mathcal{E}_1|^2 \cdot \mathcal{F}$$

$$\phi_2^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_2}{2\epsilon_0 c} \cdot \frac{1}{(\hbar\Delta)^2} \frac{1}{\hbar\delta} |\mathcal{E}_2|^2 \cdot \mathcal{F}$$

où le facteur de forme est donné par :

$$F = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left| \langle J_e = 5/2 \parallel d^{(1)} \parallel J_r = 3/2 \rangle \right|^2 \left| \langle J_r = 3/2 \parallel d^{(1)} \parallel J_g = 1/2 \rangle \right|^2$$

En utilisant les définitions des éléments de matrice réduits et des fréquences de Rabi normalisées :

$$\left| \langle J_r = 3/2 \parallel d^{(1)} \parallel J_g = 1/2 \rangle \right|^2 = 3 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{\lambda_1}{2\pi} \right)^3 \cdot \hbar\Gamma_{rg}$$

$$\left| \langle J_e = 5/2 \parallel d^{(1)} \parallel J_r = 3/2 \rangle \right|^2 = \frac{9}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{\lambda_2}{2\pi} \right) \cdot \hbar\Gamma_{er}$$

$$\left| \langle J_r = 3/2 \parallel d^{(1)} \parallel J_g = 1/2 \rangle \right|^2 \cdot |\mathcal{E}_2|^2 = 2(\hbar\Omega_1^{eff})^2$$

$$\left| \langle J_e = 5/2 \parallel d^{(1)} \parallel J_r = 3/2 \rangle \right|^2 \cdot |\mathcal{E}_1|^2 = 6(\hbar\Omega_1^{eff})^2$$

on obtient finalement pour les déphasages non linéaires :

$$\phi_1^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{3\lambda_1^2}{4\pi} \cdot \frac{\Gamma_{rg}}{2} \cdot \frac{(\Omega_2^{eff})^2}{\delta}$$

$$\phi_2^{nl(2 \text{ photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{3\lambda_1^2}{4\pi} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma_{er}}{2} \cdot \frac{(\Omega_1^{eff})^2}{\delta}$$

expressions qui coïncident bien avec les formules (II.B.43 d et e), correspondant aux résultats pour un système fermé à trois états. Ceci vérifie donc la cohérence de nos expressions, obtenues dans § IIB pour le système idéal à trois états, et dans § IIC pour le système réel utilisé.

D. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Hormis les photodétecteurs permettant de mesurer le bruit quantique, lesquels sont décrits en Annexe I, le dispositif expérimental est, pour toutes les expériences décrites dans ce mémoire, composé de trois parties essentielles, à savoir :

- les lasers,
- les cavités optiques permettant d'obtenir un couplage plus important entre les faisceaux, ainsi que des effets de bistabilité,
- le jet atomique de sodium.

I. LES LASERS.

Les deux lasers à colorant, excitant les deux transitions du système atomique, sont pompés par un seul laser à argon ionisé (figure II.D.1). En pratique, une puissance d'environ 12 W suffit à pomper les deux lasers. Nous avons tout d'abord utilisé un laser *Spectra Physics™ 171*, qui a été ensuite remplacé par un laser *Coherent™ Innova 200*, pouvant délivrer plus de 20 W.

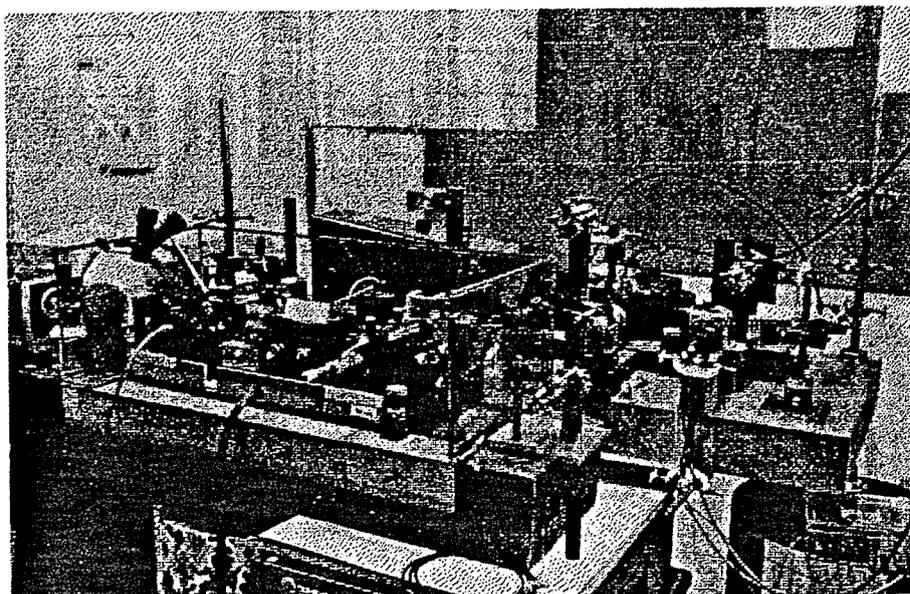


Figure II.D.1:
Ensemble du dispositif des lasers utilisés dans l'expérience, jusqu'à juin 1990. Les deux lasers à colorant (au premier plan, un laser linéaire Coherent™ 599, et au deuxième plan, un laser en anneau Coherent™ 699) sont pompés par un laser argon SpectraPhysics™ 170.

1. Influence du mode spatial du laser de pompe.

Afin d'obtenir des faisceaux lumineux au bruit quantique, la qualité du mode spatial du laser de pompe s'est avérée très importante. En effet, l'existence de modes transverses, autres que le mode longitudinal fondamental TEM_{00} , se traduit par un battement entre ces différents modes qui est ensuite transmis sur les lasers à colorant. Lorsque l'on détecte les fluctuations d'intensité de ces faisceaux, il apparaît alors des pics très nettement au-dessus du bruit de photons (figure II.D.2). Cet excès de bruit disparaît complètement lorsque le mode du laser de pompe est rigoureusement gaussien. Un tel test pour la qualité du mode spatial (qualifié usuellement de contrôle du mode TEM_{00} électrique) s'avère en fait beaucoup plus sensible que la simple observation directe de la forme du faisceau en sortie du laser.

La solution pratique que nous avons adoptée a été de fermer simplement le diaphragme intra-cavité du laser argon, jusqu'à obtenir un mode rigoureusement TEM_{00} . En raison de la chute de puissance, il est appréciable que ce laser puisse délivrer à diaphragme complètement ouvert, une puissance nettement supérieure à celle nécessaire pour le pompage des lasers à colorant !

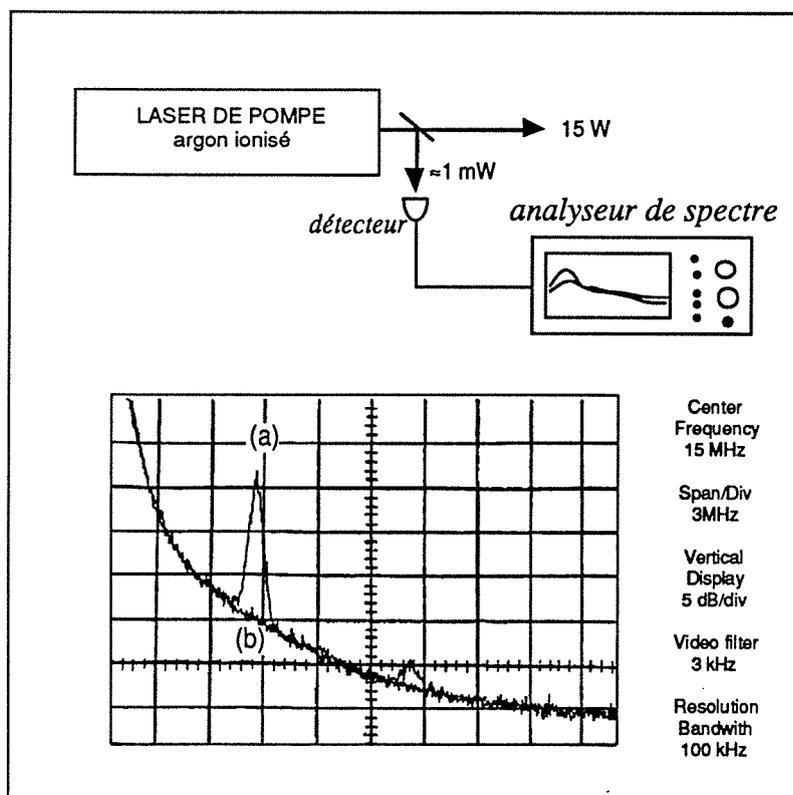


FIGURE II D -2 :

Spectres de bruit d'intensité du laser Argon *Coherent Innova 200* (le principe de l'expérience permettant le contrôle du mode TEM_{00} électrique est schématisé ci-dessus).

La courbe (a) montre des pics de battement provenant de modes transverses. En fermant le diaphragme intra-cavité du laser, on supprime ces modes d'ordre élevé, et donc les battements (b).

2. Les lasers à colorant.

La première transition ($\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$) est pompée par un laser en anneau utilisant de la Rhodamine 6G. Nous avons successivement utilisé un laser *Coherent*TM 699-21, puis un laser *Spectra Physics*TM 380 D. La deuxième transition ($\lambda_2 = 819.5 \text{ nm}$) est excitée par un laser linéaire (modèle *Coherent*TM 599.21) utilisant du Styryl 9 (*LDS 821*).

Ces deux lasers sont monomodes avec une stabilité de fréquence contrôlée électroniquement de l'ordre du MHz. Le fonctionnement monomode est, comme d'usage, vérifié en permanence à l'aide d'interféromètres Fabry-Pérot confocaux, de 10 cm de longueur (intervalle spectral libre : 750 MHz ; finesse environ 20). Les lasers sont balayables par plages de 30 GHz, avec des sauts de modes continus de 10 GHz.

La recherche de la transition à deux photons s'est tout d'abord faite de la façon suivante. On a commencé par déterminer de façon absolue la longueur d'onde excitant la transition du bas en enregistrant le spectre d'absorption de l'iode moléculaire I_2 dans une cellule de 10 cm de long, puis en identifiant le spectre observé grâce à l'Atlas des raies de l'iode [*Gesterkorn 78*]. La fréquence du laser peut ainsi être repérée avec une précision correspondant à la largeur des raies de l'iode (soit environ 300 MHz). Le laser a ensuite été calé sur la résonance à un photon, déterminée en maximisant la fluorescence à partir du niveau relais.

La fréquence du laser infrarouge ne peut pas, quant à elle, être déterminée par les raies de l'iode, l'absorption de I_2 à 820 nm étant très faible. Nous avons donc mesuré grossièrement une première fois sa longueur d'onde à l'aide d'un spectroscopie Jobin-Yvon puis repéré la position correspondante du filtre de Lyot. En observant l'apparition d'un signal donné (par exemple, un couplage entre les deux faisceaux), on peut ensuite chercher par tâtonnement la résonance à deux photons, en effectuant des balayages successifs que l'on décale progressivement.

Un lambdamètre construit au laboratoire permet maintenant de mesurer directement les fréquences des deux lasers, avec une précision d'environ 10 GHz. Cette méthode s'avère évidemment beaucoup plus pratique.

Les puissances délivrées, lorsque les lasers fonctionnent de façon monomode avec les asservissements électroniques (environ 300 mW pour le laser en anneau et 15 mW pour le laser linéaire), sont largement supérieures à celles nécessaires pour l'expérience (typiquement quelques mW).

II. LA CAVITE OPTIQUE.

Afin d'augmenter les effets non-linéaires, les diverses expériences que nous avons réalisées utilisent une cavité optique à miroirs sphériques, entourant le jet, et constituant un interféromètre Fabry-Pérot.

1. Description.

Une photographie d'ensemble est reproduit sur la figure II.D.3a, tandis que le plan mécanique est représenté en II.D.3a. La cavité est de géométrie linéaire, chaque miroir (de diamètre 7.5 mm) étant fixé sur un support en inox. L'un des miroirs est collé sur une céramique piézo-électrique, permettant de balayer la longueur de la cavité à l'aide d'un rampe haute-tension. De façon à conférer à l'ensemble une stabilité interférométrique, les deux supports sont soutenus par un ensemble de trois barres d'Invar (cette configuration est utilisée dans les cavités interférométriques commercialisées par Burleigh™). En faisant coulisser les supports, il est possible d'ajuster la longueur de la cavité entre 5 et 10 cm.

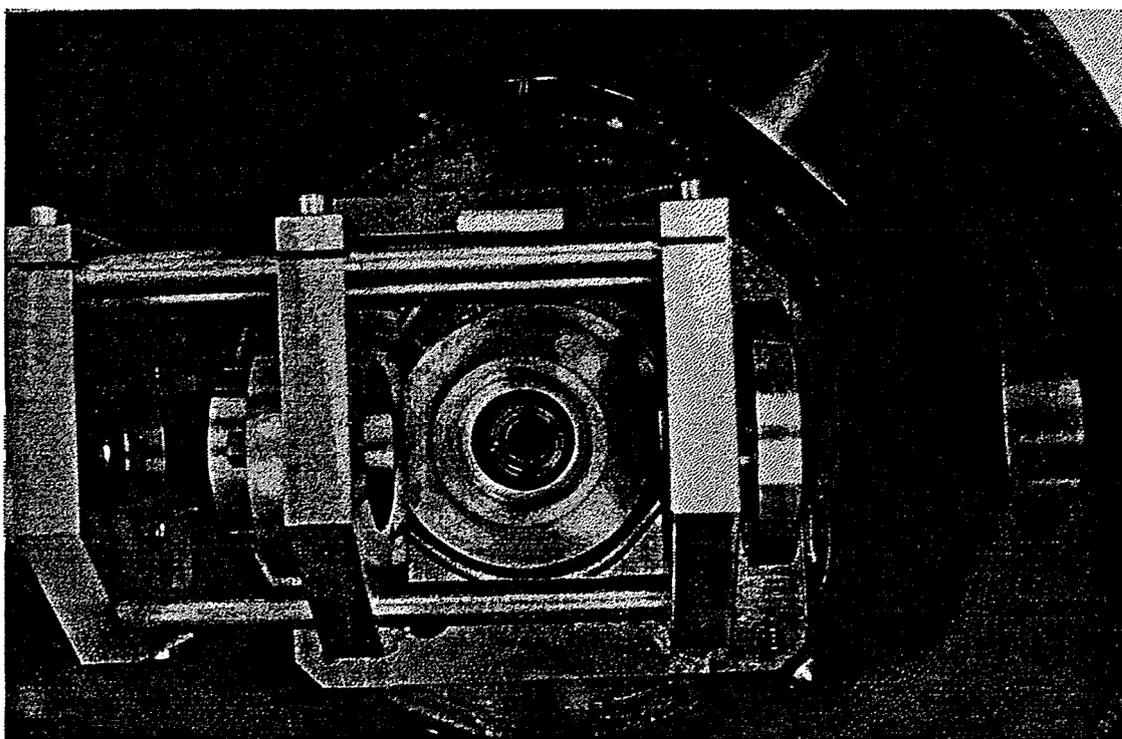


Figure II.D.3a :
Ensemble cavité optique - jet atomique, permettant d'obtenir un couplage non-linéaire important entre les deux faisceaux "signal" et "mesure".

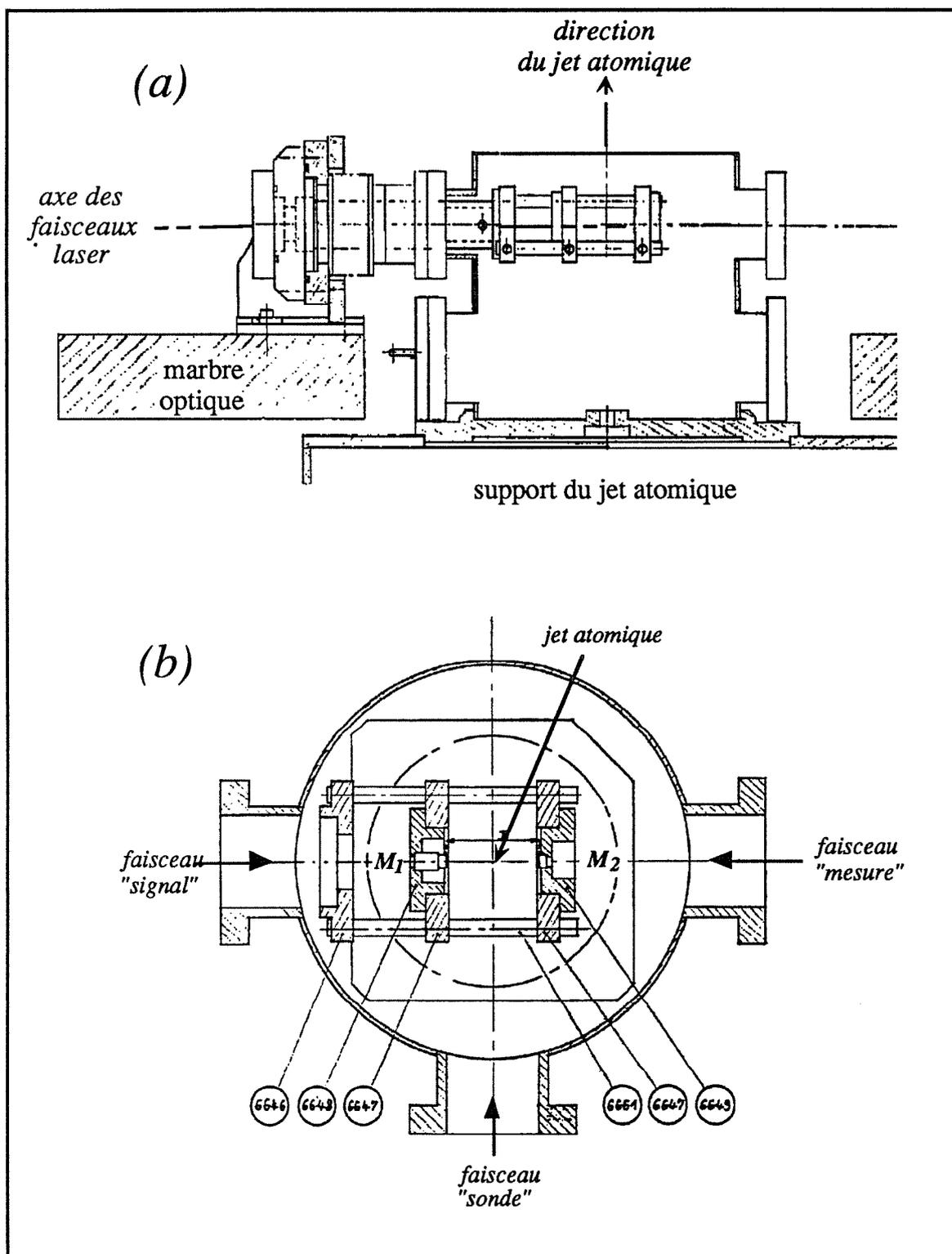


Figure II.D.3b :

Plan mécanique de la cavité, formée des deux miroirs M_1 et M_2 . Celle-ci est fixée sur le marbre supportant l'expérience, mais, afin d'obtenir une meilleure mécanique, est isolée mécaniquement de la structure de l'enceinte à vide par un système de soufflets. Les supports des miroirs sont assemblés par l'intermédiaire de trois barres en Invar. Le miroir M_1 est monté sur une céramique piézo-électrique, afin de balayer la longueur de la cavité. Les trois hublots permettent le passage des faisceaux laser ("signal", "mesure" ainsi que le faisceau sonde permettant de mesurer la densité du jet atomique).

Pour accroître la finesse d'une cavité Fabry-Pérot, on peut naturellement jouer sur les coefficients de réflexion des miroirs, en s'assurant de leur bonne sphéricité (les aberrations diminuant la finesse). Les miroirs courants utilisés pour nos expériences ont des coefficients de réflexion de l'ordre de 98 % à 99.8 % (ce qui correspond à des finesesses entre 300 et 3 000).

2. Choix du type de la cavité.

Les configurations correspondant à une cavité de longueur L , formée de deux miroirs sphériques de rayons R_1 et R_2 , sont, de façon usuelle, représentées dans le plan (g_1, g_2) où g_1 et g_2 sont définis par [Yariv 89] :

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_i} \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.D.1})$$

La zone de stabilité correspond à la condition :

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (\text{II.D.2})$$

Le diagramme de stabilité (figure II.D.4) montre qu'il est préférable de se placer, par exemple, entre le point correspondant à une cavité confocale ($R_1 = R_2 = L$) et celui correspondant à une cavité concentrique ($R_1 = R_2 = L/2$). La cavité doit être également telle que le jet atomique soit environ au waist de la cavité. Il faut également que la longueur de Rayleigh z_R , correspondant au mode fondamental de la cavité, soit supérieure à la longueur d'interaction entre les atomes et les lasers de façon que l'intensité lumineuse dans la zone d'interaction soit approximativement constante. Ceci correspond à z_R au minimum de l'ordre du cm, et donc à un waist minimum pour la cavité :

$$w_{min} = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sim 50 \mu m$$

Le principal inconvénient d'une cavité non-confocale est qu'il est alors nécessaire d'adapter le mode du laser à un des modes transverses de la cavité, généralement le mode longitudinal fondamental TEM_{00} . Ce réglage est usuellement qualifié dans la littérature de "mode-matching" (adaptation de modes).

La nécessité de ce réglage peut être comprise schématiquement, en assimilant la cavité à un résonateur, ayant différents modes propres (correspondant aux modes transverses), non-dégénérés en fréquence. Un faisceau incident, de forme quelconque, excite de façon non-sélective ces différents modes; on obtient alors un ensemble de résonances très peu marquées.

En excitant un seul des modes (ce qui correspond à injecter dans la cavité un faisceau incident ayant après le miroir d'entrée dans la cavité - qui agit comme une lentille divergente - une forme identique à celle du mode transverse), on peut obtenir une résonance bien marquée, avec la finesse désirée.

Remarque :

Un tel réglage n'est par contre pas nécessaire dans le cas d'une cavité confocale [Hercher 68]. En effet, pour cette configuration, les modes pairs et impairs sont dégénérés en fréquence. Un faisceau incident de forme quelconque correspond donc à l'excitation d'une combinaison de modes, contenant à peu près autant de modes pairs que de modes impairs. Lorsque l'on balaye la longueur de la cavité, on obtient successivement les résonances des modes pairs puis celles des modes impairs. Sans aucune adaptation de modes, on peut ainsi obtenir une transmission de la cavité en forme de courbe d'Airy. Néanmoins, les pertes supplémentaires (correspondant au fait, qu'à chaque résonance, la moitié des modes excités sont anti-résonants), entraînent une détérioration de la finesse, nettement en-dessous de la valeur théorique maximale donnée par les seuls coefficients de réflexion des miroirs.

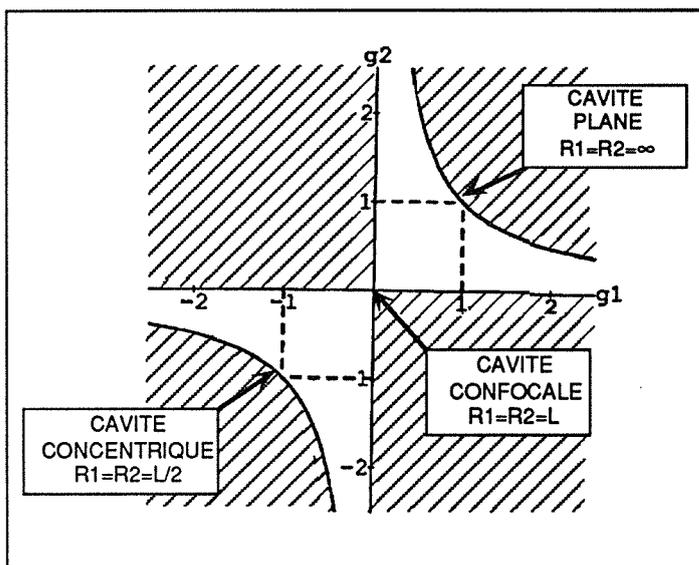


FIGURE II.D.4 :
Diagramme de stabilité d'un résonateur optique passif. Les parties hachurées correspondent à une cavité instable.

3. Réalisation expérimentale du mode-matching.

Le problème est le suivant : étant donné le faisceau en sortie du laser, il faut adapter sa forme au mode de la cavité, i.e. le transformer en un faisceau de waist donné.

a) Détermination des paramètres du faisceau incident.

Pour un faisceau gaussien, la puissance à une distance r par rapport à l'axe de propagation vaut :

$$P(r) = P_o e^{-2(r/w)^2} \quad (\text{II.D.3})$$

En déterminant la variation de la puissance suivant r et en mesurant la demi-largeur correspondant à 13.5 % de la puissance maximale, on peut ainsi obtenir le rayon w du faisceau en un point donné. Connaissant w en deux points sur l'axe de propagation du faisceau laser, on détermine ensuite son waist w_o et sa position z_{waist} à l'aide de la formule [Kogelnik 66] :

$$w(z) = w_o \sqrt{1 + \left[\frac{z - z_o}{\pi w_o^2 / \lambda} \right]^2} \quad (\text{II.D.4})$$

b) Réalisation du mode-matching avec une lentille.

L'adaptation de modes entre deux cavités est décrite dans la littérature [Fork 64]. En tenant compte des transformations du faisceau par le miroir d'entrée des cavités (agissant comme lentille divergente), ce problème revient à conjuguer optiquement deux waists w_a et w_b .

Ce problème est caractérisé par une focale f_o , définie par :

$$f_o = \pi \frac{w_a w_b}{\lambda} \quad (\text{II.D.5})$$

et on montre qu'il est possible d'utiliser pour le mode-matching toute lentille de focale $f > f_o$, en la plaçant à un endroit tel que les distances d_a et d_b entre la lentille et les deux waists correspondent à :

$$d_a = f \pm \frac{w_a}{w_b} \sqrt{f^2 - f_o^2} \quad d_b = f \pm \frac{w_b}{w_a} \sqrt{f^2 - f_o^2} \quad (\text{II.D.6})$$

Dans notre configuration expérimentale, la distance totale $d = d_a + d_f$ est évidemment fixée, ce qui détermine f . Cette focale peut être fabriquée, par exemple, à l'aide d'un doublet, les distances d_a et d_b étant alors mesurées à partir des plans principaux du doublet.

c) Réalisation du mode-matching avec un système optique.

L'application directe de ces formules s'est révélée inutilisable en pratique. De plus, il est nécessaire d'avoir des faisceaux peu étendus tout au long de leur propagation de façon à ne pas être gêné par d'éventuels problèmes de diaphragme. Il est également commode d'avoir un endroit où le faisceau soit peu divergent, de façon à pouvoir y introduire les différentes lames de polarisation, cubes séparateurs, modulateur électrooptique permettant de tester le transfert classique. Face à ces différents impératifs, nous avons par conséquent adopté une méthode plus empirique.

Nous avons conçu un programme informatique, déterminant la transformation d'un faisceau gaussien à travers un système optique, en utilisant le formalisme des matrices ABCD. Ce programme a ensuite permis de simuler différentes configurations (figure II.D.5).

La disposition des lentilles est basée sur l'idée générale suivante consistant à prendre le problème à l'envers, i.e. non plus du laser vers la cavité mais de la cavité vers le laser.

Le waist de la cavité étant serré (typiquement $80 \mu\text{m}$), sa distance de Rayleigh z_R est faible ($z_R = \pi w_o^2 / \lambda$, de l'ordre de 3.5 cm). Le faisceau en sortie de la cavité obéit donc très rapidement aux lois de l'optique géométrique. On place ensuite une lentille de focalisation de focale $f_o \approx 200 \text{ mm}$ à une distance $d_o \approx 2f_o$, donnant un grandissement à peu près unité (configuration $(2f)/(2f)$). Compte-tenu de la divergence du mode de la cavité, le diamètre ϕ du faisceau sur la lentille de focalisation est alors donné par :

$$\phi = \frac{\lambda}{\pi w_o} \cdot d_o \approx \frac{\lambda f_o}{\pi w_o} \quad (\text{II.D.7})$$

soit pour les paramètres ci-dessus, $\phi \approx 2 \text{ mm}$. L'adaptation de modes est ensuite réalisée en amenant le faisceau provenant du laser à la taille voulue sur la lentille de focalisation.

En combinant à la fois les tests expérimentaux et les simulations informatiques, on peut ainsi arriver à coupler le faisceau laser à la cavité, en injectant plus de 95 % de la puissance dans son mode fondamental.

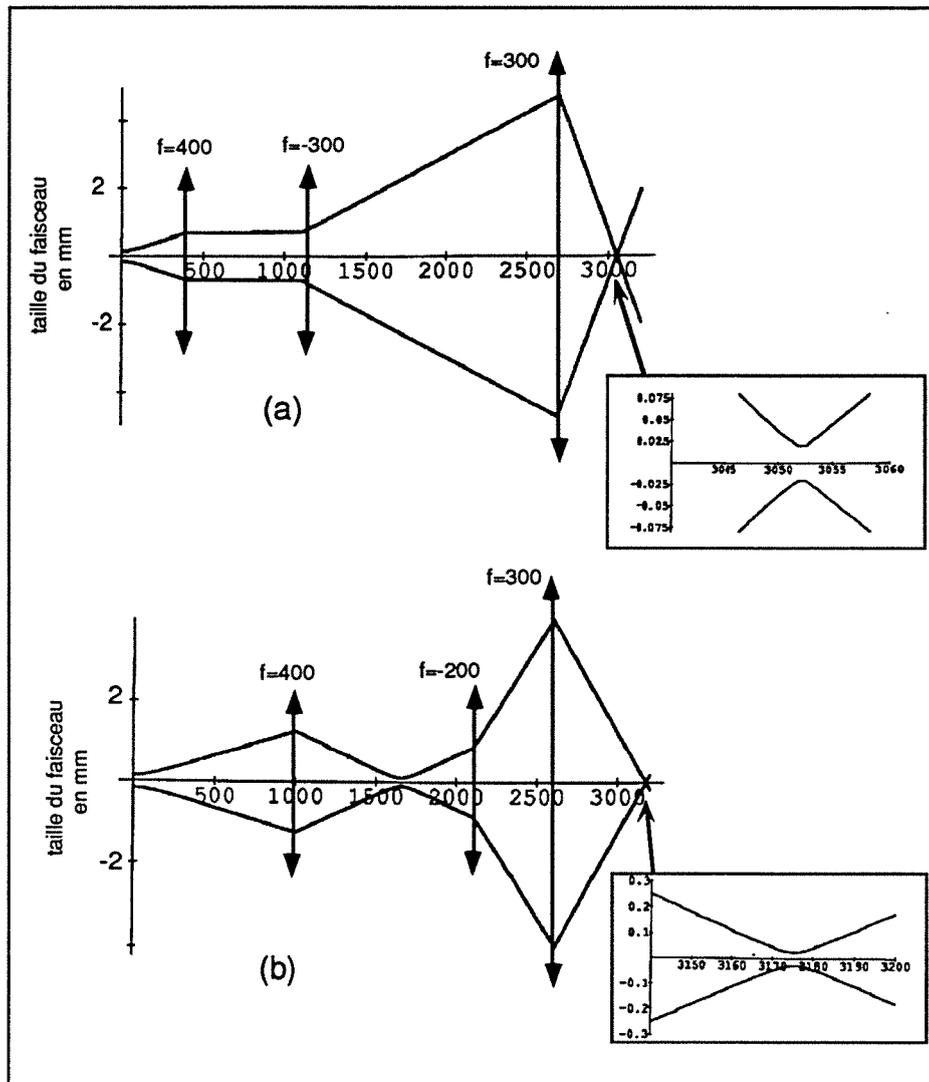


FIGURE I.I.D.5 :

Propagation des faisceaux gaussiens pour le mode-matching sur la cavité, calculée d'après les matrices ABCD.

La courbe (a) correspond au faisceau infra-rouge, la courbe (b) au faisceau jaune.

Les deux waists initiaux correspondent aux waists des lasers (150 mm dans les deux cas).

d) Sensibilité à l'alignement.

Il est évidemment nécessaire que l'axe du faisceau laser coïncide avec l'axe de la cavité. Un désalignement entraîne l'excitation de modes transverses, différents du mode fondamental. En terme d'optique géométrique, ces modes correspondent à des rayons se propageant en dehors de l'axe de la cavité, et revenant sur eux-mêmes au bout d'un certain nombre de tours. On observe alors des résonances à des sous-multiples de l'intervalle spectral libre, le sous multiple correspondant aux nombres de tours dans la cavité; elles disparaissent lorsqu'on règle l'alignement.

4. Mesure des paramètres de la cavité.

a) Expressions théoriques des fonctions de transfert

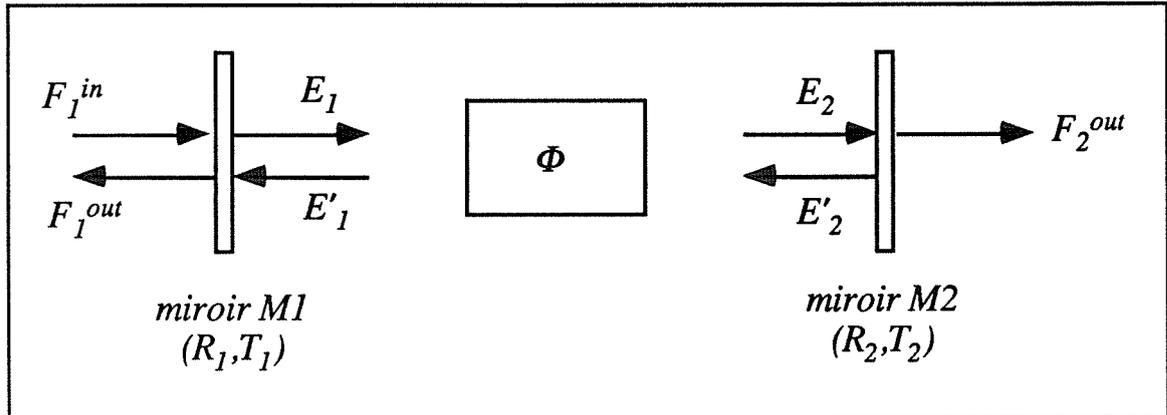


FIGURE II.D.6 :
Cavité Fabry - Pérot : notations.

On considère la cavité représentée sur la figure II.D.6. Compte tenu des notations introduites, les relations de continuité sur les miroirs s'écrivent :

$$\begin{cases} E_1 = r_1 E'_1 + t_1 F_1^{in} & \text{(II.D.8.a)} \\ F_1^{out} = t_1 E'_1 - r_1 F_1^{in} & \text{(II.D.8.b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E'_2 = r_2 E_2 & \text{(II.D.9.a)} \\ F_2^{out} = t_2 E_2 & \text{(II.D.9.b)} \end{cases}$$

Les équations de propagation dans la cavité s'écrivent :

$$\begin{cases} E_2 = e^{-i\phi/2} e^{-p/2} E_1 & \text{(II.D.10.a)} \\ E'_1 = e^{-i\phi/2} e^{-p/2} E_2 & \text{(II.D.10.b)} \end{cases}$$

où ϕ et p représentent respectivement les déphasages et les pertes en amplitude sur un tour.

(i) Courbes d'Airy.

En combinant ces diverses équations, on obtient les différentes grandeurs en fonction du champ entrant F_1^{in} :

$$\square \text{ champ intracavité : } E_1 = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \frac{e^{-i\phi}}{e^{-P}} F_1^{in} \quad (\text{II.D.11.a})$$

$$\square \text{ champ réfléchi : } F_1^{out} = \frac{r_2}{1 - r_1 r_2} \frac{e^{-i\phi}}{e^{-P}} \frac{e^{-i\phi} - r_1}{e^{-P}} F_1^{in} \quad (\text{II.D.11.b})$$

$$\square \text{ champ transmis : } F_2^{out} = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \frac{e^{-i\phi/2}}{e^{-P}} \frac{e^{-P/2}}{e^{-P}} F_1^{in} \quad (\text{II.D.11.c})$$

correspondant aux relations entre les intensités :

$$\square \text{ intensité intracavité : } \frac{I}{I^{in}} = \frac{T_1}{1 - R_1 R_2} \frac{e^{-P}}{e^{-P/2} \cos \phi} \quad (\text{II.D.12.a})$$

$$\square \text{ intensité réfléchie : } \frac{I'}{I^{in}} = \frac{R_1 + R_2}{1 + R_1 R_2} \frac{e^{-P} - 2\sqrt{R_1 R_2} e^{-P/2} \cos \phi}{e^{-P/2} \cos \phi} \quad (\text{II.D.12.b})$$

$$\square \text{ intensité transmise : } \frac{I'}{I^{in}} = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2} \frac{e^{-P/2}}{e^{-P/2} \cos \phi} \quad (\text{II.D.12.c})$$

où T_1, T_2, R_1, R_2 représentent les coefficients de transmission et de réflexion des miroirs en intensité, et où P représente les pertes totales en intensité sur un tour de cavité.

La variation de ces paramètres en fonction du déphasage ϕ se fait suivant des courbes d'Airy, présentant des résonances pour $\phi = 2k\pi, k$ entier.

(ii) *Limite d'une cavité de grande finesse.*

Pour T_1, T_2 et $P \ll 1$, il est possible d'approximer séparément chaque résonance. En faisant un développement limité des formules (II.D.12.a, b et c) autour de $\phi = 0$, on obtient ainsi :

$$\frac{I}{I^{in}} = \frac{T_1}{\left[\frac{T_1 + T_2 + P}{2}\right]^2 + \phi^2} \quad \frac{I^{out}}{I^{in}} = \frac{T_1 T_2}{\left[\frac{T_1 + T_2 + P}{2}\right]^2 + \phi^2} \quad \frac{I'}{I^{in}} = \frac{\left[\frac{T_1 - (T_2 + P)}{2}\right]^2 + \phi^2}{\left[\frac{T_1 + T_2 + P}{2}\right]^2 + \phi^2} \quad (\text{II.D.13})$$

Les résonances de la courbe d'Airy peuvent ainsi être approximées par une succession de lorentziennes, centrées en $\phi=2k\pi$, k entier.

Remarque :

Pour une cavité parfaite, correspondant à $T_1 \neq 0$ mais $T_2=P=0$, on trouve naturellement que quelque soit le déphasage ϕ , $I^r = I^n$. Ce résultat correspond simplement au fait que les photons, après avoir effectués un certain nombre de tours dans la cavité, finissent par tous ressortir par le miroir d'entrée M_1 .

L'intervalle spectral libre (FSR) de la cavité correspond à :

$$FSR = 2\pi \quad (\text{II.D.14})$$

tandis que la largeur totale à mi-hauteur (FWHM) d'un pic de résonance est donnée, d'après (II.D.13), par :

$$FWHM = T_1 + T_2 + P \quad (\text{II.D.15})$$

La finesse de la cavité, définie par :

$$\mathcal{F} = \frac{FSR}{FWHM} \quad (\text{II.D.16})$$

est donc donnée par :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{T_1 + T_2 + P} \quad (\text{II.D.17})$$

b) Mesure expérimentale des paramètres de la cavité.

On mesure les transmissions T_1 et T_2 des deux miroirs* puis, après un soigneux mode-matching, la finesse \mathcal{F} de la cavité. On peut alors en déduire les pertes P par :

$$P = \frac{2\pi}{\mathcal{F}} - T_1 - T_2 \quad (\text{II.D.18})$$

* Pour certains miroirs, nous nous sommes même aperçus d'une importante variation de la transmission selon que les miroirs étaient à l'air ou sous vide.

La figure (II.D.7) montre la comparaison entre la courbe expérimentale, correspondant à la transmission de la cavité, et la courbe théorique déduite de (II.D.13). Il est également possible de vérifier la cohérence des résultats en mesurant expérimentalement le coefficient de réflexion minimum \mathcal{R}_{min} , à résonance de la cavité et qui est donné par :

$$\mathcal{R}_{min} = \left[\frac{T_1 - (T_2 + P)}{T_1 + (T_2 + P)} \right]^2 \quad (\text{II.D.19})$$

Dans les expériences réalisées, il est absolument nécessaire de préserver la finesse de la cavité, et donc d'éviter tout salissement par le jet atomique. Tout au long d'une expérience, l'évolution des pertes de la cavité est donc contrôlée grâce à la mesure de sa finesse.

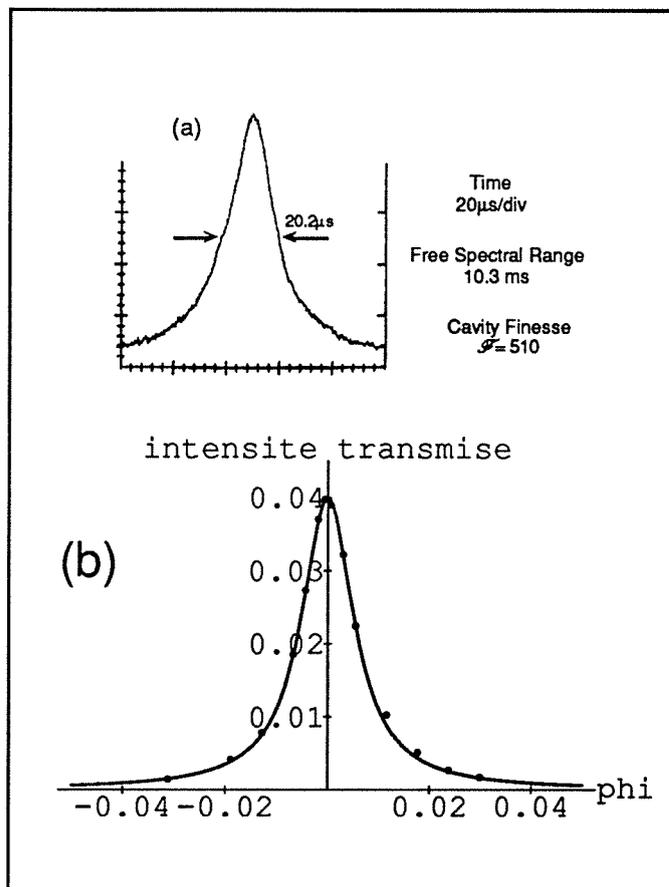


FIGURE II D - 7 :

Pic de résonance de la cavité. La courbe (a) correspond à la mesure expérimentale.

La courbe (b) représente l'accord entre la courbe théorique tracée pour les paramètres $T_1 = 0.0039$ et $T_2 = 0.0004$ (déterminés expérimentalement), et des points expérimentaux pris sur la courbe (a). L'ajustement est effectué avec le paramètre correspondant aux pertes : $P = 0.0082$.

III. LE JET ATOMIQUE.

1. Description.

Le jet atomique, dont le plan mécanique est donné sur la figure II.D.8, est une modification de celui utilisé dans les expériences historiques d'Aspect et Grangier [Aspect 83] [Grangier 86]. Le four est monté sur un barreau de céramique servant d'isolant thermique; le chauffage est assuré par un élément résistif thermocoaxial dont les spires sont bobinées entre le four et un écran protecteur en inox. La température du four est mesurée par un thermocouple, fixé à sa base. En raison de son éloignement par rapport à l'intérieur du four, la valeur donnée par ce thermocouple permet seulement d'avoir une vague idée sur la montée réelle en température. Par contre, une fois que l'équilibre thermique est établi, son indication est alors beaucoup plus proche de la valeur de la température réelle à l'intérieur du four*.

La densité nécessaire dans la zone d'interaction (z.i.) doit être de l'ordre de $5 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³, sur une longueur voisine de 1 cm. Une telle densité est un peu en-deçà des performances usuelles d'un jet effusif. A titre d'exemple, nous avons pu obtenir des densités dans la z.i. de l'ordre de 10^{11} atomes/cm³ avec un simple four, d'orifice circulaire d'environ 1 cm de diamètre. Si on essaie d'augmenter la densité en chauffant davantage, le libre parcours moyen λ_c devient plus petit que l'ouverture du four (dans le cas de Na, $\lambda_c \approx 1$ cm à $T \approx 300^\circ\text{C}$), et les collisions entre atomes au niveau de l'ouverture du four, entraînent une saturation de la densité. Egaleme nt, le débit élevé de ce type de four réduisait la durée de fonctionnement pour une charge de sodium d'environ 3 grammes, à seulement quelques heures.

Il est possible d'améliorer les performances du jet en utilisant une galette de micro-tubes placée à la sortie du four [Clausing 30] [Giordmaine 60] [Jones 69]. Comme montré schématiquement sur la figure II.C.9, ces galettes permettent d'augmenter considérablement le rapport entre le nombre d'atomes émis vers l'avant (qui atteignent la z.i. et contribuent au signal), et le nombre d'atomes émis sur les côtés (qui sont perdus et augmentent inutilement le débit du four).

* Habituellement, la mesure de la température est effectuée par un thermocouple, serti dans la masse du four et donnant ainsi une indication beaucoup plus fidèle par rapport à la température réelle à l'intérieur de celui-ci. Compte-tenu des contraintes imposées par la structure mécanique, un tel montage s'est avéré impossible à réaliser sur notre dispositif.

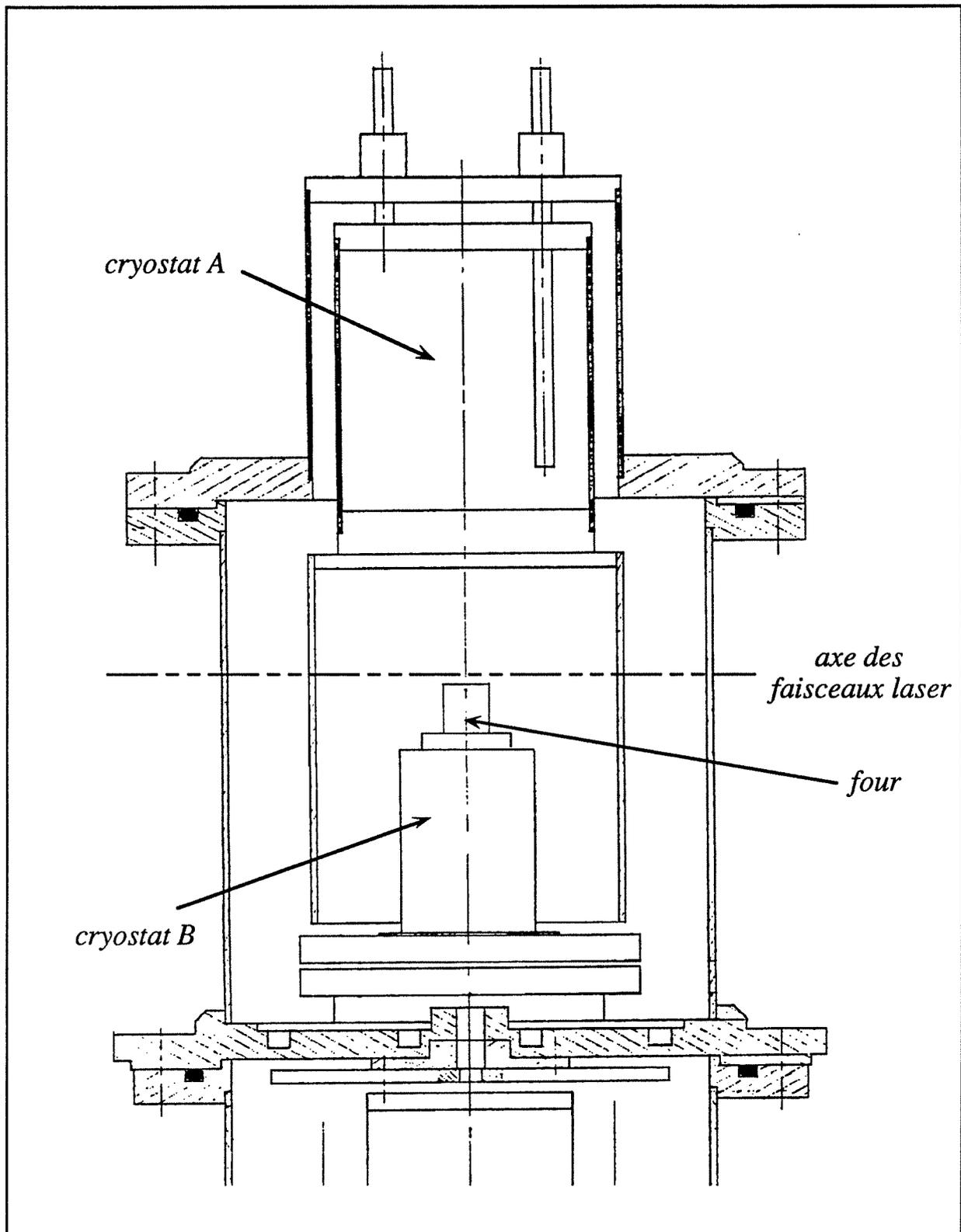


Figure II.D.8 :

Vue d'ensemble du jet atomique, composée de trois chambres. La zone d'interaction, située à l'intersection des deux axes, est entourée d'écrans de cuivre, refroidis par deux cryostats *A* et *B*, contenant de l'azote liquide. Le chargement en grains de sodium s'effectue en accédant au four, après démontage de l'enceinte supérieure.

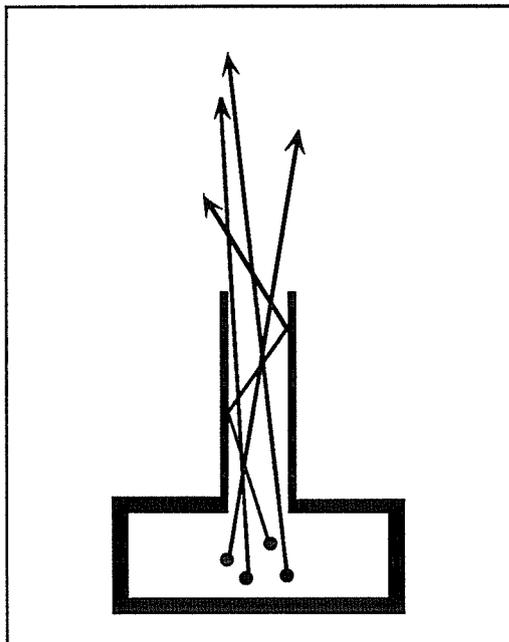


Figure II.D.9 :
Représentation schématique de quelques trajectoires possibles, lorsque les molécules ne subissent pas de collisions entre elles. Les trajectoires sont alors des droites jusqu'au moment où elles touchent une paroi. On peut alors admettre que la réémission des atomes se fait selon une loi maxwellienne, à la température de la paroi. Si cette température est suffisamment élevée, il n'y a pas de condensation le long du tube.

La zone d'interaction est entourée d'écrans refroidis par de l'azote liquide, permettant de piéger systématiquement le sodium évaporé dans l'enceinte à vide et d'obtenir un bon vide résiduel (de l'ordre de $2 \cdot 10^{-6}$ torr).

2. Etude du régime effusif pour une galette de micro-tubes.

a) Densité atomique dans le four.

La pression de vapeur saturante du sodium est donnée par [Nesmeyanov 63] :

$$\log P_S(\text{mmHg}) = 7.551 - \frac{5400}{T(\text{K})} \quad (\text{II.D.20})$$

La densité atomique n_{four} dans le four est ensuite obtenue à partir de la loi des gaz parfaits (figure II.D.10). Le libre parcours des atomes est donné par :

$$\lambda_c = \frac{1}{\sqrt{2} n_{\text{four}} \pi r_{\text{at}}^2} \quad (\text{II.D.21})$$

où r_{at} est le rayon moléculaire, tel que πr_{at}^2 correspond à la section efficace de collision (que l'on peut, par exemple, obtenir à partir des mesures de viscosité du gaz). Nous avons retenu un ordre de grandeur typique pour un gaz monoatomique : $r_{\text{at}} \approx 0.2$ nm.

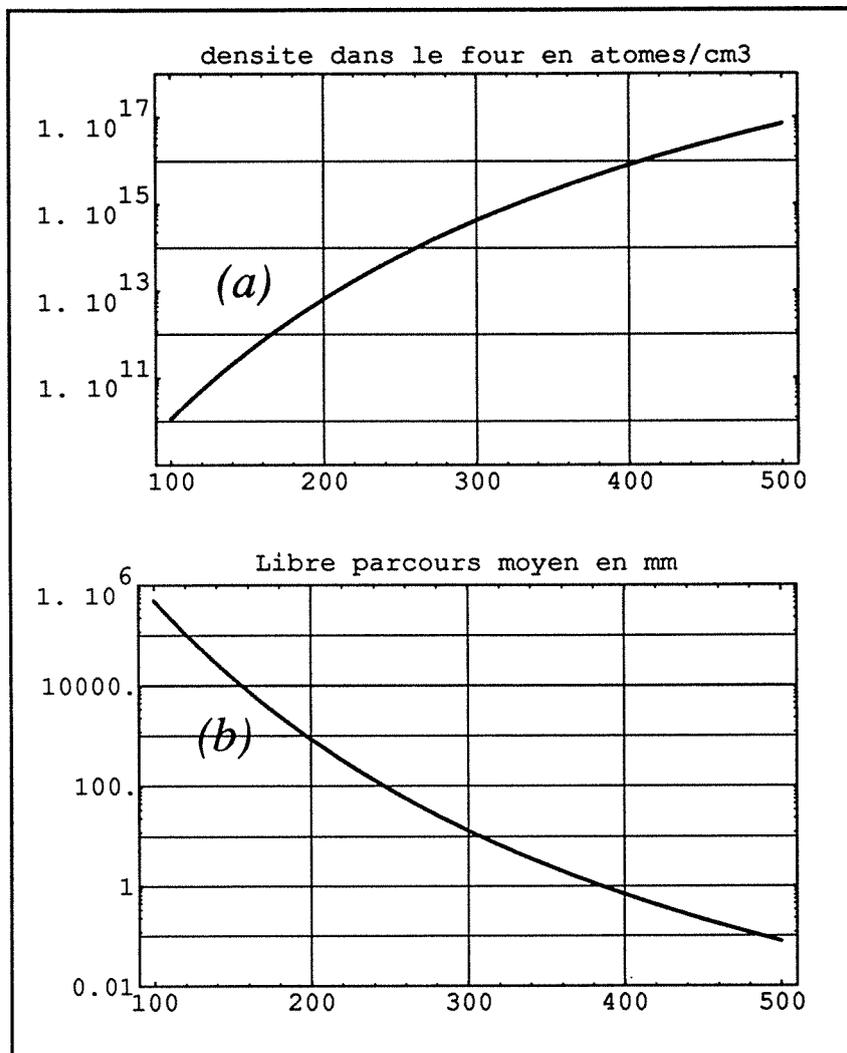


Figure II.D.10 :
Evolution de la densité à l'intérieur du four (a) et du libre parcours moyen (b), en fonction de la température, exprimée en °C.

b) Densité atomique dans le jet.

Nous supposons être en régime non-collisionnel (écoulement moléculaire), obtenu lorsque le libre parcours moyen est grand devant toutes les dimensions caractéristiques de l'écoulement.

α) Répartition des angles de sortie.

Le canal cylindrique a pour dimensions un diamètre $2a$ et une longueur L . Son allongement est défini par :

$$h = \frac{L}{2a} \quad (\text{II.D.22})$$

Dans le cas d'un trou infiniment mince ($h = 0$), la fonction de répartition des angles de sortie des molécules, donnée d'après la Théorie Cinétique des gaz, correspond à $f(\theta) = \cos\theta$. Cette fonction, normalisée pour que $f(\theta) = 1$, s'écrit lorsque $h \neq 0$ [Beijerinck 76] :

- pour $0 \leq \theta < \text{Arctg}(1/h)$.

$$f(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\pi} \left[\text{Arc cos}(h \text{ tg} \theta) - h \text{ tg} \theta (1 - h^2 \text{ tg}^2 \theta)^{1/2} \right] + \frac{4 \sin \theta}{\pi^2} \left[\int_0^h v_{\text{coll}}(z) [1 - (h-z)^2 \text{ tg}^2 \theta]^{1/2} \pi dz \right] \quad (\text{II.D.23.a})$$

- pour $\text{Arctg}(1/h) \leq \theta \leq \pi/2$.

$$f(\theta) = \frac{4 \sin \theta}{\pi^2} \left[\int_{h-\text{tg} \theta}^h v_{\text{coll}}(z) [1 - (h-z)^2 \text{ tg}^2 \theta]^{1/2} \pi dz \right] \quad (\text{II.D.23.b})$$

où $v_{\text{coll}}(z)$ est la fréquence de collision à l'abscisse z , donnée par :

$$v_{\text{coll}}(z) = \alpha + \frac{1-2\alpha}{h} (h-z) \quad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{h}{z} \left[\frac{h^3 - 2 + (2-h^2)(1+h^2)^{1/2}}{h(1+h^2)^{1/2} - \text{Argsh}(h)} \right] \quad (\text{II.D.23.c})$$

Ces formules, plutôt lourdes, peuvent être calculées numériquement pour des valeurs fixées de h . Nous avons ainsi tracé sur la figure II.D.11, la variation de $f(\theta)$ en coordonnées polaires, pour différentes valeurs de h . Comme on pouvait s'y attendre qualitativement, plus le capillaire est allongé, plus le faisceau d'atomes émis est proche de l'axe.

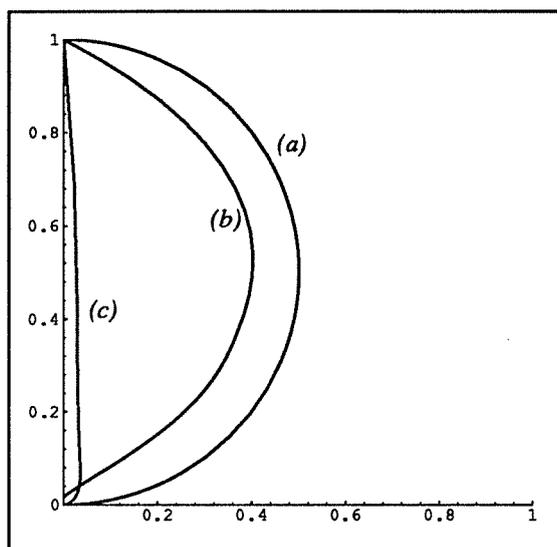


Figure II.D.11 : Répartition angulaire des angles de sortie des atomes pour (a) $h=0$ (orifice infiniment mince, correspondant à une loi $f(\theta) = \cos\theta$), (b) $h=2$, (c) $h=15$ (allongement des micro-tubes insérés dans la galette de micro-capillaires en inox, utilisée dans le dispositif expérimental).

β) Densité au niveau de la z.i.

En régime moléculaire, le flux d'atomes émis par le capillaire dans la direction $\theta = 0$ par unité de surface et par unité d'angle solide est naturellement donnée par la même formule que pour un simple trou de même surface [Giordmaine 60] :

$$I(0) = \frac{1}{4} n_{four} \cdot \bar{v} \cdot a^2 \quad (\text{II.D.25a})$$

où \bar{v} est la vitesse moyenne dans le four, définie par :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (\text{II.D.25b})$$

La densité correspondant à l'émission d'un tube dans la direction $\theta = 0$, à une distance L_{zi} du four, est alors donnée par :

$$n_i \approx \frac{I(0)}{\bar{v}_{jet} L_{zi}^2} \quad (\text{II.D.26})$$

où \bar{v}_{jet} est la vitesse moyenne des molécules du jet donnée par :

$$\bar{v}_{jet} = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}} \quad (\text{II.D.27})$$

En combinant les équations précédentes, la densité totale dans la zone d'interaction, obtenue en ajoutant les contributions des N tubes composant la galette, s'écrit :

$$n_{zi} = \frac{2}{3\pi} \cdot n_{four} \cdot \frac{Na^2}{L_{zi}^2} \quad (\text{II.D.28})$$

où Na^2 est la surface totale efficace S_{eff} de la galette.

γ) Masse totale évaporée.

Le nombre total de molécules évaporées par un tube est donnée, pour $L \gg a$, par la formule approchée [Ramsay 56] :

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{3} \cdot n_{\text{four}} \cdot \bar{v} \cdot \frac{a^3}{L} \quad (\text{II.D.29})$$

soit au total :

$$\phi = N\phi_1 = \frac{2\pi}{3} \cdot n_{\text{four}} \cdot \bar{v} \cdot (Na^2) \cdot \left(\frac{a}{L}\right) \quad (\text{II.D.30})$$

Les équations (II.D.29) et (II.D.30) montrent que, si la densité en atomes dans la zone d'interaction est identique à celle que l'on obtiendrait théoriquement avec une source ayant un orifice d'ouverture S_{eff} (en négligeant la limitation due au libre parcours moyen), le débit total du four est, par contre, réduit dans un facteur (a/L) avec une galette de micro-tubes.

3. Prévisions théoriques et résultats expérimentaux pour la configuration utilisée.

a) Résultats du modèle de la théorie cinétique.

Des essais préliminaires ont été effectués avec des galettes de verre, comportant environ 10^6 tubes de diamètre $10 \mu\text{m}$ et de longueur 1 mm . Ces galettes n'ont pas permis d'obtenir les densités attendues (les valeurs mesurées dans la z.i. atteignaient une saturation vers environ $5 \cdot 10^{10}$ atomes/cm³). D'autre part, au bout de quelques heures de fonctionnement, elles étaient détruites par des réactions chimiques entre le verre et le sodium, à la température du four (de 350 à 450°C).

Nous avons donc réalisé un nouveau four, dont l'orifice est une galette composée d'environ 300 microtubes d'acier inoxydable, assemblés par brasage. La longueur d'un tube est de 5 mm et ses diamètres interne et externe, respectivement 0.33 mm et 0.55 mm . Le diamètre total de la galette est de 1 cm (figure II.D.12).

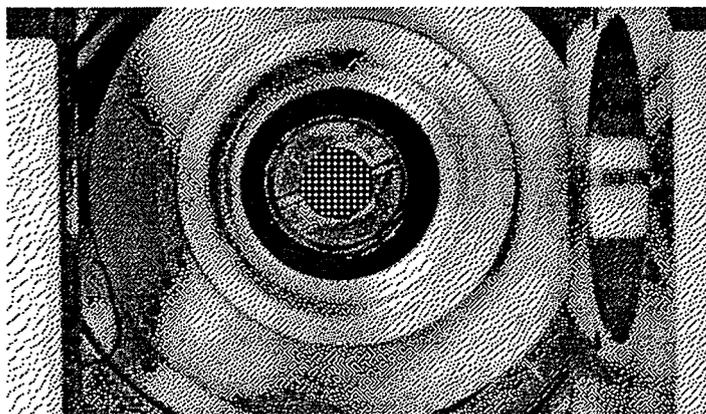


Figure II.D.12 :
Photographie de la galette de micro-capillaires en inox, assemblés par brasage sur une pièce en cuivre se vissant sur l'extrémité du four.

Le régime d'écoulement peut être caractérisé par deux nombres de Knudsen, définis comme le rapport du libre parcours moyen aux dimensions caractéristiques du tube :

$$K_{//} = \frac{\lambda_c}{L} \qquad K_{\perp} = \frac{\lambda_c}{2a} \qquad (\text{II.D.31})$$

Le régime moléculaire est vérifié lorsque ces deux nombres sont beaucoup plus grands que 1 (en pratique, supérieurs à 5). La figure II.D.13 (courbe (a)) montre l'évolution de ces deux paramètres en fonction de la température : celle-ci ne doit donc pas dépasser environ 400°C.

La courbe (b) de cette figure donne le résultat de la densité dans la z.i. en fonction de la température (eq. II.D.29), pour une distance $L_{zi} = 5 \text{ cm}$: un chauffage correspondant à une température de 300°C doit ainsi permettre d'atteindre des densités d'environ 10^{12} atomes/cm³ au niveau des faisceaux laser.

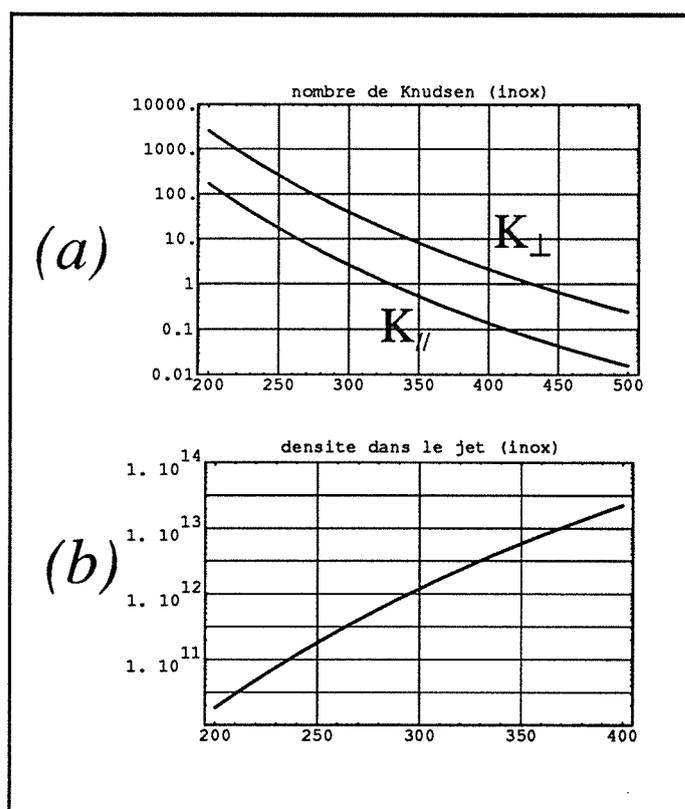


Figure II.D.13 : Evolution en fonction de la température (exprimée en °C) des nombres de Knudsen caractérisant l'écoulement (a), de la densité atomique au niveau de la z.i. (à une distance de 5 cm au-dessus du four) (b). La limite du régime moléculaire correspond à environ 400°C. Pour une température de fonctionnement voisine de 300°C, la densité prévue dans le jet est d'environ 10^{12} atomes/cm³.

b) Résultats expérimentaux.

L'ordre de grandeur est tout-à-fait conforme aux prévisions théoriques précédentes : à une température voisine de 250°C, la densité mesurée dans la z.i. est de l'ordre de quelques 10^{11} atomes/cm³ (cf. Annexe IV). La température de 350-400°C est réellement apparue comme une limite à ne pas dépasser; au delà, il y a saturation de la densité au niveau de la z.i., par contre, le débit du jet augmente alors dramatiquement et le four se vide très rapidement.

Tout au long de ces expériences, le fonctionnement du four s'est avéré être un problème considérable. Nous avons en particulier observé un effet "curieux" : pour des températures de l'ordre de 200°C, le sodium peut se mettre à déborder, en dehors des micro-tubes. On observe alors une densité extrêmement élevée, correspondant à un jet produit par bouffées et très mal collimaté. Du sodium peut même se coller sur les miroirs de la cavité, entraînant une chute plus ou moins irréversible de sa finesse. Nous avons attribué ce phénomène, d'une part à la décomposition de la soude et de l'hydrogénocarbonate qui peuvent recouvrir le sodium chargé initialement dans le four et, d'autre part, à un mouillage des parois du four par le sodium, d'autant plus accentué que cet alcalin peut réagir chimiquement avec l'inox courant et les impuretés présentes (en particulier le carbone).

Nous avons résolu le premier problème en nettoyant très proprement les grains de sodium utilisés pour charger le four, en évitant tout phénomène de carbonatation. Le deuxième problème a, quant à lui, été résolu en introduisant à l'intérieur du four un creuset en nickel pur, métal inerte chimiquement avec le sodium. En pratique, nous avons ainsi mis au point le mode opératoire suivant :

- 1) après utilisation, nettoyage très soigneux du creuset (d'abord à l'éthanol, puis dans une cuve à ultra-sons, et enfin étuvage à 100°C) ;
- 2) remplissage du four avec du sodium très propre ; en particulier, il est nécessaire d'éviter toute carbonatation en surface des grains de sodium (pour cela, nous préparons la charge dans un sac rempli d'azote, faisant office de boîte à gants) ;
- 3) montée en température très progressive lors du chauffage, en s'assurant que toutes les différents écrans soient bien refroidis.

Ce n'est qu'en respectant scrupuleusement toutes ces précautions que nous sommes parvenus à obtenir un fonctionnement correct du four, reproductible d'une expérience à l'autre, qui nous permette d'obtenir les densités calculées théoriquement, ainsi que de préserver la finesse de la cavité tout au long de l'expérience.

E. ETUDE EXPERIMENTALE DE LA DISPERSION A DEUX PHOTONS

I. MISE EN EVIDENCE DE LA TRANSITION A DEUX PHOTONS.

La transition à deux photons (avec comme niveau relais $3p^2P_{3/2}$) est observée pendant le balayage du laser infra-rouge en détectant à l'aide d'un photomultiplicateur la fluorescence correspondant à la désexcitation radiative vers les deux sous-niveaux fin du niveau $3p$. Au cours du balayage, la fréquence du laser excitant la transition du bas est maintenue à un désaccord fixe ($\Delta = -2 \text{ GHz}$ par rapport à la résonance $3s^2S_{1/2} (F = 2) \rightarrow 3p^2P_{3/2}$).

Le signal (reproduit sur la figure II.E-1 présente quatre raies bien résolues, correspondant aux différentes transitions entre les deux composantes hyperfines du niveau fondamental ($F = 2$ puis $F = 1$, séparées de 1.77 GHz) et les deux composantes fines du niveau supérieur ($^2D_{5/2}$ puis $^2D_{3/2}$, séparées de 1.43 GHz).

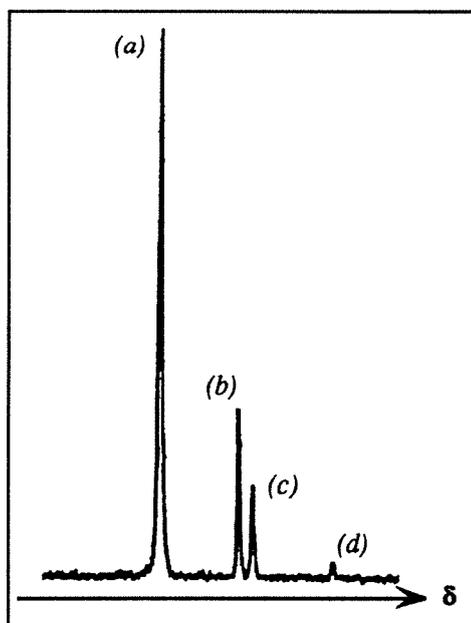


FIGURE II E - 1 :

Fluorescence à deux photons vers 820nm , correspondant à la désexcitation des niveaux excités vers le niveau $3p$. Le désaccord du laser excitant la transition du bas est maintenu fixé à $D = -2 \text{ GHz}$, au cours du balayage.

Les quatre raies correspondent successivement aux transitions :

- (a) $3s \ 1/2 \ (F=2) \rightarrow 3d \ 5/2$
- (b) $3s \ 1/2 \ (F=2) \rightarrow 3d \ 3/2$
- (c) $3s \ 1/2 \ (F=1) \rightarrow 3d \ 5/2$
- (d) $3s \ 1/2 \ (F=1) \rightarrow 3d \ 3/2$.

Remarque 1 :

En décalant progressivement la longueur d'onde du premier laser, il est possible de vérifier la décroissance en $1/\Delta^2$ du signal de fluorescence, caractéristique d'une interaction à deux photons.

Remarque 2 :

Les lasers utilisés pour l'expérience correspondent à une polarisation rectiligne (σ_+ + σ_-) pour $\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$, et à une polarisation circulaire (σ_+) pour $\lambda_2 = 819.5 \text{ nm}$. D'après les calculs précédents, les déphasages non-linéaires (et donc les intensités de couplage dans les transitions à deux photons) sont dans le rapport :

$$\gamma_1 = \frac{\mathcal{F}(3s1/2 \ F=2 \rightarrow 3p3/2 \rightarrow 3d3/2)}{\mathcal{F}(3s1/2 \ F=2 \rightarrow 3p3/2 \rightarrow 3d5/2)} = \frac{1}{12}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mathcal{F}(3s1/2 \ F=1 \rightarrow 3p3/2 \rightarrow 3d3/2)}{\mathcal{F}(3s1/2 \ F=2 \rightarrow 3p3/2 \rightarrow 3d3/2)} = \frac{3}{5}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mathcal{F}(3s1/2 \ F=1 \rightarrow 3p3/2 \rightarrow 3d5/2)}{\mathcal{F}(3s1/2 \ F=2 \rightarrow 3p3/2 \rightarrow 3d5/2)} = \frac{3}{5}$$

alors que d'après le spectre obtenu :

$$\gamma_1^{exp} \sim 0.3$$

$$\gamma_2^{exp} \sim 0.17$$

$$\gamma_3^{exp} \sim 0.09$$

Les intensités des raies observées en fluorescence ne sont donc pas du tout dans les rapports prévus par le simple modèle cubique. Plusieurs raisons peuvent être invoquées :

(i) ces rapports correspondent aux résultats d'un calcul perturbatif, le paramètre du développement étant :

$$\varepsilon = \frac{I_1 / I_{gr}^{sat}}{\frac{\Delta}{\Gamma_g / 2} \frac{\delta}{\Gamma_g / 2}}$$

Pour notre expérience, $\Delta \sim 200 \Gamma_g / 2$ et $J \sim 400 I_{gr}^{sat}$, si bien que lorsque l'on passe sur la résonance à deux photons ($\delta \sim \Gamma_g / 2$), le terme du développement n'est plus négligeable devant 1. Il apparaît des effets de saturation, qui modifient les intensités des raies. Lorsque la transition est réalisée avec deux photons égaux en fréquence (par exemple pour le sodium l'excitation $3s \rightarrow 3p \rightarrow 3d$ [Grynberg 77], l'écart par rapport à la résonance à un photon est très grand ($\Delta \sim 300 \text{ cm}^{-1}$ soit $\Delta \sim 2.10^6 \Gamma_g / 2$) et pour des puissances de l'ordre du mW, ε reste toujours petit et le développement perturbatif est toujours valable, même sur les résonances à deux photons.

(ii) lorsque l'on observe les signaux de fluorescence émis dans la cascade de désexcitation, il est nécessaire de tenir compte d'effets de redistributions de population (par exemple par pompage hyperfin), ainsi que d'orientations des dipôles optiques créés dans la résonance à deux photons. De tels effets viennent naturellement modifier les intensités des raies.

II. MESURE DU COUPLAGE NON-LINEAIRE.

1. Mise en évidence de la non-linéarité cubique par détection hétérodyne.

a) Principe de l'expérience.

Nous avons utilisé le phénomène d'activité optique induite par un faisceau signal polarisé circulairement, sur un faisceau de mesure polarisé linéairement, le montage expérimental étant représenté sur la figure II.E.2.

Le faisceau signal (en l'occurrence le faisceau infra-rouge) est faiblement modulé en intensité (environ 4 % dans les bandes latérales) par effet électro-optique. Le couplage non-linéaire transfère cette modulation à la fois sur les fluctuations d'amplitude (du fait de l'absorption non linéaire) et sur les fluctuations de phase (du fait de la dispersion non-linéaire). En plaçant un analyseur à 45° de la direction de polarisation initiale, on obtient une modulation d'amplitude composée à la fois des deux modulations précédentes (figure II.E.3).

Ces deux modulations étant en quadrature, il est possible en utilisant une technique de détection hétérodyne, d'obtenir en fonction de la phase de l'oscillateur local, soit une courbe d'absorption (partie imaginaire du $\chi^{(3)}$) soit une courbe de dispersion (partie réelle du $\chi^{(3)}$).

Remarque :

Il est important que la fréquence de modulation Ω soit plus faible que la largeur naturelle $\Gamma_g/2$ des niveaux. Si Ω est supérieur à $\Gamma_g/2$, il apparaît en fait deux courbes correspondant aux couplages non-linéaires $\chi^{(3)}(\omega_1, -\omega_2, \omega_2 + \Omega)$ et $\chi^{(3)}(\omega_1, -\omega_2, \omega_2 - \Omega)$. Ces deux courbes sont centrées en $\delta = -\Omega$ et $\delta = +\Omega$, symétriquement autour de la résonance à deux photons $\delta = 0$ [Bloch 81].

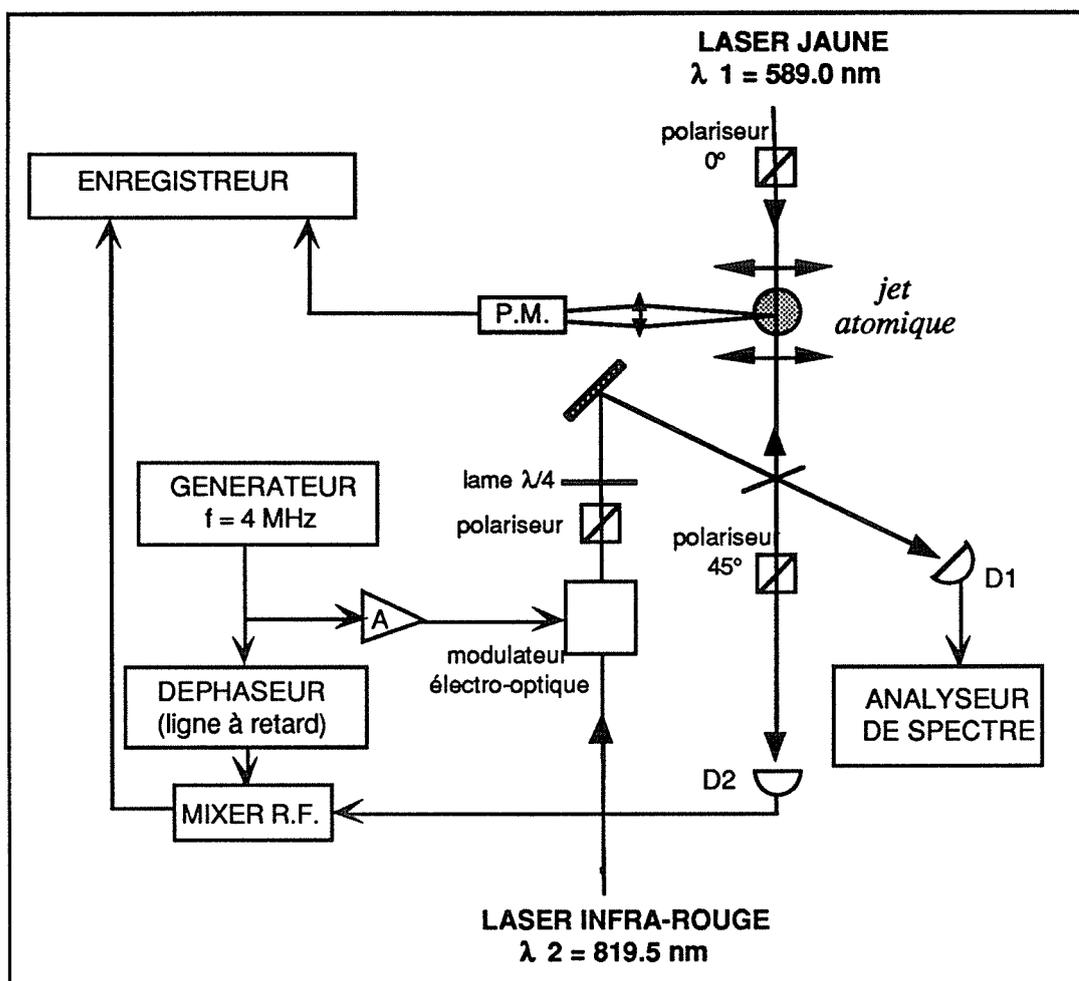


FIGURE II.E - 2 :

Montage expérimental pour la détection de la non-linéarité cubique. Les deux faisceaux, de puissance environ 0.5 mW, sont superposés dans le jet atomique (diamètre des faisceaux environ 50mm).

La modulation d'amplitude du laser IR, détectée par D1, est contrôlée à l'aide de l'analyseur de spectre. Ce couplage est transféré à la fois sur les fluctuations d'amplitude et de phase du faisceau jaune. A l'aide d'une détection hétérodyne, on peut observer soit la partie réelle, soit la partie imaginaire de la non-linéarité, en ajustant la phase de l'oscillateur local à l'aide de la ligne à retard. Ces signaux sont enregistrés simultanément avec la fluorescence provenant de l'absorption à deux photons (détectée par le photomultiplicateur).

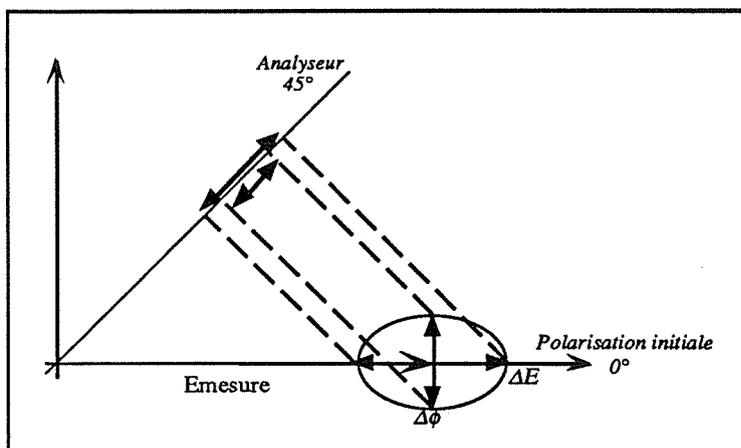


FIGURE II. E - 3 :

Principe de la détection de la non-linéarité à deux photons. Le faisceau de mesure est initialement polarisé rectilignement. Son couplage avec le faisceau signal, polarisé circulairement et faiblement modulé en intensité, se traduit par une modulation d'amplitude ΔE et de phase $\Delta \phi$. En plaçant un analyseur à 45° , le faisceau de sortie possède des fluctuations d'amplitude, composées à la fois de ΔE et de $\Delta \phi$, et qui sont en quadrature l'une par rapport à l'autre.

b) Résultats.

Le passage continu d'une courbe d'absorption à une courbe de dispersion, lorsqu'on fait varier la phase de l'oscillateur local, est représenté sur la figure II.E.4.

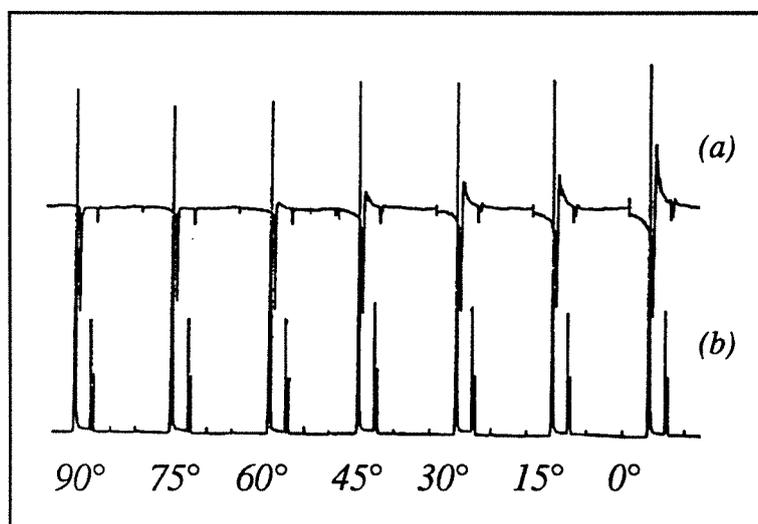


Figure II.E.4 : Balayages successifs sur la résonance à deux photons, en modifiant progressivement la phase de l'oscillateur local utilisé dans la détection hétérodyne : on passe ainsi du signal d'absorption au signal de dispersion non-linéaire (a). La courbe (b) est une référence, correspondant à l'observation de la fluorescence de e vers r , due à l'absorption à deux de photons.

La figure II.E.5 montre un ajustement des points expérimentaux correspondant au déphasage non-linéaire avec une courbe correspondant à la limite cubique dispersive. Lorsque le désaccord à résonance est suffisamment grand, cette approximation est bien justifiée (pour les puissances utilisées dans cette expérience, le domaine de validité correspond à $\delta > 250 \text{ MHz}$, soit environ $50 \Gamma_g/2$).

Si cette méthode de mesure permet de vérifier directement que la dispersion non-linéaire varie effectivement suivant une courbe de dispersion autour de la résonance à deux photons, il est néanmoins difficile d'en tirer une valeur numérique du déphasage non-linéaire. Nous avons donc utilisé une autre méthode, toujours basée sur le phénomène d'activité optique induite par un faisceau lumineux.

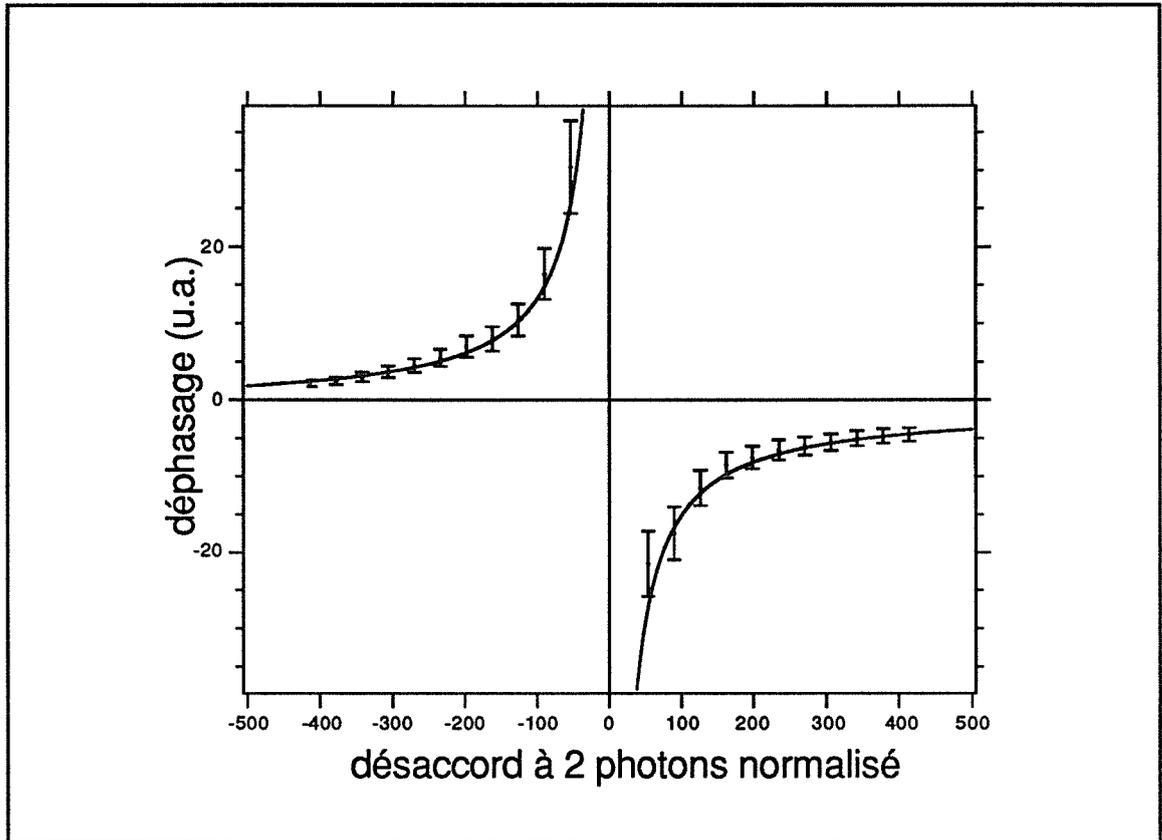


Figure II.E - 5 :

Variation du déphasage non-linéaire subi par le faisceau jaune, autour de la résonance à deux photons (δ est normalisé par rapport à $\Gamma g/2$, et mesuré à partir de la séparation de 1.8GHz entre les deux résonances $F=2$ et $F=1$). Les points expérimentaux sont représentés avec une incertitude de 20% et sont ajustés par une courbe théorique correspondant à la limite cubique dispersive (en incluant le déphasage linéaire créé par la transition du bas). Le seul paramètre ajustable du calcul est l'épaisseur optique à résonance, les autres paramètres correspondant aux mesures expérimentales : $\Delta = -2\text{GHz}$, $P_{\text{jaune}} = P_{\text{ir}} = 0.5\text{mW}$ focalisés sur un waist de $50\mu\text{m}$.

2. Observation directe du déphasage non-linéaire à l'aide d'une cavité Fabry-Pérot.

a) Principe de l'expérience.

La configuration expérimentale est celle utilisée pour la mise en évidence du couplage QND. Pour des raisons que nous détaillerons dans le Chapitre III, elle correspond à une cavité optique à deux miroirs ayant une finesse élevée pour la longueur d'onde de la transition supérieure du système à trois niveaux (819.5 nm). La réflectivité des miroirs est voisine de 99.5 % à cette longueur d'onde, alors qu'elle est faible (10 % environ) pour la longueur d'onde de la transition inférieure (589.0 nm).

Si le faisceau jaune est polarisé circulairement et le faisceau IR polarisé linéairement, les composantes σ_- et σ_+ de ce faisceau sont déphasées différemment. Lorsque l'on balaye la longueur de la cavité, on observe donc deux pics successifs pour la résonance de la cavité; leur écart donne directement le déphasage non-linéaire (figure II.E.6).

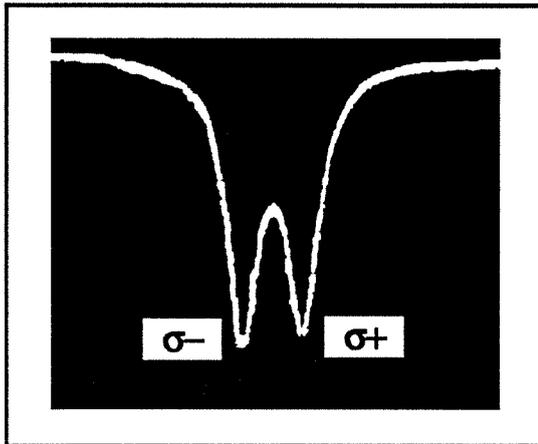


FIGURE II E - 6 :

Observation du déphasage introduit par la dispersion à deux photons, au cours d'un balayage de la cavité.

La composante σ_- correspond à la polarisation non-couplée au faisceau jaune, tandis que la polarisation σ_+ résonne pour une longueur différente de la cavité.

Remarque 1 :

En fonction des intensités lumineuses (en particulier celle du faisceau infra-rouge, qui, lorsque celui-ci résonne dans la cavité, peut alors devenir très importante), et des désaccords par rapport aux diverses résonances atomiques, les courbes de Fabry-Pérot peuvent facilement devenir bistables. Pour obtenir une mesure correcte du déphasage non-linéaire, il faut éviter cette bistabilité et en particulier, il est alors nécessaire d'atténuer le faisceau infra-rouge, afin que, même lorsque celui-ci résonne dans la cavité, son intensité reste suffisamment faible pour ne pas saturer la non-linéarité.

Remarque 2 :

En polarisant circulairement à l'aide d'une lame $\lambda/4$ le faisceau infra-rouge, on peut vérifier qu'il existe un déphasage non-linéaire pour un sens de polarisation, tandis que pour l'autre sens (obtenu en tournant la lame $\lambda/4$ de 90°), les deux faisceaux ne sont pas couplés. On peut également vérifier que les hélicités correspondantes sont bien celles définies sur la figure II.C.5.

b) Application à la détermination du désaccord à deux photons δ .

Lorsque l'on est sur la raie d'absorption à deux photons la plus intense (i.e. celle partant du sous-niveau hyperfin $F = 2$ du fondamental), la polarisation couplée est complètement absorbée. Il est donc possible de déterminer de façon relativement précise cette résonance. On peut ensuite déterminer la valeur du désaccord à deux photons δ en décalant la fréquence du laser IR à partir de cette référence, d'une valeur donnée par l'électronique de contrôle du laser.

Dans tout ce mémoire, les valeurs expérimentales de δ sont données par rapport à la référence de fréquence correspondant à la transition à deux photons à partir du sous-niveau $F = 2$ de $3s1/2$ vers le niveau $3d5/2$, et sont déterminées par la méthode indiquée ci-dessus.

c) Mesures du déphasage non-linéaire.

□ Comparaison avec la valeur théorique obtenue précédemment (§ CII).

Quelques courbes expérimentales sont représentées sur le tableau II.E-1. Elles correspondent à différentes valeurs des désaccords à un et deux photons. La densité du jet atomique est environ $n_{at} = 4.10^{11}$ atomes/cm³ pour une longueur d'interaction $\ell \approx 2$ cm (correspondant à un double passage dans le jet). L'épaisseur optique à résonance correspondant à ces valeurs est $\alpha_0 \ell \approx 680$. Les puissances laser sont $P_{jaune} = 3.2$ mW et $P_{infrarouge} = 0.5$ mV. Ces deux faisceaux sont focalisés sur un waist $w_0 \approx 50$ μ m, ce qui correspond, pour le faisceau jaune, à une intensité lumineuse d'environ 40 W/cm² soit en unité normalisée $I_1 = 6.8 \cdot 10^3 I_{gr}^{sat}$. En reportant ces diverses valeurs, ainsi que celles pour Δ et δ , dans l'expression (II.C-18b) du déphasage non-linéaire pour le faisceau I.R., il est ainsi possible de comparer notre formule théorique aux valeurs expérimentales du déphasage non-linéaire (tableau II.E-1).

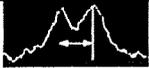
Courbe expérimentale	Désaccords	Valeur Théorique	Valeur expérimentale
(a)  50 μ s	$\Delta = -4$ GHz $\delta = -1$ GHz	$\varphi_{th}^{nl} = 0.033$	$\varphi_{exp}^{nl} = 0.031$
(b)  147 μ s	$\Delta = -2$ GHz $\delta = -1.5$ GHz	$\varphi_{th}^{nl} = 0.089$	$\varphi_{exp}^{nl} = 0.092$
(c)  227 μ s	$\Delta = -2$ GHz $\delta = -1$ GHz	$\varphi_{th}^{nl} = 0.13$	$\varphi_{exp}^{nl} = 0.14$
(d)  180 μ s	$\Delta = -2$ GHz $\delta = -1$ GHz	$\varphi_{th}^{nl} = 0.13$	$\varphi_{exp}^{nl} = 0.11$

Tableau II.E-1 :

Comparaison théorie-expérience pour la mesure du déphasage non-linéaire. La séparation des deux polarisations est référencée par rapport à l'intervalle spectral libre de la cavité, correspondant à 10 ms. La différence entre les courbes (c) et (d) peut s'expliquer par des variations de densité atomique du jet de sodium.

Si l'accord est correct pour les paramètres correspondant à cette expérience, d'autres résultats montrent par contre, qu'il n'en est plus du tout de même en présence d'absorption à deux photons. Les valeurs prédites théoriquement sont alors nettement différentes de celles mesurées expérimentalement. Comme nous l'avons vu dans la partie II-B, cet écart provient de l'apparition de population sur le niveau excité.

□ Influence du désaccord à deux photons δ et de l'intensité du faisceau jaune :

La figure II.E-8 montre deux courbes correspondant à $\delta < 0$ et $\delta > 0$. Autour de la résonance à deux photons, il y a bien inversion du signe du déphasage non-linéaire. La figure II.E-9 montre la variation du pic de résonance correspondant à un faisceau infra-rouge polarisé circulairement, pour deux valeurs de l'intensité lumineuse du faisceau jaune. Compte-tenu du fait que la courbe passe par l'origine, on observe une dépendance à peu près linéaire entre cette intensité et le déphasage non-linéaire.

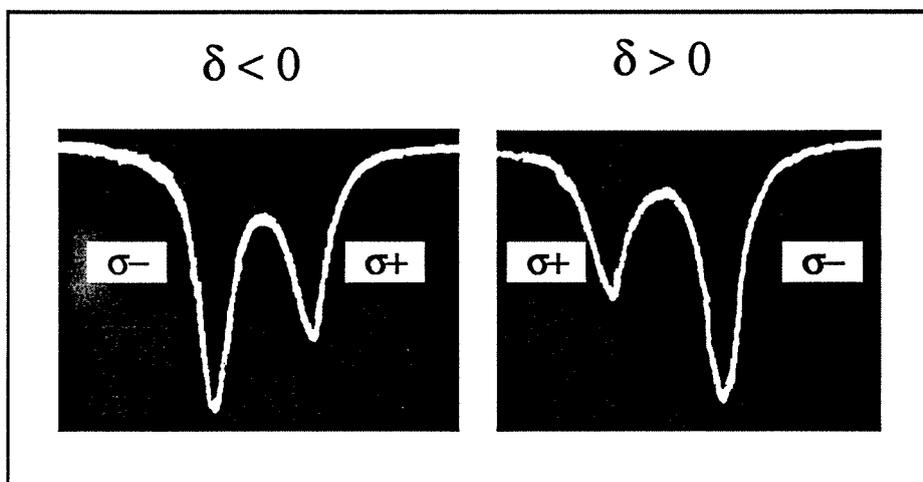


FIGURE II E - 9 : Influence du signe de δ sur la dispersion à deux photons (les courbes correspondant à la polarisation couplée sont légèrement déformées par des effets de bistabilité).

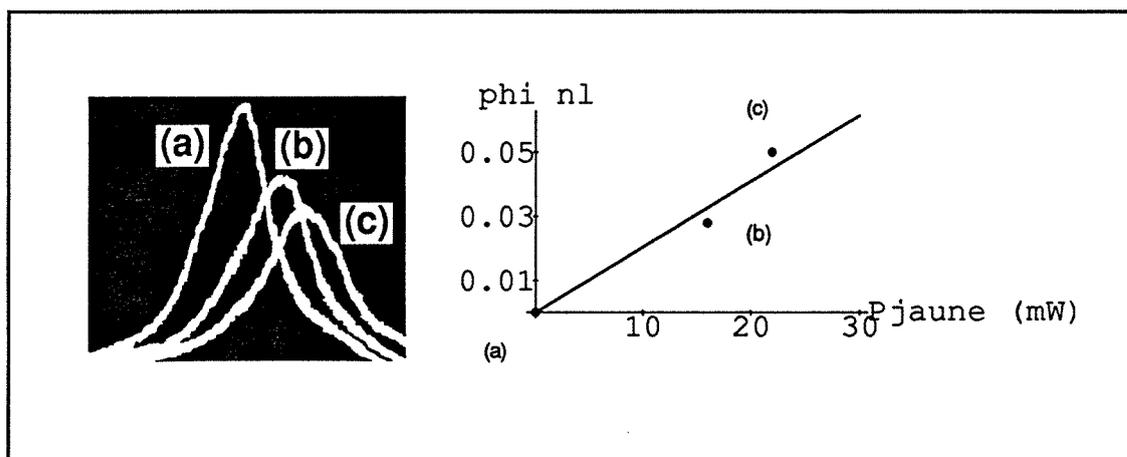


FIGURE II E - 9 :

Influence de la puissance jaune sur le déphasage non-linéaire. La courbe (a) est obtenue en coupant le faisceau jaune, tandis que les courbes (b) et (c) correspondent respectivement à des puissances de 16mW et 22mW.

F. CONCLUSION DU CHAPITRE II

1. Résultats théoriques obtenus.

Nous avons effectué une analyse classique détaillée du système à trois niveaux utilisé. Cette étude a utilisé des techniques bien connues de Physique Atomique, développées pour l'étude des transitions à deux photons. Les résultats que nous avons obtenus pour le système considéré sont bien en accord avec les conclusions générales obtenues dans les études précédentes (en particulier celles faites par Grynberg *et al.*). Elle nous a en particulier permis d'obtenir des conditions pour que les termes d'ordre supérieur à $\chi^{(3)}$ soient négligeables, déterminant ainsi un domaine de validité du modèle cubique dispersif, dans l'espace des paramètres $\{\Omega_1, \Omega_2, \Delta, \delta\}$.

Pour replacer cette analyse dans son contexte historique, cette étude a été développée pendant la première année de thèse, et correspondait à l'idée "intuitive" qu'une non-linéarité à deux photons "idéale" pour les champs moyens l'est également pour les fluctuations atomiques. Comme nous le verrons par la suite, ceci n'est pas exact et l'élimination du milieu atomique, via uniquement sa susceptibilité non-linéaire pour les champs moyens, est insuffisante. Les résultats obtenus ont néanmoins été très utiles pour l'étude de la bistabilité à deux photons.

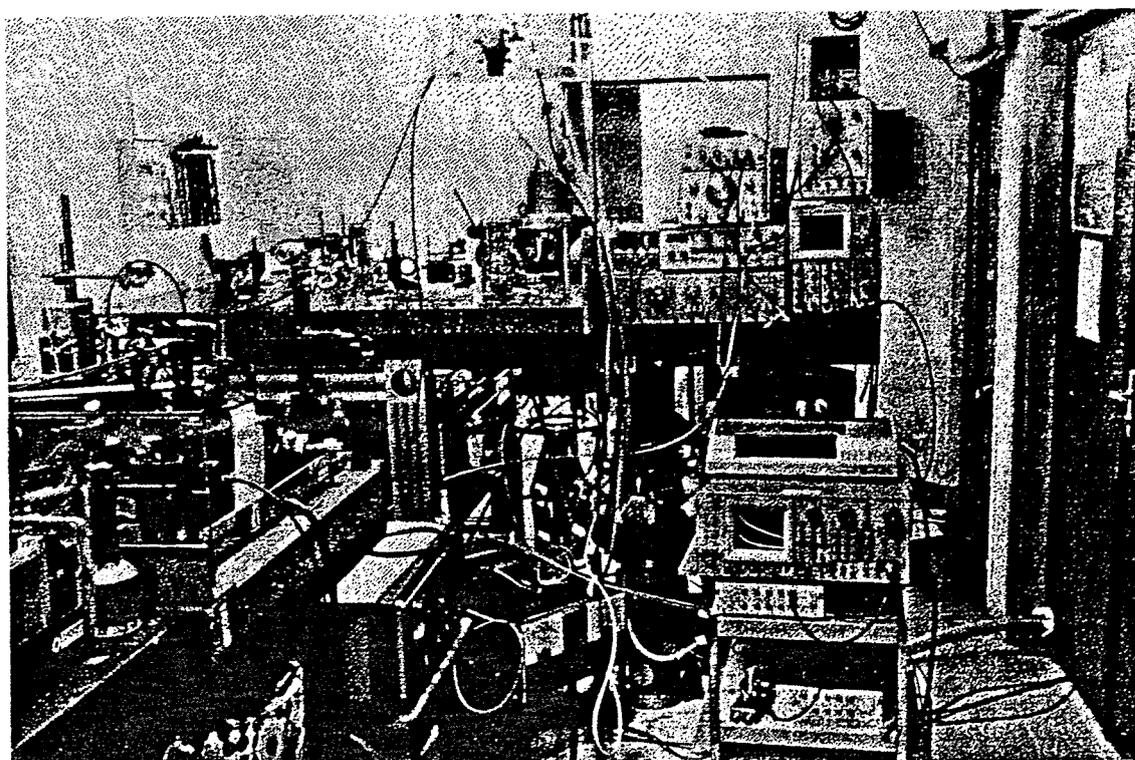
2. Résultats expérimentaux.

- Mise en place du dispositif expérimental de base servant à la suite des expériences : lasers à colorant monomodes, accordables à 589.0 nm et 819.5 nm, jet atomique intense de sodium et cavité optique sous vide. Cet ensemble a fonctionné conformément aux spécifications attendues, en particulier quant à la densité atomique dans la zone d'interaction avec les lasers.
- Tests du dispositif en "régime classique", donnant des résultats pour les déphasages non-linéaires conformes aux modèles théoriques.

Nous avons donc pu ainsi passer à la recherche d'effets sur les fluctuations quantiques. D'autre part, les expériences présentées dans ce Chapitre montrent que, pour les cavités utilisées, il est possible d'obtenir facilement des déphasages non-linéaires de l'ordre de la largeur des modes résonnants : une telle situation semble donc tout-à-fait appropriée pour permettre l'observation de bistabilité à deux photons, en régime dispersif.

CHAPITRE TROIS

Réalisation expérimentale d'une mesure QND



A. INTRODUCTION

Afin d'obtenir un couplage efficace entre les fluctuations quantiques des deux faisceaux, il est possible de renforcer le déphasage non-linéaire à l'aide d'une cavité optique [Alsing 88]. Les déphasages non-linéaires sont alors, très schématiquement, multipliés par le nombre moyen de tours effectués par les photons à l'intérieur de la cavité. Pour préserver la condition QND sur les fluctuations d'intensité sur ce faisceau, il est par contre nécessaire que phase et amplitude évoluent indépendamment l'une par rapport à l'autre, dans la propagation de ce faisceau. Nous montrerons que cette condition impose que, si on utilise une cavité dans laquelle le faisceau signal et le faisceau de mesure peuvent tous deux résonner (*cavité à deux longueurs d'onde*), le mode correspondant au signal soit exactement à résonance.

Le désaccord de la cavité étant a priori un paramètre critique à maintenir fixé expérimentalement, une configuration plus robuste consiste à utiliser une cavité, dont les miroirs soient transparents pour le faisceau signal, et dans laquelle seul le faisceau de mesure peut résonner (cette configuration sera appelée *cavité à une longueur d'onde*).

Afin que le processus de dispersion croisée soit le phénomène non-linéaire prédominant, *il est alors préférable d'utiliser comme faisceau de mesure accordé sur la cavité, le faisceau excitant la transition supérieure*. En se limitant aux effets sur les champs moyens, nous venons en effet de montrer au Chapitre II que le processus concurrent pour les champs moyens, apparaissant à la limite cubique, correspond à une auto-modulation de phase pour le faisceau excitant la transition inférieure. On peut alors supposer qu'en absence de cavité sur celui-ci, cet effet "parasite" deviendra alors négligeable devant la dispersion croisée, qui sera, quant-à-elle, renforcée de façon sélective par la cavité.

Le couplage par effet Kerr fait apparaître l'information de mesure sur les fluctuations de phase du faisceau de mesure. Il est donc nécessaire d'utiliser avant le détecteur un dispositif interférométrique sur le faisceau de mesure [Imoto 85] (figure III.A.1).

Nous montrerons théoriquement qu'une solution très commode du point de vue expérimental, consiste à utiliser la cavité, à la fois pour renforcer le couplage, et pour effectuer cette détection. Il est en effet bien connu qu'une cavité désaccordée transforme une fluctuation de phase sur un signal entrant, en fluctuation d'intensité sur le faisceau réfléchi. Cette méthode

était en particulier utilisée par Levenson *et al.*, pour effectuer la détection homodyne des fluctuations de phase du faisceau de mesure [Levenson 86][Levenson 87]. De façon plus précise, nous démontrerons dans la partie B que lorsque le faisceau de mesure est désaccordé par rapport à la cavité, le couplage apparaît alors sur une seule des bandes latérales (en l'occurrence, celle en résonance avec la cavité), et peut être détecté aussi bien sur les fluctuations de phase que sur les fluctuations d'amplitude du faisceau de mesure réfléchi par la cavité

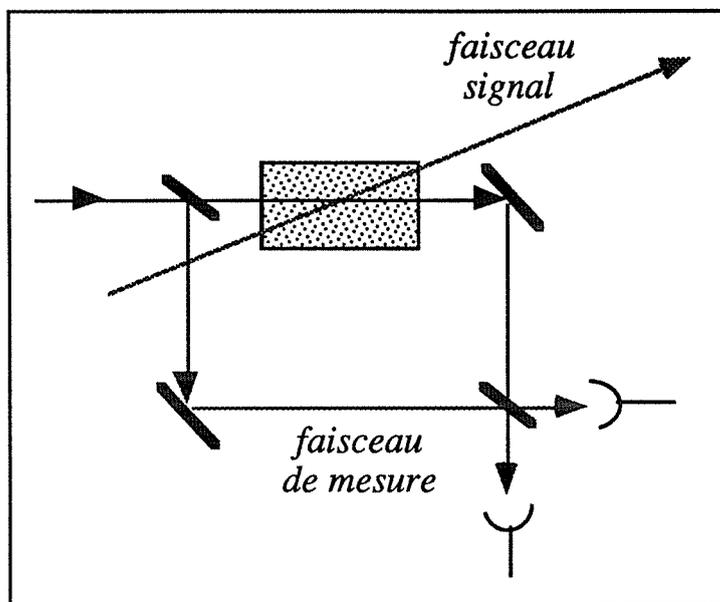


Figure III.A.1 :
Principe de la mesure QND
due au couplage par effet
Kerr. L'information sur le
faisceau de mesure est
obtenue à l'aide d'une
détection interférométrique.

Dans la partie C, nous détaillerons le résultat expérimental essentiel de ce mémoire, à savoir la mise en évidence de corrélations quantiques entre les deux faisceaux à la sortie du dispositif, induites par le couplage dû à l'effet Kerr croisé. La mesure ainsi obtenue aura néanmoins une mauvaise efficacité, et les performances du dispositif seront équivalentes à celles d'une lame semi-transparente.

Nous montrerons dans la partie D que ces performances peuvent être considérablement améliorées, en introduisant sur le faisceau signal une cavité de faible finesse : les résultats expérimentaux montrent alors sans ambiguïté, l'existence d'une réelle mesure QND.

**B. ETUDE THEORIQUE A LA LIMITE
PARAMETRIQUE**

I. LE MODELE.

Les différentes situations envisagées sont schématisées sur le Tableau III.B.1 [Grangier 91a]. Dans les deux cas, les calculs seront effectués à la limite paramétrique, situation dans laquelle on suppose que le milieu atomique n'introduit pas de bruit supplémentaire. Nous supposerons également que la cavité, de géométrie en anneau, est sans pertes : elle comporte un seul miroir de couplage, et l'intensité moyenne réfléchie est égale à l'intensité moyenne entrante, quel que soit le déphasage de la cavité. La transformation entrée/sortie des fluctuations dépend alors uniquement de la matrice de transfert classique $\lambda(\Omega)$:

$$\delta\mathcal{F}^{out}(\Omega) = \lambda(\Omega) \delta\mathcal{F}^{in}(\Omega) \tag{III.B.1}$$

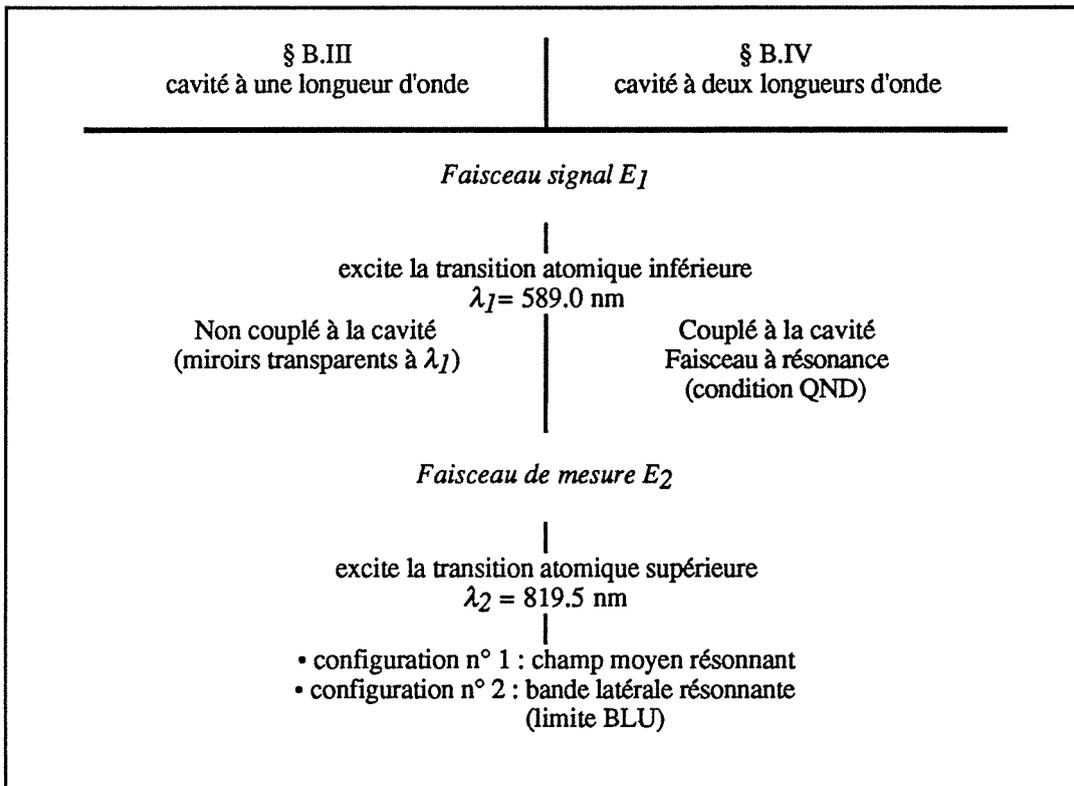


Tableau III.B-1 :
Récapitulatif des différentes situations envisagées pour les couplages entre les champs, les transitions atomiques et la cavité optique.

II. CAVITE A UNE LONGUEUR D'ONDE.

1. Champs moyens.

D'après les équations (II.D-11), les champs moyens pour le faisceau de mesure, en entrée et en sortie de la cavité, notés E_2^{in} et E_2^{out} , sont reliés au champ intracavité E_2 par :

$$t E_2^{in} = (1 - r e^{-i\varphi_2}) E_2 \quad t E_2^{out} = (e^{-i\varphi_2} - r) E_2 \quad (\text{III.B.2})$$

où r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission du miroir de couplage de la cavité, à la longueur d'onde λ_2 du faisceau de mesure.

L'intensité intracavité $|E_2|^2$ est alors reliée à l'intensité d'entrée et de sortie par :

$$t^2 |E_2^{in}|^2 = t^2 |E_2^{out}|^2 = [1 + r^2 - 2r \cos \varphi_2] |E_2|^2 \quad (\text{III.B.3})$$

Contrairement au cas doublement résonnant, (et comme nous le démontrerons de façon rigoureuse au Chapitre IV), cette solution, correspondant à une simple translation de la courbe de Fabry-Pérot en fonction de l'intensité de l'autre faisceau, est toujours stable.

Lors de la traversée de la cavité et du milieu non-linéaire, le champ signal subit quant-à-lui, un simple déphasage :

$$E_1^{out} = e^{-i\varphi_1} E_1^{in} \quad (\text{III.B.4})$$

A la limite cubique dispersive, les déphasages φ_1 et φ_2 sont donnés par :

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 + f |E_2|^2 \quad \varphi_2 = \varphi_2^0 + f |E_1|^2 \quad (\text{III.B.5})$$

2. Analyse linéaire de la transformation des fluctuations quantiques.

Le bruit est analysé à une radio-fréquence ω , définie par rapport à la fréquence optique des faisceaux laser, et normalisée par rapport à l'inverse du temps de propagation dans la cavité de longueur totale L :

$$\Omega = \omega L / c \quad (\text{III.B.6})$$

Comme expliqué dans le Chapitre I, nous introduisons les variables p_j et q_j ($j = 1, 2$), composantes de quadrature donnant respectivement les fluctuations d'amplitude et de phase à la fréquence Ω pour le champ E_j :

$$p_j = \frac{E_j^*}{|E_j|} \delta E_j(\Omega) + \frac{E_j}{|E_j|} \delta E_j^*(-\Omega) \quad (\text{III.B.7.a})$$

$$q_j = -i \left[\frac{E_j^*}{|E_j|} \delta E_j(\Omega) - \frac{E_j}{|E_j|} \delta E_j^*(-\Omega) \right] \quad (\text{III.B.7.b})$$

Rappelons que ces quantités sont définies de façon à inclure le déphasage subi par le champ moyen.

a) Transformation des fluctuations sur un tour.

En notant E'_2 le champ de mesure après un tour dans la cavité, et correspondant au déphasage φ_2 , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \delta E_1^{out}(\Omega) \\ \delta E_1^{out}(-\Omega)^* \\ \delta E'_2(\Omega) \\ \delta E'_2(-\Omega)^* \end{bmatrix} = e^{i\Omega} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_1} & 0 & -i\kappa e^{-i\varphi_1} & -i\kappa e^{-i\varphi_1} \\ 0 & e^{i\varphi_1} & i\kappa e^{i\varphi_1} & i\kappa e^{i\varphi_1} \\ -i\kappa e^{-i\varphi_2} & -i\kappa e^{-i\varphi_2} & e^{-i\varphi_2} & 0 \\ i\kappa e^{i\varphi_2} & i\kappa e^{i\varphi_2} & 0 & e^{i\varphi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E_1^{in}(\Omega) \\ \delta E_1^{in}(-\Omega)^* \\ \delta E_2(\Omega) \\ \delta E_2(-\Omega)^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.B.8})$$

où la référence de phase est choisie de façon que $\kappa = f E_1^{in} E_2$ (produit des deux champs intra-cavité) soit réel.

b) Fluctuations du champ signal.

La condition QND pour les fluctuations d'amplitude du champ signal est naturellement satisfaite quelque soient les déphasages φ_1 et φ_2 . La perturbation due à la mesure apparaît sur les fluctuations de phase qui sont couplées à p_2 , fluctuations d'amplitude du champ de mesure intra-cavité :

$$p_1^{out}(\Omega) = e^{i\Omega} p_1^{in}(\Omega) \quad (\text{III.B.9a})$$

$$q_1^{out}(\Omega) = e^{i\Omega} [q_1^{in}(\Omega) - 2\kappa p_2(\Omega)] \quad (\text{III.B.9b})$$

c) *Fluctuations du champ sonde.*

Les équations sur le miroir d'entrée-sortie étant linéaires, le couplage des fluctuations sur ce miroir est le même que celui pour les champs moyens :

$$\delta E_2(\Omega) = r \delta E'_2(\Omega) + t \delta E_2^{in}(\Omega) \quad (\text{III.B.10.a})$$

$$\delta E_2^{out}(\Omega) = -r \delta E_2^{in}(\Omega) + t \delta E'_2(\Omega) \quad (\text{III.B.10.b})$$

En reportant les équations (III.B.8) dans ces expressions, on obtient les fluctuations intra-cavité et en sortie du champ de mesure, en fonction de celles des champs entrants :

$$\delta E_2(\Omega) = \frac{t}{1 - r e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2}} \delta E_2^{in}(\Omega) - i\kappa \frac{e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2}}{1 - r e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2}} p_1^{in} \quad (\text{III.B.11.a})$$

$$\delta E_2^{out}(\Omega) = \frac{e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2} - r}{1 - r e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2}} \delta E_2^{in}(\Omega) - i\kappa \frac{t e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2}}{1 - r e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2}} p_1^{in} \quad (\text{III.B.11.b})$$

Pour relier ces expressions à la transformation des quadratures p et q , il est nécessaire de tenir compte que les champs moyens sont déphasés par la cavité, et qu'ainsi les fluctuations d'amplitude du champ de sortie ne correspondent pas nécessairement aux fluctuations d'amplitude du champ d'entrée.*

Les expressions générales sont peu intuitives, et nous les donnons simplement pour référence. Deux cas limites importants apparaissent : champ de mesure accordé à résonance de la cavité (§d), ou bien désaccordé par rapport à la cavité (§e). Ce dernier cas correspond alors à la résonance, non pas du champ moyen, mais d'une bande latérale de bruit.

* Il est en particulier important de bien vérifier que la référence de phase pour les champs moyens est bien la même que celle utilisée pour le calcul de la transformation des fluctuations, à savoir *le champ intra-cavité E_2 réel.*

□ Transformation des champs dans la cavité

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{1}{2}(1+r^2-2r \cos \varphi_2)^{1/2} \left(\frac{1}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} + \frac{1}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) tp_2^{in} \\
 &+ \frac{i}{2}(1+r^2-2r \cos \varphi_2)^{1/2} \left(\frac{1}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} - \frac{1}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) tq_2^{in} \quad (\text{III.12a}) \\
 &- 2\kappa \frac{\sin \varphi_2}{\frac{1}{r}e^{-i\Omega} + re^{i\Omega} - 2\cos \varphi_2} p_1^{in}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_2 &= -\frac{i}{2}(1+r^2-2r \cos \varphi_2)^{1/2} \left(\frac{1}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} - \frac{1}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) tp_2^{in} \\
 &+ \frac{1}{2}(1+r^2-2r \cos \varphi_2)^{1/2} \left(\frac{1}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} + \frac{1}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{1}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) tq_2^{in} \quad (\text{III.12b}) \\
 &- 2\kappa \frac{\cos \varphi_2 - re^{i\Omega}}{\frac{1}{r}e^{-i\Omega} + re^{i\Omega} - 2\cos \varphi_2} p_1^{in}
 \end{aligned}$$

□ Transformation des champs en dehors de la cavité :

$$\begin{aligned}
 p_2^{out} &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{i\varphi_2}} + \frac{e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) p_2^{in} \\
 &+ \frac{i}{2} \left(\frac{e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{i\varphi_2}} - \frac{e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) q_2^{in} \quad (\text{III.B.13a}) \\
 &+ i\kappa \frac{t e^{i\Omega}}{(1+r^2-2r \cos \varphi_2)^{1/2}} \left(\frac{1-re^{i\varphi_2}}{1-re^{i\Omega}e^{i\varphi_2}} - \frac{1-re^{-i\varphi_2}}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) p_1^{in}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_2^{out} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{i\varphi_2}} - \frac{e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) p_2^{in} \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{i\varphi_2}} + \frac{e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{-i\varphi_2}} \frac{e^{i\Omega}e^{-i\varphi_2} - r}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) q_2^{in} \quad (\text{III.B.13b}) \\
 &+ \kappa \frac{t e^{i\Omega}}{(1+r^2-2r \cos \varphi_2)^{1/2}} \left(\frac{1-re^{i\varphi_2}}{1-re^{i\Omega}e^{i\varphi_2}} + \frac{1-re^{-i\varphi_2}}{1-re^{i\Omega}e^{-i\varphi_2}} \right) p_1^{in}
 \end{aligned}$$

d) Cas limite $n^\circ 1$: champ sonde résonnant dans la cavité.

Dans ce cas, la cavité n'introduit pas de déphasage pour les champs moyens : E_2^{in} , E_2 et E_2^{out} sont tous trois en phase. A partir des expressions (III.B.11a,b), on en déduit directement la transformation des quadratures (p , q) (et qui correspond effectivement au résultat donné par (III.B.13) pour $\varphi_2 = 0$):

$$\begin{bmatrix} p_1^{out} \\ q_1^{out} \\ p_2^{out} \\ q_2^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\Omega} & g(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & h(\Omega) & 0 \\ g(\Omega) & 0 & 0 & h(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{in} \\ q_1^{in} \\ p_2^{in} \\ q_2^{in} \end{bmatrix} \quad (\text{III.B.14a})$$

avec :

$$h(\Omega) = \frac{e^{i\Omega} - r}{1 - re^{i\Omega}} \quad |h(\Omega)|^2 = 1 \quad (\text{III.B.14b})$$

$$g(\Omega) = -2\kappa \frac{te^{i\Omega}}{1 - re^{i\Omega}} \quad |g(\Omega)|^2 = \frac{4\kappa^2 t^2}{1 + r^2 - 2r \cos \Omega} \quad (\text{III.B.14c})$$

Ces expressions montrent que la condition QND est satisfaite pour, à la fois, les fluctuations d'amplitude du faisceau signal et celles du faisceau de mesure. L'information due au couplage QND apparaît sur les fluctuations de phase de ces faisceaux. Les paramètres caractérisant l'efficacité de la mesure sont donnés par :

$$N_S^{eq} = 0 \quad N_M^{eq} = 1 / |g(\Omega)|^2 \quad |W_{p_S q_M}(\Omega)|^2 = |g(\Omega)|^2 \quad (\text{III.B.15})$$

Ces expressions montrent que la cavité introduit un filtrage spectral des corrélations : celles-ci sont maintenant limitée en fréquence à la bande passante de la cavité [Reynaud 87]. L'image temporelle complémentaire correspond au fait que les corrélations entre les deux photons générés par le processus d'interaction paramétrique, apparaissent en sortie seulement lorsque le photon du faisceau de mesure a pu s'échapper de la cavité. La corrélation est donc maximale à fréquence nulle (tous les photons ont eu alors le temps de sortir de la cavité) :

$$|W_{p_S q_M}^{out}(\Omega = 0)|^2 = \frac{4\kappa^2 t^2}{(1-r)^2} = 4\kappa^2 \frac{1+r}{1-r} \quad (\text{III.B.16})$$

Ces corrélations sont à comparer à la valeur $|W_{libre}^{out}|^2 = 4\kappa^2$, correspondant à celles obtenues sans la cavité. L'effet de la résonance du faisceau de mesure est donc d'augmenter le couplage par un facteur $t^2/(1-r)^2$, qui, pour une cavité de grande finesse ($r \approx 1$), est sensiblement égal à $4/t^2$. En introduisant l'expression (II.D.17) de la finesse \mathcal{F} en fonction de la transmission du miroir d'entrée-sortie de la cavité, on obtient ainsi :

$$|W_{P_s Q_M}^{out}|^2 (\Omega = 0) = \frac{4}{t^2} |W_{libre}^{out}|^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \mathcal{F} \cdot |W_{libre}^{out}|^2 \quad (\text{III.B.17})$$

e) Cas limite n°2 : résonance d'une bande latérale de bruit.

Si la fréquence analysée est en-dehors de la bande passante de la cavité, les corrélations obtenues dans la configuration précédente deviennent alors très faibles. Si la cavité est désaccordée de telle façon que le déphasage φ_2 (incluant la partie non linéaire) soit égal à la fréquence Ω , une des bandes latérales correspondant à la fréquence de bruit analysée, sera alors résonnante dans la cavité (figure III.B.1).

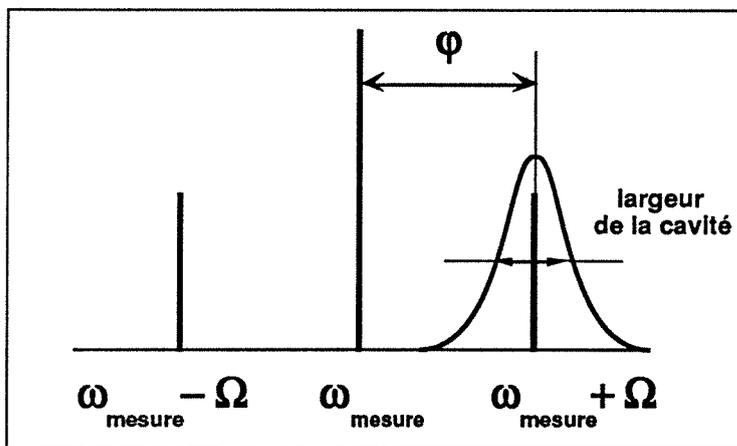


Figure III.B.1 : Condition de résonance BLU. La mesure QND est obtenue sur la bande latérale du faisceau de mesure, résonnante dans la cavité.

Nous donnons ci-dessous les expressions à la limite d'une cavité de grande finesse ($r \approx 1$). Les champs moyens sont alors simplement réfléchis par la cavité avec un déphasage de π , le champ intra-cavité étant quant-à-lui en quadrature par rapport au champ incident :

$$E_2 = i \frac{\varphi_2}{t} E_2^{in} \quad E_2^{out} = - E_2^{in} \quad (\text{III.B.18})$$

et pour les fluctuations quantiques:

$$\delta E_2^{out}(\Omega) = \delta E_2^{in}(\Omega) - i\kappa \frac{t}{1-r} p_1^{in}(\Omega) \quad (\text{III.B.19a})$$

$$\delta E_2^{out}(-\Omega) = -\delta E_2^{in}(-\Omega) \quad (\text{III.B.19b})$$

Compte-tenu du choix de E_2 réel, en supposant $\varphi_2 > 0$ et en faisant l'approximation d'une cavité de grande finesse (soit $1 - r \sim t^2/2$), la transformation entrée-sortie pour les composantes de quadratures (p, q) peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} p_1^{out} \\ q_1^{out} \\ p_2^{out} \\ q_2^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 4i(\kappa/t)^2 e^{i\Omega} & e^{i\Omega} & -i(\kappa/t)e^{i\Omega} & (\kappa/t)e^{i\Omega} \\ 2(\kappa/t) & 0 & 0 & -i \\ -2i(\kappa/t) & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{in} \\ q_1^{in} \\ p_2^{in} \\ q_2^{in} \end{bmatrix} \quad (\text{III.B.20})$$

Ces expressions ont une structure très différente de celles obtenues précédemment. La condition QND est naturellement toujours satisfaite pour les fluctuations d'intensité du faisceau de mesure. Par contre, le résultat du couplage de p_1^{in} apparaît maintenant à la fois sur p_2^{out} et sur q_2^{out} , alors que précédemment, l'information était uniquement sur q_2^{out} . Comme indiqué dans l'introduction, cette propriété est une conséquence du fait qu'une seule des bandes latérales est couplée au faisceau de mesure. Dans ce cas, une modulation de phase ou une modulation d'amplitude portent la même information. Ceci est couramment réalisé en radio-électricité, et porte alors le nom de "modulation à bande latérale unique". Nous désignerons donc cette situation par l'acronyme de résonance "BLU".

La mesure QND peut donc être directement détectée sur les fluctuations d'amplitude du faisceau de mesure réfléchi par la cavité. Les coefficients de caractérisation sont indépendants de la fréquence Ω analysée :

$$N_S^{eq}(BLU) = 0 \quad N_M^{eq}(BLU) = \frac{1}{(4\kappa^2/t^2)} \quad (\text{III.B.21a})$$

$$\left| W_{p_S p_M}^{out} \right|^2 (BLU) = \left| W_{p_S q_M}^{out} \right|^2 (BLU) = 4\kappa^2/t^2 \quad (\text{III.B.21b})$$

soit :

$$\left| W_{p_S p_M}^{out} \right|^2 (BLU) = \left| W_{p_S q_M}^{out} \right|^2 (BLU) = \left| W_{libre}^{out} \right|^2 / 4 \quad (\text{III.B.21c})$$

La perturbation due à la mesure apparaît toujours sur les fluctuations de phase du faisceau signal (q_2^{out}). Il s'introduit néanmoins un terme supplémentaire $4(\kappa/t)^2 p_1^{in}$, correspondant à un bruit rajouté sur la phase du signal. La présence de ce terme peut s'expliquer de la façon suivante : les fluctuations d'amplitude du signal sont couplées aussi bien aux fluctuations de phase qu'aux fluctuations d'intensité de la mesure, conduisant ainsi à une modulation de l'intensité du faisceau de mesure. L'effet Kerr croisé vient ensuite re-coupler cette modulation sur les fluctuations de phase du signal (effet de retour qui n'existait pas dans le cas particulier n°1 envisagé).

f) Comparaison des deux configurations.

Une façon commode consiste à comparer les corrélations $|\langle p_1^{in} q_2^{out} \rangle|$ et $|\langle p_1^{in} p_2^{out} \rangle|$, calculées d'après les expressions générales (III.B.13), en fonction de la fréquence Ω lorsque la cavité est désaccordée de $\varphi_2 = \Omega$, en maintenant le terme de couplage κ constant.. Le résultat du calcul est reproduit sur la figure III.B.2.

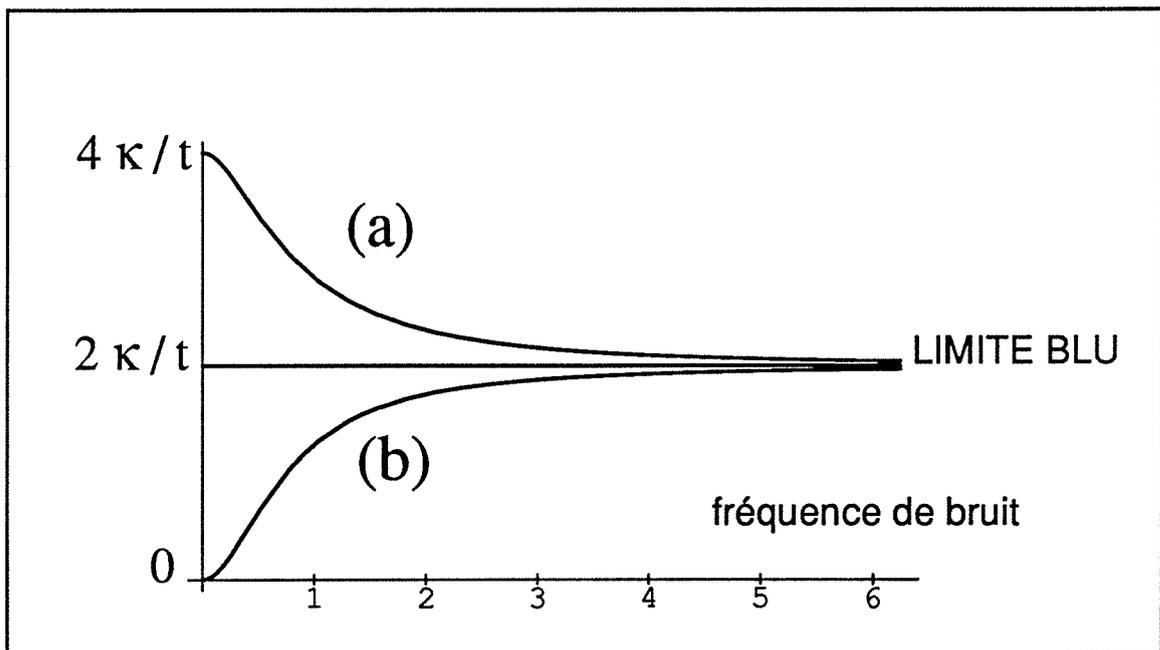


Figure III.B.2 :

Corrélations entre les fluctuations d'amplitude du faisceau signal et les fluctuations de phase (a) ou d'intensité (b) du faisceau de mesure. Les deux corrélations deviennent identiques à la limite BLU. Les courbes sont tracées en faisant varier la fréquence de bruit (normalisée à la largeur de la cavité), tout en modifiant le déphasage de la cavité et l'intensité d'entrée du faisceau de mesure, de façon à rester à résonance de la bande latérale ($f=\Omega$) et à maintenir le coefficient de couplage κ constant.

Pour $\varphi_2 = \Omega = 0$, nous retrouvons le résultat de l'équation (III.B.17) : les fluctuations p_1^{in} sont couplées uniquement à q_2^{out} , avec un terme de couplage $4\kappa/t$. Lorsque la cavité est très désaccordée ($\varphi_2 = \Omega \gg t^2$), p_1^{in} est couplé à la fois à q_2^{out} et à p_2^{out} , avec une efficacité $2\kappa/t$.

L'avantage de la configuration BLU est que la fréquence de bruit d'analyse peut maintenant être choisie en-dehors de la bande passante de la cavité. Remarquons qu'une partie de la puissance laser doit néanmoins rentrer dans la cavité afin de pomper le processus non-linéaire (le terme de couplage κ valant $f E_1^{in} E_2$). Pour une cavité de grande finesse, le rapport entre l'intensité intra-cavité et l'intensité d'entrée atteint la valeur 1 lorsque $\varphi_2 = t$, tandis que la largeur de la cavité vaut $\Delta\varphi_2 = t^2 \ll t$ (eq.II.D.13). La condition de désaccord correspondant à la limite BLU n'est donc pas restrictive en pratique vis-à-vis de l'intensité intra-cavité.

III. CAVITE A DEUX LONGUEURS D'ONDE.

Nous considérons maintenant une cavité dichroïque parfaite, les miroirs de couplage étant caractérisés par (r_1, t_1) à λ_1 et (r_2, t_2) à λ_2 , et correspondant respectivement à des finesesses \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 pour chaque mode.

1. Stabilité des champs moyens.

Comme nous le montrerons à la fois théoriquement et expérimentalement, une telle configuration conduit naturellement à des phénomènes de bistabilité à deux photons (Chapitre IV). Nous verrons qu'à la limite cubique dispersive, les conditions de stabilité du système sont satisfaites quel que soit le déphasage φ_2 , lorsque $\varphi_1 = 0$ (cavité signal résonnante), ou lorsque $r_2 = 0$ (pas de cavité pour le signal, soit le cas précédemment étudié).

2. Transformation entrée-sortie des fluctuations quantiques.

Lorsque la cavité est accordée à résonance pour le mode correspondant au faisceau signal, la condition QND pour ses fluctuations d'intensité est nécessairement satisfaite. Les calculs étant similaires à ceux effectués dans la partie précédente, nous nous contenterons de simplement donner les matrices de transformation entrée-sortie, pour les deux cas limites dont nous avons montré l'intérêt ($\varphi_2 = 0$ et $\varphi_2 = \Omega$).

a) *Faisceau de mesure résonnant.*

$$\begin{bmatrix} p_1^{out} \\ q_1^{out} \\ p_2^{out} \\ q_2^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\Omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1(\Omega) & h_1(\Omega) & g_1(\Omega) \\ 0 & 0 & h_2(\Omega) & 0 \\ h_2(\Omega) & g_2(\Omega) & 0 & h_2(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{in} \\ q_1^{in} \\ p_2^{in} \\ q_2^{in} \end{bmatrix} \quad (\text{III.B.22})$$

où :

$$h_1(\Omega) = \frac{e^{i\Omega} - r_1}{1 - r_1 e^{i\Omega}} \quad g_1(\Omega) = -2\kappa \frac{t_1}{1 - r_1 e^{-i\Omega}} \frac{t_2}{1 - r_2 e^{i\Omega}} \quad (\text{III.B.23})$$

$$h_2(\Omega) = \frac{e^{i\Omega} - r_2}{1 - r_2 e^{i\Omega}} \quad g_2(\Omega) = -2\kappa \frac{t_1}{1 - r_1 e^{i\Omega}} \frac{t_2}{1 - r_2 e^{-i\Omega}} \quad (\text{III.B.24})$$

On peut vérifier qu'à la limite $r_1 = 0$, ces deux expressions redonnent bien, la transformation définie par (III.B.14). Le résultat de la mesure apparaît toujours sur les fluctuations de phase des deux faisceaux, et le facteur de couplage est maximal à fréquence nulle :

$$\left| W_{Ps^4M}^{out} \right|^2 (max) = \left| W_{Ps^4M}^{out} (\Omega = 0) \right|^2 = \frac{4}{t_1^2} \cdot \frac{4}{t_2^2} \cdot 4\kappa^2 \quad (\text{III.B.25})$$

soit :

$$\left| W_{Ps^4M}^{out} \right|^2 (max) = \left(\frac{2}{\pi} \mathcal{F}_1 \right) \left(\frac{2}{\pi} \mathcal{F}_2 \right) \left| W_{Ps^4M}^{out} \right|^2 (libre) \quad (\text{III.B.26})$$

b) Faisceau de mesure désaccordé à la limite BLU.

$$\begin{bmatrix} p_1^{out} \\ q_1^{out} \\ p_2^{out} \\ q_2^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_I(\Omega) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4i\kappa^2}{t_2^2} \frac{h_I(\Omega)}{1+r_1^2-2r_1\cos\Omega} & h_I(\Omega) & -i\frac{\kappa}{t_2} \frac{t_1}{1-r_1e^{i\Omega}} h_I(\Omega) & i\frac{\kappa}{t_2} \frac{t_1}{1-r_1e^{i\Omega}} h_I(\Omega) \\ \frac{2\kappa}{t_2} \frac{t_1}{1-r_1e^{i\Omega}} & 0 & 0 & -i \\ -\frac{2i\kappa}{t_2} \frac{t_1}{1-r_1e^{i\Omega}} & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{in} \\ q_1^{in} \\ p_2^{in} \\ q_2^{in} \end{bmatrix} \quad (\text{III.B.27})$$

Ces expressions sont valables quel que soit r_1 , et pour $r_2 \approx 1$. La condition QND est toujours vérifiée pour p_1 , le résultat de la mesure pouvant être lu aussi bien sur p_2^{out} que sur q_2^{out} . Les avantages sont les mêmes que précédemment, à condition que la fréquence soit dans la bande passante de la cavité pour le faisceau signal (soit $t_2^2 \ll \Omega \ll t_1^2$). Cette configuration correspond donc à utiliser une cavité de grande finesse pour le faisceau de mesure, et une cavité large (pouvant être facilement maintenue à résonance) pour le faisceau signal.

Nous avons également vu dans le Chapitre I que les pertes optiques sur le faisceau signal sont très critiques vis-à-vis des corrélations quantiques, et ceci d'autant plus si elles sont introduites avant le coupleur. L'effet de la cavité à deux longueurs d'onde peut schématisé par la figure III.B.3, comme une succession de mesures QND répétées, avec des pertes entre ces différentes mesures.

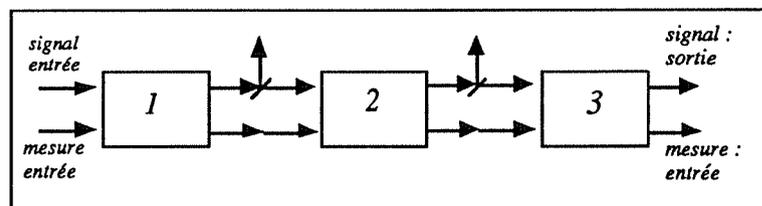


Figure III.B.3 :

Représentation schématique de l'action de la cavité à deux longueurs d'onde, sur le couplage des deux faisceaux. Les pertes optiques sont ainsi multipliées par le nombre de tours dans la cavité.

Dans ce cas, les pertes sur un tour seront multipliées par le nombre de tours effectués par le faisceau signal dans la cavité, c'est-à-dire par la finesse à la longueur d'onde λ_1 . La configuration correspondant à une cavité uniquement mono-résonnante pour le faisceau de mesure est donc a priori préférable. Si néanmoins, le couplage ainsi obtenu reste trop faible, il est possible de l'augmenter en mettant une cavité sur le signal, avec une finesse la plus faible possible.

C. RESULTATS EXPERIMENTAUX OBTENUS AVEC UNE CAVITE A UNE LONGUEUR D'ONDE

I. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL.

Le schéma général de l'expérience est représenté sur la figure III.C.1. Le faisceau "signal" à 589.0 nm n'est pas réfléchi par les miroirs de la cavité, et traverse en une seule fois le jet atomique. Il est séparé du faisceau sonde par un miroir dichroïque, et détecté par $D1$, qui permet d'analyser le bruit quantique du faisceau (cf. Annexe I). Le faisceau "sonde" (ou de "mesure") à 819.5 nm résonne dans la cavité. Le miroir arrière ayant une très faible transmission, comparée au miroir d'entrée, le faisceau sonde est essentiellement réfléchi à résonance. Comme nous l'avons vu au Chapitre II, il est nécessaire de polariser circulairement les deux faisceaux afin d'optimiser le couplage non-linéaire. Le faisceau sonde "retour" est séparé du faisceau "aller" par un cube polariseur, et est ensuite détecté par $D2$ (figure III.C.2).

Les photocourants issus de $D1$ et $D2$, et dont les fluctuations reflètent les fluctuations d'amplitude des faisceaux arrivant sur ces photodétecteurs, puis, après avoir éventuellement déphasés l'un par rapport à l'autre, sont combinés, sont recombinaison, soit en phase, soit en opposition de phase. Le bruit des signaux résultants (avant ou après recombinaison) est ensuite analysé.

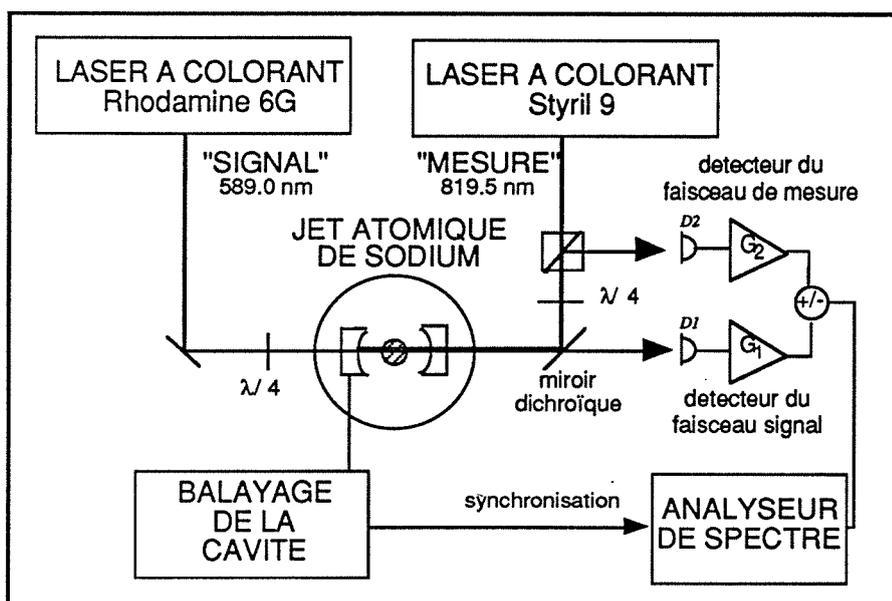


Figure III.C.1 :
Dispositif expérimental
utilisé.

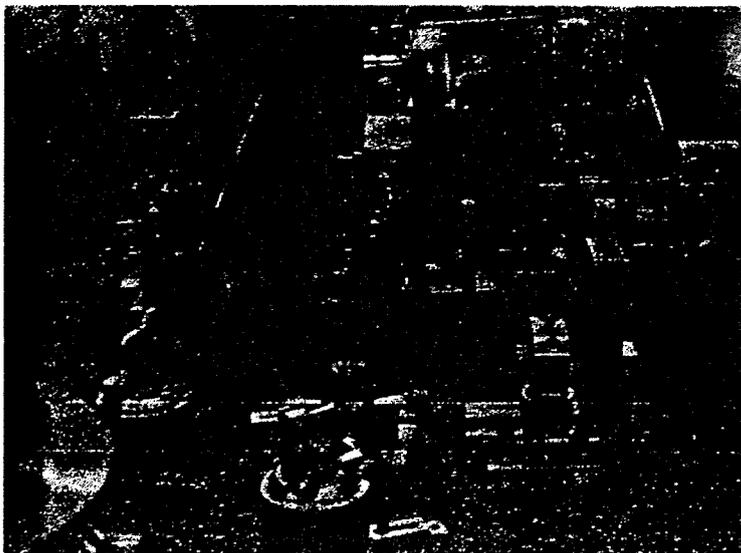


Figure III.C.2 :
Dispositif expérimental utilisé pour détecter le faisceau infrarouge. Le système optique utilise une lame $\lambda/2$, ainsi que trois miroirs de renvoi, utilisés près de l'incidence normale afin de ne pas avoir d'éventuelles dépolitisations du faisceau. Le faisceau réfléchi par la cavité est séparé du faisceau incident par un cube polariseur, puis détecté.

L'analyseur de spectre est fixé à une fréquence donnée d'analyse. En le synchronisant par rapport au signal appliqué à la céramique piézo-électrique fixée sur le miroir arrière, et qui commande le balayage de la cavité, il est ainsi possible d'obtenir l'évolution temporelle du spectre de bruit (mode de fonctionnement "zero-frequency span" de l'analyseur de spectre) au cours de ce balayage.

II. ANALYSE DU TRANSFERT DE MODULATION CLASSIQUE.

1. Modulation et détection.

La mesure est effectuée en imposant une modulation d'amplitude sur le faisceau signal, à l'aide d'un modulateur électro-optique. Pour des fréquences au-delà d'environ 10 MHz, il a été nécessaire d'utiliser un second étage d'amplification ($G1$, $G2$) sur les photocourants. Le déphasage relatif est ajusté au moyen d'une ligne à retard (en l'occurrence, un câble coaxial de longueur variable), et on effectue ensuite la recombinaison des deux photocourants, au moyen d'un "power-splitter" 0-180° (Mini-Circuits™).

Il est commode de mesurer le transfert de modulation par rapport à un niveau de référence (0 dB), correspondant à l'égalité de l'amplitude des bandes latérales de modulation pour le faisceau signal et le faisceau de mesure.

2. Résultats expérimentaux obtenus sans cavité.

A la limite cubique dispersive, le transfert de modulation apparaît alors uniquement sur les fluctuations de phase du faisceau de mesure. Comme indiqué précédemment, il est donc possible de le mesurer expérimentalement en utilisant une détection interférométrique. Nous avons ainsi réalisé un interféromètre de polarisation dont le principe est donné sur la figure III.C.3a. Les intensités sur les deux voies de sortie évoluent de façon complémentaire, en fonction de la rotation Φ introduite sur la direction de polarisation initiale (figure III.C.3b).

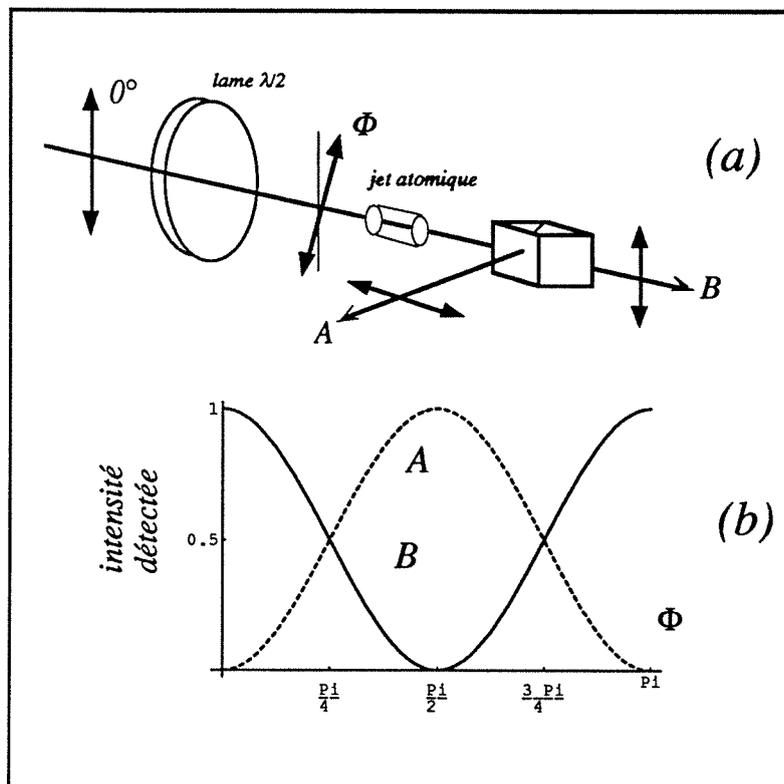


Figure III.C.3 :
Principe de la détection
interférométrique, permettant de
transformer une modulation de
phase introduite par couplage
dans le milieu non-linéaire en
modulation d'intensité
directement détectable

Après le couplage dans le milieu non linéaire, une des composantes circulaires (par exemple, σ_+) de la polarisation rectiligne initiale est alors sélectivement modulée en phase. Le champ total ($\sigma_+ + \sigma_-$) voit alors sa direction de polarisation être modulée. Lorsque $\Phi = \pi/4$, la modulation est finalement transférée sur l'intensité des faisceaux détectés après le polariseur.

Afin d'obtenir un ordre de grandeur du transfert classique que l'on peut espérer obtenir, nous reprenons un résultat typique pour le déphasage non-linéaire, donné au Chapitre II.§DII, et correspondant aux paramètres expérimentaux suivants : $\alpha_0 \ell = 680$, $\Delta = -2\text{GHz}$, $\delta = -1\text{GHz}$, $P_1 = 3.2\text{ mW}$ (faisceau jaune) et $P_2 = 0.5\text{ mW}$ (faisceau infra-rouge).

$$\varphi^{NL} (2 \text{ photons}) = 0.1$$

Cette valeur est mesurée avec un faisceau infra-rouge ayant une polarisation rectiligne, et un faisceau jaune polarisé circulairement. Le déphasage non-linéaire et le couplage non-linéaire sont donnés en fonction des intensités, exprimées en nombre de photons, soit, en fonction des puissances des deux faisceaux:

$$\varphi^{NL} (2 \text{ photons}) \propto f(P_1 / \omega_1) \quad (\text{III.C.1a})$$

$$\kappa \propto f \sqrt{(P_2 / 2\omega_2) / (P_1 / \omega_1)} \quad (\text{III.C.1b})$$

où nous avons tenu compte du fait que, seulement la moitié des photons du faisceau infra-rouge (correspondant à la polarisation circulaire couplée) participent au couplage. On en déduit ainsi la relation entre κ et le déphasage non-linéaire :

$$\kappa = \varphi^{NL} (2 \text{ photons}) \sqrt{\left(\frac{P_2 / 2}{P_1}\right) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \quad (\text{III.C.2})$$

d'où, en reportant les valeurs numériques précédentes dans ces deux expressions

$$\kappa \approx 0.033$$

Le transfert classique pour les intensités de modulation correspond ainsi à une valeur $4\kappa^2 \sim 0.0043$, soit - 23 dB par rapport au niveau de référence.

Pour mesurer ce transfert, on introduit une modulation d'intensité sur le faisceau signal, grâce à un modulateur électro-optique suivi d'un polariseur. On enregistre l'évolution de l'intensité de la modulation qui apparaît sur le faisceau de mesure, au cours d'un balayage de la fréquence du faisceau infra-rouge sur les raies de résonance correspondant aux transitions à deux photons. La calibration est effectuée en repérant les niveaux de modulation par rapport aux bruits de photons, dont la densité spectrale est par définition la même pour les deux faisceaux. Par exemple, des modulations "signal" et "mesure" de +30 dB et de +10dB, mesurées par rapport à leur bruit de photons respectifs, correspondent à un transfert de -20 dB.

Un résultat typique est montré sur la figure III.C.3a : pour $\delta \sim 1\text{GHz}$, le transfert mesuré est d'environ - 28 dB. Remarquons que sur les résonances à deux photons, le transfert de modulation disparaît, ce qui est caractéristique d'un effet dû à un phénomène de dispersion. Par contre, si on supprime la lame produisant la rotation Φ , il apparaît néanmoins un transfert direct de la modulation d'amplitude sur le faisceau jaune vers les fluctuations d'amplitude de l'autre faisceau, lorsque les deux lasers sont résonnants avec les diverses transitions à deux photons (figure III.C.3b). Cet effet est dû à la partie réelle des susceptibilités non-linéaires.

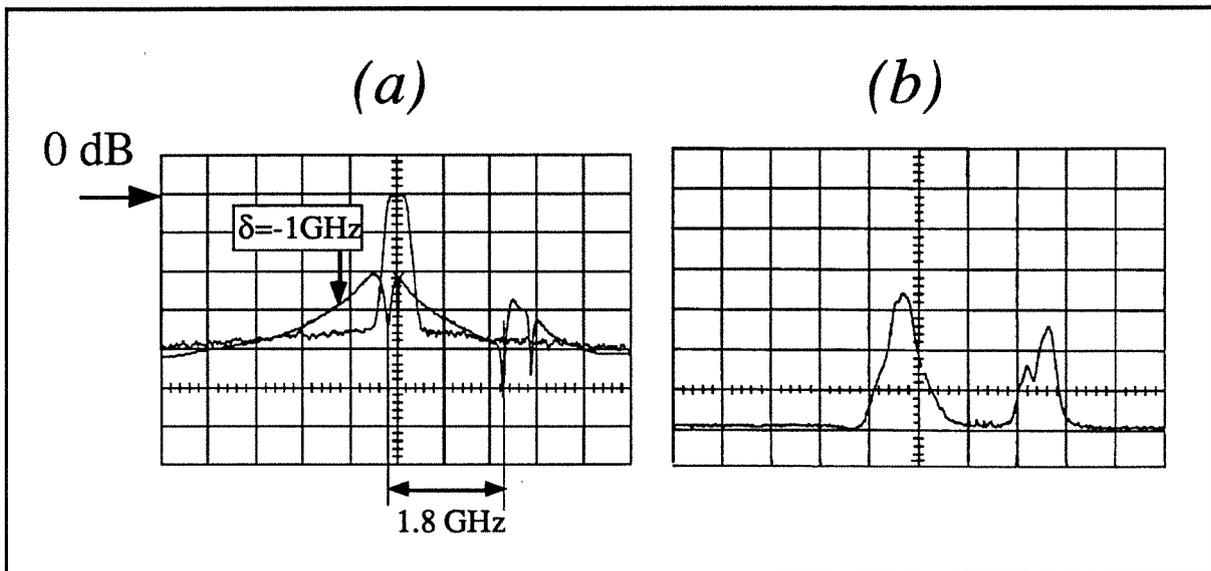


Figure III.C.3 :

On introduit une modulation d'intensité sur le faisceau jaune (signal), correspondant à la référence de 0-dB. La courbe montre le spectre de la modulation, autour de sa fréquence centrale de 10 MHz. La deuxième courbe en (a) montre l'évolution du spectre de bruit à la fréquence fixée de 10 MHz, au cours d'un balayage temporel de la fréquence du laser infra-rouge sur la transition à deux photons. Les différentes raies correspondent ainsi aux différentes transitions entre sous-niveaux (cf. figure II.D.1), et permettent ainsi une calibration en fréquence. Les échelles verticales correspondent à 10dB/div., les échelles horizontales à 5 seconde/div. La bande de résolution est de 10 kHz. La courbe (a) montre ainsi le transfert classique vers la quadrature phase, tandis que la courbe (b) montre le transfert vers la quadrature amplitude.

3. Augmentation du couplage non-linéaire à l'aide d'une cavité optique.

Il est nécessaire de tenir compte des pertes dues à la transmission du miroir arrière de la cavité, dont nous noterons le coefficient de réflexion r' . Il s'introduit ainsi, d'une part, une diminution du couplage obtenu avec la cavité, et, d'autre part, un bruit supplémentaire correspondant aux fluctuations du vide rentrant par ce miroir.

a) Expression théorique du transfert classique.

Pour l'instant, nous considérerons uniquement l'effet sur le transfert classique. En notant $\delta\langle E_1 \rangle$ et $\delta\langle E_2 \rangle$ les fluctuations classiques des deux champs (de façon à les distinguer des fluctuations quantiques), les fluctuations après un tour dans la cavité, s'écrivent :

$$\delta\langle E_2 \rangle = e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2} \left[r' \delta\langle E_2 \rangle - i r' \kappa \left(\delta\langle E_2 \rangle + \delta\langle E_2^* \rangle \right) \right] \quad \text{(III.C.3.a)}$$

soit :

$$\delta\langle E'_2 \rangle = e^{i\Omega} e^{-i\varphi_2} \left[r' \delta\langle E_2 \rangle - i r' \kappa \delta\langle p_1 \rangle \right] \quad \text{(III.C.3.b)}$$

En recombinaison des différents champs interférant sur le miroir d'entrée, on obtient ainsi :

□ Fluctuations du champ intra-cavité :

$$\delta\langle E_2 \rangle = r \delta\langle E'_2 \rangle + t \delta\langle E_2^{in} \rangle \quad (\text{III.C.4.a})$$

$$\delta\langle E_2 \rangle = \frac{t}{1-rr'} \frac{e^{i(\Omega-\varphi_2)}}{e^{i(\Omega-\varphi_2)}} \delta\langle E_2^{in} \rangle - i\kappa \frac{rr' e^{i(\Omega-\varphi_2)}}{1-rr' e^{i(\Omega-\varphi_2)}} \delta\langle p_1 \rangle \quad (\text{III.C.4.b})$$

□ Fluctuations du champ réfléchi :

$$\delta\langle E_2^{out} \rangle = -r \delta\langle E_2^{in} \rangle + t \delta\langle E'_2 \rangle \quad (\text{III.C.5.a})$$

$$\delta\langle E_2^{out} \rangle = \frac{r' e^{i(\Omega-\varphi_2)} - r}{1-rr' e^{i(\Omega-\varphi_2)}} \delta\langle E_2^{in} \rangle - i\kappa \frac{tr' e^{i(\Omega-\varphi_2)}}{1-rr' e^{i(\Omega-\varphi_2)}} \delta\langle p_1^{in} \rangle \quad (\text{III.C.5.b})$$

Ces expressions redonnent bien les équations (III.B.11) lorsque $r' = 1$. L'évolution des quadratures est ensuite obtenue en tenant compte des déphasages introduits sur les champs moyens :

$$\frac{E_2^{out}}{|E_2^{out}|} = \frac{r' e^{-i\varphi_2} - r}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi_2}} \quad (\text{III.C.6.a})$$

$$\frac{E_2^{in}}{|E_2^{in}|} = \frac{1-rr' e^{-i\varphi_2}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi_2}} \quad (\text{III.C.6.b})$$

Le transfert classique de p_S^{in} (fluctuations d'amplitude du champ 1) vers p_M^{out} (fluctuations d'amplitude du champ 2), est ainsi donné par :

$$\alpha_{MS}(\Omega) = i\kappa \frac{r' t e^{i\varphi_2}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi_2}} \left[\frac{r'-r e^{i\varphi_2}}{1-rr' e^{i(\Omega+\varphi_2)}} - \frac{r'-r e^{-i\varphi_2}}{1-rr' e^{i(\Omega-\varphi_2)}} \right] \quad (\text{III.C.7})$$

En réduisant cette expression au même dénominateur, on obtient finalement :

$$\alpha_{MS}(\Omega) = 2\kappa \frac{t \sin \varphi_2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \varphi_2}} \cdot \frac{1-r'^2 e^{i\Omega}}{\frac{1}{rr'} e^{-i\Omega} - 2 \cos \varphi_2 + r r' e^{-i\Omega}} \quad (\text{III.C.8})$$

A la limite bonne cavité, les coefficients de réflexion sont donnés par :

$$r \approx 1 - \frac{T}{2} \qquad r' \approx 1 - \frac{T'}{2} \qquad (\text{III.C.9})$$

En développant (III.C.8) autour de $\varphi_2=0$ et $\Omega=0$, le transfert classique peut se mettre sous la forme approchée :

$$\alpha_{MS}(\Omega) = 2\kappa \frac{\sqrt{T} \varphi_2}{\sqrt{\left[\frac{T+T'}{2}\right]^2} \varphi_2^2} \cdot \frac{T' - i\Omega}{\left[\frac{T+T'}{2} - i\Omega\right]^2 + \varphi_2^2} \qquad (\text{III.C.10})$$

soit pour les intensités, un transfert de p_S^{in} vers p_M^{out} :

$$G(\Omega) = |\alpha_{MS}(\Omega)|^2 \qquad (\text{III.C.11a})$$

$$G(\Omega) = 4\kappa^2 \frac{T\varphi_2}{\sqrt{\left[\frac{T+T'}{2}\right]^2 + \varphi_2^2} \left[\left(\frac{T+T'}{2}\right)^2 + (\varphi_2 - \Omega)^2\right] \left[\left(\frac{T+T'}{2}\right)^2 + (\varphi_2 + \Omega)^2\right]} \frac{T'^2 + \Omega^2}{\left[\left(\frac{T+T'}{2}\right)^2 + (\varphi_2 - \Omega)^2\right] \left[\left(\frac{T+T'}{2}\right)^2 + (\varphi_2 + \Omega)^2\right]} \qquad (\text{III.C.11b})$$

Cette expression fait donc apparaître deux résonances en $\varphi_2 = \pm \Omega$. La figure III.C.4 représente l'évolution de cette fonction, en fonction de la fréquence Ω et du déphasage φ_2 . Cette courbe montre que lorsque la cavité est à résonance, le transfert de p_S vers p_M disparaît et que, lorsque la fréquence d'analyse est beaucoup plus grande que la largeur de la cavité, le transfert classique maximal correspond alors à la valeur obtenue à la limite B.L.U. :

$$G(B.L.U.) = \kappa^2 \frac{T}{\left(\frac{T+T'}{2}\right)^2} \qquad (\text{III.C.12})$$

expression qu'il faut comparer à la valeur optimale $4\kappa^2/T$ pour une cavité sans pertes ($T'=0$), ainsi qu'à la valeur $4\kappa^2$ correspond au couplage direct.

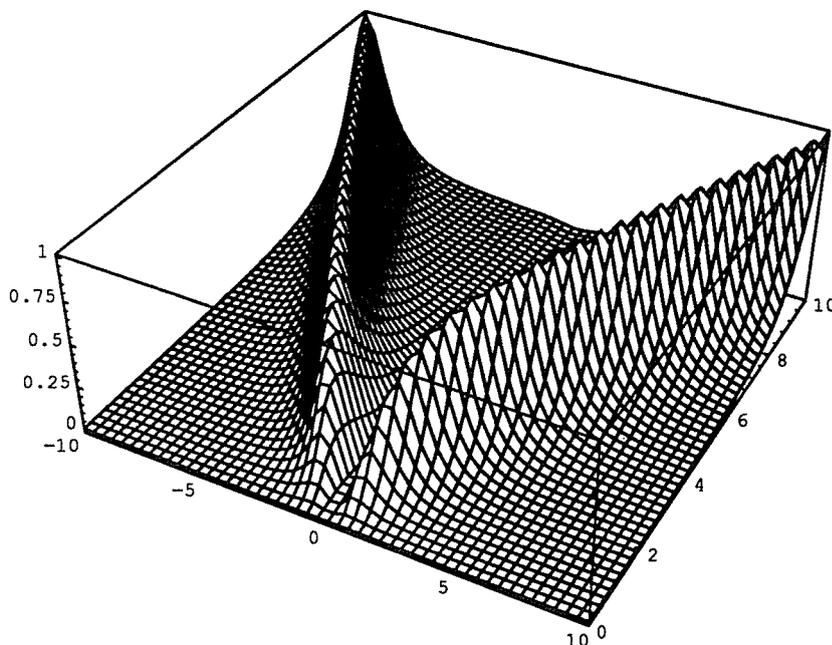


Figure III.C.5 : Evolution du transfert classique, en fonction du déphasage et de la fréquence, pour une cavité sans pertes ($T=0$). Les paramètres φ_2 et Ω sont normalisés par rapport à $T/2$, demi-largeur de la cavité, tandis que le couplage est normalisé à la valeur correspondant à la limite BLU.

b) Configuration de la cavité optique.

Pour obtenir un transfert le plus grand possible, nous avons testé différentes configurations, obtenues pour différentes longueurs L de la cavité, ainsi que pour différentes associations de miroirs (tableau III.C.1).

Cavité	R_1	R_2	L	Z_R	\mathcal{F}	I.S.L.	$\Delta\nu$
n°1	100	100	45	42	500	3330	6.7
n°2	20	20	32	8	300	4690	15.6
n°3	20	50	57	10	1000	2630	2.6
n°4	50	50	80	20	500	1875	3.8

Tableau III.C.1 :

Paramètres pour différentes configurations de la cavité, testées expérimentalement : les rayons R_1 (miroir avant) et R_2 (miroir arrière), la longueur L et le paramètre confocal Z_R sont donnés en mm. L'intervalle spectral libre et la largeur du pic $\Delta\nu$ sont exprimés en MHz. A titre de référence, la comparaison théorie-expérience, modélisant la transmission de la cavité (cf. chapitre II, §D) correspond à la cavité n°1. La configuration "optimale" que nous avons utilisée correspond par contre à la cavité n° 4.

c) Comparaison théorie-expérience.

Des résultats typiques pour la cavité n° 2, sont reproduits sur la figure III.C.6. La courbe (a) est obtenue expérimentalement, tandis que celle reproduite en (b) est calculée théoriquement, d'après l'équation (III.C.10). Les paramètres sont mesurés expérimentalement (transmission des miroirs et finesse de la cavité). Le couplage κ est quant-à-lui, déterminé à partir de la mesure du déphasage non-linéaire dans la configuration $(\sigma_{++} + \sigma_{-})/\sigma_{+}$.

Les configurations de cavité n° 1 et n° 2 ont permis d'obtenir des transferts respectifs de - 15 dB et de - 10 dB, en augmentant la focalisation des lasers dans la zone d'interaction. Enfin, en augmentant également la finesse de la cavité, nous avons obtenu des transferts de - 2 dB pour la configuration n° 3. Malheureusement, il était difficile de conserver cette finesse tout au long de l'expérience (une mauvaise collimation du jet pouvait par exemple la faire chuter de façon considérable). Nous avons donc finalement opté pour la configuration n° 4, d'assez grande finesse, et dont les miroirs sont suffisamment loin du jet pour éviter toute pollution des traitements optiques par le sodium.

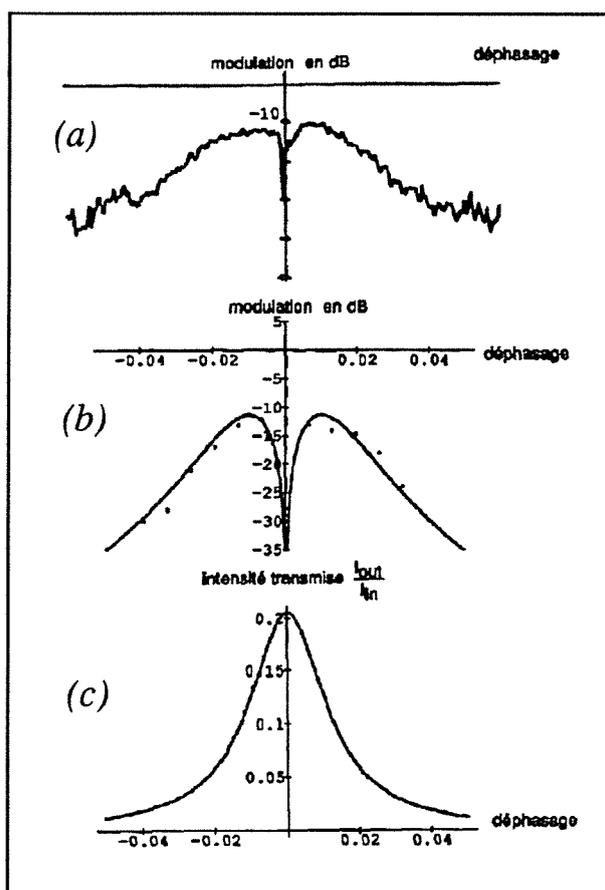


Figure III.C.6 :

(a) transfert de modulation mesuré expérimentalement, lorsqu'on balaye la longueur de la cavité
 (b) comparaison du calcul théorique avec des points expérimentaux relevés sur la courbe (a).
 (c) intensité transmise par la cavité, montrant la forme correspondante de la courbe de résonance. L'échelle horizontale en (a) est différente de celle utilisée pour les courbes (b) et (c).

d) Résultats obtenus : mise en évidence de la résonance B.L.U.

Le bruit des photocourants est enregistré lorsque la cavité optique est balayée autour de la résonance de la bande latérale de bruit (B.L.U.) du faisceau infra-rouge (faisceau de mesure), correspondant à la fréquence fixée sur l'analyseur de spectre. Cette résonance apparaît lorsque la cavité est désaccordée par rapport à la résonance de la fréquence centrale du faisceau i.r., d'une quantité égale à la radio-fréquence analysée. Les deux photocourants correspondant respectivement au bruit de photons du faisceau jaune (signal), transmis à travers les deux miroirs de la cavité, et à celui du faisceau infra-rouge réfléchi par la cavité, sont ensuite ajustés au même niveau de référence. Cet accord est réalisé en jouant légèrement sur le gain électronique des deux préamplificateurs. On introduit ensuite la modulation classique sur la quadrature signal du faisceau, avec un niveau dont l'intensité est environ 20 dB au-dessus du bruit de photons.

La figure III.C.7 montre l'effet de la cavité : sur la résonance B.L.U., la cavité d'une part augmente le couplage non-linéaire, et d'autre part, transforme la modulation de phase initiale en modulation d'intensité infra-rouge réfléchi. Par contre, dès que la B.L.U. de bruit ne résonne plus, le couplage disparaît.

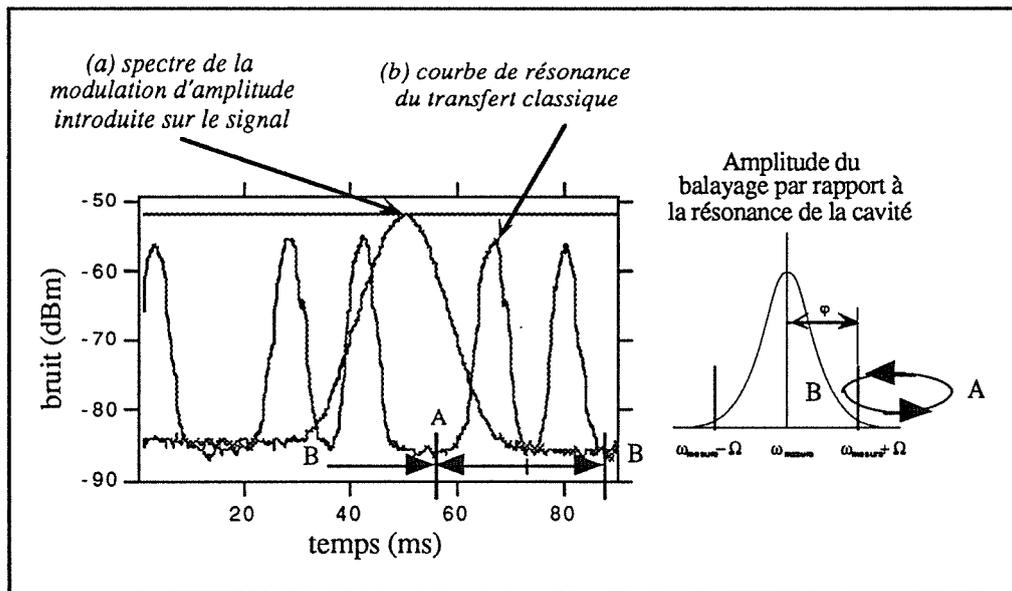


Figure III.C.7 :

Mise en évidence de la résonance BLU. L'amplitude du balayage pour un aller-retour est ajustée de façon à juste dépasser la résonance de la bande latérale (correspondant ici à une fréquence de 10 MHz). Dès que la résonance est dépassée, le transfert du signal vers la mesure s'écroule.

La courbe (a) correspond au spectre de la modulation d'amplitude introduite sur le faisceau signal, tandis que la courbe (b) est enregistrée en mode "zero-frequency-span", pour 10 MHz. Elle reproduit ainsi l'évolution du spectre de bruit du faisceau infra-rouge réfléchi, au cours du balayage de la cavité.

Nous avons pu obtenir un transfert complet de la modulation, atteignant ainsi la valeur 0 dB (figure III.C.8). Cette même figure montre également la recombinaison des deux photocourants (somme et différence), après déphasage adéquat. En dehors des résonances, on ajoute ou on retranche à la modulation du signal, un bruit non-corrélé environ 100 fois plus faible. Il n'y a alors pas de variation, et ceci quel que soit le signe de la recombinaison. Lorsque cette modulation est transférée sur le faisceau de mesure, l'amplitude des fluctuations classiques est alors multipliée par 2, ce qui se traduit, sur l'analyseur de spectre, par une augmentation du niveau recombinaison de + 6 dB. Lorsqu'on effectue la différence des photocourants, le bruit total devrait idéalement descendre au-niveau du bruit de photons, mais en pratique la "profondeur du trou" est limitée par l'isolation électronique.

Notre record pour le transfert classique correspond à une valeur de +4 dB, obtenu en augmentant très fortement la densité atomique. Malheureusement, le jet atomique est alors très instable et nous ne sommes pas parvenus, contrairement aux cas précédents, à observer d'effets associés sur les bruits quantiques.

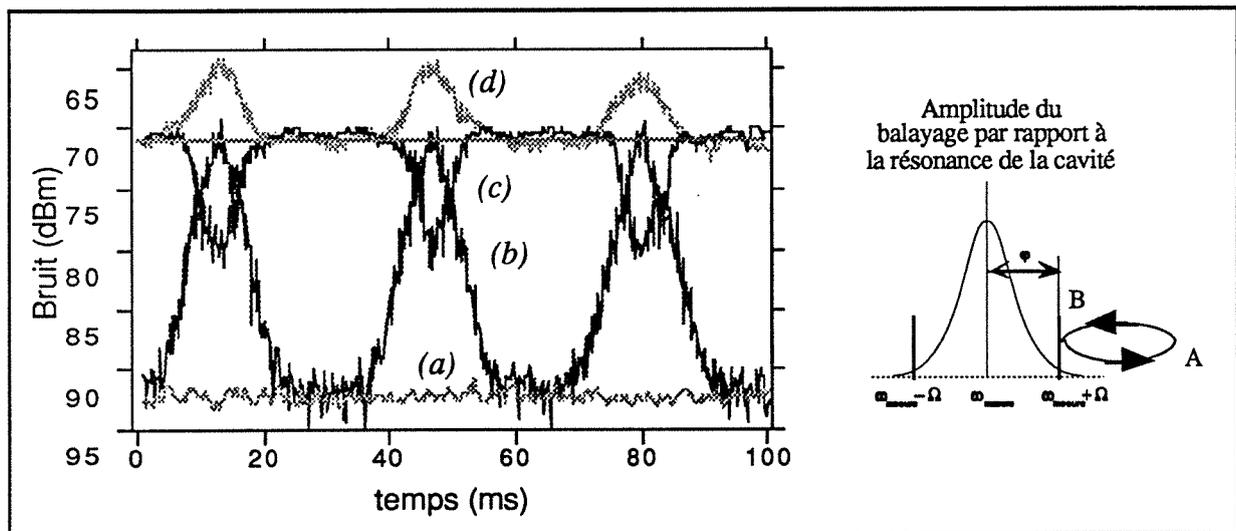


Figure III.C.8 :

Mesure expérimentale du transfert classique, obtenu à la limite BLU pour une fréquence de 16 MHz. La largeur de résolution de l'analyseur de spectre est de 100 kHz, les fluctuations étant visualisées avec un filtre vidéo de 300 Hz. Le balayage de la cavité est effectué, de façon à faire demi-tour au pic de transfert ; contrairement à la figure précédente, les bandes latérales n'apparaissent donc pas. Les courbes correspondent au bruit de photons des deux faisceaux (a), au bruit du faisceau de mesure après réflexion sur la cavité (b) et au bruit des photocourants recombinaison (c) (d). La ligne en pointillé correspond quant-à-elle, au niveau de modulation détecté en sortie sur le faisceau signal.

*e) Limitations expérimentales et précautions prises.**α) Réponse dynamique des détecteurs.*

Nous avons testé la réponse linéaire statique des détecteurs (cf. Annexe I). Il faut de plus, que le bruit de photons obtenu reflète également la variation du photocourant lors du balayage de la cavité. En particulier, sur la résonance de la fréquence centrale du laser infra-rouge, l'intensité du faisceau réfléchi diminue et on doit également observer cette diminution sur la valeur quadratique moyenne des fluctuations correspondant au bruit de photons. Il est également nécessaire d'éliminer les variations basse fréquence du courant moyen, avant l'entrée dans l'amplificateur placé après la photodiode. Ceci est obtenu en ajustant la fréquence de coupure du filtre isolant ces deux étages. Nous avons ainsi soigneusement vérifié que dans l'expérience, tous les détecteurs avaient effectivement une réponse dynamique non-saturée.

β) Transmission du faisceau jaune.

Les miroirs de la cavité réfléchissent environ 10 % du faisceau jaune, et il en résulte une faible modulation sur le faisceau jaune transmis, mais suffisamment importante pour que le niveau du bruit de photons de ce faisceau varie de façon significative (environ ± 1 dB sur le niveau de bruit). Il est donc nécessaire de prendre toujours la même référence pour la zone de balayage choisie, correspondant à un maximum de transmission.

En pratique, les variations des intensités pendant le balayage sont observées en réflexion sur le faisceau jaune, et en transmission sur le faisceau infrarouge à travers les pertes du miroir arrière. En ajustant la longueur de la cavité, on recherche ensuite une coïncidence des deux pics, qui correspond à une résonance simultanée des deux faisceaux.

γ) Effets de bistabilité "parasite".

Expérimentalement, nous avons recherché le transfert de modulation pour des fréquences comprises en 10 et 20 MHz. Cette modification est obtenue en changeant la radiofréquence fixée sur l'analyseur de spectre, et en modifiant le désaccord de la cavité (de façon à conserver la condition de résonance BLU), ainsi que la puissance incidente du laser i.r. (de façon à maintenir la puissance intracavité constante). Lorsque la résonance BLU est satisfaite à 15 MHz, le rapport entre l'intensité intracavité et l'intensité incidente est environ 3. Lorsque le laser résonne dans la cavité, ce rapport augmente jusqu'à environ 200, à cause de la surtension de la cavité. Dans ce cas, la réponse atomique se sature et il apparaît de spectaculaires effets de bistabilité, qui induisent alors un important excès de bruit sur les deux faisceaux (figure III.C.9).

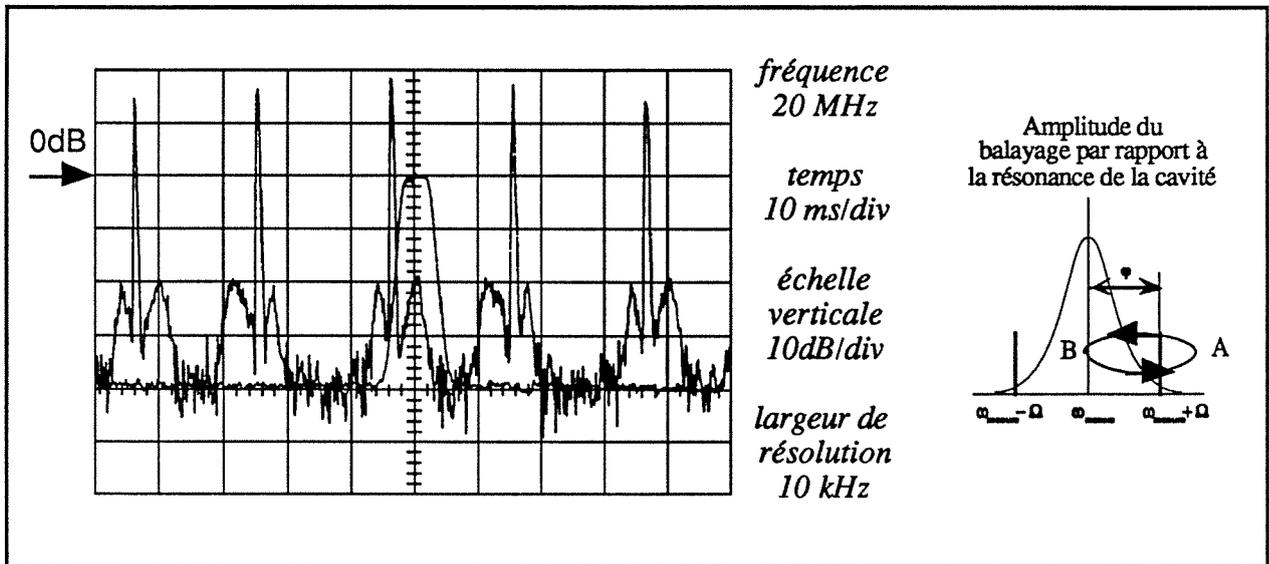


Figure III.C.9 :

Lorsque le faisceau peut arriver à résonance, il apparaît alors un excès de bruit dû à la bistabilité sur les champs moyens dans la cavité. Par contre, le transfert classique apparaît à la résonance de la bande latérale, avant la bistabilité.

Pour des fréquences correspondant à des désaccords suffisamment grands de la cavité, le couplage non-linéaire apparaît sur la résonance BLU, avant les effets de bistabilité. La résonance du faisceau infra-rouge, ainsi que l'apparition de la bistabilité sont donc évitées en limitant l'amplitude du balayage jusqu'à la résonance BLU.

III. OBSERVATION DE CORRELATIONS QUANTIQUES ENTRE LES DEUX FAISCEAUX, A LA SORTIE DU DISPOSITIF.

***** Tiré à Part Physical Review Letters *****

Observation of Backaction-Evading Measurement of an Optical Intensity in a Three-Level Atomic Nonlinear System

Philippe Grangier, Jean-François Roch, and Gérard Roger

Institut d'Optique, BP 147, F91403 Orsay CEDEX, France

(Received 23 October 1990)

Backaction-evading measurement of an optical intensity has been observed, using a three-level system in a sodium atomic beam as a nonlinear medium. The principle of this experiment is to use the cross-phase-modulation effect, which in principle allows one to read nondestructively the quantum intensity fluctuations of the "signal" beam when detecting the phase fluctuations of the "meter" beam. Using a cavity-enhancement scheme, the quantum noise measured when recombining the signal and meter photocurrents is 0.8 dB below the shot-noise level.

PACS numbers: 42.50.Dv, 03.65.Bz, 32.80.Wr

It has been known since the beginning of quantum mechanics that a quantum measurement usually perturbs the quantity which is measured, adding "backaction noise" to the system under study.¹ A well-known system is the harmonic oscillator: In this case, it was shown that "quantum-nondemolition" (QND) measurements can be performed; i.e., it is possible to leave the observed quadrature component unchanged, and to add the backaction noise to the other (complementary) quadrature component.² Such measurements were implemented in the optical domain,^{3,4} where the harmonic oscillator is a mode of the electromagnetic field, and where the coupling responsible for the measurement is created using either $\chi^{(2)}$ or $\chi^{(3)}$ optical nonlinearities.^{5,6} We recently proposed^{7,8} to perform QND measurements using nearly resonant two-photon nonlinearities,⁹⁻¹⁴ in atomic three-level systems excited by two different (initially independent) laser beams. The basic physics of this nonlinear coupling can be understood very simply as a cross-phase-modulation effect: In the lowest-order $\chi^{(3)}$ approximation, the refractive index for one beam will depend on the intensity of the other beam, while the usual self-phase-modulation (Kerr effect) can be made much smaller. It can be shown^{7,8,15} that this coupling directly yields QND measurements of the intensity fluctuations of a "signal" beam, which are copied into phase fluctuations of a "meter" beam by the measurement process. The measured quantity (intensity fluctuations) is left unchanged, while the backaction noise appears on the phase fluctuations of the signal beam.

In this Letter we report the experimental implementation of a QND measurement scheme using two-photon nonlinearities in an atomic three-level system. The overall experimental setup is shown in Fig. 1. The levels involved consist of the $3s_{1/2}$ - $3p_{3/2}$ - $3d_{5/2}$ atomic cascade in sodium. Two light beams at the required wavelengths of 589.0 and 819.5 nm (ir) are obtained from two cw electronically stabilized dye lasers, pumped by a single argon-ion laser. A sodium atomic beam provides a density of 5×10^{11} atoms/cm³, with a Doppler width of

about 200 MHz FWHM. The interaction region with the laser beams is 1 cm long. The atomic beam is surrounded by a single-ended optical cavity (8 cm long, 5 cm mirror radius), which resonates for the ir laser light exciting the upper transition. The transmittivity of the input-output mirror is $t^2 = 0.006$, while total losses are $p^2 = 0.011$, including both mirror transmittivities. The light beams inside the cavity are circularly polarized to optimize the nonlinear coupling, and the output ir beam is separated from the input beam using a prism polarizer. Both beams are detected using *p-i-n* silicon photodiodes, followed by low-noise preamplifiers.¹⁶ The photocurrents are added or subtracted using 0° - 180° power combiners, and sent to a spectrum analyzer. When taking data, the spectrum analyzer is set to zero frequency span, and a noise analysis frequency is selected.¹⁷ Then, the noise of the photocurrents is analyzed while the optical cavity is swept onto resonance of a noise sideband

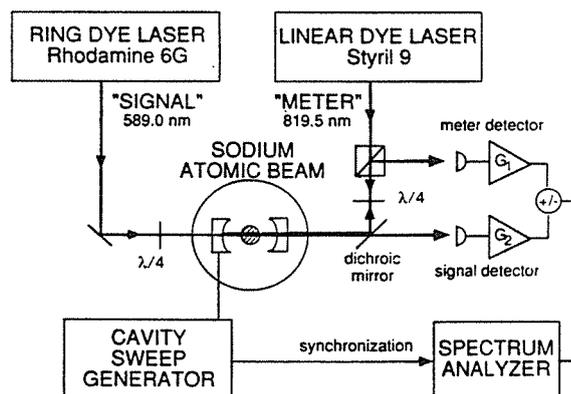


FIG. 1. Experimental setup. Two lasers at 589.0 nm ("signal" beam) and 819.5 nm ("meter" beam) are tuned close to the resonances of the $3s_{1/2}$ - $3p_{3/2}$ - $3d_{5/2}$ cascade in a sodium atomic beam. The single-ended optical cavity resonates for a noise sideband of the meter beam. The quantum intensity noises of the output light beams are correlated, while the quantum intensity noise of the signal beam is not changed, providing evidence for a QND measurement.

(NSB) of the ir beam, corresponding to the frequency which has been set on the spectrum analyzer. More precisely, this NSB resonance is obtained when the cavity is detuned from the laser frequency by an amount equal to the noise frequency set on the spectrum analyzer.¹⁷ The optical cavity has two roles: First, it enhances the nonlinear coupling (see below), and second, it turns the initial readout phase modulation of the meter beam into an intensity modulation, which can be directly detected.^{5,15,18}

Typical results are shown in Fig. 2, where all noise levels refer to noise powers for the fluctuations of the photocurrents. Curves *a* and *b* show the separate noise levels of the probe and meter beams. When the NSB resonance is achieved, the noise of the meter beam is increased, while the noise of the signal beam is left unchanged. Outside this resonance, both noise levels have been checked to be at the shot-noise level. They are adjusted to the same electrical level by slight tuning of the preamplifiers gains. Curves *c* and *d* show the recombined photocurrents. Outside the resonance, the noises are obviously uncorrelated, and the noise level increases by 3 dB, independently of the relative recombination phase. On the other hand, the noise of the meter beam

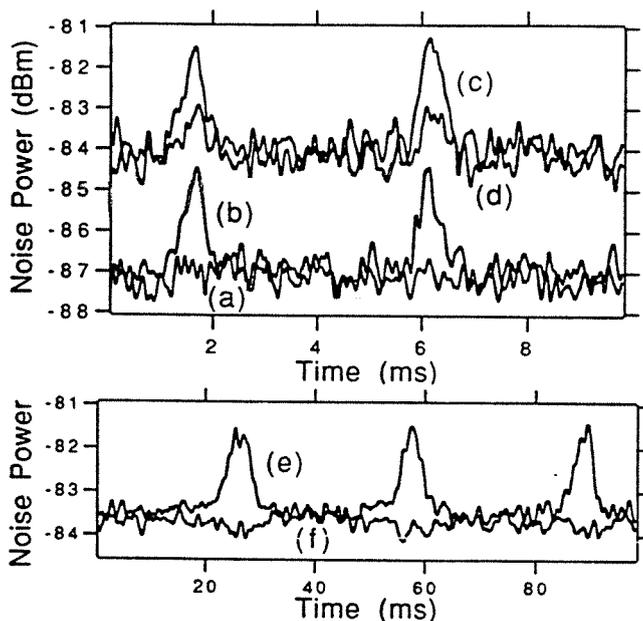


FIG. 2. Noise levels recorded while the cavity is swept over a noise sideband of the meter beam. The spectrum analyzer is set to zero-frequency span, 14-MHz center frequency, 100-kHz radio-frequency bandwidth, 300-Hz video bandwidth. Curves *a* and *b* are respectively the signal and meter noises, recorded separately. Other curves are the minimum and maximum noise levels of the combined photocurrents, obtained by adding or subtracting the signal and meter photocurrents. Curves *c* and *d* correspond to a one-photon detuning $\Delta = -1.75$ GHz and a two-photon detuning $\delta = -1$ GHz, while curves *e* and *f* are obtained for $\Delta = +2.25$ GHz and $\delta = -1$ GHz, with a cavity sweep 10 times slower (video bandwidth 30 Hz).

at the NSB resonance is correlated with the (unchanged) noise of the signal beam: Adding or subtracting the photocurrents results in a 1.5-dB change of the noise levels. For this experiment, both laser intensities on the atoms were close to 10 W/cm^2 (1 mW power). The one- and two-photon detunings were respectively $\Delta = -1.75$ GHz and $\delta = -1$ GHz, relative to the $F=2$ ground-state hyperfine sublevel. Other experiments were done for an opposite sign of the one-photon detuning, i.e., $\Delta = +2.25$ GHz and $\delta = -1$ GHz, keeping the other parameters at the same values. In the latter case, the correlations were clearly increased, to about 2.5 dB (see curves *e* and *f*). Moreover, the differenced noise was below the shot-noise level of the recombined photocurrent, by about 0.4 dB. This shows clearly the quantum character of the correlation established between the signal and meter beams.¹⁹ These results could be further improved by optimizing the electronic gain of the meter channel.^{5,6,18,20} The combined photocurrents of the signal and attenuated meter are shown in Fig. 3. These curves are corrected for the amplifier noises, and normalized so that 0 dB is the shot-noise level of the signal alone. The differenced noise is now 0.8 dB below the shot-noise level of the recombined photocurrent, and reaches the shot-noise level of the signal alone.

One important advantage of this scheme is that only direct detection is needed, but we also used a homodyne detection setup,⁶ in order to check qualitatively that the signal phase noise is increased when the measurement is performed. On the other hand, the output-signal intensity fluctuations remain at the shot-noise level, within our experimental precision. Therefore, the intensity noise added to the signal beam, if any, is more than 10 dB below the shot-noise level. This is a good indication that the QND condition is satisfied. However, we notice that

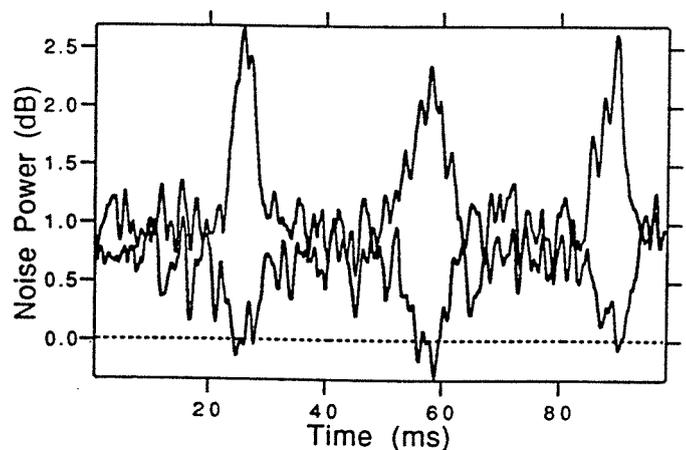


FIG. 3. Combined noise levels with 6-dB attenuation of the meter photocurrent. These curves are corrected for the amplifier noises, and normalized so that 0 dB corresponds to the shot-noise level of the signal alone. The differenced photocurrent goes 0.8 dB below the combined shot-noise level.

all experiments to date,^{5,6} including this one, check only the "state preparation" properties of the device,^{14,21} i.e., the fluctuations and correlations of the output beams. A true assessment of the QND properties should involve some characterization of the correlations between the input and the output fluctuations, using, for instance, two QND devices following each other. This will be the subject of further work.

The measured quantities are the variances (i.e., noise fluctuation powers), of the signal, meter, and recombined photocurrents, which will be denoted, respectively, V_s^{out} , V_m^{out} , and $V_\varepsilon^{\text{out}}$ ($\varepsilon = \pm 1$ depending on the recombination phase). Assuming that the shot-noise levels of both beams have the conventional value of 1, and correcting for the amplifier noises, one obtains^{7,8,15}

$$V_s^{\text{out}} = 1, \quad (1)$$

$$V_m^{\text{out}} = 1 + \eta_m N_m, \quad (2)$$

$$V_\varepsilon^{\text{out}} = 2 + \eta_m N_m + 2\varepsilon C_{ms} (\eta_m \eta_s)^{1/2}, \quad (3)$$

where N_m and C_{ms} are respectively the meter excess noise and the correlation between the meter and the signal, introduced by the QND device. Here, C_{ms} is defined as the average product of the meter and signal intensity fluctuations. The parameters η_s and η_m (with $\eta_s \cong \eta_m \cong 0.5$) are the overall detection efficiencies of the signal and meter channels, including the linear cavity losses. According to our experimental results, we will neglect any excess noise added to the signal beam. For both negative (n) and positive (p) values of the detuning Δ , the experimental values corresponding to the results of Fig. 2 are

$$N_m^p = 1.5, \quad C_{ms}^p = 0.9, \quad (4)$$

$$N_m^n = 3, \quad C_{ms}^n = 0.7, \quad (5)$$

where a conservative estimate of the experimental uncertainties is 20% on all values.

The two-photon cross-phase-modulation effect can be calculated to the lowest $\chi^{(3)}$ approximation by solving the optical Bloch equations for a three-level system.²² We will consider only purely radiative decay, and denote by γ_1, γ_2 the intermediate- and upper-level transverse linewidths (half of the Einstein coefficients). The atom-laser detunings and Rabi frequencies will be denoted respectively δ_1, Ω_1 (lower transition) and δ_2, Ω_2 (upper transition). $\Delta = \delta_1$ is the one-photon detuning, and $\delta = \delta_1 + \delta_2$ is the two-photon detuning. All detunings are much larger than γ_1, γ_2 , and the Doppler width (dispersive limit). Finally, the dipole matrix elements are d_1, d_2 . Assuming that $\Delta \gg \delta$, the lowest-order effect of the laser fields is to induce a coherence between the ground and upper levels, whose expression is simply $\Omega_1 \Omega_2 / \Delta \delta$. The resulting nonlinear polarizations for the lower and upper transitions are then respectively $n_{\text{at}} d_1 \Omega_1 \Omega_2 / \delta \Delta^2$ and $n_{\text{at}} d_2 \Omega_2 \Omega_1 / \delta \Delta^2$, where n_{at} is the atomic number density.

These polarizations translate into nonlinear phase shifts for the laser fields, with respective values $n_{\text{at}} k_1 L d_1^2 \Omega_1^2 / 2\varepsilon_0 \hbar \delta \Delta^2$ and $n_{\text{at}} k_2 L d_2^2 \Omega_2^2 / 2\varepsilon_0 \hbar \delta \Delta^2$. Here, $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ and $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ are the wave vectors of the laser fields, and L is the total path length through the nonlinear medium. Using the definitions of γ_1, γ_2 , one obtains convenient final forms for the nonlinear phase shifts:

$$\kappa_1 = n_{\text{at}} L (3\lambda_1^2 / 4\pi) \gamma_1 \Omega_1^2 / \delta \Delta^2, \quad (6)$$

$$\kappa_2 = n_{\text{at}} L (3\lambda_2^2 / 4\pi) \gamma_2 \Omega_2^2 / \delta \Delta^2. \quad (7)$$

We note that, though they look nonsymmetric, κ_1 and κ_2 are equal if the field intensities are the same in photons units. The value of the nonlinear refractive index can then be inserted into a calculation of the fluctuations using the semiclassical linear input-output technique.²³ At the NSB resonance in our linear cavity setup, the predicted value¹⁵ of the correlation coefficient C_{ms} is $(2/p)(\kappa_1 \kappa_2)^{1/2}$, where p^2 has been previously defined, while the noise coefficient N_m is $(2/p)^2 \kappa_1 \kappa_2$. The signature of an "ideal" nonlinear effect ("parametric" limit) lies in the relation $N_m = C_{ms}^2$.

Typical experimental values (in γ_1 units) are $\gamma_2 = 0.8$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 30$, $\Delta = 350$, $\delta = 200$, and $n_{\text{at}} L 3\lambda_1 \lambda_2 / 4\pi = 1200$, so that $C_{ms} = 0.8$, which agrees fairly well with the observed values. The complete calculation, including the sodium hyperfine levels and polarization effects, does not significantly change the above value of C_{ms} . However, this simple theory fails to explain the experimentally observed deviations from the relation $N_m = C_{ms}^2$, which clearly depend on the sign of the one-photon detuning Δ , while the $\chi^{(3)}$ model depends only on Δ^2 .

Without going into the full calculation of the effect, one may look for a physical reason for the failure of the parametric theory. A clue to the answer is the value of the upper-level detuning, which is smaller in the "bad" case ($\delta_2 = +150$) than in the "good" case ($\delta_2 = -550$). Let us consider now the $\chi^{(5)}$ process shown in Fig. 4: In the bad case, the excitation of the upper-level transition is much closer to resonance than in the good case. Therefore, excess noise due to nonlinear scattering close

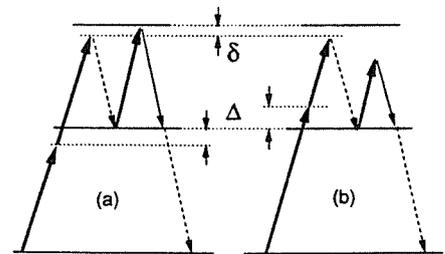


FIG. 4. Diagrams illustrating the two situations discussed in the text. (a) If Δ and δ have the same sign and about the same absolute value, the upper transition is excited close to resonance, and strong excess noise occurs. (b) If Δ and δ have opposite signs, the excess noise is much smaller.

to the laser frequency can be expected to be much higher. This process is well known to limit the efficiency of squeezing in two-level systems.²⁴ We note that in the case of this three-level system, the excess noise can be greatly reduced by making the right choice for the two detunings δ_1 and δ_2 . The calculation of these effects has been performed, using a more elaborate microscopic description of the nonlinear medium, and will be detailed in other publications.²⁵

In conclusion, we have observed a quantum-non-demolition measurement effect using a two-photon nonlinear system. The best reproducibly observed result to date is a reduction of 0.8 dB below the combined shot-noise levels of the two output beams, which originate from two different lasers. This result is about the same as in previously published experiments in other systems, but is obtained with very small laser powers (typically 1 mW cw). Optimization of the cavity and of the detection system should result in a significant improvement of these values. Moreover, very intriguing predictions can be made in the doubly resonant case, associated with bistable behavior. Therefore, many theoretical and experimental developments can be expected, and three-level atomic systems seem quite well suited for quantum-noise studies.

We acknowledge fruitful discussions with Serge Reynaud and Jean-Michel Courty. We thank the Commissariat à l'Energie Atomique (Saclay) for the loan of a CR699 dye laser. This work is supported in part by the Direction des Recherches, Etudes et Techniques, and by the Centre National d'Etude des Télécommunications. Institut d'Optique is Unité de Recherche Associée 14 of the Centre National de la Recherche Scientifique.

¹D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1951).

²C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 341 (1980).

³B. Yurke, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 732 (1985).

⁴Y. Yamamoto, N. Imoto, and S. Machida, *Phys. Rev. A* **33**, 3243 (1986).

⁵M. D. Levenson, R. M. Shelby, M. D. Reid, and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2473 (1986).

⁶A. LaPorta, R. E. Slusher, and B. Yurke, *Phys. Rev. Lett.*

62, 28 (1989).

⁷P. Grangier, J. F. Roch, and S. Reynaud, *Opt. Commun.* **72**, 387 (1989).

⁸P. Grangier and J. F. Roch, *Quantum Opt.* **1**, 17 (1989).

⁹H. P. Yuen, *Phys. Rev. A* **13**, 2226 (1976).

¹⁰L. A. Lugiato and G. Strini, *Opt. Commun.* **41**, 374 (1982).

¹¹C. M. Savage and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **33**, 3282 (1986).

¹²B. A. Capron, D. A. Holm, and M. Sargent, III, *Phys. Rev. A* **35**, 3388 (1987).

¹³P. Galatola, L. A. Lugiato, M. Vadicchino, and N. B. Abraham, *Opt. Commun.* **69**, 414 (1989); **69**, 419 (1989).

¹⁴C. A. Blockley and D. F. Walls, *Opt. Commun.* **79**, 241 (1990).

¹⁵P. Grangier and J. F. Roch, *Opt. Commun.* (to be published).

¹⁶The amplifier noise is typically 6 dB below the observed noise levels, for 0.2-mA photocurrents and 15-MHz analysis frequency. The linearity of the detectors has been checked in the useful range of photocurrents.

¹⁷Experimentally, we have investigated noise frequencies between 10 and 20 MHz, by changing the central frequency of the spectrum analyzer, and modifying accordingly the cavity detuning and the incident ir power, in order to keep the appropriate value of the intracavity power. When the sideband resonance condition is satisfied at 15 MHz, the ratio between the intracavity and incident ir powers is about 3. If the laser beam itself resonates, this ratio goes up to about 200. In this case, the atomic response is saturated and bistability effects can be observed. The resonance of the laser beam itself is therefore avoided during the sweep.

¹⁸M. D. Levenson and R. M. Shelby, *J. Mod. Opt.* **34**, 775 (1987).

¹⁹Relative variations of the added and differenced photocurrents can go up to 4 dB, by increasing the atomic density. However, the sodium oven empties very quickly in that case, and associated sub-shot-noise effects have not been observed.

²⁰J. Mertz, A. Heidmann, C. Fabre, E. Giacobino, and S. Reynaud, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2897 (1990).

²¹M. J. Holland, M. J. Collett, D. F. Walls, and M. D. Levenson, *Phys. Rev. A* **42**, 2995 (1990).

²²R. M. Whitley and C. R. Stroud, *Phys. Rev. A* **14**, 1498 (1976).

²³S. Reynaud and A. Heidmann, *Opt. Commun.* **71**, 209 (1989).

²⁴R. E. Slusher, B. Yurke, P. Grangier, A. LaPorta, D. F. Walls, and M. Reid, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1453 (1987).

²⁵J. M. Courty, P. Grangier, L. Hilico, and S. Reynaud (to be published).

IV. Points importants mis en évidence expérimentalement.

1. Prévisions du modèle paramétrique.

a) Déphasages non-linéaires à la limite cubique dispersive.

Le couplage idéal est calculé de façon approchée dans l'article en se ramenant à un système fermé à trois niveaux. Nous allons par contre effectuer les calculs du couplage non-linéaire à partir des résultats obtenus dans le Chapitre II, et tenant compte de la structure réelle de l'atome.

Les paramètres expérimentaux sont les suivants :

densité atomique : $n_{at} = 5.10^{11}$ atomes/cm³; intensités jaune et infra-rouge intra-cavité au niveau des atomes, $I = 10$ W/cm² (1 mW focalisée sur un waist de 70 μm de diamètre) ; désaccord à un photon, $\Delta \sim \pm 2$ GHz ($400 \Gamma_{rg} / 2$) ; désaccord à deux photons, $\delta \approx - 1$ GHz ($200 \Gamma_{rg} / 2$) longueur d'interaction $\ell = 2$ cm (pour un aller-retour dans le jet).

On en déduit ainsi :

- fréquence de Rabi pour le faisceau jaune : $\Omega_1^{eff} = 41 \Gamma_{rg} / 2$
- fréquence de Rabi pour le faisceau infra-rouge : $\Omega_2^{eff} = 61 \Gamma_{rg} / 2$
- épaisseur optique à résonance : $\alpha_o \ell = 830$

d'où les déphasages non-linéaires donnés par les équations (II.C.18) :

$$\varphi_1^{nl(2\text{ photons})} = 0.058 \quad (\text{III.C.13a})$$

$$\varphi_2^{nl(2\text{ photons})} = 0.040 \quad (\text{III.C.13b})$$

b) Transfert classique.

Le paramètre de couplage est donné par :

$$\kappa = \sqrt{\varphi_1^{nl(2\text{ photons})} \varphi_2^{nl(2\text{ photons})}} \quad (\text{III.C.14a})$$

soit :

$$\kappa = 0.048 \quad (\text{III.C.14b})$$

qui devient sur la résonance BLU (eq. III.C.12) :

$$g_{th} = \frac{2\sqrt{T}}{(T + T')} \kappa \quad (\text{III.C.15})$$

En fonction des paramètres de la cavité (transmission du miroir d'entrée $T = 0.006$; pertes totales $T + T' = 0.011$), on en déduit :

$$g_{th} = 0.68 \quad (-3\text{dB}) \quad (\text{III.C.16})$$

c) Modélisation des pertes.

Nous avons vu au Chapitre I que la position des pertes sur le signal par rapport au coupleur QND (avant ou après le dispositif) était importante. Sur le dispositif expérimental, la mesure de l'intensité du faisceau le long de sa propagation, montre que les pertes les plus importantes sont situées après le coupleur, et correspondent à une efficacité totale de détection donnée par $\eta_s \approx 0.5$.

L'efficacité de détection sur le faisceau de mesure étant également $\eta_M \approx 0.9^*$, les transferts classiques sont alors donnés par :

$$\alpha_{SS}^{(th)} = \sqrt{\eta_s} \approx 0.71 \quad (\text{III.C.17a})$$

$$\alpha_{MS}^{(th)} = \sqrt{\eta_M} g_{th} \approx 0.64 \quad (\text{III.C.17b})$$

D'après les résultats obtenus au Chapitre I§C, et en supposant que celui-ci fonctionne bien en régime paramétrique, les critères d'efficacité théoriques de notre dispositif sont alors donnés par :

$$N_s^{eq} = \frac{1 - \eta_s}{\eta_s} \quad N_s^{eq} = 1 \quad (\text{III.C.18a})$$

$$N_M^{eq} = \frac{1}{\eta_M g^2} \quad N_M^{eq} = 2.4 \quad (\text{III.C.18b})$$

* L'efficacité de détection sur le faisceau de mesure donnée dans l'article, est $\eta_M^{total} = 0.5$. Cette valeur inclut en fait les pertes de la cavité. Dans la présentation que nous avons choisie ici, ces pertes sont incluses dans le gain donné par la cavité à la limite BLU et il est donc nécessaire de les déduire de l'efficacité de détection de η_M

$$\eta_M = \eta_M^{total} T / (T + T') = 0.5$$

$$W_{P_S P_M}^{out} = g\sqrt{\eta_S \eta_M} \quad W_{P_S P_M}^{out} = 0.46 \quad (\text{III.C.18c})$$

$$W_{P_S | P_M}^{out} = \frac{1 + (1 - \eta_S)g^2 \eta_M}{1 + \eta_M g^2} \quad W_{P_S | P_M}^{out} = 0.85 \text{ } (-0.7 \text{ dB}) \quad (\text{III.C.18d})$$

2. Résultats expérimentaux : importance du signe du désaccord à un photon.

Nous avons reproduit sur les figures III.C.10 et III.C.11 les deux résultats exposés dans cet article. Les deux courbes (a) et (b) de la figure III.C.10 montrent le bruit de photons des faisceaux séparés. Sur la résonance B.L.U., le bruit du faisceau de mesure augmente nettement, tandis que les fluctuations d'intensité du faisceau signal reste au niveau du bruit de photons, avec notre précision expérimentale : si le milieu non-linéaire introduit un bruit d'intensité sur le faisceau signal, nous pouvons affirmer que celui-ci est plus de 10 dB en-dessous du bruit de photons.

Les courbes (c) et (d) montrent les bruits des photocourants recombinaison (somme et différence), pour un désaccord à un photon négatif ($\Delta = - 1.75$ GHz). En dehors de la résonance B.L.U., les bruits du signal et de la mesure ne sont pas corrélés, et le niveau de bruit total augmente de + 3 dB, indépendamment du signe de recombinaison. Sur la résonance B.L.U., le bruit du faisceau de mesure est par contre corrélé avec celui du faisceau signal, ce qui se traduit par une différence de 1.5 dB suivant la phase relative de recombinaison.

De l'autre côté de la résonance à un photon, i.e. pour un désaccord maintenant positif ($\Delta = + 2.5$ dB, avec les autres paramètres restant aux mêmes valeurs), les courbes (e) et (f) sur la figure III.C.11 montrent que les corrélations sont augmentées (différence de maintenant 2.5 dB entre les deux courbes correspondant aux deux signes de recombinaison). Une différence particulièrement importante par rapport au cas précédent est que maintenant, le bruit sur la différence des photocourants passe nettement en-dessous du niveau correspondant à la recombinaison des bruits non-corrélés. Cet effet montre clairement l'existence de corrélations quantiques entre les deux faisceaux, à la sortie du dispositif.

Il est ensuite possible d'utiliser ces corrélations pour tenter de réaliser d'une préparation d'état quantique, en atténuant le photocourant du faisceau de mesure. Le résultat obtenu est reproduit sur la figure III.C.10 et correspond à une diminution de 0.8 dB en-dessous du bruit de photons des faisceaux recombinaison, le niveau ainsi obtenu atteint celui du bruit de photons du faisceau signal seul.

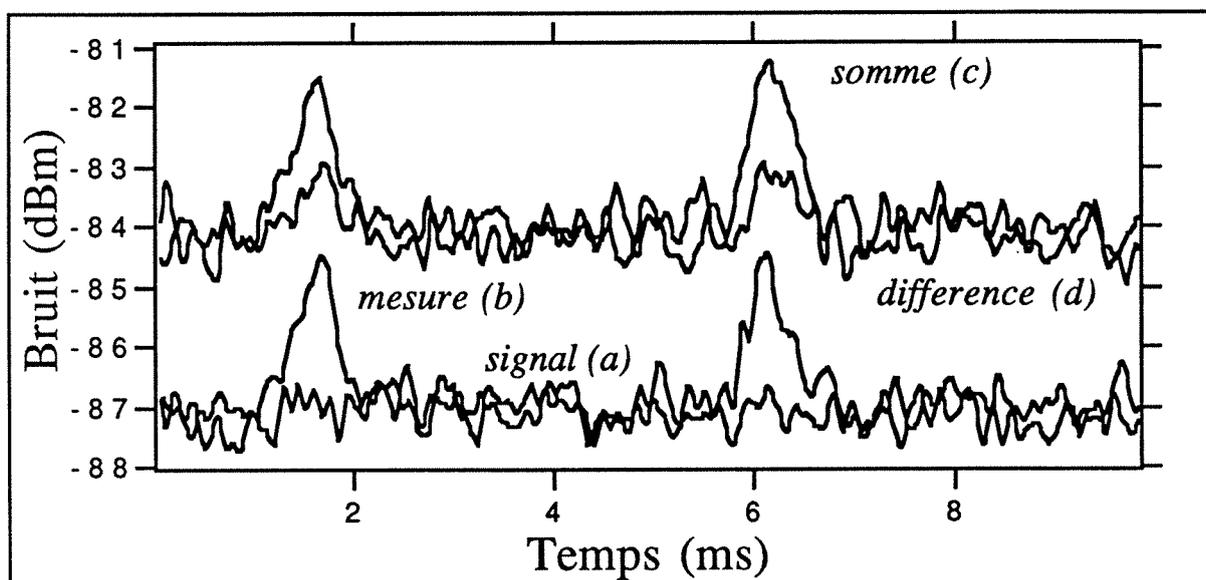


Figure III.C.10 :

Evolution des bruits de photons pour $\Delta = -1.75$ GHz au cours du balayage de la cavité. La fréquence analysée correspond à 14 MHz, avec une largeur de résolution de 100 kHz, et un filtre vidéo de 300 Hz.

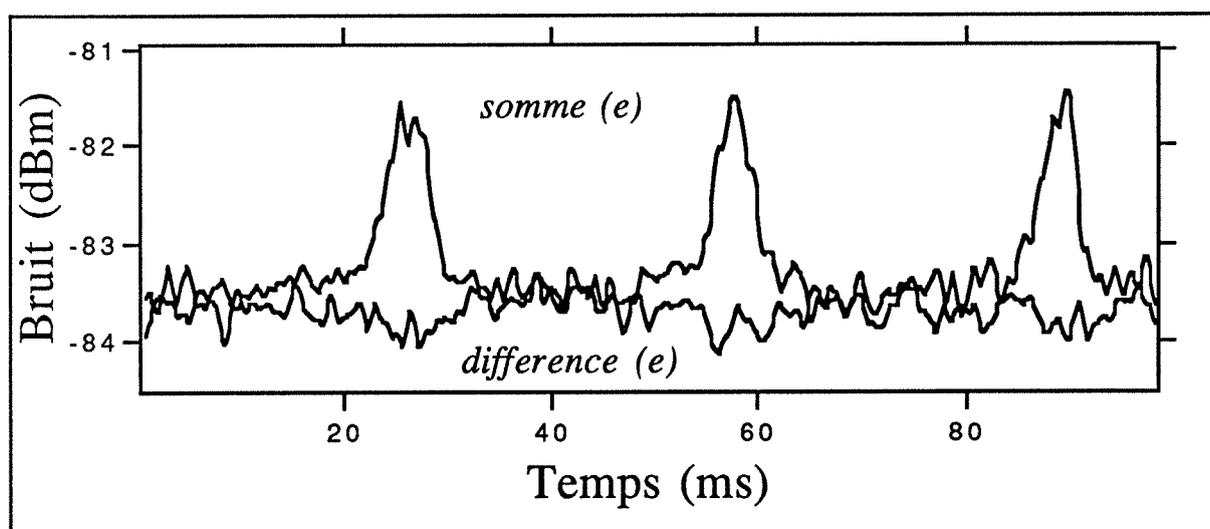


Figure III.C.10 :

Evolution des bruits de photons pour $\Delta = +2.5$ GHz. Les paramètres sont identiques aux précédents, excepté le balayage de la cavité 10 fois plus lent, accompagné d'un filtre vidéo de 30 Hz.

Il est ensuite possible d'utiliser ces corrélations pour tenter de réaliser une préparation d'état quantique, en atténuant le photocourant du faisceau de mesure. Le résultat obtenu est reproduit sur la figure III.C.10 et correspond à une diminution de 0.8 dB en-dessous du bruit de photons des faisceaux recombinaisonnés, le niveau ainsi obtenu atteint celui du bruit de photons du faisceau signal seul.

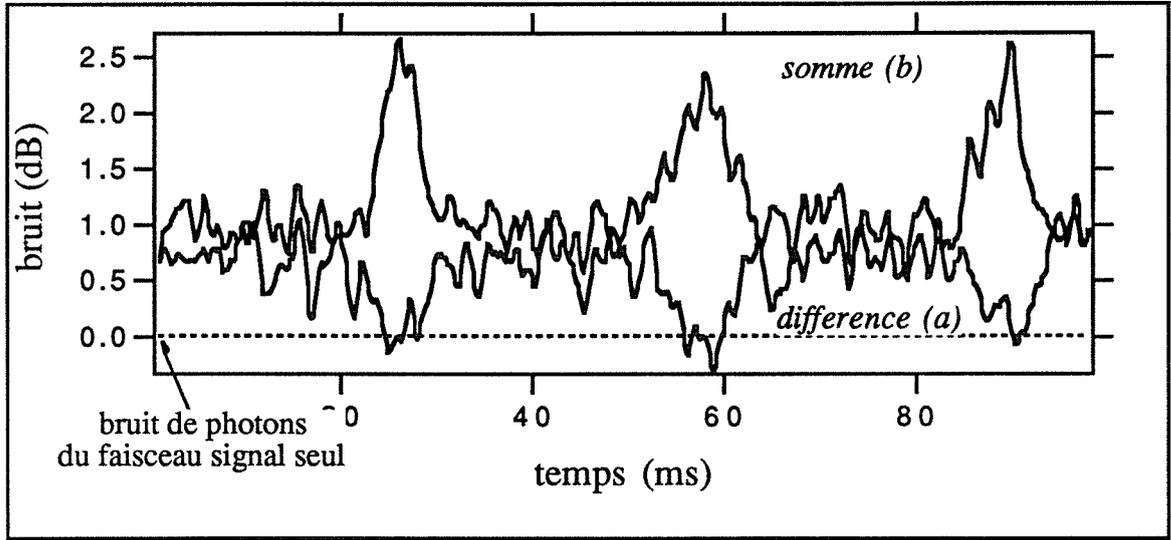


Figure III.C.12 :

Bruits des faisceaux recombinaés, en introduisant une atténuation de 6 dB sur le photocourant du faisceau de mesure. Ces courbes sont corrigées du bruit des amplificateurs, et normalisées pour que la référence de 0 dB corresponde au bruit de photon du faisceau signal seul.

3. Comparaison avec le modèle paramétrique.

Les variances des quadratures signal et mesure sont obtenues à partir de l'excès de bruit apparaissant sur la résonance BLU. Les variances des photocourants correspondant à la somme et la différence du signal et de la mesure sont données par :

$$W_{P_S \pm P_M}^{out} = W_{P_S P_S}^{out} + W_{P_M P_M}^{out} \pm 2W_{P_S P_M}^{out} \quad (\text{III.C.19a})$$

en tenant compte du déphasage relatif introduit entre les deux voies, de façon à rendre la covariance entre les deux quadratures réelles. On en déduit ainsi :

$$W_{P_S P_M}^{out} = \frac{1}{4} (W_{P_S + P_M}^{out} - W_{P_S - P_M}^{out}) \quad (\text{III.C.19b})$$

Les transferts classiques mesurés sont :

$$\alpha_{SS}^{exp} = \sqrt{\eta_S} \approx 0.71 \quad \alpha_{MS}^{exp} = 0.71 \quad (\text{III.C.20})$$

à comparer aux valeurs théoriques (eq. III.C.17a,b). On en déduit ainsi les critères d'efficacité de la mesure QND, pour les deux résultats obtenus et correspondant à $\Delta < 0$ et $\Delta > 0$.

Afin de comparer avec le modèle paramétrique, nous introduisons deux nouveaux paramètres B et C , définis par :

$$N_M^{eq} = \frac{I}{g_{th}^2 \eta_M} B \quad W_{PSPM}^{out} = g_{th} \sqrt{\eta_S \eta_M} C \quad (\text{III.C.21})$$

La signature d'un effet paramétrique idéal, avec uniquement une détérioration de la mesure due aux pertes optiques, apparaît dans les relations :

$$B = 1 \quad C = 1 \quad (\text{III.C.22})$$

Des déviations par rapport à ces relations (correspondant à $B > 1$ et $C < 1$), indiqueront la présence d'un excès de bruit généré par le milieu non-linéaire.

Les résultats sont présentés dans le tableau III.C.2.

	W_{PsPs}^{out}	W_{PMPM}^{out}	N_S^{eq}	N_M^{eq}	W_{PSPM}^{out}	B	C
effet paramétrique avec pertes optiques	1	1.4	1	2.4	0.46	1	1
$\Delta < 0$ ($\Delta = -1.75$ GHz)	1	2.5	1	4.0	0.26	1.67	0.57
$\Delta > 0$ ($\Delta = +2.5$ GHz)	1	1.75	1	2.5	0.39	1.04	0.85

Tableau III.C.2 :

Comparaison des résultats expérimentaux avec le modèle paramétrique. Les deux cas étudiés correspondent en unité normalisée à des désaccords à un photon valant respectivement $\Delta = -350$ et $\Delta = +450$.

4. Conclusion.

Il apparaît clairement que l'accord avec le modèle paramétrique idéal est moins bon pour $\Delta < 0$ que pour $\Delta > 0$. Cette déviation, qui dépend donc du signe du désaccord à un photon, ne peut naturellement pas être interprétée par le modèle précédent. En effet, dans le cadre de la limite cubique dispersive pour les champs moyens et d'une non-linéarité paramétrique (c'est-à-dire ne rajoutant pas d'excès de bruit) toutes les grandeurs varient uniquement en Δ^2 , et le signe du désaccord à un photon ne devrait donc pas intervenir.

Remarquons également que même si les résultats sont tout-à-fait comparables à ceux publiés dans les expériences précédentes, le dispositif obtenu est sans utilité pratique. Puisque $W_{p_s p_s}^{out} \approx 1$ et $N_S^{eq} N_M^{eq} > 1$, ses performances sont moins bonnes que celles d'une simple lame semi-transparente ! Comme indiqué dans la partie A, nous avons donc tenté d'améliorer les performances de notre dispositif, en utilisant une cavité à deux longueurs d'onde.

D'autre part, il est naturellement très important de déterminer l'origine de la différence apparaissant entre $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$, et non décrite par notre simple modèle paramétrique. Pour cela, il est nécessaire de considérer toutes les résonances par rapport aux niveaux atomiques, y compris en incluant le désaccord Δ' entre le faisceau infra-rouge et la transition entre le niveau relais et le niveau excité. Lorsque Δ est grand devant les largeurs naturelles, ce désaccord est sans aucune importance pour l'évolution des champs moyens. Les deux configurations envisagées correspondent ainsi à :

(i)	$\Delta = - 1.75 \text{ GHz}$	$\delta = - 1 \text{ GHz}$	$\Delta' = + 0.75 \text{ GHz}$
(ii)	$\Delta = + 2.25 \text{ GHz}$	$\delta = - 1 \text{ GHz}$	$\Delta' = - 3.25 \text{ GHz}$

Il est possible de justifier très schématiquement la présence d'un excès de bruit rajoutés par les atomes, à l'aide du diagramme de diffusion représenté sur la figure III.C.11.

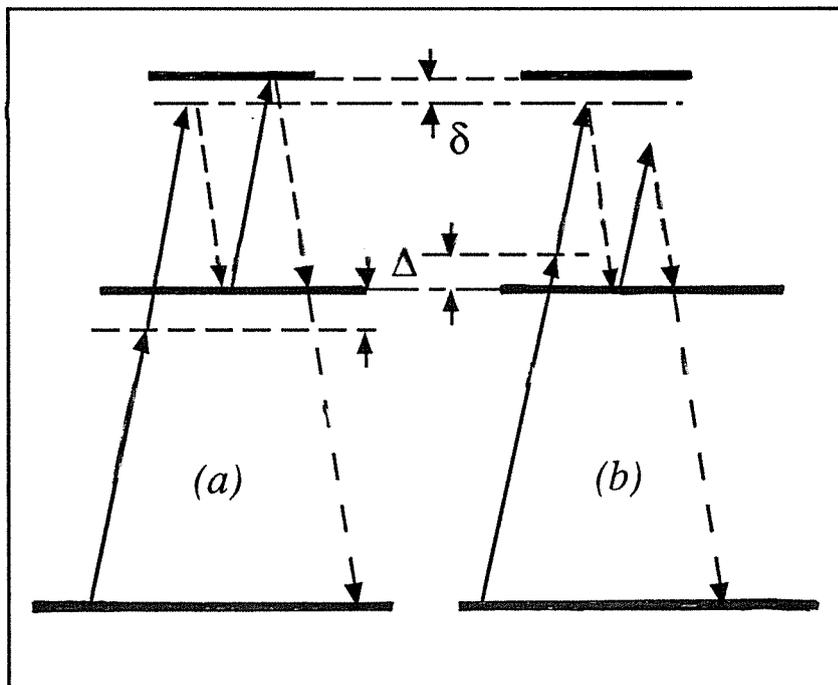


Figure III.C.13 :
Diagrammes de diffusion
illustrant les deux situations
décrites dans le texte. (a) Si Δ et
 δ ont le même signe et la même
valeur absolue, la transition
supérieure est excitée près de
résonance, et il apparaît alors un
important excès de bruit.
(b) Si Δ et δ ont des signes
différents, l'excès de bruit est
beaucoup plus faible.

Dans le diagramme (a), correspondant à la situation (i), et pour lequel Δ' est voisin de la résonance, le processus en $\chi^{(5)}$ conduit à une diffusion non-linéaire au voisinage de la fréquence de ce laser, qui induit un excès de bruit venant masquer les corrélations quantiques établies par le couplage dû à l'effet Kerr croisé. Dans le diagramme (b), correspondant à la situation (ii) (même δ , mais $\Delta' < 0$), le diagramme de diffusion a une amplitude beaucoup plus faible, et l'excès de bruit devient négligeable. Il apparaît ainsi que l'excès de bruit dépend des deux désaccords Δ et Δ' , et que, en choisissant pour ceux-ci des valeurs appropriées, il est possible d'obtenir des effets sur les bruits quantiques proches de la limite paramétrique. Cette détermination nécessite d'avoir une théorie microscopique permettant de décrire le bruit non-corrélé provenant de la diffusion inélastique des atomes.

Une première analyse tentant d'inclure les fluctuations dues à l'émission spontanée, a été faite par Blockley et Walls, en utilisant un modèle d'atome à deux niveaux effectifs, supposant ainsi que le niveau intermédiaire est très désaccordé par rapport aux fréquences optiques [Blockley 90]. Cette hypothèse est naturellement irréaliste vis-à-vis de notre configuration expérimentale. Le calcul complet a été effectué d'une part, par J.P. Poizat, M. Collett et D. Walls [Poizat 92], et d'autre part, par P. Grangier, en appliquant la théorie de la réponse linéaire développée par J.M. Courty et S. Reynaud [Courty 91]. Dans ce dernier cas, la méthode utilisée consiste très schématiquement à calculer la variation en fréquence des fonctions de corrélation des champs à partir des fonctions de corrélation des dipôles atomiques. Cette évaluation est obtenue par le théorème de régression quantique à partir des huit équations de Bloch, résolues par transformée de Laplace (ce qui conduit directement à une solution dans l'espace des fréquences). La cavité est ensuite prise en compte à la limite de la résonance BLU, ce qui correspond à un filtrage spectral. Cette méthode est, bien entendu, non-perturbative vis-à-vis des intensités des faisceaux lumineux et des désaccords Δ et δ par rapport aux résonances atomiques, mais suppose néanmoins que les termes de bruit quantique sont faibles par rapport aux amplitudes moyennes des deux champs. Ces analyses sortent du cadre de cette thèse.

Ces deux formalismes donnent rigoureusement les mêmes résultats, et montrent en particulier que, pour un désaccord à deux photons δ fixé, le côté correspondant à $\Delta > 0$ est plus favorable que celui pour $\Delta < 0$, ce qui est en bon accord avec nos observations expérimentales. Dans la suite de cette étude, nous allons donc conserver la situation pour laquelle nous avons observé des effets quantiques (c'est-à-dire $\Delta > 0$ et $\delta < 0$), en tentant d'améliorer les performances du dispositif par l'introduction sur le faisceau jaune (signal) d'une cavité de faible finesse. Comme nous l'avons vu, cette configuration permet a priori d'améliorer le couplage non-linéaire, par rapport à la situation où le faisceau jaune traverserait la cavité en un seul passage, et que nous avons réalisée dans cette partie.

D. RESULTATS EXPERIMENTAUX OBTENUS AVEC UNE CAVITE A DEUX LONGUEURS D'ONDE

I. NOUVELLE CONFIGURATION EXPERIMENTALE.

La cavité de longueur $L = 5.2$ cm est constituée de miroirs à traitement dichroïque, avec un rayon de courbure $R = 5$ cm. Pour chaque mode, le miroir arrière a un coefficient de réflexion maximal pour la longueur d'onde correspondante. La cavité a ainsi, pour chaque faisceau, une seule entrée-sortie. Les traitements optiques correspondent maintenant aux valeurs suivantes pour les finesses :

- $\mathcal{F} \approx 200$ à $\lambda_2 = 819.5$ nm (faisceau de mesure)
- $\mathcal{F} \approx 50$ à $\lambda_1 = 589.0$ nm (faisceau signal)

La résonance des deux modes est contrôlée en détectant l'intensité intracavité correspondante, par les fuites à travers les miroirs arrière de la cavité (figure III.D.1).

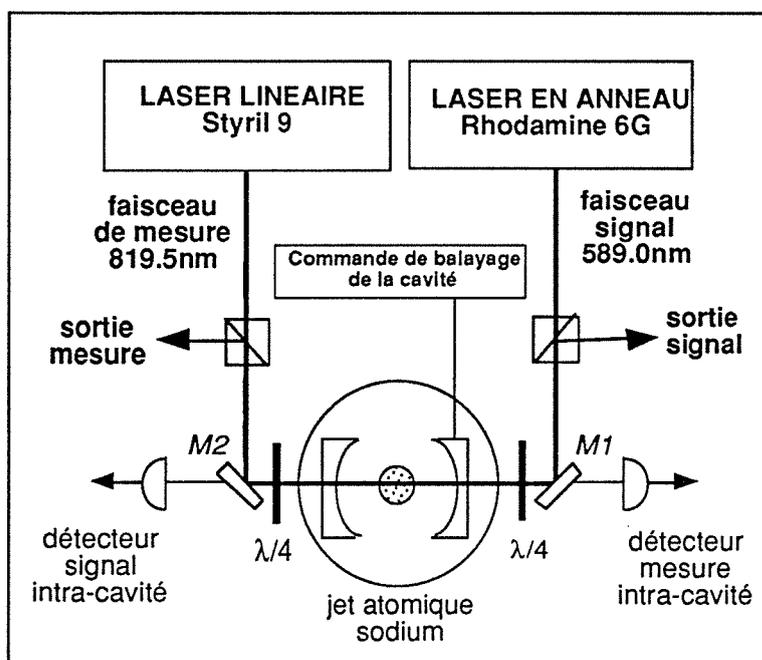


Figure III.D.1 : Dispositif expérimental utilisant une cavité à deux longueurs d'onde. Les deux faisceaux réfléchis par la cavité (voies de sortie), sont détectés puis envoyés vers l'analyseur de spectre, synchronisé avec la commande de balayage de la cavité. Les deux miroirs dichroïques $M1$ et $M2$ permettent d'observer les résonances intra-cavité.

Afin d'optimiser le couplage non-linéaire, les deux faisceaux sont, comme précédemment, polarisés circulairement. Les faisceaux réfléchis par la cavité sont ensuite séparés des faisceaux entrants à l'aide de cubes polariseurs. Cette configuration présente également l'avantage de réduire les retours optiques parasites dans les lasers à colorant, et qui perturberaient le bon fonctionnement des asservissements. Les photocourants obtenus après détection sur les deux voies de sortie, sont ensuite envoyés vers un analyseur de spectre, qui permet d'enregistrer l'évolution des spectres de bruit au cours d'un balayage de la longueur de la cavité.

II. MISE EN EVIDENCE DU COUPLAGE NON LINEAIRE.

Les résultats présentés correspondent aux paramètres suivants : $n_{at} = 5.10^{11}$ atomes/cm³; $\Delta = + 5$ GHz ; $\delta = -1$ GHz ; puissances laser incidentes $P_{jaune} = 1$ mW et $P_{infrarouge} = 0.2$ mW ; soit des fréquences de Rabi intra-cavité $\Omega_1 = 160$ et $\Omega_2 = 80$. Ces valeurs des fréquences de Rabi tiennent compte du facteur dû aux résonances des cavités. Ces valeurs conduisent à une valeur des déphasages non-linéaires voisines de celles utilisées dans l'expérience précédente, l'augmentation des fréquences de Rabi étant compensée par celle de Δ .

L'évolution des intensités intra-cavité est représentée sur la figure III.D.2. La légère déformation des courbes est due au couplage par effet Kerr croisé, et sera étudiée plus en détail dans le chapitre suivant. Si on cherche à augmenter le couplage non linéaire, la forme des courbes de résonance devient beaucoup plus compliquée, et il est alors très difficile d'ajuster les déphasages des deux modes par rapport à la cavité. Ces paramètres sont, comme nous l'avons vu précédemment, critiques, à la fois pour préserver la condition QND sur le signal et pour obtenir l'information sur les fluctuations d'intensité du faisceau de mesure réfléchi par la cavité. Ceci explique en particulier la valeur très faible de l'intensité du faisceau infra-rouge. La configuration optimale est celle indiquée par la flèche reliant les deux courbes. Elle correspond à installer le faisceau signal à résonance (ce qui est d'autant plus facile à réaliser que le mode correspondant est large) et à désaccorder le faisceau infra-rouge (condition de résonance BLU).

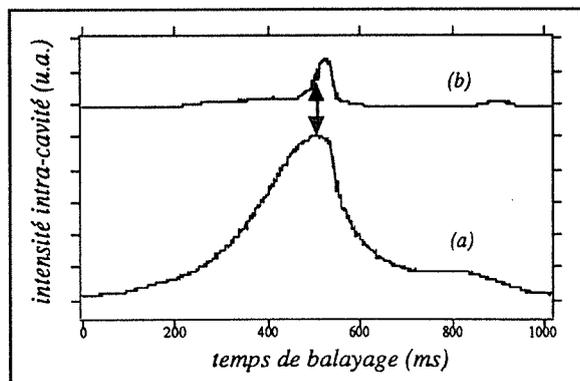


Figure III.D.2 : Evolution des intensités intra-cavité pour le faisceau jaune (a) et pour le faisceau infra-rouge (b), au cours d'un balayage de la longueur de la cavité. Le point optimal pour la mesure QND est désigné par la flèche.

III. RESULTATS EXPERIMENTAUX.

1. Evolution des spectres de bruit.

La figure III.B.3 montre l'évolution du spectre du bruit, pour les fluctuations d'amplitude du faisceau signal à la fréquence de 10 MHz, en fonction du désaccord de la cavité.

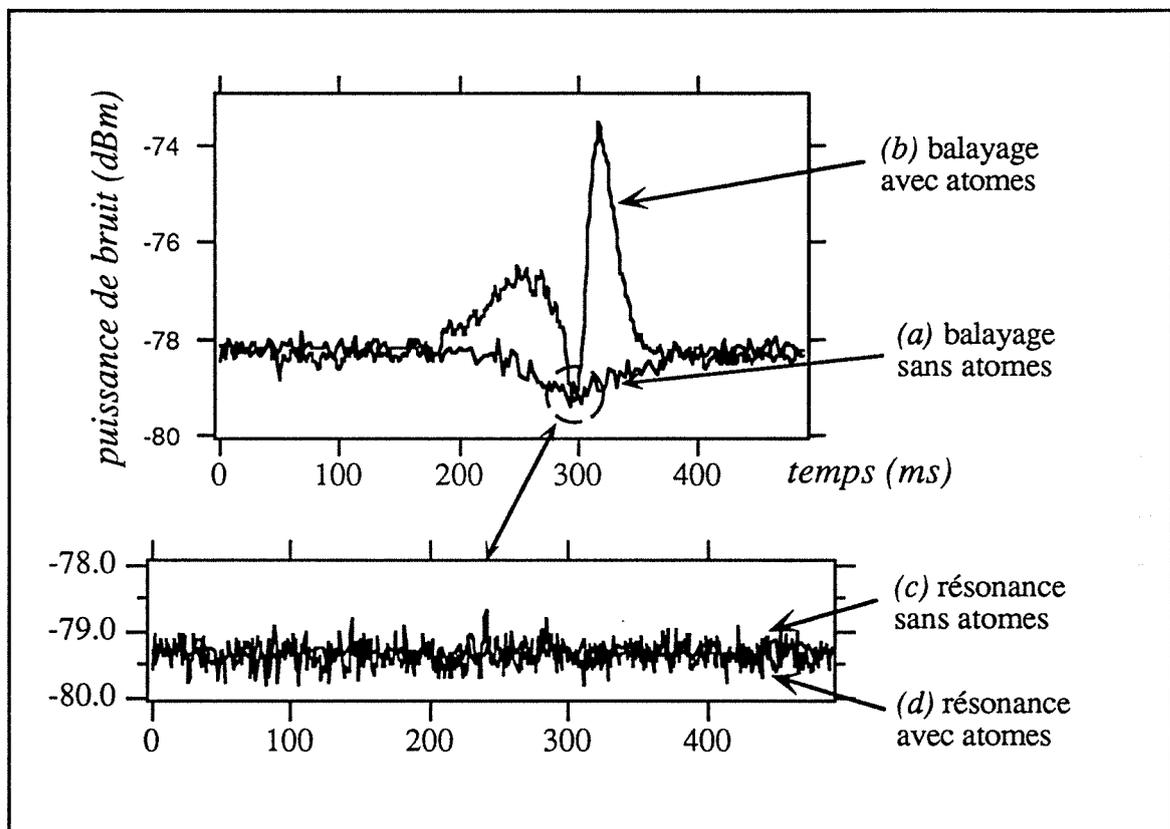


Figure III.D.3 :

Evolution du spectre de bruit à 10 MHz du faisceau signal, réfléchi par la cavité. Les courbes (a) et (b) sont obtenues respectivement pour une cavité vide ou contenant les atomes. Les courbes (c) et (d) correspondent à un agrandissement autour de la résonance : elles montrent que le faisceau signal réfléchi reste bien au bruit de photons (condition QND). La largeur de résolution de l'analyseur de spectre est de 100 kHz.

La courbe (a) est obtenue sans le milieu non-linéaire, et la variation de la puissance de bruit apparaît suite à la diminution de l'intensité réfléchie sur la résonance de la cavité. Le spectre (b) est mesuré en présence du milieu non-linéaire : le bruit sur le faisceau signal réfléchi reste au niveau des fluctuations du vide, lorsqu'il est accordé à résonance (courbes (c) et (d)). Il apparaît par contre un excès de bruit sur les flancs de la courbe de résonance, qu'on peut interpréter comme dû à la présence de collisions dans le jet.

Ces collisions induisent un bruit de phase sur le faisceau signal intracavité qui, lorsque le mode n'est pas à résonance ($\varphi_l \neq 0$) apparaît sur les fluctuations d'intensité du faisceau réfléchi par la cavité. Par contre, lorsque $\varphi_l = 0$, ces fluctuations de phase ne sont pas couplées vers les fluctuations d'intensité et la condition QND peut être préservée.

La figure III.B.4 montre le bruit des photocourants recombinaés, après atténuation de celui correspondant au faisceau de mesure de 12 dB. Il apparaît sur la différence, une nette réduction en-dessous du bruit de photon du signal seul (- 0.6 dB).

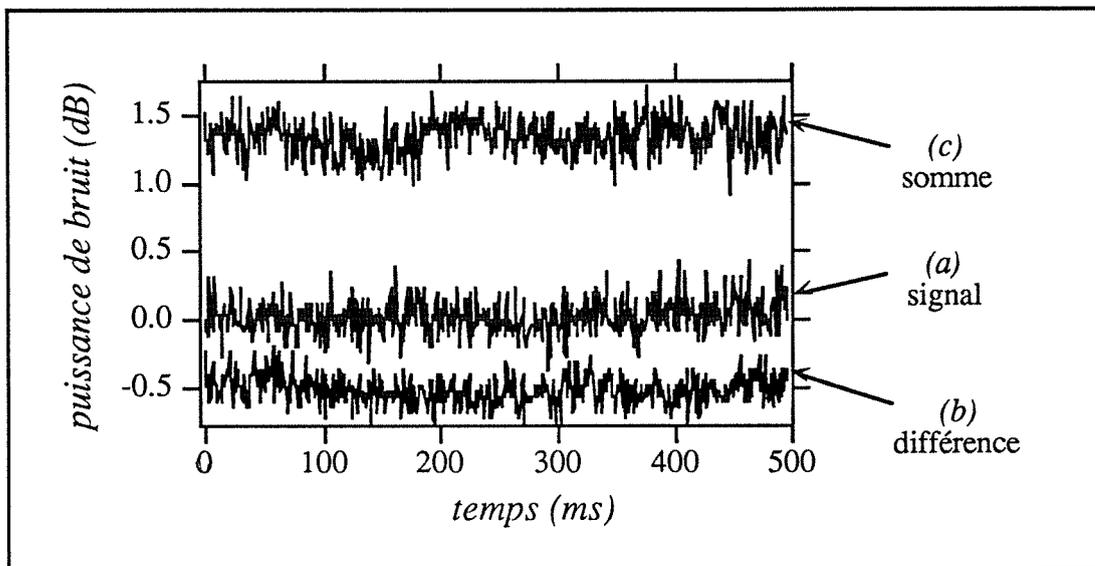


Figure III.D.4 :

Evolution du spectre de bruit à 10 MHz des photocourants recombinaés, avec une atténuation de 12-dB sur la voie de mesure. La largeur de résolution de l'analyseur de spectre est de 100 kHz. Il apparaît sur le spectre de la différence (c) des photocourants une réduction de 0.6-dB, en-dessous du niveau correspondant au faisceau signal seul (a). Les résultats présentés ici sont "bruts", c'est-à-dire reproduits sans corriger du bruit des amplificateurs (ce qui améliorerait les résultats). Cette correction était par contre, nécessaire pour la présentation des résultats précédents !

2. Caractérisation de la mesure.

Ce résultat montre que le dispositif ainsi réalisé permet d'obtenir une préparation d'état quantique, caractérisée par une variance conditionnelle :

$$W_{p_s | p_m}^{\text{out}} = 0.87$$

En fonction des résultats antérieurs, cette valeur est actuellement la meilleure obtenue. Il faut caractériser l'efficacité du dispositif vis-à-vis de son utilisation comme "écouteur discret".

La transmission sur le faisceau signal correspond à $\eta_S = 0.75$, à cause des pertes optiques sur les miroirs. On en déduit ainsi :

$$N_S^{eq} = \frac{1 - \eta_S}{\eta_S} \quad \text{soit} \quad N_S^{eq} = 0.33$$

Le transfert classique mesuré entre le faisceau de mesure en sortie, et le faisceau jaune entrant est de -4 ± 1 dB, soit :

$$|\alpha_{MS}|^2 = 0.4 \pm 0.1$$

Le bruit équivalent sur le faisceau de mesure est donc donné par :

$$N_M^{eq} = \frac{1}{|\alpha_{MS}|^2} \quad \text{soit} \quad N_M^{eq} = 2.5 \pm 0.6$$

La caractérisation du dispositif correspond ainsi à :

$$N_M^{eq} \cdot N_S^{eq} = 0.8 \pm 0.2$$

3. Comparaison avec les autres résultats.

Afin de pouvoir comparer notre dispositif à ceux réalisés précédemment, nous insérons sur le figure I.C.5, les points correspondant aux résultats obtenus pour la cavité à une longueur d'onde, et pour celle à deux longueurs d'onde. Il apparaît ainsi que cette dernière réalisation est la plus performante des quatre, et qu'elle pourrait théoriquement permettre d'obtenir, soit une préparation d'état quantique, soit une écoute discrète d'un faisceau signal.

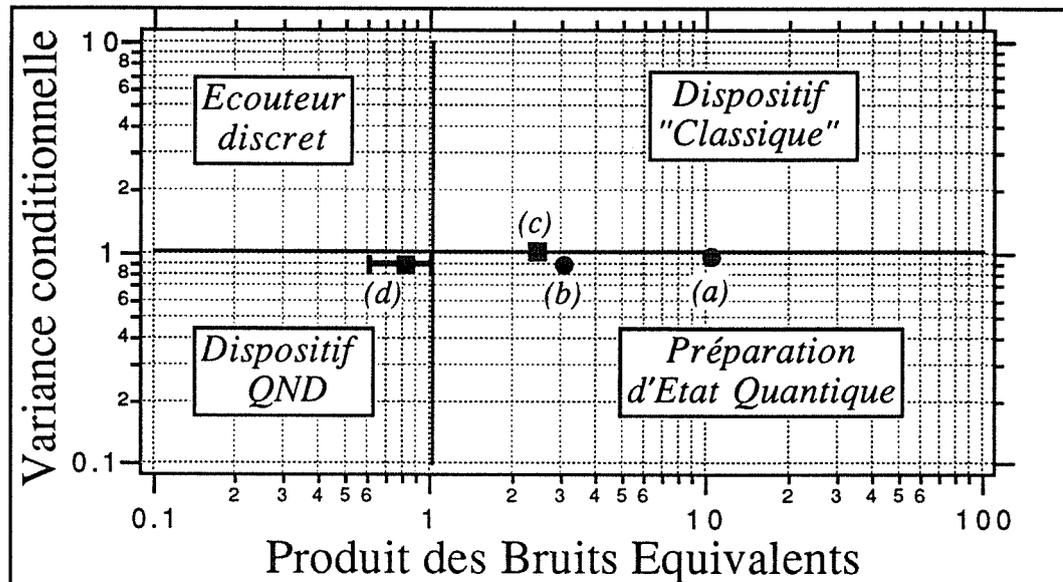


Figure III.D.5 :

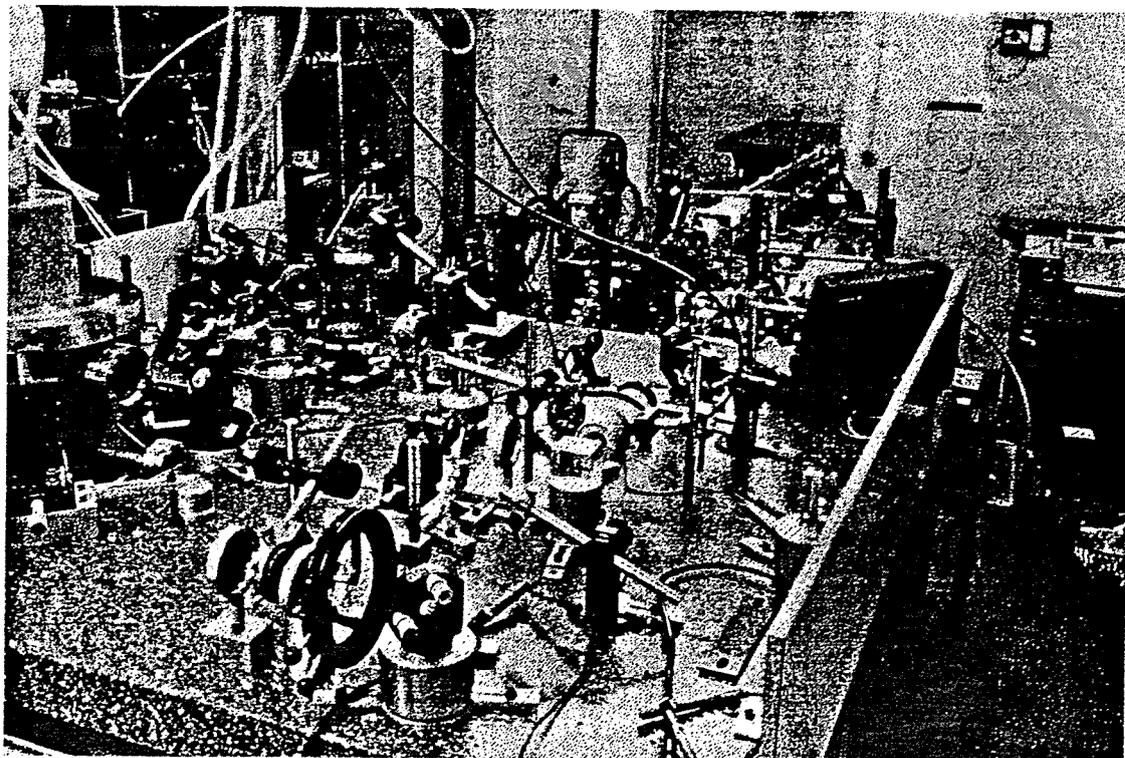
Comparaison des différents résultats. Les points correspondent à l'expérience de Levenson et al. (a), de La Porta et al. (b), ainsi qu'aux deux résultats présentés dans ce mémoire, et obtenus respectivement avec une cavité à une longueur d'onde (c) ou à deux longueurs d'onde (d). Ce dernier dispositif représente donc réellement une mesure QND, restant néanmoins très médiocre. Rappelons que le point de coordonnées {1,1} représente une simple lame semi-transparente.

Néanmoins, les performances obtenues, même si elles correspondent à une réelle mesure QND, restent trop médiocres pour pouvoir conduire à des applications, par exemple dans le domaine des télécommunications. Dans ce dernier domaine, la possibilité de réaliser un écouleur discret avec de bonnes performances, serait évidemment très intéressante en pratique.

Nous allons maintenant étudier plus en détail, le comportement des champs moyens dans ce bistable à deux photons, ainsi que les instabilités qui apparaissent.

CHAPITRE QUATRE

Etude théorique et mise en évidence expérimentale
de la bistabilité à deux photons
en régime non-dégénéré



A. INTRODUCTION

En raison de toutes leurs applications potentielles, les phénomènes de bistabilité optique ont été extensivement étudiés et se sont avérés être d'une très grande richesse [Abraham 82] [Lugiato 84] [Gibbs 85]. Dès les premiers travaux dans ce domaine, le caractère intrinsèquement non-linéaire des interactions à deux photons a semblé être bien adapté pour obtenir des effets de bistabilité [Arrechi 78]. Dans le début des années 80, de nombreux travaux théoriques ont été ainsi publiés, concernant soit le régime d'absorption, soit le régime de dispersion [Agrawal 80] [Grynberg 80] [Agarwal 80] [Hermann 81].

La bistabilité à deux photons a été expérimentalement observée, tout d'abord dans un système atomique (cellule d'atomes de rubidium) [Giacobino 80], puis dans des solides [Peyghambarian 83] [Kar 83]. Toutes ces expériences ont été réalisées dans le régime dégénéré, où la non-linéarité n'agit que sur un des modes du champ électromagnétique. Lorsque deux modes différents (soit temporels, soit spatiaux) sont couplés par le milieu non-linéaire, il apparaît de nombreux phénomènes de multistabilité [Hermann 81] [Hermann 82], qui, à notre connaissance, n'avaient jusqu'à présent, jamais été mis en évidence expérimentalement.

Il est également intéressant d'étudier le comportement dynamique de tels systèmes bistables, utilisant une transition à deux photons. Cette étude a été effectuée dans le cas dégénéré [Galatola 89], en utilisant un modèle à deux niveaux effectifs, et a révélé la présence d'instabilités, correspondant à l'apparition d'oscillations spontanées non-amorties dans l'intensité intra-cavité. Cette instabilité apparaît d'autant plus facilement que le système opère à la limite "mauvaise cavité" (c'est-à-dire lorsque le taux de relaxation de la cavité est beaucoup plus grand que les taux de relaxation atomiques), et appartient à une classe d'instabilités universelle pour les non-linéarités à deux photons [Lugiato 90].

Nous avons montré dans le Chapitre II qu'il est possible d'obtenir en régime dispersif, des déphasages non-linéaires de l'ordre de grandeur des largeurs de cavité. Notre configuration apparaît donc comme très favorable pour étudier la bistabilité à deux photons de couleur différente, en régime dispersif. La partie B correspond à la mise en évidence expérimentale de ce phénomène. Nous montrerons qu'il peut être très bien décrit à l'aide du modèle cubique. Les atomes sont alors complètement éliminés des équations, le couplage non-linéaire entre les deux

champs correspondant uniquement à une interaction par effet Kerr croisé. Nous avons également développé en collaboration avec le Professeur Lugiato et son équipe, un modèle plus complet où la dynamique du couplage entre les champs intra-cavité et les atomes, est décrite par la méthode des Equations de Bloch Optiques [Lugiato 84] [Lugiato 91]. Une résolution numérique de ces équations permet d'obtenir le régime permanent, mais également l'évolution temporelle. Outre le comportement bistable, il apparaît des instabilités, qui n'étaient pas prévues à la limite cubique dispersive. Pour des régimes en-dehors de la zone de validité de cette approximation, la partie C décrit la confrontation entre les résultats expérimentaux et le modèle plus général.

Il est à noter que nos expériences sont réalisées avec de grandes coopérativités (C de l'ordre de 30 000) et des intensités lumineuses faibles, tandis que les régimes jusqu'alors étudiés correspondaient à des coopérativités nettement plus faibles ($C \approx 100$), compensées par des intensités lumineuses très importantes. Les effets sont alors très différents, mais les paramètres choisis dans notre cas présentent l'avantage de correspondre à un modèle simple permettant une compréhension qualitative des phénomènes.

Enfin, dans la partie D, nous montrerons sur un cas très particulier qu'il est possible de prévoir théoriquement des effets sur le bruit quantique des faisceaux, reliés au comportement des champs moyens dans le bistable à deux photons et à l'apparition d'instabilités.

**B. ETUDE DU BISTABLE A DEUX PHOTONS
A LA LIMITE CUBIQUE DISPERSIVE**

I. MODELE THEORIQUE.

1. Intensités intra-cavité.

La cavité est supposée avoir une géométrie en anneau, et être de finesse suffisamment grande pour que l'on puisse supposer que chaque champ soit couplé uniquement à un mode de la cavité. En fonction des transmissions T_1 et T_2 des miroirs de couplage, et des pertes totales P_1 et P_2 (incluant les transmissions de tous les miroirs), les intensités intra-cavité sont :

$$I_1 = \frac{T_1}{\left[\frac{P_1}{2}\right]^2 + \varphi_1^2} I_1^{in} \qquad I_2 = \frac{T_2}{\left[\frac{P_2}{2}\right]^2 + \varphi_2^2} I_2^{in} \qquad (\text{IV.B.1})$$

où φ_1 et φ_2 représentent les déphasages sur un tour de la cavité. En supposant que l'interaction par effet Kerr croisé est la non-linéarité prépondérante, et en incluant le déphasage linéaire produit sur le faisceau jaune par la transition du bas dans le déphasage φ_1^0 de la cavité vide, ceux-ci sont alors donnés par :

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 + fI_2 \qquad \varphi_2 = \varphi_2^0 + fI_1 \qquad (\text{IV.B.2})$$

soit, pour les intensités intra-cavité :

$$\frac{I_1}{P_2/2} \left[1 + \left(\frac{\varphi_1^0}{P_1/2} + \frac{fI_2}{P_1/2} \right)^2 \right] = 2 \frac{T_1/2}{(P_2/2)(P_1/2)^2} I_1^{in} \qquad (\text{IV.B.3a})$$

$$\frac{I_2}{P_1/2} \left[1 + \left(\frac{\varphi_2^0}{P_2/2} + \frac{fI_1}{P_2/2} \right)^2 \right] = 2 \frac{T_2/2}{(P_1/2)(P_2/2)^2} I_2^{in} \qquad (\text{IV.B.3b})$$

Il est commode de définir des paramètres réduits :

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1^0}{(P_1/2)} \quad \mathcal{I}_1 = \frac{fI_1}{(P_2/2)} \quad \mathcal{I}_1^{in} = 2 \cdot \frac{T_1/2}{(P_2/2)(P_1/2)^2} fI_1^{in} \quad (\text{IV.B.4a})$$

$$\theta_2 = \frac{\varphi_2^0}{(P_2/2)} \quad \mathcal{I}_2 = \frac{fI_2}{(P_1/2)} \quad \mathcal{I}_2^{in} = 2 \cdot \frac{T_2/2}{(P_1/2)(P_2/2)^2} fI_2^{in} \quad (\text{IV.B.4b})$$

Ces équations se réécrivent alors simplement :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1 [1 + (\theta_1 + \mathcal{I}_2)^2] = \mathcal{I}_1^{in} \\ \mathcal{I}_2 [1 + (\theta_2 + \mathcal{I}_1)^2] = \mathcal{I}_2^{in} \end{cases} \quad (\text{IV.B.5})$$

De façon générale, pour chaque ensemble de paramètres $\{\theta_1, \theta_2, \mathcal{I}_1^{in}, \mathcal{I}_2^{in}\}$, les intensités \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 sont données par une équation du cinquième degré, et il peut donc y avoir a priori cinq couples de solutions. Il est commode de représenter les évolutions croisées $\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_1)$ et $\mathcal{I}_1(\mathcal{I}_2)$ dans le plan $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}$. Les solutions ont alors une interprétation géométrique évidente (figure IV.B.1).

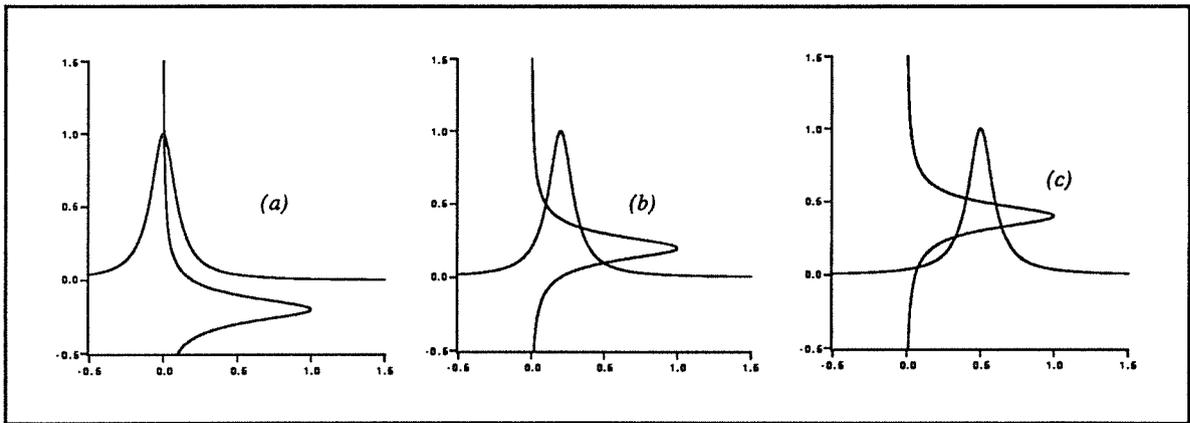


FIGURE IV.B.1 :

Représentation graphique des solutions pour les intensités moyennes du bistable à deux photons, à la limite cubique dispersive. Tant que les deux champs ne résonnent pas simultanément dans la cavité (a), il n'y a pas de phénomène de bistabilité, et les deux modes résonnent indépendamment l'un de l'autre. Lorsque les deux déphasages sont à peu près égaux, il apparaît plusieurs couples de solutions. La courbe (b) correspond à une forme habituelle de bistabilité : pour chaque mode, deux des points d'intersection sont stables et correspondent aux branches haute et basse du bistable. La courbe (c) est quant-à-elle plus particulière : nous montrerons que deux des cinq points sont en fait sur des cycles fermés qu'il n'est pas possible d'atteindre.

Remarque : dans toute la suite, nous supposons $f > 0$, la généralisation à $f < 0$ étant immédiate.

2. Etude de la stabilité des champs moyens.

A l'aide d'une analyse linéaire de stabilité autour du point de fonctionnement, nous donnerons la condition générale de stabilité pour une cavité supposée idéale (pour laquelle les pertes proviennent uniquement du miroir de couplage). Cette condition alors peut s'interpréter simplement, et nous la généraliserons ensuite au cas d'une cavité quelconque.

a) Condition de stabilité.

Après un tour dans la cavité, les champs s'écrivent :

$$E'_1 = t_1 E_1^{in} + r_1 e^{-i\varphi_1} E_1 \quad (\text{IV.B.6a})$$

$$E'_2 = t_2 E_2^{in} + r_2 e^{-i\varphi_2} E_2 \quad (\text{IV.B.6b})$$

En supposant petites les modifications sur un tour (ce qui correspond à des finesses \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 grandes), on peut écrire :

$$E'_1 = E_1 + \tau \dot{E}_1 \quad (\text{IV.B.7a})$$

$$E'_2 = E_2 + \tau \dot{E}_2 \quad (\text{IV.B.7b})$$

où τ correspond au temps de parcours dans la cavité. A la limite bonne cavité ($r_j \approx 1 - T_j/2$ pour $j = 1, 2$), les champs évoluent suivant :

$$\tau \dot{E}_1 = t_1 E_1^{in} - \left(\frac{T_1}{2} + i \varphi_1 \right) E_1 \quad (\text{IV.B.8a})$$

$$\tau \dot{E}_2 = t_2 E_2^{in} - \left(\frac{T_2}{2} + i \varphi_2 \right) E_2 \quad (\text{IV.B.8b})$$

soit pour les fluctuations classiques δE_j autour du champ moyen \bar{E}_j :

$$\tau \delta \dot{E}_1 = - \left(\frac{T_1}{2} + i \varphi_1 \right) \delta E_1 + i \bar{E}_1 \delta \varphi_1 \quad (\text{IV.B.9a})$$

$$\tau \delta \dot{E}_2 = - \left(\frac{T_2}{2} + i \varphi_2 \right) \delta E_2 + i \bar{E}_2 \delta \varphi_2 \quad (\text{IV.B.9b})$$

En choisissant l'origine des phases telles que les deux champs intra-cavité soient réels, les fluctuations de phase pour un des champs sont alors proportionnelles aux fluctuations d'amplitude de l'autre champ :

$$\delta\varphi_1 = f \bar{E}_2 p_2 \quad (\text{IV.B.10a})$$

$$\delta\varphi_2 = f \bar{E}_1 p_1 \quad (\text{IV.B.10b})$$

L'évolution des fluctuations de phase et d'amplitude des champs intra-cavité est donc donnée par une matrice d'évolution \mathcal{M} :

$$\tau \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1/2 & -\varphi_1 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & -T_1/2 & 2f \bar{E}_1 \bar{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & -T_2/2 & -\varphi_2 \\ 2f \bar{E}_1 \bar{E}_2 & 0 & \varphi_2 & -T_2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.B.11})$$

Le polynôme caractéristique de \mathcal{M} est donné par :

$$P(\lambda) = \left[\left(\frac{T_1}{2} + \lambda \right)^2 + \varphi_1^2 \right] \left[\left(\frac{T_2}{2} + \lambda \right)^2 + \varphi_2^2 \right] - 4f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 \quad (\text{IV.B.12})$$

soit :

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 \quad (\text{IV.B.13})$$

$$a_0 = 1 \quad (\text{IV.B.14.a})$$

$$a_1 = T_1 + T_2 \quad (\text{IV.B.14.b})$$

$$a_2 = \left(\frac{T_1}{2} \right)^2 + \varphi_1^2 + \left(\frac{T_2}{2} \right)^2 + \varphi_2^2 + T_1 T_2 \quad (\text{IV.B.14.c})$$

$$a_3 = T_2 \left[\left(\frac{T_1}{2} \right)^2 + \varphi_1^2 \right] + T_1 \left[\left(\frac{T_2}{2} \right)^2 + \varphi_2^2 \right] \quad (\text{IV.B.14.d})$$

$$a_4 = \left[\left(\frac{T_1}{2} \right)^2 + \varphi_1^2 \right] \left[\left(\frac{T_2}{2} \right)^2 + \varphi_2^2 \right] - 4f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 \quad (\text{IV.B.14.e})$$

Le point de fonctionnement du système est stable si les quatre valeurs propres de \mathcal{M} ont une partie réelle négative. A l'aide du critère de Routh-Hurwitz, il est possible d'obtenir la condition de stabilité à partir des coefficients du polynôme caractéristique :

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_1 \end{vmatrix} > 0 \quad a_4 > 0. \quad (\text{IV.B.15})$$

Un calcul algébrique conduit ainsi à la double condition :

$$4f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 < \left[\left(\frac{T_1}{2} \right)^2 + \varphi_1^2 \right] \left[\left(\frac{T_2}{2} \right)^2 + \varphi_2^2 \right] \quad (\text{IV.B.16.a})$$

$$-4f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 < T_1 T_2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} \right)^2 + \frac{(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}{(T_1 + T_2)^2} + \frac{1}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right] \quad (\text{IV.B.16.b})$$

Remarque : Cette double inégalité est en particulier toujours vérifiée, lorsque la cavité est à résonance pour un des modes (par exemple, $\varphi_1=0$), ceci quel que soit le déphasage φ_2 de la cavité pour l'autre mode. Comme nous l'avons vu au Chapitre III, un tel point de fonctionnement (dont la stabilité est maintenant démontrée rigoureusement par cette expression), conduit à une mesure QND des fluctuations d'intensité du mode à résonance.

Il est également possible d'identifier les domaines de stabilité, en exprimant le fait qu'une des valeurs propres voit sa partie réelle devenir nulle sur la frontière de stabilité [Lugiato 91]. Le vecteur propre correspondant $\lambda = i\nu$ est alors défini par :

$$\begin{cases} \left[\varphi_1^2 + \left(\frac{T_1}{2} + i\nu \right)^2 \right] p_1 + 2\kappa \varphi_1 p_2 = 0 \\ 2\kappa \varphi_2 p_1 + \left[\varphi_2^2 + \left(\frac{T_2}{2} + i\nu \right)^2 \right] p_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.B.17})$$

Ce système admet une solution non-triviale si :

$$\left[\left(\varphi_1^2 + \frac{T_1^2}{4} - \nu^2 \right) + i T_1 \nu \right] \left[\left(\varphi_2^2 + \frac{T_2^2}{4} - \nu^2 \right) + i T_2 \nu \right] = 4 f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 \quad (\text{IV.B.18})$$

qui se décompose en partie réelle et partie imaginaire :

$$2iv \left[\frac{T_1}{T_1 + T_2} \varphi_2^2 + \frac{T_2}{T_1 + T_2} \varphi_1^2 + \frac{T_1 T_2}{4} - v^2 \right] = 0 \quad (\text{IV.B.19.a})$$

$$\left[\varphi_1^2 + \frac{T_1^2}{4} - v^2 \right] \left[\varphi_2^2 + \frac{T_2^2}{4} - v^2 \right] - T_1 T_2 v^2 = 4 f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 \quad (\text{IV.B.19.b})$$

D'après (IV.B.19.a), une première frontière est donnée par :

$$v = 0 \quad (\text{IV.B.20})$$

correspondant, dans l'espace $\{\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2\}$ définissant l'état du système, à l'hypersurface définie par l'équation :

$$4f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 = \left[\left(\frac{T_1}{2} \right)^2 + \varphi_1^2 \right] \left[\left(\frac{T_2}{2} \right)^2 + \varphi_2^2 \right] \quad (\text{IV.B.21})$$

Cette condition correspond à l'inégalité IV.B.16.a, et peut être vérifiée lorsque φ_1 et φ_2 ont tous deux le même signe. Le système subit alors une discontinuité, correspondant soit à un saut vers une autre branche de stabilité, soit à l'apparition d'une bifurcation. Ces deux points seront illustrés au § IV.D, sur le cas particulier où toutes les grandeurs entrantes sont supposées symétriques.

Il apparaît également une deuxième frontière, définie par :

$$v = \pm v_i \quad \text{avec} \quad v_i^2 = \frac{T_1 T_2}{4} + \frac{T_1 \varphi_2^2 + T_2 \varphi_1^2}{T_1 + T_2} \quad (\text{IV.B.22})$$

En reportant dans (IV.B.19.b), l'hypersurface correspondante a pour équation :

$$- 4f^2 I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2 = T_1 T_2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} \right)^2 + \frac{(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2}{(T_1 + T_2)^2} + \frac{1}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right] \quad (\text{IV.B.23})$$

qui correspond à l'inégalité IV.B.16.b. Contrairement à l'instabilité précédente, cette condition ne peut être vérifiée que si φ_1 et φ_2 ont des signes contraires, en étant de l'ordre de grandeur de la largeur des deux modes. Il apparaît alors sur les champs moyens des oscillations temporelles non-amorties, à la fréquence v_i , qui est de l'ordre de grandeur de la largeur des deux modes.

b) *Interprétation graphique de la condition de stabilité (IV.B.16.a).*

Ce point est défini par l'intersection des courbes $I_2 = f_1(I_1)$ et $I_1 = f_2(I_2)$, et une condition nécessaire de stabilité sera :

$$\left. \frac{dI_2}{dI_1} \right|_{I_2=f_1(I_1)} \cdot \left. \frac{dI_1}{dI_2} \right|_{I_1=f_2(I_2)} < 1. \tag{IV.B.24}$$

qui exprime le fait qu'une perturbation initiale d'une des deux intensités doit, après couplage dans le bistable revenir désamplifiée (Figure IV.B.2). En fonction des expressions (IV.B.1) pour les champs moyens du bistable, cette condition s'écrit :

$$(2f_1 I_1 I_2) \frac{\varphi_1}{\left(\frac{T_1^2}{2}\right)^2 + \varphi_1^2} \cdot (2f_2 I_1 I_2) \frac{\varphi_2}{\left(\frac{T_2^2}{2}\right)^2 + \varphi_2^2} < 1 \tag{IV.B.25}$$

ce qui redonne bien la condition (IV.B.16.a). Elle peut immédiatement être généralisée à une cavité avec des pertes, ainsi que pour des cavités idéales mais de finesse quelconque :

$$4 r_1 r_2 f_1^2 I_1 I_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 < (1 + r_1^2 - 2 r_1 \cos \varphi_1) (1 + r_2^2 - 2 r_2 \cos \varphi_2) \tag{IV.B.26}$$

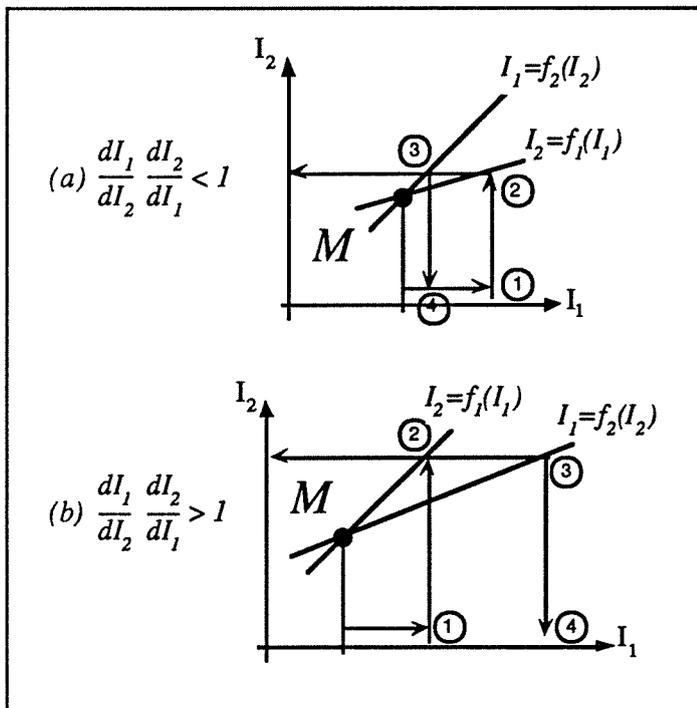


FIGURE IV.B.2 :

Analyse linéaire de stabilité au voisinage d'un point de fonctionnement M . Dans le cas (a), la perturbation initiale en (I_1) introduite sur le faisceau 1, revient, après couplage avec le faisceau 2, désamplifiée en (4). Dans le cas (b), il y a par contre amplification de la perturbation et le point M est instable.

II. RESULTATS EXPERIMENTAUX.

1. Mise en évidence de l'effet de bistabilité à deux photons.

Le montage expérimental reprend celui mis en place pour l'étude de la mesure QND (figure III.D.1). Rappelons que les paramètres de la cavité correspondent à des largeurs des courbes de résonance d'environ 15 MHz FWHM dans les deux modes. Les pertes totales sont $P_1 = P_2 = 0.03$, à comparer aux transmissions $T_1 = T_2 = 0.025$ des miroirs d'entrée-sortie.

Les effets de bistabilité sont observés en balayant la longueur de la cavité à l'aide d'une cale piézo-électrique, ce qui correspond à faire varier les paramètres θ_1 et θ_2 en gardant \mathcal{T}_1^{in} et \mathcal{T}_2^{in} constants. Les deux résonances intra-cavité sont observées à travers les très faibles pertes du miroir réfléchissant pour le mode analysé.

Des résultats typiques sont reproduits sur la figure IV.B.3. Les courbes (a) montrent les résonances séparées des deux faisceaux, la différence apparente de largeur étant due à leur différence de longueur d'onde. Près de la résonance à un photon entre les niveaux $3s\ 1/2$ et $3p\ 3/2$, la courbe de transmission du faisceau à $\lambda_1 = 589.0$ nm peut être très déformée (apparition de bistabilité à un photon). Lorsqu'on augmente le désaccord Δ , cet effet disparaît. Dû au phénomène de dispersion linéaire, la courbe de résonance est alors simplement translatée, par rapport à sa position lorsqu'il n'y a pas couplage avec les atomes. Les courbes (b) et (c) sont obtenues lorsque les deux faisceaux peuvent résonner simultanément dans la cavité : les effets de bistabilité sont de façon évidente mélangés à une déformation des résonances des courbes de Fabry-Pérot, provenant de façon caractéristique du phénomène de dispersion croisée entre les deux faisceaux.

Comme nous le verrons, les courbes obtenues dépendent de façon sensible des puissances relatives et des positions respectives des résonances, pour chaque mode.

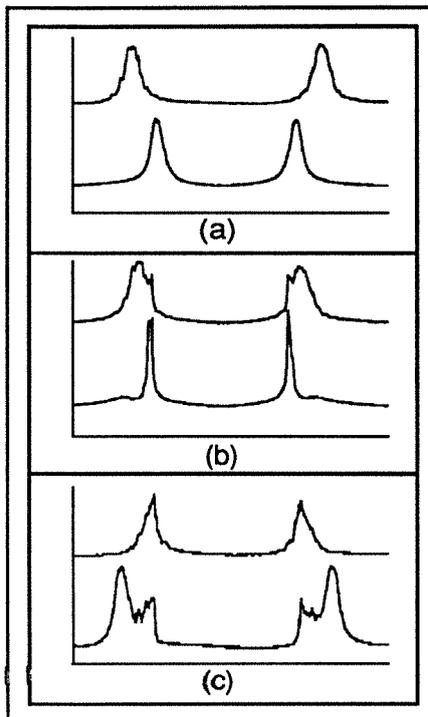


FIGURE IV.B.3 :

Résultats expérimentaux typiques. Les courbes correspondent aux résonances des deux modes (en bas, faisceau à 589.0 nm et en haut, faisceau à 819.5 nm), pour un aller-retour du balayage de la cavité. Lorsque les deux faisceaux peuvent simultanément résonner dans la cavité, il apparaît des phénomènes de bistabilité, dus au couplage dans la transition à deux photons.

2. Comparaison avec le modèle cubique dispersif.

a) Evolution prévue théoriquement.

Les valeurs expérimentales des paramètres correspondant à l'expérience précédente sont : $n_{at} = 10^{12}$ atomes/cm³, soit : $\alpha_0 \ell = 960$; $\Delta = -12$ GHz, soit : $-2\,400 \Gamma_{rg}/2$; $\delta = -2$ GHz, soit : $-400 \Gamma_{rg}/2$; $P_{jaune} = 0.5$ mW ; $P_{infra-rouge} = 0.5$ mW. A la limite cubique dispersive, les déphasages non-linéaires peuvent se mettre sous la forme :

$$\varphi_1^{nl} (2\text{photons}) = f \cdot P_2(\text{en mW}) \quad \varphi_2^{nl} (2\text{photons}) = f \cdot P_1(\text{en mW}) \quad (\text{IV.B.27a})$$

où le terme de couplage est donné par les équations (II.C.27a,b), tenant compte de tous les différents fins participant au couplage entre les deux faisceaux, polarisés circulairement, soit :

$$f = \frac{3}{5} \cdot \alpha_0 \ell \cdot \frac{I_{ref}^{norm}}{\Delta^2 \delta} \quad (\text{IV.B.27b})$$

Le paramètre I_{ref}^{norm} correspond à une intensité de référence, prise égale à une puissance incidente de 1 mW, focalisée sur le waist de la cavité (soit $1.6 \cdot 10^{-4}$ cm²), et normalisée par rapport à l'intensité de saturation de la transition (soit 6 mW/cm²). On en déduit ainsi :

$$f = 4.5 \cdot 10^{-4}$$

En fonction des paramètres de la cavité (transmission des miroirs et pertes de la cavité), les valeurs des paramètres réduits caractérisant l'importance de la non-linéarité (IV.B.4) valent :

$$\mathcal{G}_1^{in} = 1.67 \qquad \mathcal{G}_2^{in} = 1.67$$

La figure IV.B.4. indique la solution numérique des équations couplées (IV.B.5), donnant l'évolution en régime permanent des intensités intra-cavité au cours d'un balayage de la longueur de la cavité, pour les paramètres calculés ci-dessus de façon à reproduire les conditions expérimentales, le calcul numérique est effectué en faisant varier les paramètres θ_1 et θ_2 , représentant les désaccords des modes par rapport à la résonance de la cavité, à partir de θ_1^o et selon θ_2^o , et $\theta_1 = \theta_1^o + \delta\theta$, $\theta_2 = \theta_2^o + (\lambda_2/\lambda_1)\delta\theta$. Le facteur (λ_2/λ_1) est introduit de façon à tenir compte du fait que, pour une même variation de la longueur de la cavité, les variations de θ_1 et θ_2 sont dans le rapport (λ_2/λ_1) . Les courbes correspondent à différentes positions initiales θ_{01} et θ_{02} des résonances pour chaque mode.

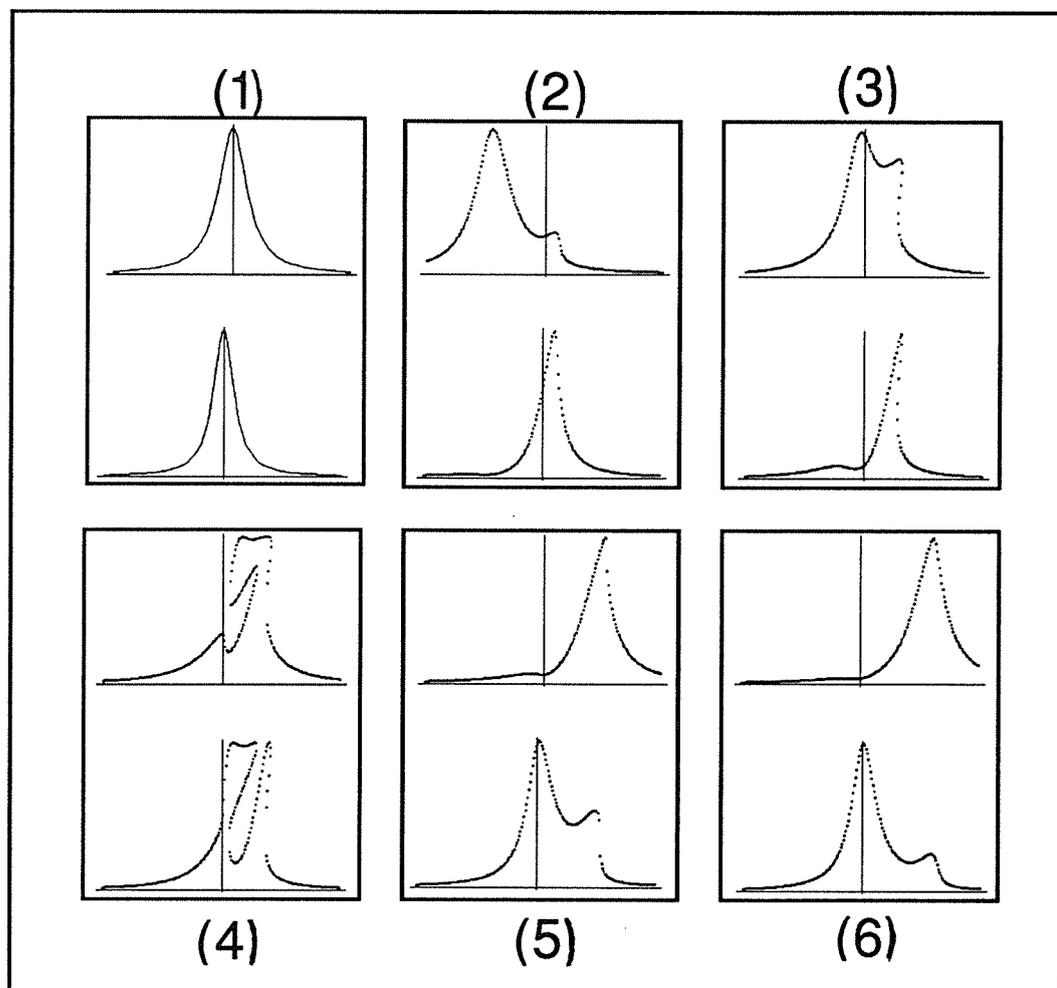


Figure IV.B.4 : Résultats du modèle cubique dispersif, pour les paramètres de l'expérience. Les différentes courbes sont obtenues en faisant varier le désaccord relatif entre les deux résonances.

L'effet du déphasage non-linéaire apparaît ainsi très nettement : lorsqu'un des faisceaux entre dans la cavité, son intensité augmente et produit un déphasage pour l'autre faisceau dont la courbe de résonance est déplacée. Pour $\theta_{02} < \theta_{01}$ (courbes (1), (2) et (3)), le faisceau IR éjecte le faisceau jaune tandis que pour $\theta_{02} > \theta_{01}$ (courbes (5) et (6)), l'effet inverse est observé. Pour des intensités lumineuses des faisceaux égales la transition a lieu autour de $\theta_{01} = \theta_{02}$ (courbes (4)).

b) Résultats expérimentaux.

La figure IV.B.5 montre la comparaison théorie-expérience, obtenue en ajustant le désaccord relatif entre les deux résonances. L'accord est tout à fait correct.

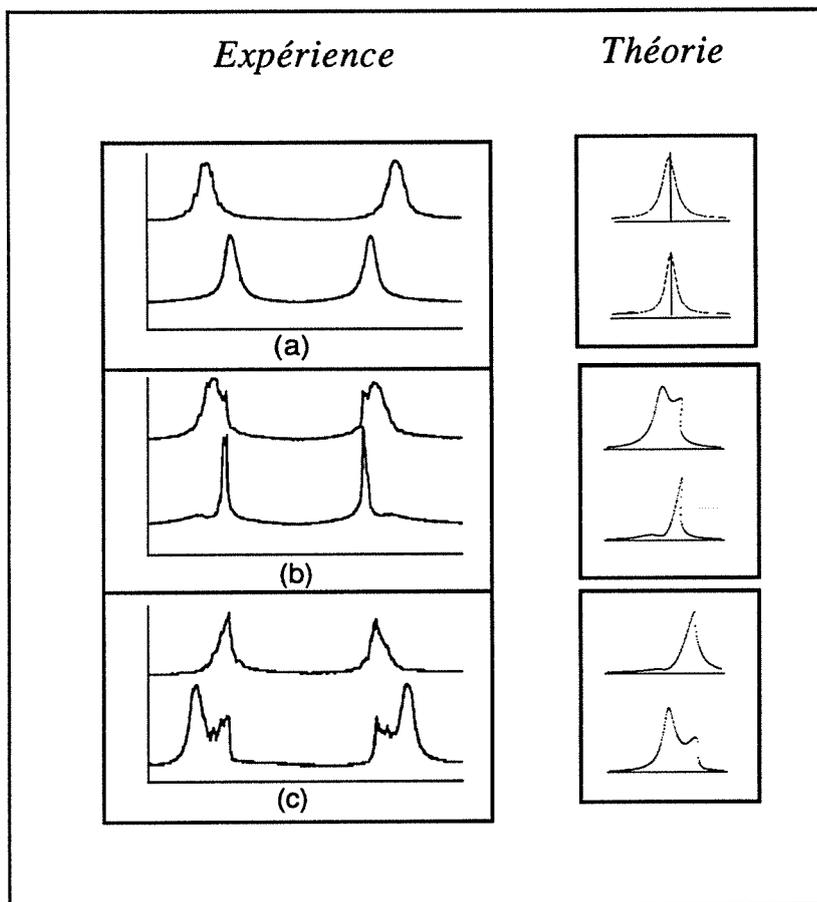


Figure IV.B.5 :
Comparaison des résultats avec
les résultats théoriques obtenus
à l'aide de la limite cubique
dispersive.

La figure IV.B.6 montre l'évolution théorique des courbes de résonances, autour de la zone de transition en $\theta_{02} = \theta_{01}$. Si on augmente l'intensité d'un des faisceaux (par exemple P_2 en gardant P_1 constant), le faisceau le plus intense tend à rester plus longtemps à résonance, et la zone de transition apparaît maintenant pour $\theta_{02} > \theta_{01}$.

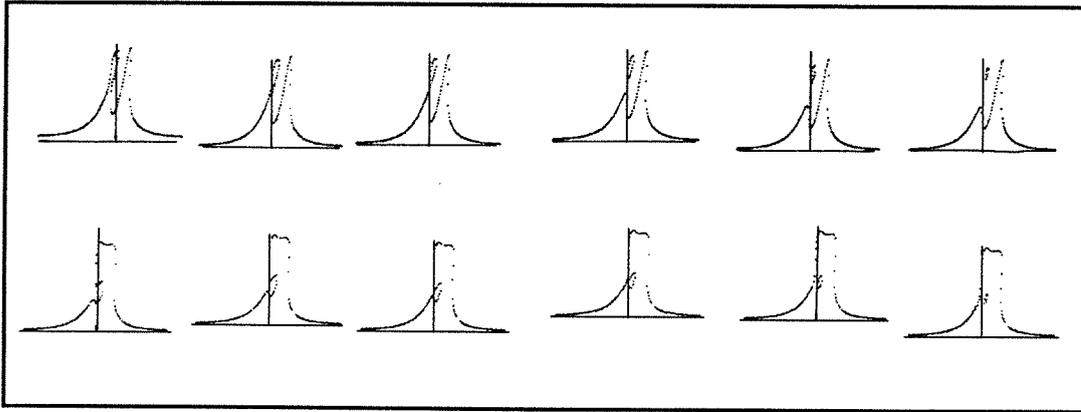


Figure IV.B.6 :

Evolution des courbes de résonance autour de la zone de transition, définie précédemment.

Si on augmente l'intensité IR, ($P_2 = 1 \text{ mW}$, pour les mêmes autres paramètres), les traces deviennent beaucoup plus irrégulières et les résultats expérimentaux ne peuvent visiblement plus être décrits par le simple modèle cubique (figure IV.B.7). Nous retrouvons un des résultats obtenus au Chapitre II : lorsqu'on dissymétrise les intensités laser, (et en particulier pour de fortes intensités sur la transition du haut), les effets non-linéaires s'éloignent de la non-linéarité cubique idéale.

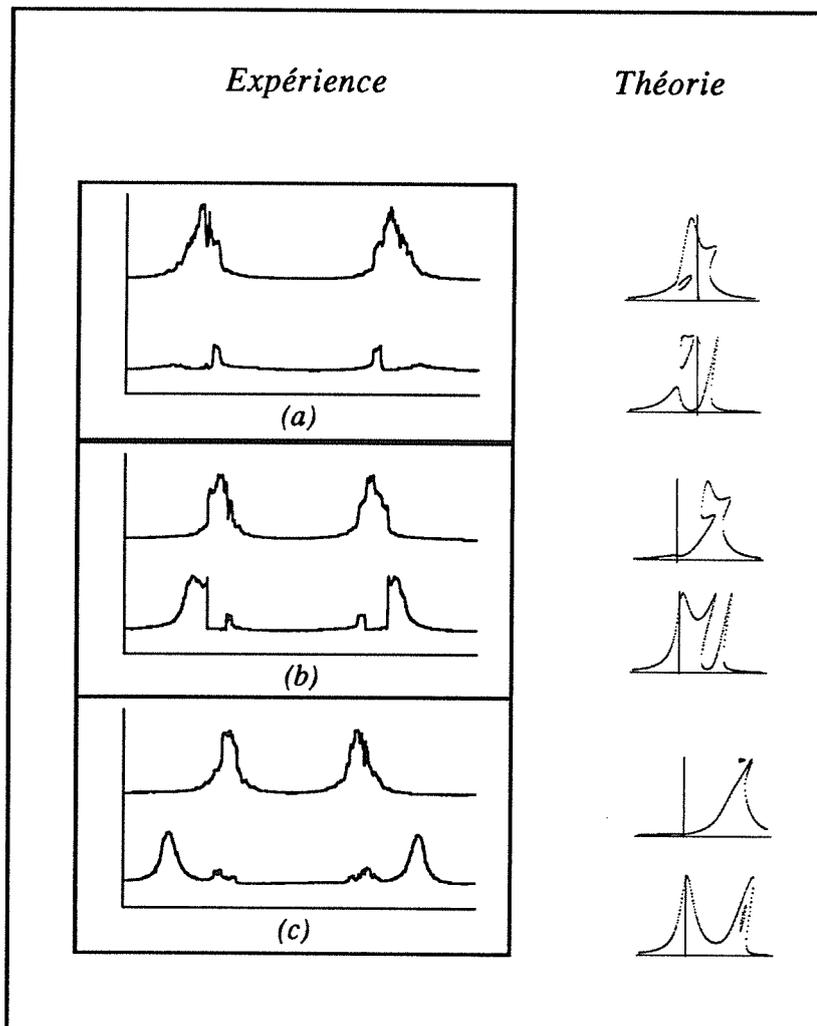


Figure IV.B.7 :

Comparaison des résultats expérimentaux avec les prévisions du modèle cubique dispersif, pour une intensité infra-rouge de 1 mW, les autres paramètres ayant les mêmes valeurs que précédemment.

**C. ETUDE DU BISTABLE A DEUX PHOTONS
EN DEHORS DE LA LIMITE CUBIQUE DISPERSIVE.**

Parallèlement à l'étude précédente, un modèle plus complet de la bistabilité à deux photons a été développé par le groupe du Pr. Lugiato à Milan [*L.A. Lugiato, E.M. Pessina, G. Scandroglio et P. Galatola*]. La dynamique couplée des champs intra-cavité et des atomes est décrite semi-classiquement à l'aide des E.B.O., pour un système fermé à trois niveaux.

I. EQUATIONS THEORIQUES.

1. Notations.

Nous incluons dans le modèle la présence de collisions déphasantes, pouvant affecter les cohérences mais non les populations. Les populations sur les niveaux r et e ont donc des taux des désexcitation donnés respectivement par :

$$\gamma_{||m} = \Gamma_{rg} \quad \gamma_{||n} = \Gamma_{er} \quad \eta = \frac{\Gamma_{er}}{\Gamma_{rg}} \quad (\text{IV.C.1})$$

tandis que les cohérences σ_{rg} , σ_{er} et σ_{eg} s'amortissent avec les taux de décroissance :

$$\gamma_{\perp v} = \frac{\Gamma_{rg}}{2} + \eta_1 + \eta_2 \quad \gamma_{\perp w} = \frac{\Gamma_{rg}}{2} + \frac{\Gamma_{er}}{2} + \eta_2 + \eta_3 \quad \gamma_{\perp z} = \frac{\Gamma_{er}}{2} + \eta_1 + \eta_3 \quad (\text{IV.C.2})$$

les termes η_1 , η_2 et η_3 représentant l'effet des collisions élastiques.

Nous notons ω_l (resp. ω_2) la fréquence de transition de Bohr, et nous désignons par $\omega_0^{(1)}$ (resp. $\omega_0^{(2)}$) la fréquence des champs, voisine de la résonance de la transition entre g et r (resp. r et e). Les désaccords sont donc donnés par :

$$\Delta = \omega_l - \omega_0^{(1)} \quad \tilde{\Delta} = \Delta / \gamma_{\perp v} \quad (\text{IV.C.3.a})$$

$$\delta = \omega_l + \omega_2 - (\omega_0^{(1)} + \omega_0^{(2)}) \quad \tilde{\delta} = \delta / \gamma_{\perp v} \quad (\text{IV.C.3.b})$$

Nous supposons que les fréquences incidentes sont voisines de la résonance avec deux modes de la cavité, correspondant aux fréquences $\omega_c^{(1)}$ et $\omega_c^{(2)}$. Les désaccords par rapport à ces résonances sont ainsi déterminés par :

$$\theta_i = \frac{\omega_c^{(i)} - \omega_o^{(i)}}{k_i} \quad i = 1, 2 \quad (\text{IV.C.4})$$

où k_i ($i = 1, 2$) correspond aux pertes totales dans la cavité, soit :

$$k_i = \frac{c}{2} \frac{P_i}{\mathcal{L}} \quad i = 1, 2 \quad (\text{IV.C.5})$$

\mathcal{L} est la longueur totale de la cavité. Le facteur 2 correspond au fait que pour la cavité étudiée, chaque miroir est totalement réfléchissant pour un des deux modes. Pour simplifier l'étude, nous négligerons les effets dus à l'existence d'ondes stationnaires à l'intérieur de la cavité, et le système sera ainsi approximé par une cavité en anneau dont la longueur est le double de celle pour la cavité linéaire utilisée expérimentalement.

2. Paramètres normalisés.

En fonction des amplitudes complexes \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 des champs intracavité (eq. II.B.2), nous introduisons les paramètres normalisés :

a) Amplitudes des champs intra-cavité

$$x_1 = \frac{2 \mu_{rg} \mathcal{E}_1}{\hbar (\gamma_{\perp v} \gamma_{\parallel m})^{1/2}} \quad x_2 = \frac{2 \mu_{er} \mathcal{E}_2}{\hbar (\gamma_{\perp v} \gamma_{\parallel m})^{1/2}} \quad (\text{IV.C.6})$$

où μ_{rg} et μ_{er} correspondent aux moments dipolaires des transitions, compte-tenu de la polarisation des champs.

b) Variables pour les champs entrants.

$$y_1 = \frac{4\sqrt{I_1}}{P_1} \frac{\mu_{rg} \mathcal{E}_1^{in}}{\hbar (\gamma_{\perp v} \gamma_{\parallel m})^{1/2}} \quad y_2 = \frac{4\sqrt{I_2}}{P_2} \frac{\mu_{er} \mathcal{E}_2^{in}}{\hbar (\gamma_{\perp v} \gamma_{\parallel m})^{1/2}} \quad (\text{IV.C.7})$$

c) *Polarisations atomiques.*

$$v = -\frac{2}{N} \left(\frac{\gamma_{\perp v}}{\gamma_{//m}} \right)^{1/2} \langle \sigma_{rg} \rangle \quad w = -\frac{2}{N} \left(\frac{\gamma_{\perp v}}{\gamma_{//m}} \right)^{1/2} \langle \sigma_{er} \rangle \quad z = -\frac{1}{N} \langle \sigma_{er} \rangle \quad (\text{IV.C.8})$$

d) *Inversions de population.*

$$m = \frac{2}{N} (\langle \sigma_{ee} \rangle - \langle \sigma_{rr} \rangle) \quad n = \frac{2}{N} (\langle \sigma_{rr} \rangle - \langle \sigma_{gg} \rangle) \quad (\text{IV.C.9})$$

3. Equations d'évolution semi-classiques.

En fonction de la longueur ℓ du milieu non-linéaire (incluant le double passage à travers le jet atomique), le couplage entre les atomes et la cavité apparaît par l'intermédiaire de deux paramètres de coopérativité, définis selon les relations :

$$C_1 = \frac{\alpha_o \ell}{P_1} \quad C_2 = \left(\frac{\mu_{er}}{\mu_{rg}} \right)^2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\alpha_o \ell}{P_2} \quad (\text{IV.C.10})$$

Les équations d'évolution s'écrivent alors :

$$\dot{x}_1 = k_1 [- (1 + i \theta_1) x_1 + y_1 - 2C_1 v] \quad (\text{IV.C.11a})$$

$$\dot{x}_2 = k_2 [- (1 + i \theta_2) x_2 + y_2 - 2C_2 w] \quad (\text{IV.C.11b})$$

$$\dot{v} = \gamma_{\perp v} \left[- (1 + i \bar{\Delta}) v + x_1 m + x_2^* z \right] \quad (\text{IV.C.11c})$$

$$\dot{w} = \gamma_{\perp v} \left[\left\{ - \left\{ \frac{\gamma_{\perp w}}{\gamma_{\perp v}} \right\} + i(\bar{\delta} - \bar{\Delta}) \right\} w + x_2 n + x_1^* z \right] \quad (\text{IV.C.11d})$$

$$\dot{z} = \gamma_{\perp z} \left[- \left\{ 1 + i \frac{\gamma_{\perp w}}{\gamma_{\perp z}} \right\} z + \frac{\gamma_{//m}}{4\gamma_{\perp z}} (w x_1 - v x_2) \right] \quad (\text{IV.C.11e})$$

$$\dot{m} = \gamma_{//m} \left[\frac{1}{3} (\eta - 2)(m - 1) + \frac{2}{3} (1 + \eta)n - \frac{1}{2} (x_1^* v + x_1 v^*) + \frac{1}{4} (x_2^* w + x_2 w^*) \right] \quad (\text{IV.C.11f})$$

$$\dot{n} = \gamma_{//n} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\eta} - 2 \right) (m - 1) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\eta} + 4 \right) n + \frac{1}{4\eta} (x_1^* v + x_1 v^*) - \frac{1}{2\eta} (x_2^* w + x_2 w^*) \right] \quad (\text{IV.C.11g})$$

II. APPROXIMATION CUBIQUE DISPERSIVE.

1. Expressions générales des champs intra-cavité.

A la limite des grands désaccords ($|\Delta|, |\delta| \gg 1$), les équations donnant les grandeurs moyennes peuvent être réécrites en effectuant un développement en série en fonction des champs. En se limitant à l'ordre trois, on obtient alors pour les champs intra-cavité :

$$x_1 = \frac{y_1}{1+i \left[\theta_1 - 2C_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{|x_1|^2}{\Delta^3} + \frac{\gamma_{//m} |x_2|^2}{4\gamma_{\perp v} \Delta^2 \bar{\delta}} \right) \right]} \quad (\text{IV.C.12a})$$

$$x_2 = \frac{y_2}{1+i \left[\theta_2 - 2C_2 \frac{\gamma_{//m}}{4\gamma_{\perp v}} \frac{2\frac{\gamma_{\perp v}}{4\gamma_{//m}} \bar{\delta} - \Delta}{\Delta^2 \bar{\delta} (\Delta - \bar{\delta})} |x_2|^2 \right]} \quad (\text{IV.C.12b})$$

2. Cas d'une relaxation purement radiative.

En faisant $\eta_i = 0$, $\gamma_{\perp v} = \gamma_{//m} / 2 = \gamma_I$, les équations précédentes (IV.C.12), se réduisent à :

$$x_1 = \frac{y_1}{1+i \left[\theta_1 - 2C_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{|x_1|^2}{\Delta^3} + \frac{|x_2|^2}{2\Delta^2 \bar{\delta}} \right) \right]} \quad (\text{IV.C.12a})$$

$$x_2 = \frac{y_2}{1+i \left[\theta_2 - 2C_2 \frac{|x_2|^2}{\Delta^2 \bar{\delta}} \right]} \quad (\text{IV.C.12b})$$

Compte-tenu des résultats obtenus au Chapitre II §B, les différents termes apparaissant dans ces deux expressions ont des significations claires :

- C_1 / Δ correspond au déphasage linéaire, dû à la résonance à un photon et pouvant être réinclus dans θ_1 ;

- $2C_1|x_1|^2 / \bar{\Delta}^3$ est la dispersion non-linéaire, due à la saturation de la transition à un photon, et conduisant à l'apparition de bistabilité dispersive à un photon ;
- $C_1|x_2|^2 / (\bar{\Delta}^2 \bar{\delta})$ et $C_2|x_1|^2 / (\bar{\Delta}^2 \bar{\delta})$ représentent la dispersion à deux photons, et plus précisément le couplage par effet Kerr croisé entre les deux champs ;

Ces deux termes peuvent être interprétés comme deux déphasages non-linéaires, normalisés à la demi-largeur de la cavité pour le mode correspondant (c'est-à-dire $P_1/2$ et $P_2/2$) :

$$\varphi_1^{nl(2\text{photons})} = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\mu_{er}^2 \gamma_1}{\hbar^2 \Delta^2 \delta} |\mathcal{E}_2|^2 \quad \varphi_2^{nl(2\text{photons})} = \alpha_0 \ell \cdot \frac{\mu_{rg}^2 \gamma_1}{\hbar^2 \Delta^2 \delta} |\mathcal{E}_1|^2 \quad (\text{IV.C.14})$$

En introduisant la définition de la largeur transverse :

$$\gamma_1 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{\omega_1^3}{\hbar c^3} \mu_{rg}^2 \quad (\text{IV.C.15})$$

nous retrouvons la forme des déphasages non-linéaires obtenue au Chapitre II (eq. II.B.44), ce qui vérifie la cohérence de ces différentes approches :

$$\varphi_1^{nl(2\text{photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_1 \omega_2 \mu_{rg}^2 \mu_{er}^2}{\epsilon_0 \hbar^2 c \Delta^2 \delta} \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{\hbar \omega_2} \quad (\text{IV.C.16a})$$

$$\varphi_2^{nl(2\text{photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_1 \omega_2 \mu_{rg}^2 \mu_{er}^2}{\epsilon_0 \hbar^2 c \Delta^2 \delta} \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\hbar \omega_1} \quad (\text{IV.C.16b})$$

3. Effet des collisions.

Nous utilisons une définition légèrement différente par rapport aux différentes variables introduites précédemment :

$$x'_i = \xi^{1/2} x_i \quad y'_i = \xi^{1/2} y_i \quad C'_i = \xi C_i \quad \Delta' = \xi \Delta \quad \delta' = \xi \delta \quad (\text{IV.C.17})$$

avec :

$$\xi = \gamma_{\perp v} / \gamma_1 \quad (\text{IV.C.18})$$

Ces nouvelles normalisations présentant l'avantage d'être indépendantes de la relaxation

collisionnelle. En définissant :

$$coll = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\gamma_1} \quad (IV.C.19)$$

les équations déterminant les champs intra-cavité en fonction des champs entrants s'écrivent :

$$y'_1 = x'_1 \left\{ 1 + i \left[\theta_1 - \frac{2C'_1}{\Delta'} + \frac{2C'_1 |x'_1|^2}{\Delta'^3} (1 + coll) - \frac{C'_1 |x'_2|^2}{\Delta'^2 \delta'} \right] \right\} \quad (IV.C.20a)$$

$$y'_2 = x'_2 \left\{ 1 + i \left[\theta_2 - \frac{C'_2 |x'_1|^2}{\Delta'^2 \delta'} \left(1 + coll \frac{\delta'}{\delta' - \Delta'} \right) \right] \right\} \quad (IV.C.20b)$$

L'effet des collisions est maintenant contenu entièrement dans le paramètre $coll$. Ces équations font apparaître que, lorsque $|\delta| \ll |\Delta|$, les termes dépendant des collisions sont réduits par le facteur δ/Δ (de la même façon que le terme correspondant à l'auto-modulation de phase), et deviennent négligeables devant la modulation de phase croisée. En ce sens, on peut dire que les processus non-linéaires à deux photons sont moins affectés par des collisions élastiques, que les processus non-linéaires à un photon. A la limite où $coll/|\Delta| \ll 1/|\delta|$, les élargissements collisionnels et l'automodulation de phase peuvent tous deux être négligés et on obtient alors :

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{y}_1}{1 + i \left[\bar{\theta}_1 \pm |\bar{x}_2|^2 \right]} \quad \bar{x}_2 = \frac{\bar{y}_2}{1 + i \left[\bar{\theta}_2 \pm |\bar{x}_1|^2 \right]} \quad (IV.C.21)$$

avec :

$$\bar{x}_1 = \left[\frac{C_2}{\Delta^2 |\delta|} \right]^{1/2} x_1 \quad \bar{y}_1 = \left[\frac{C_2}{\Delta^2 |\delta|} \right]^{1/2} y_1 \quad (IV.C.22a)$$

$$\bar{x}_2 = \left[\frac{C_1}{\Delta^2 |\delta|} \right]^{1/2} x_2 \quad \bar{y}_2 = \left[\frac{C_1}{\Delta^2 |\delta|} \right]^{1/2} y_2 \quad (IV.C.22b)$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \frac{2C_1}{\Delta} \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 \quad (IV.C.22c)$$

Ces équations s'identifient aux équations (IV.B.5), obtenues dans le cadre du modèle de dispersion croisée, qui sont ainsi justifiées d'une autre manière. Le signe + (resp. -) correspond au cas où δ est négatif (resp. positif), c'est-à-dire à des valeurs positives ou négatives du paramètre f introduit précédemment.

4. Evolution dynamique.

Nous avons donc montré que le comportement des champs moyens peut être décrit simplement à la limite cubique dispersive. Par contre, l'évolution temporelle du système ne peut être décrite par la simple limite cubique, que s'il est possible d'éliminer adiabatiquement toutes les grandeurs atomiques dans les équations d'évolution (IV.C.11). Pour notre situation expérimentale, les taux de relaxations k_1 et k_2 des deux modes de la cavité sont de l'ordre de grandeur des taux de relaxation atomiques, et une telle approximation n'est pas justifiée.

Pour la même raison, l'analyse de stabilité doit être effectuée en linéarisant le modèle complet autour des champs moyens. Cette analyse montre que les parties des courbes donnant la variation des intensités intra-cavités (en fonction, soit des intensités entrantes, soit de la longueur de la cavité), et ayant une pente négative sont instables. De plus, il apparaît également des régions d'instabilités sur les zones à pente positive, correspondant à l'apparition d'oscillations spontanées non-amorties sur les intensités intra-cavité. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, de telles instabilités apparaissent aussi à la limite cubique, mais elles ne peuvent être correctement décrites que par le modèle complet. De plus, il est facile d'atteindre des valeurs des intensités, pour lesquelles l'approximation cubique devient insuffisante, en particulier pour la détermination du spectre en fréquence des oscillations. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes numériques, qui ont été mises en oeuvre par le groupe du Pr. Lugiato.

III. COMPARAISON THEORIE-EXPERIENCE.

1. Résultats numériques pour les champs moyens.

A l'aide des équations obtenues dans la partie précédente, il est possible de modéliser l'effet d'un balayage aller-retour de la longueur de la cavité, soit de façon "statique" (c'est-à-dire en utilisant la solution stationnaire des intensités intra-cavité), soit de façon "dynamique" (c'est-à-dire en incluant l'évolution temporelle au cours du balayage). Cette dernière simulation fera apparaître le comportement du système lors de son passage dans les zones d'instabilité. Elle mettra donc directement en évidence l'apparition d'oscillations non-amorties.

Tous les résultats sont présentés pour le cas d'une relaxation purement radiative ($\eta_i = 0$; $i = 1, 2, 3$).

La figure IV.C.1 montre la comparaison entre les courbes expérimentales, le modèle cubique et le modèle complet pour la première situation expérimentale décrite dans la partie précédente (cf. figure IV.B.5). Pour $\alpha_o \ell = 940$, les paramètres de coopérativité sont : $C_1 = 31300$ et $C_2 = 1.6 C_1$, tandis que les puissances laser ($P = 0.5$ mW pour les deux faisceaux) correspondent à des fréquences de Rabi $\Omega_1^n = 24$ et $\Omega_2^n = 33$ (eq. II.C.21). En reportant dans (IV.C.7), on obtient les variables normalisées correspondant aux champs entrants : $y_1 = 360$ et $y_2 = 490$. Il apparaît clairement que pour ces différents paramètres, les solutions stationnaires données par le modèle complet diffèrent très peu de celles obtenues à la limite cubique dispersive.

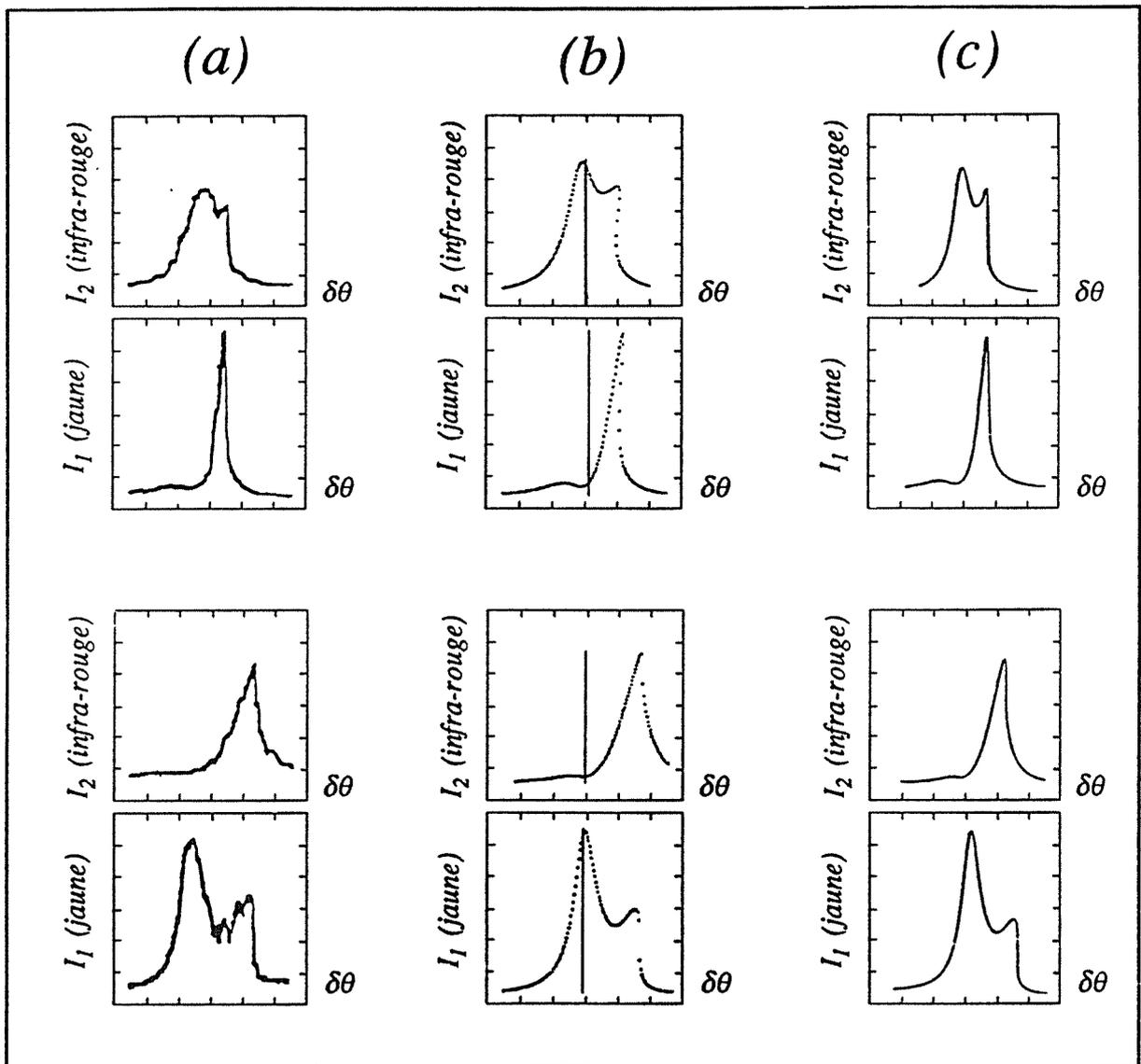


Figure IV.C.1 :

Comparaison entre les résultats obtenus expérimentalement (a), et les courbes calculées théoriquement, soit à l'aide du modèle correspondant au couplage par effet Kerr croisé (b), soit par résolution numérique des EBO (c).

La figure IV.C.2 montre, pour ces mêmes paramètres, un cas où la courbe des champs moyens conduit à un cycle d'hystérésis double. Ces résultats montrent également l'apparition d'oscillations spontanées, sur un segment de courbe ayant une pente positive.

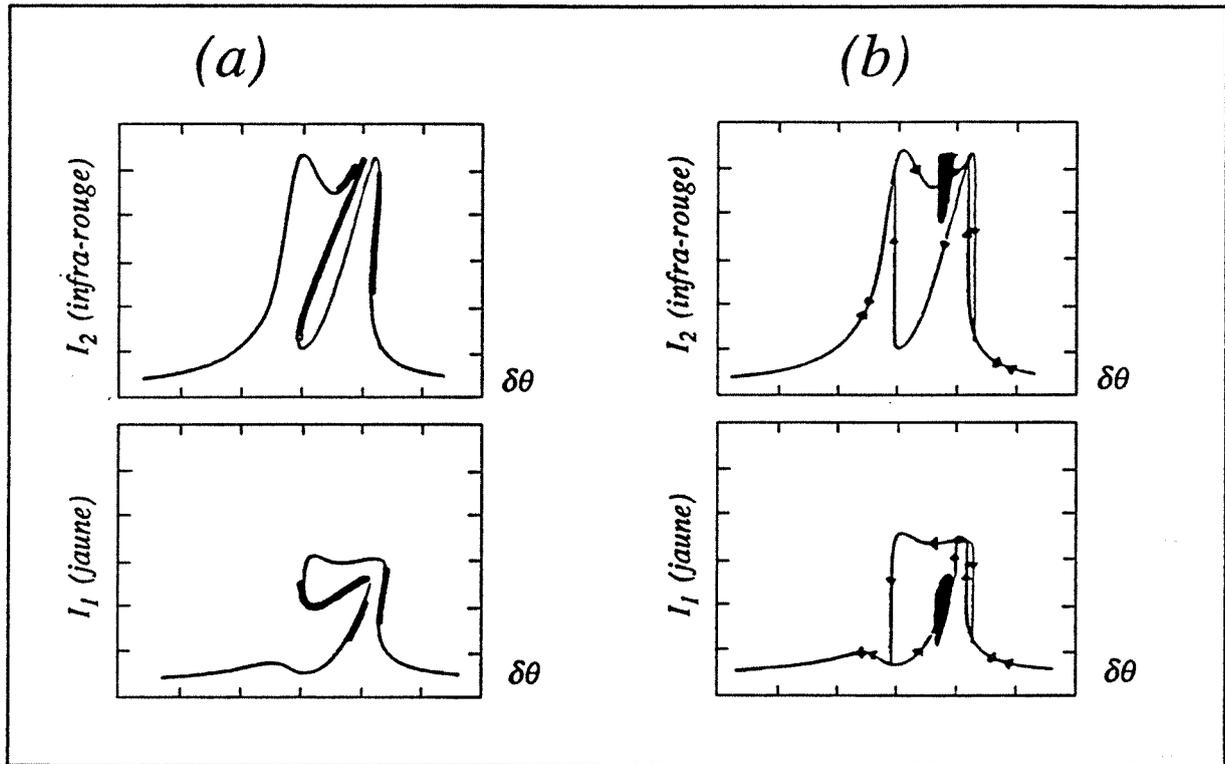


Figure IV.C.2 :

Les courbes (a) représentent la solution des champs moyens pour le complet à 3 niveaux. Les segments épais indiquent les états instables du système. Les courbes (b) sont le résultat d'un balayage aller-retour de $\delta\theta$, simulant la variation de longueur de la cavité effectuée expérimentalement. Les parties noires correspondent aux domaines où apparaissent les oscillations spontanées. Les paramètres sont $C_1=31300$, $C_2=27350$, $\Delta=2400$, $\delta=400$.

Comme indiqué précédemment, il est très facile de sortir de la limite cubique dispersive, en augmentant simplement la puissance infra-rouge. Les résultats qui suivent correspondent ainsi à $\Omega_2^{in} = 54$ (soit $P_{\text{infrarouge}}=1$ mW), les courbes expérimentales étant celles reproduites sur la figure IV.B.7. Dans ce cas, les oscillations, croissant avec l'intensité infra-rouge, occupent maintenant une partie importante du cycle de bistabilité (figure IV.C.3).

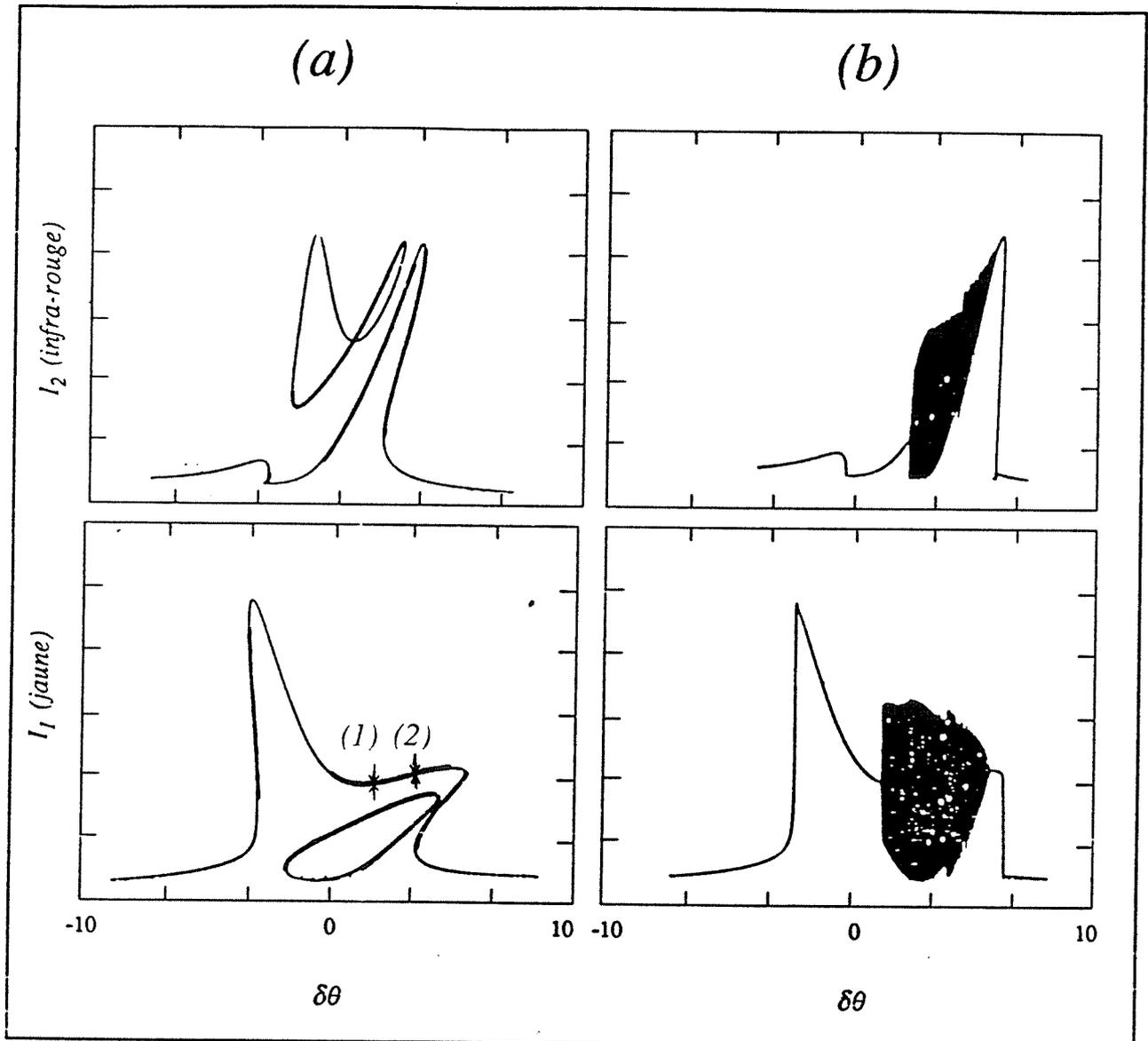


Figure IV.C.3 :
Idem que pour la figure précédente, avec une intensité infra-rouge plus importante.

Ces oscillations n'apparaissent pas sur les courbes expérimentales, car elles sont moyennées par les détecteurs utilisés pour enregistrer l'évolution des champs intra-cavité, qui ont un temps de réponse long (de l'ordre de la ms). Cet effet de lissage peut également être effectué sur les résultats numériques. La figure IV.C.4 montre ainsi la comparaison entre les courbes expérimentales de bistabilité, les courbes numériques obtenues avec le modèle complet, et l'effet du lissage numérique.

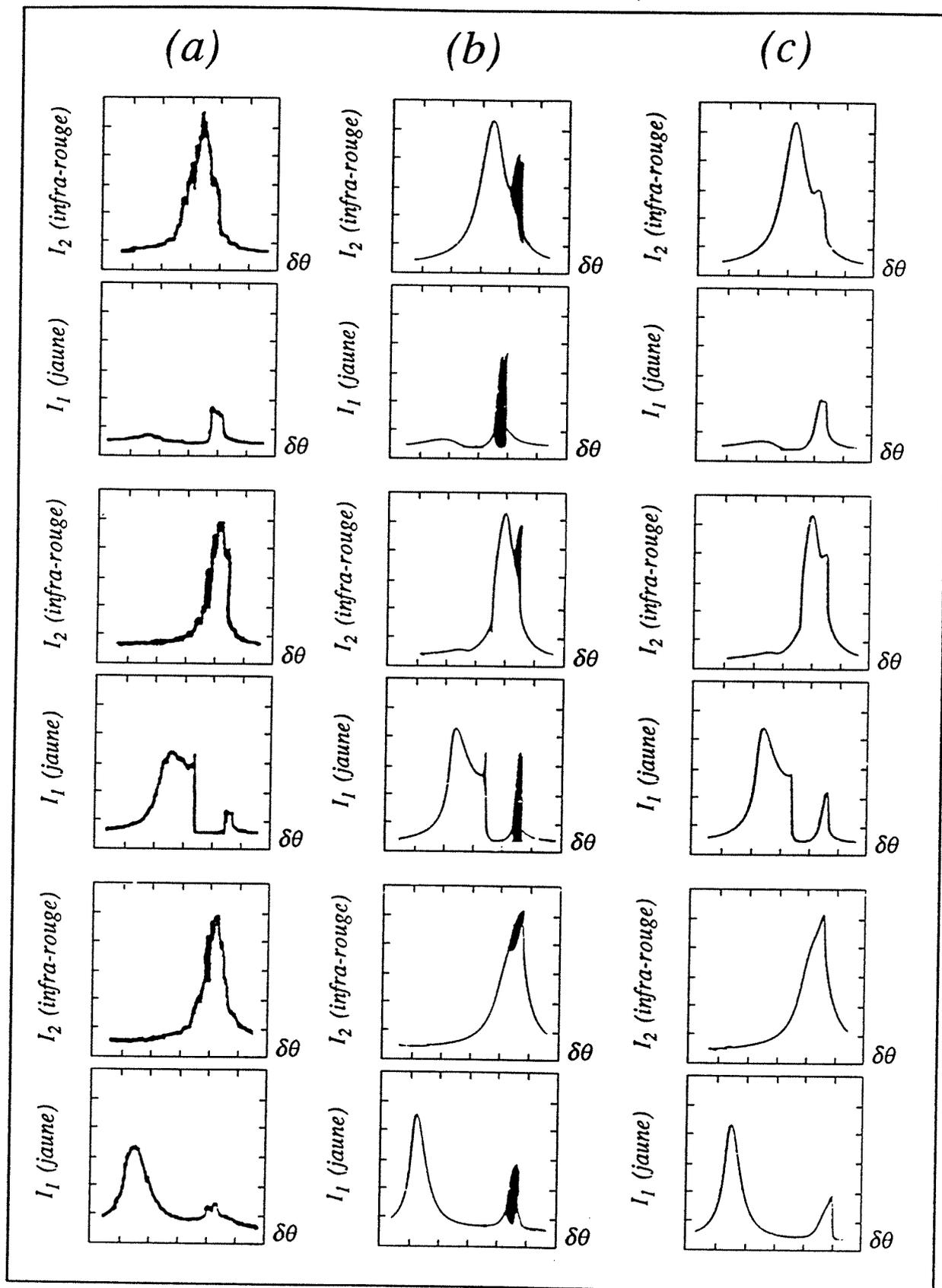


Figure IV.C.4 :
 Comparaison entre les résultats obtenus expérimentalement 'a) et les courbes calculées théoriquement (b). Les courbes (c) correspondent à un lissage numérique des oscillations, simulant le filtrage en fréquence effectués par les photodétecteurs.

2. Etude des oscillations.

a) Observation qualitative.

Nous avons placé sur les faisceaux réfléchis par la cavité, les détecteurs utilisés pour mesurer le bruit de photons des faisceaux lumineux, et qui ont une bande passante permettant d'analyser les oscillations. La fréquence est ensuite obtenue en envoyant le photocourant sur l'analyseur de spectre, et en enregistrant l'évolution du bruit de photon au cours du balayage (figure IV.C.5).

La fréquence des oscillations apparaît entre 5 et 15 MHz, en fonction des valeurs de θ_1^o et θ_2^o . Elle varie sensiblement au cours du balayage sur la zone d'instabilité.

b) Evolution des oscillations en fonction du point de fonctionnement.

A titre d'exemple, considérons les courbes de bistabilité sur les champs moyens reproduites sur la figure IV.C.3. Il apparaît un "îlot", détaché de la courbe de bistabilité, ainsi qu'une zone d'instabilité à pente positive, correspondant à l'émergence d'oscillations.

Lorsqu'on change le point de fonctionnement (c'est-à-dire le paramètre $\delta\theta$), les oscillations deviennent de plus en plus complexes (figure IV.C.7). On rencontre ainsi des oscillations de période 1, de période 2, de période 4, puis de période 8. Cette séquence de doublement de période conduit au chaos (figure IV.C.6), à l'intérieur duquel apparaissent des fenêtres à comportement régulier (par exemple, oscillations de période 6).

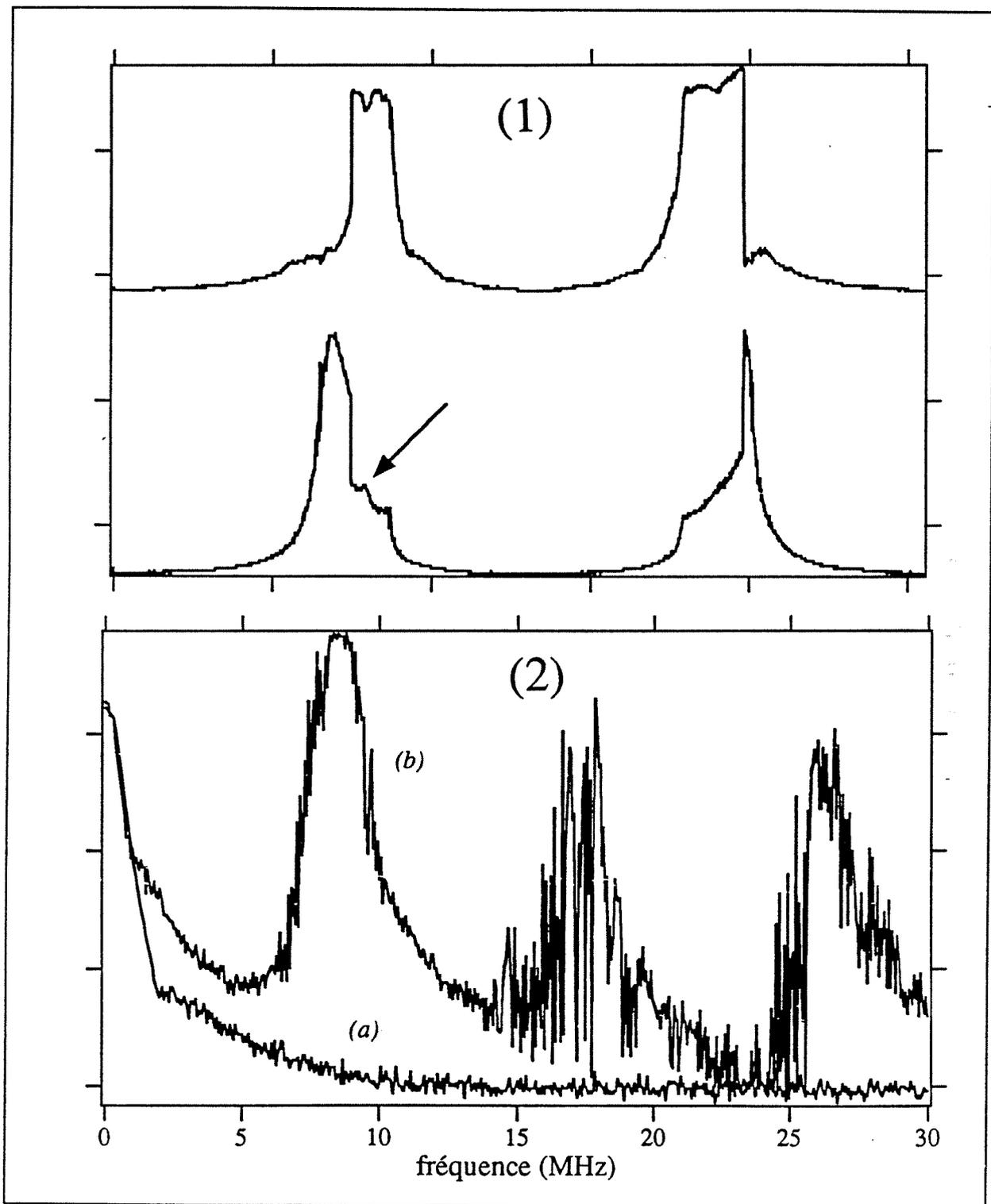


Figure IV.C.5 :

Courbes de bistabilité (1) et instabilité associée (2). En stoppant le balayage de la cavité de façon à se fixer au point de fonctionnement indiqué par la flèche, il est possible de visualiser les oscillations, puis d'analyser leur spectre (2) : l'excès de bruit correspondant aux oscillations (b) apparaît sur le bruit de photons (a) du faisceau réfléchi par la cavité.

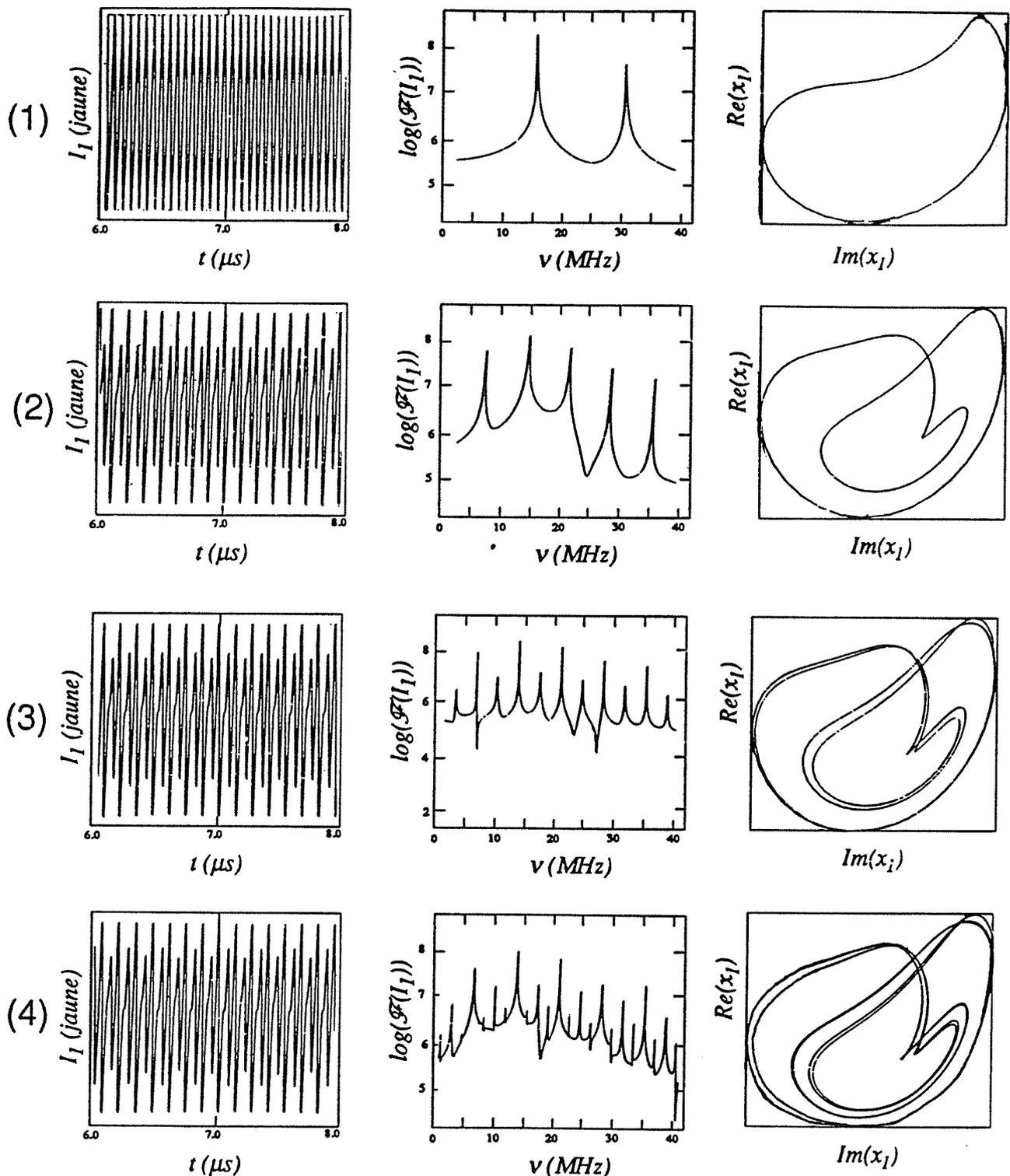


Figure IV.C.6 :

Evolution théorique de la structure des oscillations en fonction du point de fonctionnement. Les premières courbes (à gauche) montrent l'évolution temporelle des oscillations. Les courbes du milieu représentent les spectres correspondants (en échelle logarithmique, les fréquences étant données en MHz). Les courbes à droite indiquent la trajectoire dans l'espace des phases. Les points de fonctionnement sont choisis tels que les cas (1) et (2) correspondent aux points (1) et (2) sur la figure IV.C.3 : (1) $\delta\theta=3.01$, (2) $\delta\theta=4.52$, (3) $\delta\theta=4.61$, (4) $\delta\theta=4.64$.

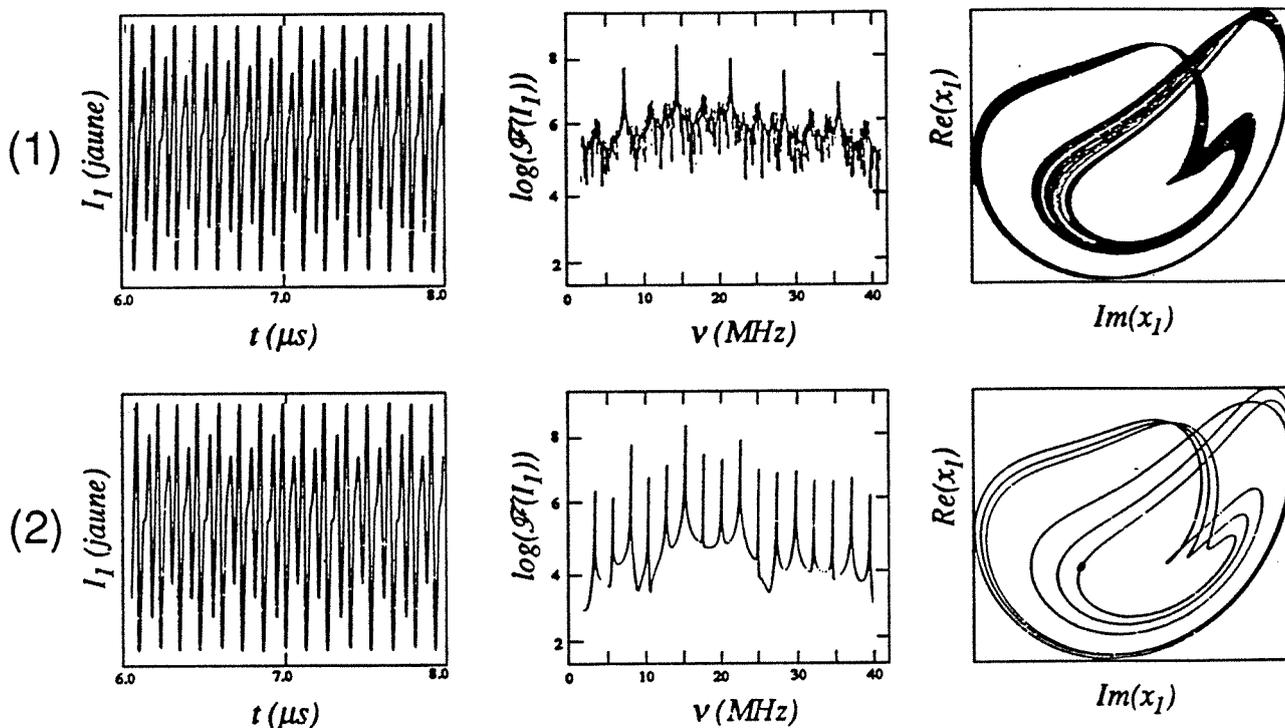


Figure IV.C.7 :

Idem que pour la figure précédente, pour maintenant : (1) $\delta\theta=4.68$, (2) $\delta\theta=4.70$.

IV. CONCLUSION DE L'ETUDE SUR LES CHAMPS MOYENS.

Nous avons observé expérimentalement des effets de bistabilité à deux photons pour deux modes du champ. Les résultats obtenus peuvent être correctement reproduits à l'aide de deux modèles, l'un correspondant à une description complète, et l'autre à une approximation de type $\chi^{(3)}$, valable lorsque les désaccords par rapport aux résonances atomiques sont grands devant les largeurs naturelles. Rappelons que ce dernier modèle s'interprète simplement, comme un couplage entre les deux faisceaux par modulation de phase croisée.

L'accord théorie-expérience est tout-à-fait satisfaisant, compte-tenu du fait que les calculs sont effectués pour des ondes planes dans une cavité en anneau, tandis que l'expérience est réalisée avec des faisceaux gaussiens adaptés au mode fondamental d'une cavité linéaire.

Suite aux prévisions du modèle, nous avons également observé l'apparition d'oscillations spontanées non-amorties, dont la fréquence et la localisation sur les courbes de bistabilité sont effectivement celles calculées théoriquement.

**D. EFFETS SUR LES FLUCTUATIONS QUANTIQUES
DANS UN BISTABLE A DEUX PHOTONS A LA LIMITE
CUBIQUE DISPERSIVE**

Nous considérons, afin de simplifier l'étude et d'obtenir des formules analytiques, le cas particulier, évidemment irréaliste d'un point de vue pratique, où tous les paramètres sont égaux pour les deux modes résonnants dans la cavité [Grangier 89a] [Grangier 89b]:

$$T_1 = T_2 = T \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \qquad I_1 = I_2 = I \qquad I_1^{in} = I_2^{in} = I^{in}$$

I. ETUDE DES CHAMPS MOYENS.

1. Condition de stabilité.

La relation (IV.B.13.b) étant toujours vérifiée, la condition de stabilité se réduit à l'inégalité (IV.B.16.a), soit :

$$-\left[\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \varphi^2\right] < 2fI\varphi < \left[\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \varphi^2\right] \quad (\text{IV.D.1})$$

et il apparaît deux seuils de déstabilisation :

• *Seuil (+)* :

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \varphi^2 + 2f I\varphi = 0 \quad \text{correspondant à } p_1 = p_2 \quad (\text{IV.D.2a})$$

• *Seuil (-)* :

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \varphi^2 - 2f I\varphi = 0 \quad \text{correspondant à } p_1 = -p_2 \quad (\text{IV.D.2b})$$

Au delà du seuil (+), il y a amplification des fluctuations symétriques d'amplitude, ce qui conduit, pour les deux faisceaux, à une instabilité identique à celle rencontrée dans la bistabilité

dispersive à un photon [Reynaud 89b]. Lorsque cette condition n'est pas remplie, la dérivée de l'intensité intra-cavité I en fonction de l'intensité d'entrée I^{in} devient négative. La quantité donnée dans l'équation (IV.D.2a) peut, plus précisément, être identifiée comme la pente de la courbe de bistabilité : $P_+ = t^2 dI^{\text{in}}/dI$. L'instabilité apparaît ainsi lorsque $P_+ < 0$.

La seconde condition correspond par contre à une amplification des fluctuations antisymétriques des deux amplitudes : si I_1 décroît, I_2 se met à croître, augmentant la décroissance de I_1 . Un des faisceaux s'installe alors à résonance dans la cavité et, par le phénomène d'effet Kerr croisé, induit sur l'autre faisceau un déphasage tel que le mode de celui-ci ne soit plus à résonance. Nous allons montrer sur ce cas particulier, que lorsque la condition (IV.D.2b) cesse d'être vérifiée (ce qui correspond à $P_- < 0$), les deux intensités dans la cavité ne sont plus égales, même dans le cas où les intensités d'entrée sont identiques.

Avec les paramètres normalisés introduits en (IV.B.4), l'intensité symétrique dans la cavité est maintenant donnée par :

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{1 + (\theta + \mathcal{I})^2} \quad (\text{IV.D.3})$$

L'instabilité symétrique apparaît si $P_+ < 0$, ce qui correspond à :

$$3 (\mathcal{I} - \mathcal{I}') (\mathcal{I} - \mathcal{I}'') \leq 0 \quad (\text{IV.D.4a})$$

avec :

$$\mathcal{I}' = \frac{1}{3} (-2\theta + \sqrt{\theta^2 - 3}) \quad (\text{IV.D.4b})$$

$$\mathcal{I}'' = \frac{1}{3} (-2\theta - \sqrt{\theta^2 - 3}) \quad (\text{IV.D.4c})$$

tandis que l'instabilité anti-symétrique apparaît pour $P_- < 0$, soit :

$$\mathcal{I}^2 \leq 1 + \theta^2 \quad (\text{IV.D.5})$$

Ces domaines d'instabilité, définis par les inégalités (IV.D.4a) et (IV.D.4b), sont représentés sur la figure IV.D.1, dans le plan (θ, \mathcal{I}) .

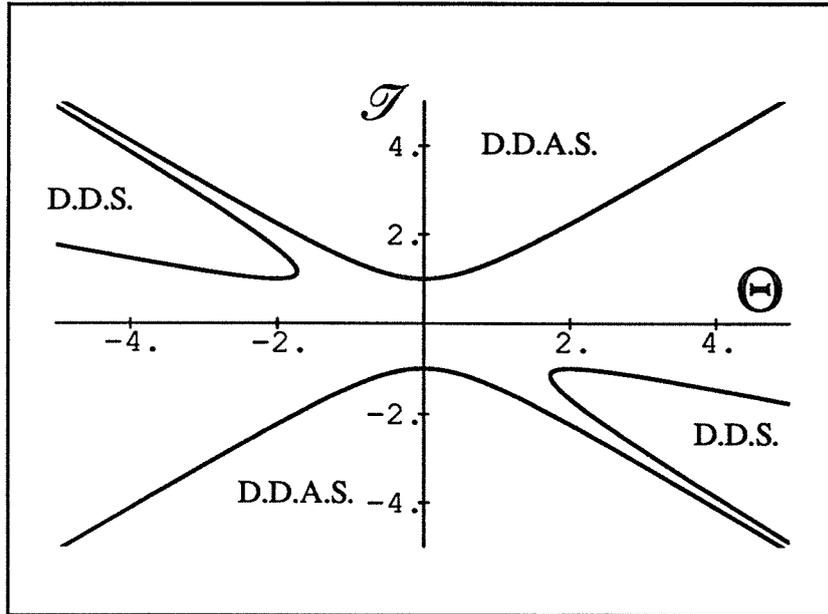


Figure IV.D.1 :
Représentation des domaines de
déstabilisation symétriques
(D.D.S.) et anti-symétriques
(D.D.A.S.), dans le plan
 (θ, \mathcal{T}) . \mathcal{T} représente le déphasage
non-linéaire, proportionnel à
l'intensité intra-cavité. θ
correspond au déphasage
normalisé de la cavité vide.

2. Courbes de bistabilité à deux photons.

Lorsque l'intensité entrante \mathcal{I}^{in} des deux faisceaux augmente, la non-linéarité entraîne une déformation des courbes de résonance $\mathcal{T}(\theta)$ de la cavité : celle-ci devient de plus en plus penchée et finit par atteindre les domaines d'instabilité.

Dans le domaine de déstabilisation symétrique (D.D.S.), le comportement du bistable est identique à celui observé dans la bistabilité à un photon (saut d'une branche basse vers une branche haute, ou inversement). Par contre, dans le domaine de déstabilisation antisymétrique (D.D.A.S.), la courbe se sépare en deux parties, rompant ainsi la symétrie du système pour les deux modes. Les deux intensités intra-cavité sont maintenant données par :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1 [1 + (\theta + \mathcal{I}_2)^2] = \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_2 [1 + (\theta + \mathcal{I}_1)^2] = \mathcal{I}_0 \end{cases} \quad (\text{IV.D.6})$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = 1 + \theta^2 = P \\ \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = \frac{\mathcal{I}_0}{1 + \theta^2} - 2\theta = S \end{cases} \quad (\text{IV.D.7})$$

et :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1 = \frac{1}{2} [S + \sqrt{S^2 - 4P}] \\ \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2} [S - \sqrt{S^2 - 4P}] \end{cases} \quad (\text{IV.D.8})$$

Ces résultats sont illustrés sur la figure IV.D.2, pour différentes valeurs de l'intensité entrante (i.e. du paramètre \mathcal{I}_0).

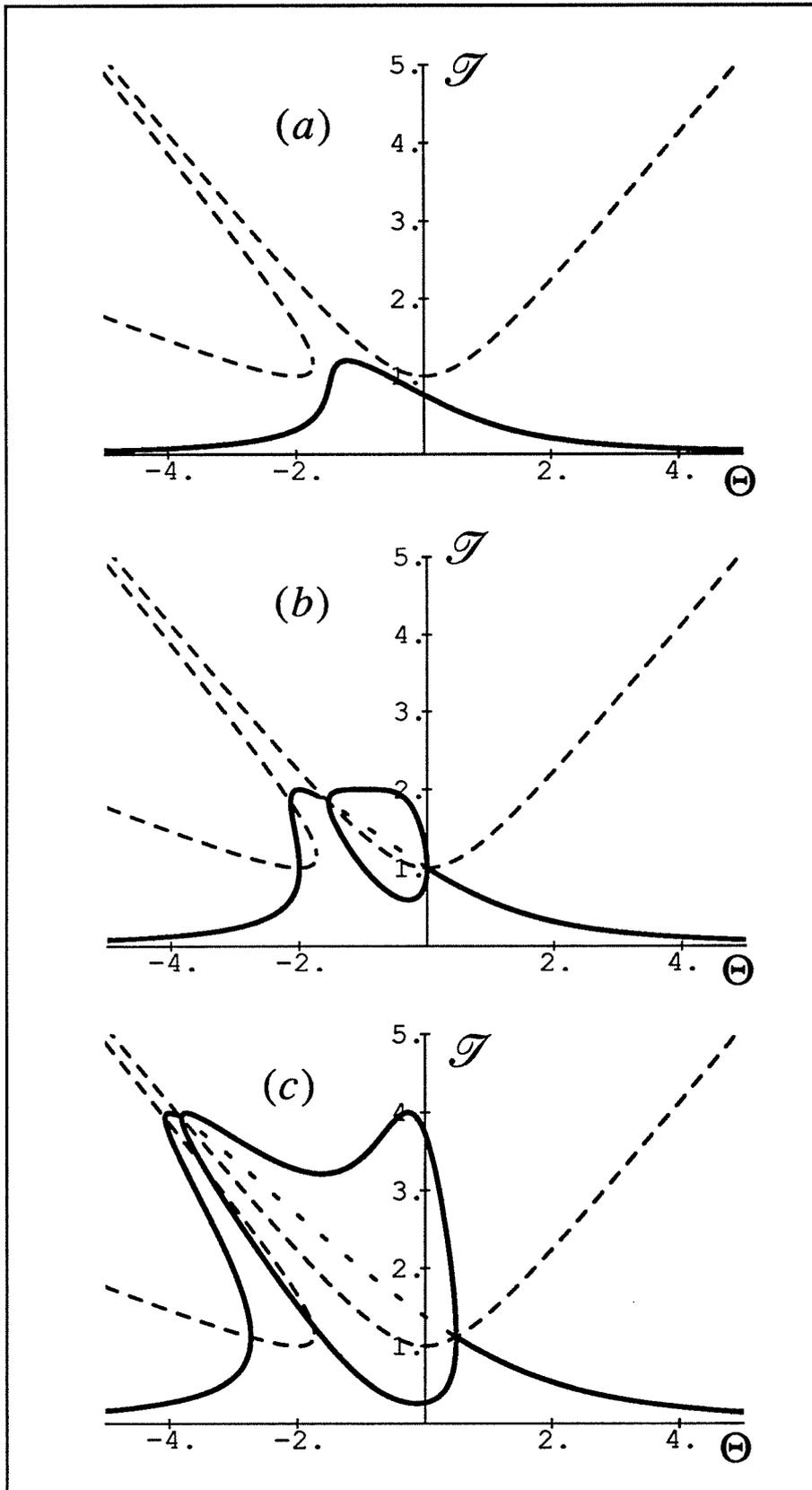


Figure IV.D.2 :
 Courbes de bistabilité à deux photons, pour une cavité de grande finesse. Pour des intensités très faibles, la courbe $\mathcal{I}(\Theta)$ est simplement une lorentzienne. Lorsque l'intensité entrante augmente, la courbe se penche (a : $\mathcal{I}_0=1.2$). Pour des valeurs plus grandes (b : $\mathcal{I}_0=2$, c : $\mathcal{I}_0=4$), les courbes atteignent les domaines d'instabilité (voir fig.I V.D.1). En particulier, dans le domaine de déstabilisation anti-symétrique, la courbe se sépare en deux branches.

Remarquons que, comme nous l'avons montré dans l'étude de stabilité linéaire, le maximum de ces courbes (correspondant à $\varphi = 0$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$) apparaît "coincé" entre les deux domaines d'instabilité, mais est effectivement toujours stable.

II. FLUCTUATIONS QUANTIQUES DES CHAMPS SORTANTS.

1. Transformation entrée-sortie des fluctuations quantiques.

De façon à conserver la symétrie des équations dans l'échange entre les deux modes 1 et 2, nous introduisons les composantes symétriques et anti-symétriques des quadratures :

$$\begin{cases} p_+^{in, out} = p_1^{in, out} + p_2^{in, out} \\ p_-^{in, out} = p_1^{in, out} - p_2^{in, out} \end{cases} \quad (\text{IV.D.9.a})$$

$$\begin{cases} q_+^{in, out} = q_1^{in, out} + q_2^{in, out} \\ q_-^{in, out} = q_1^{in, out} - q_2^{in, out} \end{cases} \quad (\text{IV.D.9.b})$$

A partir de l'équation (III.B.3), on obtient la transformation de ces composantes, autour d'un point de fonctionnement défini par une solution symétrique (I, φ) . Cette transformation découple l'évolution des composantes symétriques de celles des composantes anti-symétriques :

$$\begin{bmatrix} p_+^{out} \\ q_+^{out} \\ p_-^{out} \\ q_-^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_+}{v_+} & \frac{\mu_+}{v_+} & 0 & 0 \\ \frac{\mu_+}{v_+} & \frac{\lambda_+}{v_+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_-}{v_-} & \frac{\mu_-}{v_-} \\ 0 & 0 & \frac{\mu'_-}{v_-} & \frac{\lambda_-}{v_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_+^{in} \\ q_+^{in} \\ p_-^{in} \\ q_-^{in} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.D.10})$$

où les divers coefficients de la matrice de transfert sont définis par :

$$v_{\pm} = (1 + r^2 - 2r \cos \varphi) \left[\frac{1}{r} e^{-i\Omega} + r e^{i\Omega} - 2 \cos \varphi \mp 2\kappa \sin \varphi \right] \quad (\text{IV.D.11a})$$

$$\lambda_{\pm} = \left(\frac{1}{r} + r \mp 2\kappa \sin \varphi - 2 \cos \varphi \cos \Omega \right) \left[(1 + r^2 - 2r \cos \Omega) - 4r^2 \sin^2 \varphi (1 - \cos \Omega) \right] \quad (\text{IV.D.11b})$$

$$\mu_{\pm} = 2t^2 \sin \varphi (1 - \cos \Omega) \quad (\text{IV.D.11c})$$

$$\mu'_{\pm} = \mp 2 \left(\frac{\kappa}{r} \right) t^2 (1 + r^2 - 2r \cos \varphi) - \mu \quad (\text{IV.D.11d})$$

Pour illustrer ces résultats, nous considérons trois cas particuliers, en fonction du désaccord total φ . Dans tous les cas, nous supposons $f > 0$, la généralisation à $f < 0$ étant immédiate.

2. Désaccord nul : couplage QND.

Si les deux lasers sont accordés à résonance de la cavité (soit $\varphi = 0$), le résultat s'écrit :

$$\begin{pmatrix} p_+^{out} \\ q_+^{out} \\ p_-^{out} \\ p_-^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ hg & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -hg & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+^{in} \\ q_+^{in} \\ p_-^{in} \\ q_-^{in} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.D.12a})$$

$$h = \frac{e^{i\Omega} - r}{1 - re^{i\Omega}} \quad g = -2\kappa \frac{t^2}{1 + r^2 - 2r \cos \Omega} \quad (\text{IV.D.12b})$$

ce qui s'écrit, en revenant aux fluctuations séparées des champs:

$$\begin{cases} p_1^{out} = \frac{e^{i\Omega} - r}{1 - re^{i\Omega}} p_1^{in} \\ q_1^{out} = \frac{e^{i\Omega} - r}{1 - re^{i\Omega}} \left(q_1^{in} - 2\kappa \frac{t^2}{1 + r^2 - 2r \cos \Omega} p_2^{in} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.D.13a})$$

$$\begin{cases} p_2^{out} = \frac{e^{i\Omega} - r}{1 - re^{i\Omega}} p_2^{in} \\ q_2^{out} = \frac{e^{i\Omega} - r}{1 - re^{i\Omega}} \left(q_2^{in} - 2\kappa \frac{t^2}{1 + r^2 - 2r \cos \Omega} p_1^{in} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.D.13b})$$

qui correspond bien au résultat donné par (III.B.23) pour $r_1 = r_2 = r$.

3. Compression des fluctuations d'intensité.

D'après les résultats obtenus dans l'étude de la réduction du bruit quantique dans un bistable à un photon [Reynaud 89b], la compression des fluctuations quantiques d'intensité est donnée par :

□ Pour la somme des intensités :

$$S_+(\Omega) = 1 + \frac{4r \tau^4 \kappa \sin \varphi (1 - \cos \Omega)}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} \quad (\text{IV.D.14})$$

□ Pour la différence des intensités (correspondant au changement de κ en $-\kappa$) :

$$S_-(\Omega) = 1 - \frac{4r \tau^4 \kappa \sin \varphi (1 - \cos \Omega)}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} \quad (\text{IV.D.15})$$

A la limite bonne cavité, et en reportant la valeur de κ en fonction du point de fonctionnement choisi sur le bistable (défini par les paramètres normalisés \mathcal{I} , intensité, et Φ , déphasage total donné par $\Phi = \theta + \mathcal{I}$), ces expressions se simplifient en :

$$S_+(\Omega) = 1 + \frac{2\Phi \mathcal{I}}{1 + \Phi^2} \left[1 + \left(\frac{\Omega^2 - P_+}{2\Omega} \right)^2 \right]^{-1} \quad (\text{IV.D.16})$$

$$S_-(\Omega) = 1 - \frac{2\Phi \mathcal{I}}{1 + \Phi^2} \left[1 + \left(\frac{\Omega^2 - P_-}{2\Omega} \right)^2 \right]^{-1} \quad (\text{IV.D.17})$$

a) *Désaccord négatif : compression des fluctuations de la somme des intensités.*

L'expression (IV.D.16) montre que pour un désaccord Φ négatif, il est possible de réduire les fluctuations quantiques de la somme des intensités, en-dessous du bruit de photon. Le minimum, correspondant à :

$$S_+^{min} = 1 + \frac{2\Phi \mathcal{I}}{1 + \Phi^2} = \frac{P_+}{1 + \Phi^2} \quad (\text{IV.D.18})$$

est ainsi obtenu pour la fréquence $\Omega = \sqrt{P_+}$. Le point de fonctionnement optimum sur la courbe de bistabilité correspond à $\Phi = -1/\sqrt{3}$, c'est-à-dire au point d'inflexion de la courbe $\mathcal{I}(\Phi)$.

Remarque :

Pour ce point de fonctionnement, le squeezing optimum obtenu est $S_+^{min}(opt) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \mathcal{I}_0$, qui

atteint la valeur zéro, pour $\mathcal{I}_0 = \frac{8}{3\sqrt{3}}$, correspondant évidemment à $P_+ = 0$.

En se plaçant juste en-dessous du seuil de déstabilisation symétrique, il est ainsi possible d'obtenir une importante réduction du bruit quantique. Un spectre de bruit typique est représenté sur la figure IV.D.3., tandis que la figure IV.D.4 montre l'évolution de la réduction du bruit en fonction de la fréquence, lorsque l'intensité d'entrée \mathcal{I}_0 varie.

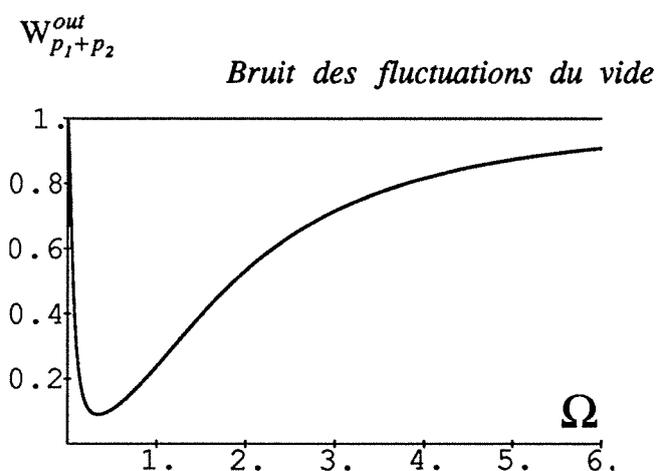


FIGURE IV.D.3 :
Spectre de bruit obtenu sur la somme des intensités pour le point de fonctionnement ($\Theta = -1.63, \mathcal{I}_0 = 1.4$). Le niveau 1 représentant les fluctuations du vide, on peut réaliser une compression importante des fluctuations sur un domaine de fréquence correspondant à la bande passante de la cavité.

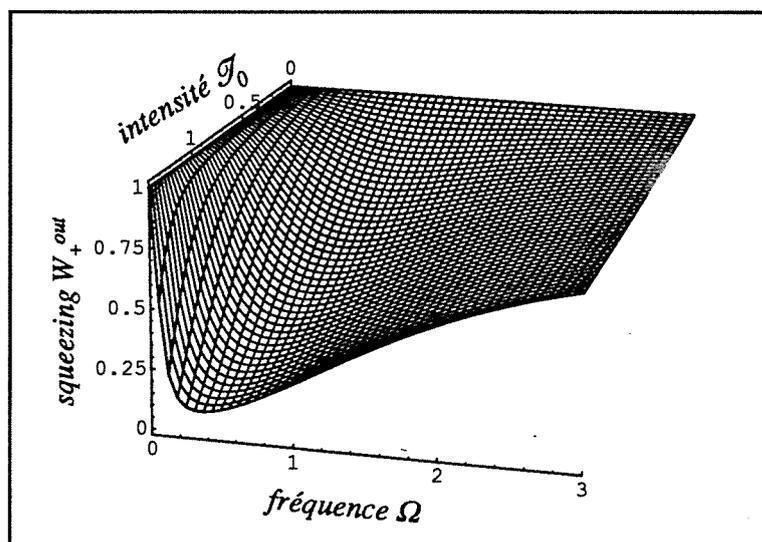


Figure IV.D.4 :
Evolution du spectre de bruit en fonction de l'intensité d'entrée \mathcal{I}_0 , en ajustant le point de fonctionnement sur la courbe de résonance, à sa valeur optimale.

b) Désaccord positif : faisceaux jumeaux.

Pour le signe opposé du désaccord ($\Phi > 0$), le point de fonctionnement est dans ce cas, situé près du seuil de déstabilisation antisymétrique, et on obtient alors une réduction de la différence des fluctuations d'intensité. Les deux faisceaux lasers, initialement non corrélés, sont ainsi transformés en faisceaux jumeaux, dont les fluctuations d'intensité sont fortement corrélées. Insistons sur le fait que, contrairement aux expériences effectuées à l'aide d'oscillateurs paramétriques, les faisceaux jumeaux obtenus dans le bistable proviennent de deux lasers initialement indépendants.

Remarquons enfin que les calculs présentés restent très préliminaires : il est en effet nécessaire d'inclure les effets d'instabilité sur les champs moyens, observés précédemment, ainsi que le bruit non-corrélé rajouté par les atomes. En considérant un modèle à deux niveaux effectifs, et en restant dans le cas où toutes les grandeurs sont symétriques vis-à-vis des deux modes du champ, Poizat, Collett et Walls ont montré que l'émission spontanée dégradait la compression des fluctuations sur la somme des intensités, mais pas celle sur la différence [Poizat 91]. En effet, la réduction à deux niveaux est valable lorsque le désaccord à un photon est grand devant les largeurs des niveaux. Dans ce cas, les deux photons réémis, même s'ils apparaissent de façon aléatoire, restent corrélés entre eux.

Les effets que nous avons prévus semblent donc très intéressants à considérer, et seraient un prolongement naturel de ce travail.

CONCLUSION



d'après [F'MURR 81]

Après avoir défini en quoi consiste une mesure QND, à la fois du point de vue idéal et en réalité, nous avons montré expérimentalement qu'un tel dispositif de couplage peut effectivement être réalisé, en utilisant une non-linéarité correspondant à un effet Kerr croisé. L'efficacité de cette mesure, en vertu des critères que nous avons défini est, à l'heure actuelle, la meilleure parmi les différentes réalisations antérieures. Malheureusement, ses performances sont encore trop proches du "domaine" classique, pour pouvoir envisager des applications.

L'idée directrice de notre travail a été de tenter d'obtenir une non-linéarité paramétrique, au sens qu'elle n'introduirait pas d'excès de bruit. Dans ce cas, les deux faisceaux couplés par le dispositif auraient des rôles parfaitement interchangeables. Nous avons néanmoins constaté expérimentalement que pour obtenir un couplage important entre les deux faisceaux, il a été nécessaire de se rapprocher des résonances atomiques, et donc de sortir du domaine de validité de l'approximation paramétrique.

Un modèle théorique permettant de décrire en détail les fluctuations atomiques a été élaboré dans notre groupe [Courty 91] [Poizat 92], mais sort du cadre de ce travail. Il est possible d'envisager des configurations tout-à-fait différentes de celle que nous avons cherché à réaliser. Une possibilité serait de fixer le faisceau signal au voisinage de la résonance sur la transition supérieure, et de venir sonder la transition inférieure, avec un faisceau de mesure d'intensité très faible. Le traitement quantique montre qu'il est alors possible d'obtenir des couplages QND importants [Gheri 92]. Le prix à payer par rapport à une non-linéarité paramétrique est que les deux faisceaux ne peuvent alors plus être intervertis, ce qui se traduit en particulier par l'apparition d'un excès de bruit sur la variable conjuguée de la quadrature signal (en l'occurrence la phase). Cette dégradation n'est néanmoins pas gênante, dans le cas où la perturbation ainsi introduite ne se recouple pas vers les fluctuations d'intensité. Une telle configuration est en cours d'étude sur le dispositif expérimental mis en place.

De nombreuses autres propositions théoriques de mesure QND ont également été publiées. Citons par exemple la réalisation de mesure QND via la génération de second harmonique [Dance 91], qui concerne également des faisceaux optiques. Le dispositif QND mesurant le nombre de photons stockés dans une cavity hyperfréquence que nous avons déjà cité [Brune 90], est en voie de réalisation expérimentale.

Jusqu'à présent, le dispositif qui permettrait d'atteindre des effets environ 10 dB en-dessous du bruit de photons, comme ceux maintenant obtenus dans les expériences de génération d'états comprimés, n'a pas été réalisé. Néanmoins, les faibles efficacités obtenues en pratique ne peuvent être attribuées à une limitation fondamentale, et on peut donc attendre des développements importants dans le domaine des mesures QND.

Dans ce travail, nous avons également étudié les effets sur les champs moyens dans un bistable à deux photons. Il apparaît alors différents types d'instabilités, qui devraient être accompagnés d'effets associés sur les bruits quantiques des deux faisceaux couplés dans le bistable. Un tel dispositif pourrait ainsi permettre d'étudier la relation entre deux domaines connexes de la Physique non-linéaire.

ANNEXES

ANNEXE I
PHOTODETECTEURS

I. PRINCIPE.

Nous avons vu au Chapitre I que la valeur quadratique moyenne du "bruit de photons" pour un photocourant continu de valeur i_o est donné par la formule de Schottky (I.B.33), e étant la charge de l'électron et B la largeur de la bande de fréquence analysée (exprimée en Hz):

$$i_{SN} = \sqrt{2e \bar{I}_c B} \quad (\text{Ann. I.1})$$

La photodiode débitant dans une résistance de charge R , cette valeur doit être comparée à celle du bruit thermique, donnée par la formule de Johnson-Nyquist :

$$i_T = \sqrt{4 kTB / R} \quad (\text{Ann. I.2})$$

Le bruit propre de photodétection l'emporte donc, lorsque la tension V aux bornes de la résistance de charge est supérieure à une valeur V_o :

$$V = R \bar{I}_c \geq V_o = 2kT / e \quad (\text{Ann. I.3})$$

Pour les températures courantes, V_o prend la valeur bien connue de 52 mV et il est donc nécessaire d'avoir une ddp aux bornes de R au moins égale à 500 mV. Pour $R = 2 \text{ k}\Omega$, le courant moyen doit ainsi vérifier $\bar{I}_c \geq 250 \text{ }\mu\text{A}$.

Pour cette valeur minimale du courant, les valeurs correspondantes des densités spectrales de bruit en intensité sont :

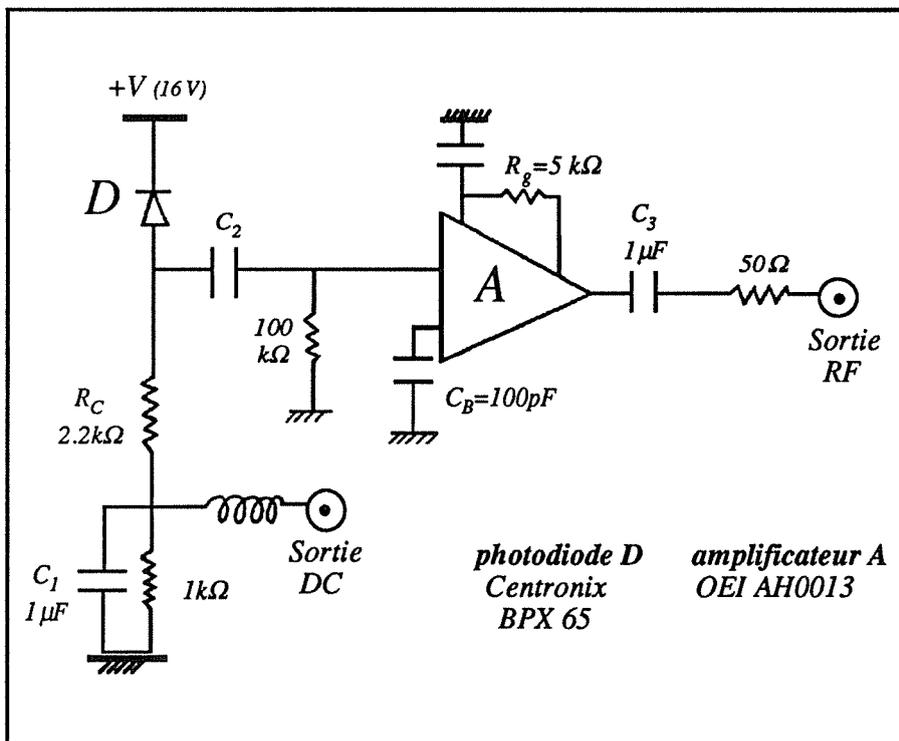
$$i_{SN} = 9 \text{ pA.Hz}^{-1/2} \quad i_T = 3 \text{ pA.Hz}^{-1/2} \quad (\text{Ann. I.4})$$

Le bruit de photons est ainsi 10 dB au-dessus du bruit thermique dans la résistance. En intégrant ces fluctuations sur une bande de fréquence de largeur 100 kHz, le courant correspond

ainsi à une valeur rms d'environ 1 μ A. Il est donc nécessaire d'utiliser un préamplificateur à très faible bruit (en tension et en courant), afin de pouvoir détecter ces valeurs. Le signal en sortie du préamplificateur (sur une impédance de 50 Ω) est ensuite analysé par un analyseur de spectre RF (Tektronix™ modèle 2753 P). Les spectres obtenus sont ensuite transmis vers un micro-ordinateur (Apple™ modèle Mac II CX), via un bus IEEE, et un logiciel d'acquisition de données conçu au laboratoire.

II. SCHEMA ELECTRONIQUE DU PHOTODETECTEUR.

Celui-ci est représenté sur la figure Ann. I-1. La source de courant constituée par la photodiode (Centronix™ BPX 65) est transformée en tension à travers la résistance de charge R_C constituée de R_1 en parallèle avec R_2 , soit ici 2.2 k Ω .



L'amplificateur utilisé est le modèle AH0013 de la marque OEI™. Pour des fréquences comprises entre 1 et 10 MHz, les bruits en tension et en courant, ramenés à l'entrée de l'amplificateur, sont donnés par la documentation du constructeur :

$$e_N^A = 2 \text{ nV} \cdot \text{Hz}^{-1/2} \quad I_N^A = 10 \text{ fA} \cdot \text{Hz}^{-1/2} \quad (\text{Ann. I.5})$$

Les valeurs des composants sont choisies pour que, en fonction de la bande passante du circuit et des facteurs de bruit donnés ci-dessus, le bruit rajouté par l'amplificateur ait une valeur ramenée à l'entrée, de l'ordre de grandeur du bruit thermique.

La mesure du courant moyen est faite à travers la résistance de 1 k Ω . Cette mesure est découplée des fluctuations RF dans la résistance de charge par la capacité de 1 μ F, et également de l'amplificateur. L'ensemble du photodétecteur, y compris l'alimentation constituée de deux piles 9 V mises en série, est inséré dans un boîtier métallique, afin de protéger au maximum le circuit des perturbations électromagnétiques extérieures ("pick-up" RF, bruit à 50 Hz, ...).

La valeur maximale du courant moyen, et donc du flux détectable, est limitée à la fois par les caractéristiques de la photodiode (\bar{I}_c^{max} de l'ordre de quelques mA), et par la dépolarisation de la photodiode, due à la chute de tension dans la résistance de charge. Si on se limite à 3 V, on obtient ainsi :

$$250 \mu A \leq \bar{I}_c \leq 1 mA \quad (\text{Ann. I.6})$$

La sensibilité des photodiodes étant voisine de 0.5 mA/mW, on peut donc mesurer le bruit de photons de faisceaux dont la puissance est comprise entre 500 μ W et 2 mW.

III. EXEMPLE DE SPECTRES.

Le bruit de photons est en principe indépendant de la source utilisée, et ne dépend que de \bar{I}_c . Nous avons vérifié que les bruits de faisceaux émis par une lampe blanche, un laser He-Ne, un laser argon, ou un laser à colorant étaient identiques pour une même valeur de \bar{I}_c , pour des fréquences supérieures à 3 MHz. En-dessous de cette valeur, il s'introduit un excès de bruit technique, masquant le bruit de photons (figure Ann. I-2).

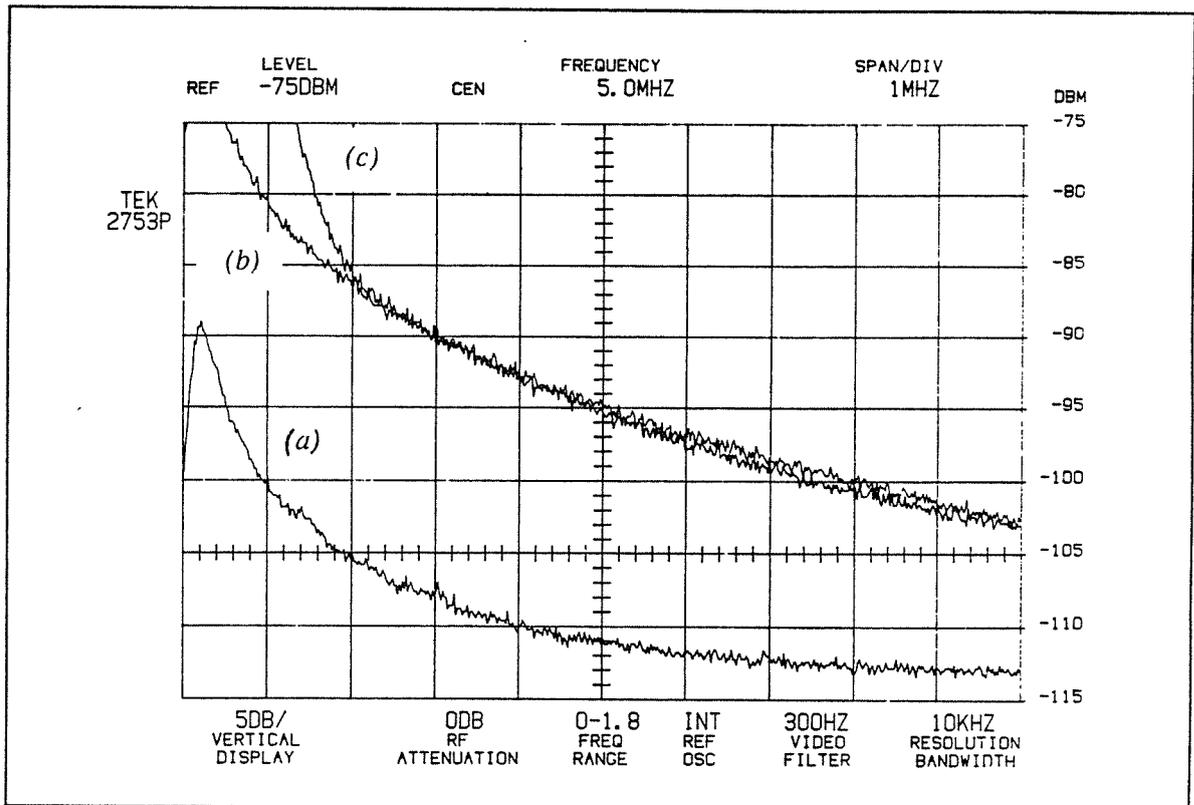


Figure Ann. I-2 :

Spectres de bruit enregistrés entre 0 et 20 MHz. La courbe (a) correspond au bruit électronique (bruit Johnson-Nyquist dans la résistance de charge et bruit introduit par l'amplificateur). Les deux courbes supérieures sont enregistrées avec le même photocourant moyen de 1 mA, les sources étant respectivement une lampe blanche (b) et un laser à colorant (c). Le laser présente un excès de bruit en-dessous de 2 MHz. Le bruit de photons devient complètement indépendant de la source, pour des fréquences d'analyse au-dessus de 3 MHz.

IV. LINEARITE DU DETECTEUR.

Afin de détecter la statistique des photons du faisceau arrivant sur la photodiode, il est important de s'assurer de son fonctionnement en régime linéaire. La variation de la puissance de bruit, référencée par rapport au bruit de l'amplificateur montre un comportement linéaire pour des variations du courant moyen comprises entre 100 μA et 1.5 mA, ce qui est à peu près en accord avec l'expression (Ann. I.6). Rappelons que pour les puissances utilisées dans les expériences mettant en évidence des effets du bruit de photons (cf. Chapitre III), les courants moyens donnés par les photodiodes étaient typiquement de l'ordre de 300 μA , et étaient donc situés dans la zone de fonctionnement linéaire.

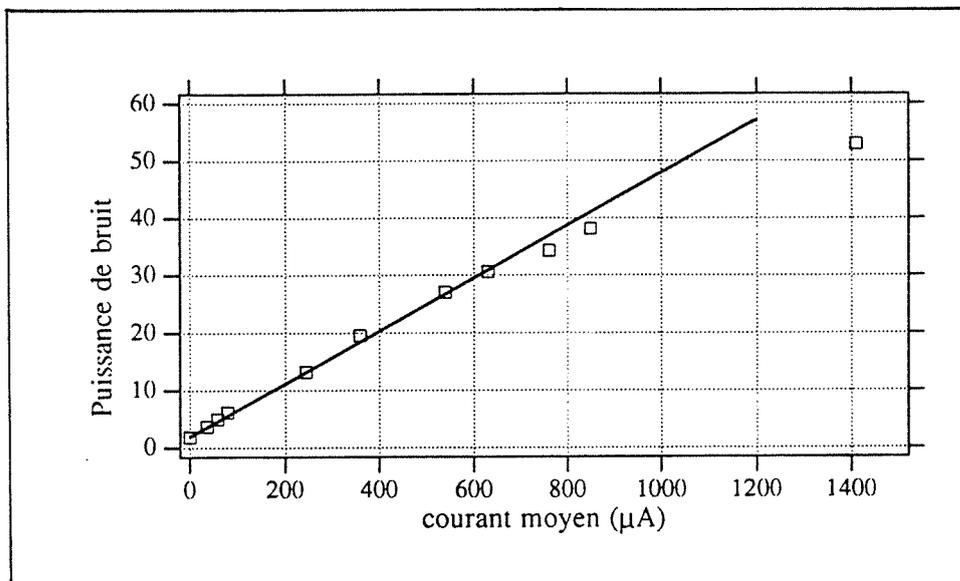


Figure Ann. I-3 :

Variation de la puissance de bruit, en fonction du courant moyen \bar{I}_C . D'après la formule de Schottky, le fonctionnement linéaire est tel que i_{SN}^2 soit proportionnel à \bar{I}_C . La saturation apparaît ainsi vers 700 μV .

ANNEXE II

ANALYSE DE LA MESURE QND PAR EFFET KERR CROISE EN
REPRESENTATION DE SCHRÖDINGER

Nous considérons deux systèmes \mathcal{S} et \mathcal{M} , couplés par l'hamiltonien d'interaction \mathcal{H}_{MS} défini en (I.C.1), mais d'un point de vue plus proche de la Théorie de la Mesure, correspondant à des mesures quantiques des observables \hat{N} , nombre de photons, et $\hat{\phi}$, opérateur phase hermitique défini par Barnett et Pegg, sur un système évoluant en représentation de Schrödinger.

L'état initial du système $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ correspond à un état produit, les deux parties n'étant initialement pas corrélées :

$$|\psi^{in}\rangle = |\psi_S^{in}\rangle \otimes |\psi_M^{in}\rangle \quad (\text{Ann. II.1})$$

où les états ψ_S^{in} et ψ_M^{in} sont développés sur la base des états propres de \hat{N}_S et \hat{N}_M :

$$|\psi_S^{in}\rangle = \sum_{n_S} c_{n_S} |n_S\rangle \quad |\psi_M^{in}\rangle = \sum_{n_M} c_{n_M} |n_M\rangle \quad (\text{Ann. II.2})$$

1) Mesure sur le système \mathcal{S} avant interaction.

a) Mesure d'intensité.

$$\langle N_S \rangle_{in} = \sum_{n_S} n_S |c_{n_S}|^2 \quad \langle N_S^2 \rangle_{in} = \sum_{n_S} n_S^2 |c_{n_S}|^2 \quad (\text{Ann. II.3.a})$$

$$(\Delta N_S^2)_{in} = \sum_{n_S} n_S^2 |c_{n_S}|^2 - \left(\sum_{n_S} n_S |c_{n_S}|^2 \right)^2 \quad (\text{Ann. II.3.b})$$

b) Mesure de phase.

La matrice densité réduite correspondant au système \mathcal{S} s'écrit :

$$\rho_S^{in} = |\Psi_S^{in}\rangle \langle \Psi_S^{in}| \quad \rho_S^{in} = \sum_{n_S} \sum_{n'_S} c_{n_S} c_{n'_S}^* |n_S\rangle \langle n'_S| \quad (\text{Ann. II.4})$$

En considérant l'état phase, défini par [Pegg 89a] [Pegg 89b]:

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k e^{ik\theta} |k\rangle \quad (\text{Ann. II.5})$$

la densité de probabilité correspondant à une phase θ pour le système défini précédemment s'écrit :

$$P_S^{in}(\theta) = \langle \theta | \rho_S^{in} | \theta \rangle \quad P_S^{in}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_S} \sum_{n'_S} e^{i(n'_S - n_S)\theta} c_{n_S} c_{n'_S}^* \quad (\text{Ann. II.6})$$

On en déduit, pour une référence de phase θ_o , les valeurs moyennes correspondant à une mesure de la phase :

$$\langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{in} = \int_{\theta_o}^{\theta_o + 2\pi} \theta P_S^{in}(\theta) d\theta \quad \langle [\Phi_S(\theta_o)]^2 \rangle_{in} = \int_{\theta_o}^{\theta_o + 2\pi} \theta^2 P_S^{in}(\theta) d\theta \quad (\text{Ann. II.7})$$

2) Mesures sur le système \mathcal{S} après interaction.

a) Fonctions d'onde.

Nous négligeons l'évolution propre des deux systèmes. Cette approximation est valable si les hamiltoniens d'évolution libre ne font pas intervenir la phase des deux champs. La fonction d'onde à l'instant t s'écrit de façon générale :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_S} \sum_{n_M} c_{n_S n_M}(t) |n_S\rangle |n_M\rangle \quad (\text{Ann. II.8})$$

qui a priori ne correspond naturellement plus à un état produit (ce qui traduit l'existence de corrélations quantiques non-séparables entre les deux systèmes). L'évolution de $|\psi(t)\rangle$ est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H}_{in} |\psi(t)\rangle \quad (\text{Ann. II.9})$$

soit pour chaque composante :

$$\frac{d c_{n_S n_M}(t)}{dt} = -i f_{n_S n_M} c_{n_S n_M}(t) \quad (\text{Ann. II.10})$$

qui se résout en :

$$c_{n_S n_M}(t) = c_{n_S} c_{n_M} e^{-if n_S n_M t} \quad (\text{Ann. II.11})$$

Pour un temps τ d'interaction, la fonction d'onde est donc donnée par :

$$|\Psi^{out}\rangle = \sum_{n_S} \sum_{n_M} c_{n_S} c_{n_M} e^{-if n_S n_M \tau} |n_S\rangle |n_M\rangle \quad (\text{Ann. II.12})$$

Remarque :

Cette expression est très différente de celle obtenue dans le modèle de mesure QND développé dans la partie I.A. L'état est ici un état quelconque de l'espace produit (ce qui se traduit par une double sommation), tandis que l'équation (I.A.39) correspond à un état beaucoup plus particulier où chaque état propre de l'observable QND est associé à un état donné de \mathcal{M} (la formule correspond alors à une seule sommation sur des états propres de l'observable mesurée pour \mathcal{S}).

b) Mesure d'intensité sur le système \mathcal{S} seul.

Pour une mesure portant uniquement sur le système \mathcal{S} , nous considérons donc la matrice réduite, obtenue par une trace partielle sur \mathcal{M} :

$$\rho_S^{out} = Tr_M [\rho^{out}] \quad (\text{Ann. II.13})$$

où $\rho^{out} = |\Psi^{out}\rangle \langle \Psi^{out}|$ correspond à la matrice densité totale du système $\mathcal{S} + \mathcal{M}$. D'après l'expression de $|\Psi^{out}\rangle$, la matrice réduite pour le système \mathcal{S} s'écrit :

$$\rho_S^{out} = \sum_{n_S} \sum_{n'_S} \left[\sum_{n_M} |c_{n_M}|^2 e^{if(n'_S - n_S) n_M \tau} \right] \quad (\text{Ann. II.14})$$

Les valeurs moyennes des mesures d'intensité étant données par :

$$\langle N_S \rangle_{out} = Tr \left[\rho_S (\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S) \right] \quad \left\langle (N_S)^2 \right\rangle_{out} = Tr \left[\rho_S (\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S)^2 \right] \quad (\text{Ann. II.15})$$

on obtient, compte-tenu de la relation de normalisation de la fonction d'onde $|\Psi_M^{in}\rangle$:

$$\begin{cases} \langle N_S \rangle_{out} = \langle N_S \rangle_{in} \\ \left\langle (N_S)^2 \right\rangle_{out} = \left\langle (N_S)^2 \right\rangle_{in} \\ (\Delta N_S)_{out} = (\Delta N_S)_{in} \end{cases} \quad (\text{Ann. II.17})$$

c) *Mesure de phase sur le système \mathcal{S} .*

La densité de probabilité en phase est donnée par :

$$P_S^{out}(\theta) = \langle \theta | \rho_S^{out} | \theta \rangle \quad (\text{Ann. II.18})$$

soit :

$$P_S^{out}(\theta) = \sum_{n_M} |c_{n_M}|^2 \left\{ i(n'_S - n_S)(\theta + fn_M\tau) \right\} \quad (\text{Ann. II.19})$$

que l'on peut écrire :

$$P_S^{out}(\theta) = \sum_{n_M} |c_{n_M}|^2 P_S^{in}(\theta + fn_M\tau) \quad (\text{Ann. I.20})$$

□ *Valeur moyenne de la phase :*

Pour une référence de phase θ_o , celle-ci est donnée par :

$$\langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{out} = \int_{\theta_o}^{\theta_o+2\pi} \theta P_S^{out}(\theta) d\theta \quad (\text{Ann. II.21})$$

En effectuant le changement de variable :

$$\Theta = \theta + fn_M\tau \quad (\text{Ann. II.22})$$

$$\Theta_o = \theta_o + fn_M\tau \quad (\text{Ann. II.23})$$

on obtient :

$$\langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{out} = \sum_{n_M} |c_{n_M}| \int_{\theta_o}^{\theta_o+2\pi} (\Theta + f n_M \tau) P_S^{in}(\Theta) d\Theta \quad (\text{Ann. II.24})$$

Compte-tenu de la relation de normalisation de la densité de probabilité $P_S^{in}(\theta)$:

$$\int_{\theta_o}^{\theta_o+2\pi} P_S^{in}(\Theta) d\Theta = 1, \quad \forall \theta_o \quad (\text{Ann. II.25})$$

et des équations (Ann. II.7), cette expression s'écrit :

$$\langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{out} = \sum_{n_M} |c_{n_M}|^2 \left[\langle \Phi_S(\theta_o + f n_M \tau) \rangle_{in} - f n_M \tau \right] \quad (\text{Ann. I.26})$$

Remarque :

On voit donc qu'il est a priori nécessaire de modifier pour chaque n_M le choix de référence de phase. Ceci est tout à fait logique. A titre d'exemple, considérons l'interaction de $|\psi_S^{in}\rangle$ avec une fonction d'onde $|\psi_M^{in}\rangle$ correspondant à un état de Fock $|N_M\rangle$. L'expression ci-dessus s'écrit alors :

$$\langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{out} = \langle \Phi_S(\theta_o + f N_M \tau) \rangle_{in} - f N_M \tau$$

Avec la notation $\Theta_o = \theta_o + f N_M \tau$ introduite précédemment, cette expression se réécrit :

$$\langle \Phi_S(\Theta_o - f N_M \tau) \rangle_{out} = \langle \Phi_S(\Theta_o) \rangle_{in} - f N_M \tau$$

L'évolution de l'état $|\psi_S\rangle$ peut donc être représentée schématiquement par un déphasage moyen ($-f N_M \tau$). Pour obtenir des valeurs moyennes correctes, il est nécessaire d'également déphaser le choix de référence de phase θ_o par cette même quantité [Barnett 89].

Dans l'hypothèse où l'on peut négliger ce problème, l'expression très naturelle pour le déphasage moyen correspond à une interaction de type effet Kerr croisé:

$$\langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{out} = \langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{in} - f \tau \langle N_M \rangle$$

(Ann. II.27)

□ *Ecart quadratique moyen pour une mesure de phase :*

$$\left\langle [\Phi_S(\theta_o)]^2 \right\rangle_{out} = \int_{\theta_o}^{\theta_o+2\pi} \theta^2 P_S^{out}(\theta) d\theta \quad (\text{Ann. II.28})$$

Par un calcul analogue à celui effectué précédemment :

$$\left\langle [\Phi_S(\theta_o)]^2 \right\rangle_{out} = \sum_{n_M} |c_{n_M}|^2 \left\{ \left\langle [\Phi_S(\theta_o + fn_M \tau)]^2 \right\rangle_{in} - 2fn_M \tau \langle \Phi_S(\theta_o + fn_M \tau) \rangle_{in} + (fn_M \tau)^2 \right\} \quad (\text{Ann. II.29})$$

En négligeant le problème de modification de référence de phase, on obtient à nouveau une relation "naturelle", compte-tenu des résultats obtenus avec le formalisme semi-classique :

$$\left\langle [\Phi_S(\theta_o)]^2 \right\rangle_{out} = \left\langle [\Phi_S(\theta_o)]^2 \right\rangle_{in} - 2f\tau \langle N_M \rangle_{in} \langle \Phi_S(\theta_o) \rangle_{in} + (f\tau)^2 \langle N_M^2 \rangle_{in} \quad (\text{Ann. II.30})$$

soit pour les écarts quadratiques moyens :

$$\boxed{(\Delta\Phi_S^2)_{out} = (\Delta\Phi_S^2)_{in} + (f\tau)^2 (\Delta N_M^2)_{in}} \quad (\text{Ann. II.31})$$

Par conséquent, si l'interaction ne modifie pas la valeur moyenne de l'intensité du système \mathcal{S} , ni son écart quadratique moyen, elle perturbe la phase et les fluctuations de phase associées.

Lorsque l'amplitude des fluctuations est très faible par rapport à celle des champs moyens, ΔN et $\Delta\Phi$ peuvent être remplacés par leur expressions approchées (I.A.26) et (I.A.27), en fonction de ΔP et ΔQ :

$$\Delta\Phi_S = \frac{1}{2\langle a_S \rangle} \Delta Q_S \quad \Delta N_M = \langle a_S \rangle \Delta P_M \quad (\text{Ann. II.32})$$

soit :

$$(\Delta Q_S^2)_{out} = (\Delta Q_S^2)_{in} + 4 (f\tau)^2 \langle a_S \rangle^2 \langle a_M \rangle^2 (\Delta P_M^2)_{in} \quad (\text{Ann. II.32})$$

Cette expression redonne bien le résultat obtenu dans le cadre du modèle semi-classique pour la transformation entrée-sortie des covariances, qui, avec les notations de cette annexe, s'écrit maintenant :

$$W_{q_S q_S}^{out} = W_{q_S q_S}^{in} + 4 (f\tau)^2 |E_S E_M|^2 W_{P_M P_M}^{out} \quad (\text{Ann. II.33})$$

Remarquons enfin que ces deux formalismes ne s'appliquent pas pour les mêmes domaines, les mesures en terme d'opérateur phase étant plus significatives pour des régimes de type électrodynamique en cavité.

Il reste à préciser quel est l'état du système \mathcal{S} lorsque l'on effectue une mesure de phase sur \mathcal{M} . Lorsque l'intensité du couplage tend vers l'infini, le système évolue alors vers un mélange statistique des différents états $|n_S\rangle$ avec un poids $|c_{n_S}|^2$ [Milburn 83] :

$$|\psi_S^{in}\rangle = \sum_{n_S} c_{n_S} |n_S\rangle \quad \rightarrow \quad \rho_S^{out} = \sum_{n_S} |c_{n_S}|^2 |n_S\rangle\langle n_S| \quad (\text{Ann. II.32})$$

Brune *et al.* ont également montré, à l'aide d'une simulation de simulation de Monte Carlo, l'effet d'une succession de mesures QND pour un hamiltonien effectif identique à celui que nous avons utilisé. L'état initial (état cohérent ou mélange statistique correspondant, par exemple, à un état du champ en équilibre thermique) évolue alors vers un état de Fock [Haroche 90] [Brune 90].

ANNEXE III

**ETAT DE L'ART DES REALISATIONS EXPERIMENTALES
DE MESURE QND EN OPTIQUE**

Nous nous proposons dans cette annexe d'exposer le principe des deux expériences ayant montré la possibilité de réaliser un couplage QND en Optique, réalisées par Levenson *et al.* à IBM en 1986, et par La Porta *et al.* aux Bells Labs en 1989. Ces deux expériences utilisent respectivement des non-linéarités à $\chi^{(3)}$, (effet Kerr dans une fibre optique) et à $\chi^{(2)}$ (génération paramétrique dans un cristal de KTP). En fonction des données fournies par les auteurs, nous recalculerons pour ces deux mesures, les critères d'efficacité définis au Chapitre I.

I. UTILISATION D'UNE NON-LINEARITE DE TYPE $\chi^{(2)}$.

1. Principe de l'expérience.

Le dispositif utilise un amplificateur paramétrique (génération paramétrique dans un cristal non-linéaire $\chi^{(2)}$), qui permet de créer une réplique d'une des quadratures du signal d'entrée tout en réduisant simultanément les fluctuations introduites sur cette quadrature par le processus de mesure [Yurke 85]. Le principe peut être facilement décrit en utilisant le modèle de l'amplificateur double [Slusher 89], pris en "sandwich" entre deux coupleurs linéaires (figure Ann. III-1).

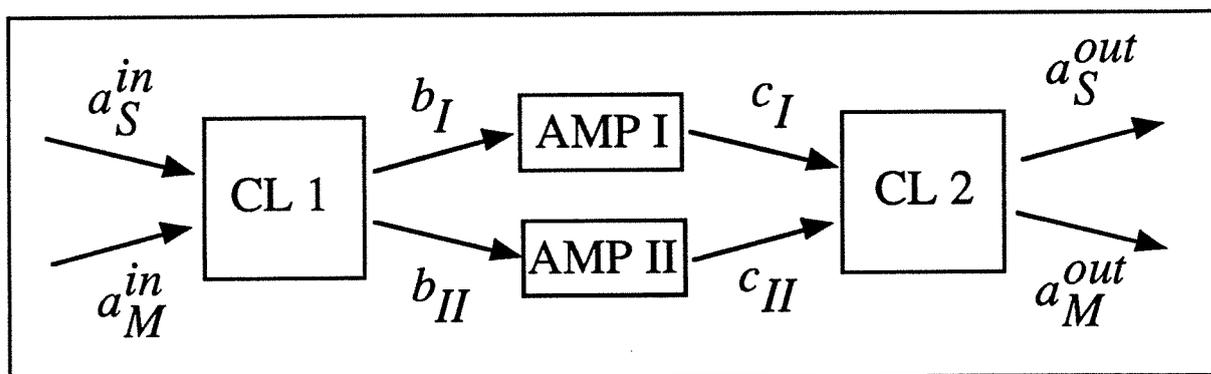


Figure Ann.III-1 :

Principe de la réalisation d'une mesure QND d'une composante de quadrature, à l'aide d'un amplificateur paramétrique dual (AMP I et AMP II). Les deux coupleurs linéaires (CL 1 et CL 2) effectuent une transformation linéaire inverse l'un de l'autre.

Le premier coupleur (i.e. une lame séparatrice ou tout dispositif équivalent) correspond à la transformation pour les fluctuations des champs :

$$\begin{cases} \delta b_I(\omega) = K \delta a_S^{in}(\omega) - \sqrt{1-K^2} \delta a_M^{in}(\omega) \\ \delta b_{II}(\omega) = \sqrt{1-K^2} \delta a_S^{in}(\omega) + K \delta a_M^{in}(\omega) \end{cases} \quad (\text{Ann. III.1})$$

tandis que le deuxième coupleur effectue la transformation inverse :

$$\begin{cases} \delta a_S^{out}(\omega) = \sqrt{1-K^2} \delta c_I(\omega) + K \delta c_{II}(\omega) \\ \delta a_M^{out}(\omega) = -K \delta c_I(\omega) + \sqrt{1-K^2} \delta c_{II}(\omega) \end{cases} \quad (\text{Ann. III.2})$$

En ajustant la phase du faisceau de pompe, la transformation induite par l'amplificateur paramétrique *AMP I* s'écrit :

$$\delta c_I(\omega) = G \delta b_I(\omega) + \sqrt{G^2-1} \delta b_I(-\omega)^* \quad (\text{Ann. III.3})$$

L'amplificateur *AMP II* est pompé en quadrature par rapport à *AMP I*, soit :

$$\delta c_{II}(\omega) = G \delta b_{II}(\omega) - \sqrt{G^2-1} \delta b_{II}(-\omega)^* \quad (\text{Ann. III.4})$$

En combinant ces différentes expressions, la transformation entrée-sortie s'écrit finalement :

$$\delta a_S^{out}(\omega) = 2GK\sqrt{1-K^2} \delta a_S^{in}(\omega) + G(2K^2-1) \delta a_M^{in}(\omega) - \sqrt{G^2-1} \delta a_M^{in}(-\omega)^* \quad (\text{Ann. III.5a})$$

$$\delta a_M^{out}(\omega) = 2GK\sqrt{1-K^2} \delta a_M^{in}(\omega) - G(2K^2-1) \delta a_S^{in}(\omega) - \sqrt{G^2-1} \delta a_S^{in}(-\omega)^* \quad (\text{Ann. III.5b})$$

La condition $2GK\sqrt{1-K^2} = 1$ est obtenue pour $K = \cos \theta$ tel que $\sin 2\theta = 1/G$, soit :

$$\begin{cases} K = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{G^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \\ 2K^2 - 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{G^2}} \end{cases} \quad (\text{Ann. III.6})$$

la transformation entrée-sortie des fluctuations des champs s'écrivant alors :

$$\begin{cases} \delta a_S^{out}(\omega) = \delta a_S^{in}(\omega) + i \sqrt{G^2 - 1} [\delta a_M^{in}(\omega) - \delta a_M^{in}(-\omega)^*] \\ \delta a_M^{out}(\omega) = \delta a_M^{in}(\omega) - \sqrt{G^2 - 1} [\delta a_S^{in}(\omega) + \delta a_S^{in}(-\omega)^*] \end{cases} \quad (\text{Ann. III.7})$$

soit :

$$\begin{cases} p_S^{out} = p_S^{in} \\ q_S^{out} = q_S^{in} + 2\sqrt{G^2 - 1} q_M^{in} \\ p_M^{out} = p_M^{in} - 2\sqrt{G^2 - 1} p_S^{in} \\ q_M^{out} = q_M^{in} \end{cases} \quad (\text{Ann. III.8})$$

Le système effectue ainsi, au signe près, la transformation paramétrique idéale, définie au Chapitre I § BIII (eq. I.A-31). Ce résultat est remarquable, mais il était peu intuitif qu'une telle association d'amplificateurs paramétriques conduise à une mesure non-perturbative pour la quadrature p_r . En fait, les deux coupleurs combinent les transformations induites par les deux amplificateurs, de façon que les bruits introduits se compensent pour une des quadratures et s'ajoutent pour la quadrature conjuguée.

Les canaux correspondant au signal et à la mesure peuvent être soit des modes spatiaux séparés, soit des fréquences séparées. Dans l'expérience, ces deux voies sont deux polarisations orthogonales [Shelby 87] couplées en un seul passage dans un cristal de KTP, pompé par un laser YAG doublé, pulsé (figure Ann. III-2). L'accord de phase dans le cristal est de type II : le faisceau signal est dirigé suivant l'axe z du cristal (polarisation extra-ordinaire) tandis que le faisceau complémentaire (ou "idler") et le faisceau de pompe sont polarisés suivant l'axe \hat{y} (polarisation ordinaire).

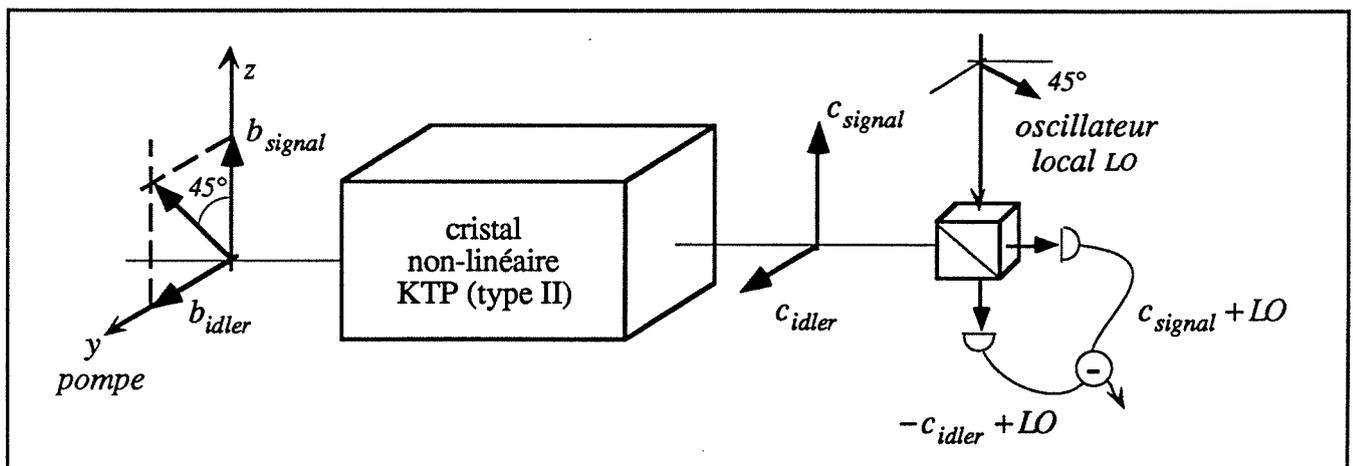


Figure Ann.III-2 :

Description schématique de la géométrie et des directions de polarisation utilisées pour réaliser un amplificateur dual, avec un seul cristal non-linéaire de KTP. La détection des champs amplifiés est effectuée grâce à une détection homodyne [Slusher 89].

Les champs entrants (opérateurs \hat{b}_{signal} et \hat{b}_{idler}) sont alors amplifiés suivant la transformation [Yariv 89] :

$$\hat{c}_{signal} = G \hat{b}_{signal} + \sqrt{G^2 - 1} \hat{b}_{idler}^\dagger \quad (\text{Ann. III.9.a})$$

$$\hat{c}_{idler} = \sqrt{G^2 - 1} \hat{b}_{signal}^\dagger + G \hat{b}_{idler} \quad (\text{Ann. III.9.b})$$

Les polarisations I et II, à 45° par rapport à ces deux axes, correspondent ainsi à des canaux se propageant de façon indépendante l'un par rapport à l'autre :

$$\begin{cases} \hat{b}_I = \frac{\hat{b}_{signal} + \hat{b}_{idler}}{\sqrt{2}} \\ \hat{b}_{II} = \frac{\hat{b}_{signal} - \hat{b}_{idler}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{c}_I = \frac{\hat{c}_{signal} + \hat{c}_{idler}^\dagger}{\sqrt{2}} \\ \hat{c}_{II} = \frac{\hat{c}_{signal} - \hat{c}_{idler}^\dagger}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (\text{Ann. III.10a})$$

$$\begin{cases} \hat{c}_I = G \hat{b}_I + \sqrt{G^2 - 1} \hat{b}_I^\dagger \\ \hat{c}_{II} = G \hat{b}_{II} - \sqrt{G^2 - 1} \hat{b}_{II}^\dagger \end{cases} \quad (\text{Ann. III.10b})$$

expressions dont les eq.(Ann. III.3) et (Ann. III.3) sont les équivalents semi-classiques. Le gain en amplitude, mesuré sur une quelconque des deux voies à l'aide d'un détecteur homodyne, est donné par :

$$G_f = G + \sqrt{G^2 - 1} \quad (\text{Ann.III.11a})$$

soit :

$$G = \frac{1}{2} \left(G_f + \frac{1}{G_f} \right) \quad (\text{Ann. III.11b})$$

La transformation des composantes de quadrature peut ainsi être réécrite sous la forme utilisée par les auteurs :

$$\begin{cases} p_S^{out} = p_S^{in} \\ q_S^{out} = q_S^{in} + \left(G_f - \frac{1}{G_f} \right) q_M^{in} \\ p_M^{out} = p_M^{in} - \left(G_f - \frac{1}{G_f} \right) p_S^{in} \\ q_M^{out} = q_M^{in} \end{cases} \quad (\text{Ann.III.12})$$

2. Résultats expérimentaux [La Porta 89].

Le coefficient d'amplification mesuré est $G_f = 1.33$, ce qui correspond avec nos notations à un transfert classique donné par :

$$\alpha_{MS} = G_f - \frac{1}{G_f} = 0.58 \quad (-4.7 \text{ dB}) \quad (\text{Ann. III.13})$$

Les auteurs ont montré clairement une variation des bruits pour chaque quadrature suivant une évolution donnée par l'éq. (Ann. III.12). En particulier, le bruit sur la quadrature p_s^{out} est le même avec ou sans l'amplificateur, à une précision d'environ 0.5 dB fixée par la résolution expérimentale due à la bande d'analyse. Les photocourants correspondant à la quadrature signal et à la quadrature de mesure sont ensuite recombinaés en introduisant un gain électronique égal au transfert classique attendu :

$$p^{out} = p_M^{out} + \alpha_{MS} p_S^{out} \quad (\text{Ann. III.14})$$

Lorsqu'il y a des corrélations entre les deux quadratures en sortie, le bruit associé au photocourant total doit ainsi descendre en-dessous du niveau recombinaé pour des bruits de photons non-corrélés :

$$W_{p_{eff}p_{eff}}^{out} = W_{p_M p_M}^{in} + |\alpha_{MS}|^2 W_{p_S p_S}^{in} \quad (\text{Ann. III.15})$$

Les corrélations existantes sont en fait diminuées par la transmission partielle η sur le faisceau signal, i.e. pour les fluctuations recombinaées :

$$p_{eff}^{out} = (p_M^{in} - \alpha_{MS} p_S^{in}) + \alpha_{MS} (\sqrt{\eta} p_S^{in} + \sqrt{1-\eta} p_S^{ad}) \quad (\text{Ann. III.16a})$$

$$p_{eff}^{out} = p_M^{in} - \alpha_{MS}(1-\sqrt{\eta}) p_S^{in} + \alpha_{MS} \sqrt{1-\eta} p_S^{ad} \quad (\text{Ann. III.16b})$$

soit pour les variances (en supposant α_{MS} réel) :

$$W_{p_{eff}p_{eff}}^{out} = W_{p_M p_M}^{in} + \alpha_{MS}^2 \left[(1-\eta) + (1-\sqrt{\eta})^2 \right] W_{p_S p_S}^{in} \quad (\text{Ann. II.17})$$

Pour $\eta = 1$, $W_{p_{eff}p_{eff}}^{out} = W_{p_M p_M}^{in}$ et les fluctuations recombinaées descendent au niveau du bruit de photons du faisceau de mesure seul. L'existence de corrélations quantiques, obtenues en sortie du dispositif avec une efficacité de détection non-parfaite, correspond ainsi à :

$$W_{P_M P_M}^{in} < W_{P_{eff} P_{eff}}^{out} < W_{P_M P_M}^{in} + |\alpha_{MS}|^2 W_{P_S P_S}^{in} \quad (\text{Ann. III.18})$$

En changeant la phase de l'oscillateur local de $\pi/2$, les détections homodynes permettent d'obtenir les fluctuations des quadratures conjuguées q_m^{out} et q_s^{out} , soit pour le photocourant recombinaé :

$$q_{eff}^{out} = q_M^{out} + \alpha_{MS} [\sqrt{\eta} q_S^{out} + \sqrt{1-\eta} q_S^{ad}] \quad (\text{Ann. III.19a})$$

d'où d'après l'éq. (Ann. III.12) :

$$q_{eff}^{out} = (1 + \alpha_{MS}^2 \sqrt{\eta}) q_M^{in} + \alpha_{MS} \sqrt{\eta} q_S^{in} + \alpha_{MS} \sqrt{1-\eta} q_S^{ad} \quad (\text{Ann. III.19b})$$

correspondant à une variance :

$$W_{q_{eff} q_{eff}}^{out} = (1 + \alpha_{MS}^2 \sqrt{\eta})^2 W_{P_M P_M}^{in} + \gamma_{MS}^2 W_{P_S P_S}^{in} \quad (\text{Ann. III.19c})$$

où nous avons supposé que les faisceaux étaient initialement dans des états cohérents (variance identique sur toutes les quadratures).

En fonction des paramètres donnés dans l'article [La Porta 89], $\eta = 0.49$ et $W_M^{in} = 0.355 W_S^{in}$, correspondant à un bruit recombinaé W^{out} en absence de corrélation situé à -1.6 dB en dessous du bruit de photons du faisceau signal seul, les expressions (Ann.III.17) et (Ann.III.19) conduisent à :

$$W_{P_{eff} P_{eff}}^{out} = 0.80 W^{out} \quad (-1.0 \text{ dB}) \quad (\text{Ann. III.20a})$$

$$W_{q_{eff} q_{eff}}^{out} = 1.30 W^{out} \quad (+1.0 \text{ dB}) \quad (\text{Ann. III.20b})$$

valeurs à peu près en accord avec les résultats expérimentaux obtenus par les auteurs et correspondant à des valeurs légèrement plus faibles : -0.6 dB et +1.0 dB. La différence est interprétée comme due à une longueur d'impulsion pour le faisceau de pompe différente de celle du faisceau servant d'oscillateur local.

Ces résultats nous permettent de calculer les bruits équivalents ramenés à l'entrée, caractérisant ce dispositif. D'après les résultats obtenus au Chapitre I § C pour une transformation paramétrique avec pertes (eq (I.C.12)):

$$N_S^{eq} = \frac{1-\eta}{\eta} = 1.0 \quad N_M^{eq} = \frac{1}{\alpha_{MS}^2} = 3.0 \quad (\text{Ann. III.21})$$

soit :

$$N_S^{eq} \cdot N_M^{eq} = 3.0 \quad (\text{Ann. III.22})$$

Le dispositif réalisé permet donc d'obtenir des corrélations en sortie mais, pour une détection non-destructive d'une information d'entrée, il s'avère beaucoup moins efficace qu'une simple lame transmettant une fraction η du signal en intensité ! L'efficacité de la mesure est ici limitée à la fois par le gain non-linéaire et par les pertes dans l'optique et la détection. Si on essaie d'augmenter le gain paramétrique, par exemple en focalisant davantage la pompe dans le cristal, il apparaît alors une déformation spatiale des faisceaux, détruisant tout effet sur les bruits quantiques [La Porta 91]. En conclusion, ce dispositif à $\chi^{(2)}$ en régime pulsé, à l'origine très séduisant par sa simplicité, s'avère en fait avoir une efficacité limitée.

Nous pouvons également recalculer la variance conditionnelle entre les deux quadratures p_S^{out} et p_M^{out} . En introduisant les pertes η sur le signal, les différentes variances s'écrivent :

$$W_{p_S p_S}^{out} = 1 \quad W_{p_M p_M}^{out} = 1 + \alpha_{MS}^2 \quad \left| W_{p_S p_M}^{out} \right|^2 = \eta \alpha_{MS}^2 \quad (\text{Ann. III.23})$$

soit en reportant dans l'expression (I.B.50) :

$$W_{p_S | p_M}^{out} = \left[1 - \frac{\eta \alpha_{MS}^2}{1 + \alpha_{MS}^2} \right] = 0.88 \quad (-0.6 \text{ dB}) \quad (\text{Ann. III.24})$$

qui correspond à une réduction de 0.6 dB en-dessous du bruit de photon pour la quadrature signal.

II. EXPERIENCES UTILISANT DES NON-LINEARITES DE TYPE $\chi^{(3)}$.

Comme vu précédemment, l'idée fondamentale des non-linéarités de type $\chi^{(3)}$ est d'utiliser l'effet Kerr optique afin de coupler les fluctuations d'intensité du faisceau signal aux fluctuations de phase du faisceau de mesure. Le faisceau signal voyant uniquement un milieu dont l'indice varie, ses fluctuations d'intensité ne sont pas affectées (condition QND). L'information est ensuite obtenue en utilisant une détection sensible à la phase [Imoto 85].

1. Transformation entrée-sortie des fluctuations quantiques.

L'indice dépendant de l'intensité lumineuse par :

$$n(I) = n_0 + n_2|E|^2 \quad (\text{Ann. III.25})$$

les deux champs sont déphasés à la traversée du milieu de longueur ℓ :

$$\mathcal{E}_S^{out} = \mathcal{E}_S^{in} e^{-i\varphi_S} \quad \mathcal{E}_M^{out} = \mathcal{E}_M^{in} e^{-i\varphi_M} \quad (\text{Ann. III.26a})$$

où :

$$\varphi_S = \varphi_S^0 + \varphi_{NL} \quad \varphi_M = \varphi_M^0 + \varphi_{NL} \quad (\text{Ann. III.26b})$$

correspondant à un déphasage non-linéaire, donné en fonction des amplitudes complexes des champs :

$$\varphi_{NL} = f_K \left(|\mathcal{E}_S|^2 + |\mathcal{E}_M|^2 \right) \quad (\text{Ann. III.27})$$

En linéarisant les équations (Ann. III.26) pour les champs moyens, la transformation entrée-sortie des composantes de quadrature est donnée par :

$$\begin{cases} p_S^{out} = p_S^{in} \\ q_S^{out} = q_S^{in} - 2g_S p_S^{in} - 4(g_S g_M)^{1/2} p_M^{in} \end{cases} \quad (\text{Ann. III.28a})$$

$$\begin{cases} p_M^{out} = p_M^{in} \\ q_M^{out} = q_M^{in} - 2g_M p_M^{in} - 4(g_S g_M)^{1/2} p_S^{in} \end{cases} \quad (\text{Ann. III.28b})$$

avec :

$$g_S = f_K |\mathcal{E}_S^{in}|^2 \quad g_M = f_K |\mathcal{E}_M^{in}|^2 \quad (\text{Ann. III.28c})$$

En supposant les deux faisceaux initialement au bruit de photons, les paramètres de caractérisation sont donnés par :

$$\begin{cases} N_S^{eq} = 0 \\ N_M^{eq} = \frac{1 + 4g_M^2}{16g_S g_M} \end{cases} \quad (\text{Ann. III.29a})$$

$$W_{p_S|q_M}^{out} = \frac{1 + 4g_M^2}{1 + 4g_M^2 + 16g_S g_M} \quad (\text{Ann.III.29.b})$$

Nous retrouvons une mesure QND idéale lorsque g_S est très grand, et en particulier beaucoup plus grand que g_M . Dans le cas contraire, le bruit de phase introduit par l'automodulation de phase du faisceau de mesure détruit l'efficacité de la mesure.

2. Résultats expérimentaux.

Levenson *et al.* ont réalisé le couplage à $\chi^{(3)}$ dans une fibre optique monomode et, ainsi, ont pu mettre en évidence pour la première fois une préparation d'état quantique [Levenson 86] [Levenson 87]. A la sortie de la fibre, les deux faisceaux, de fréquences différentes, sont séparés par un prisme. Le faisceau signal est détecté directement, donnant ainsi un photocourant dont les fluctuations reproduisent p_S^{out} . L'information due à la mesure étant sur les fluctuations de phase q_M^{out} , il est nécessaire d'utiliser un dispositif interférométrique pour les détecter. Levenson *et al.* ont utilisé la réflexion du faisceau sur une cavité désaccordée : on peut alors montrer (cf. Chapitre III.B) que les fluctuations de phase sont alors transformées en fluctuations d'intensité, que l'on peut ensuite détecter directement.

Les auteurs ont montré que le faisceau signal en sortie était au bruit de photons du signal d'entrée (ce qui, rappelons-le, ne prouve pas l'existence de corrélations entrée-sortie), et ont obtenu, en recombinaison des deux photocourants avec des gains électroniques appropriés, une réduction de 5 % (- 0.2 dB) en-dessous du bruit de photon du faisceau signal seul.

L'expérience s'est avérée être limitée par l'existence d'une source de bruit de phase non-corrélée, due à des modes de relaxation vibrationnelle thermiquement excités dans la fibre (GAWBS) [Shelby 85] : même en plongeant la fibre à la température de l'hélium liquide, le bruit W_{GAWBS} ainsi rajouté était suffisamment important, par rapport à la partie utile correspondant au bruit corrélé aux fluctuations d'amplitude du faisceau signal, pour réduire considérablement l'efficacité de la mesure.

En tenant compte des pertes η_S et η_M sur les deux voies, les transformations des quadratures signal et mesure s'écrivent :

$$\begin{cases} p_S^{out} = \eta_S p_S^{in} + \sqrt{1 - \eta_S^2} p_S^{ad} \\ p_M^{out} = \eta_M \left[q_M^{in} - 2g_M p_M^{in} - 4\sqrt{g_S g_M} p_S^{in} \right] + \sqrt{1 - \eta_M^2} q_M^{ad} + q_{GAWBS} \end{cases} \quad (\text{Ann. III.30})$$

d'où :

$$N_S^{eq} = \frac{\sqrt{1 - \eta_S^2}}{\eta_S^2} \quad N_M^{eq} = \frac{1 + 4\eta_M^2 g_M^2 + W_{GAWBS}}{16\eta_M^2 g_S g_m} \quad (\text{Ann. III.31a})$$

$$N_M^{eq} = \frac{1 + 4\eta_M^2 g_M^2 + W_{GAWBS} + 16\eta_M^2 g_S g_m (1 - \eta_S^2)}{1 + 4\eta_M^2 g_M^2 + 16\eta_M^2 g_S g_m + W_{GAWBS}} \quad (\text{Ann. III.31c})$$

Compte-tenu des valeurs données par les auteurs [Levenson 87], on obtient ainsi :

$$\begin{cases} \eta_S = 0.64 \\ \eta_M = 0.4 \end{cases} \quad \begin{cases} g_S = 0.4 \\ g_M = 0.15 \end{cases} \quad (\text{Ann. III.32})$$

on obtient d'après la mesure de la variance conditionnelle, égale à 0.95, le bruit supplémentaire :

$$W_{GAWBS} \sim 0.09 \quad (\text{Ann. III.33})$$

d'où en reportant dans les expressions des bruits équivalents :

$$N_S^{eq} \sim 1.4 \quad N_M^{eq} \sim 7.2 \quad (\text{Ann. III.34a})$$

$$N_S^{eq} \cdot N_M^{eq} \sim 10.4 \quad (\text{Ann. III.34a})$$

Là encore, le bruit rajouté par le milieu non-linéaire et les pertes introduites sur les faisceaux détruisent complètement les corrélations entrée-sortie. Pour augmenter le couplage entre les deux faisceaux, il est nécessaire d'obtenir des effets non-linéaires plus importants. La première solution consistant à simplement augmenter les puissances laser, ne peut être retenue car, alors, le bruit de phase généré par la diffusion due aux GAWBS masque complètement les corrélations quantiques. Les auteurs ont donc essayé de réduire la longueur de la fibre, et de former autour de celle-ci une cavité en anneau. Si théoriquement les effets de couplage doivent être augmentés par la finesse de la cavité, les auteurs n'ont pu observer d'effets quantiques associés, les instabilités de la cavité introduisant à nouveau du bruit de phase non-corrélé [Bachor 88].

Une autre expérience, réalisée par Imoto *et al.* dans les fibres à préservation de polarisation, de grande longueur ($\ell \approx 500$ m) a montré l'existence d'un transfert de modulation classique entre la quadrature signal et la quadrature mesure. Par contre, les pertes étaient trop grandes pour pouvoir observer des corrélations au niveau quantique [Imoto 89].

ANNEXE IV

**ETUDE DE LA DISPERSION A DEUX PHOTONS PAR
LA METHODE DE L'HAMILTONIEN EFFECTIF**

1. Principe de la méthode.

La sommation sur les niveaux intermédiaires figurant dans les expressions (II.C.1.a) et (II.C.1.b) des déphasages non-linéaires, peut être regroupée en :

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{M_r} \langle J_e M_e | \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_2 | J_r M_r \rangle \langle J_r M_r | \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_1 | J_g M_g \rangle = \left\langle J_e M_e | \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_2 \left| \frac{1}{\hbar \omega_1 - \mathcal{H}_{at}} \right| \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_1 | J_g M_g \right\rangle \quad (\text{Ann. IV.1})$$

Cette technique, usuelle dans l'étude des transitions à deux photons [Grynberg 77], permet ainsi d'éliminer la sommation sur les niveaux intermédiaires en introduisant un opérateur effectif à deux photons :

$$\mathcal{Q}^{eg} = (\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_2) \frac{1}{\hbar \omega_1 - \mathcal{H}_{at}} (\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_1) \quad (\text{Ann. IV.2})$$

Les déphasages non-linéaires s'expriment alors simplement par :

$$\phi_1^{nt(2\text{photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_{rg} \omega_{er}}{2 \varepsilon_0 c} \frac{1}{\hbar \delta} \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{\omega_2} \left[\frac{1}{2J_g + 1} \sum_{M_g M_e} \left| \langle J_e M_e | \mathcal{Q}^{eg} | J_g M_g \rangle \right|^2 \right] \quad (\text{Ann. IV.3a})$$

$$\phi_2^{nt(2\text{photons})} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_{rg} \omega_{er}}{2 \varepsilon_0 c} \frac{1}{\hbar \delta} \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\omega_1} \left[\frac{1}{2J_g + 1} \sum_{M_g M_e} \left| \langle J_e M_e | \mathcal{Q}^{eg} | J_g M_g \rangle \right|^2 \right] \quad (\text{Ann. IV.3b})$$

Les vecteurs caractérisant la polarisation des champs s'exprimant dans la base standard de polarisation $\{e_q\}_{q=0,+1,-1}$, l'opérateur \mathcal{Q}^{eg} peut se décomposer en :

$$\mathcal{Q}^{eg} = \sum_i \sum_j \mathcal{Q}_{ij}^{eg} \quad (\text{Ann. IV.4})$$

avec :

$$\mathcal{Q}_{ij}^{eg} = (\vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_{q_i}) \frac{1}{\hbar\omega_l - \mathcal{E}_{at}} (\vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_{q_j}) \quad (\text{Ann. IV.5})$$

L'opérateur dipolaire électrique étant de rang 1, et l'opérateur $1/(\hbar\omega_l - \mathcal{E}_{at})$ étant scalaire (c'est-à-dire de rang 0), les opérateurs \mathcal{Q}_{ij}^{eg} peuvent à leur tour se décomposer en une somme d'opérateurs tensoriels \mathcal{Q}^k pour $k = 0, 1, 2$.

$$\mathcal{Q}_q^k = \sum_i \sum_j \langle 11kq | 1q_i 1q_j \rangle \mathcal{Q}_{ij}^{eg} \quad (\text{Ann. IV.6})$$

qui s'inverse en :

$$\mathcal{Q}_{ij}^{eg} = \sum_k \sum_q \langle 11kq | 1q_i 1q_j \rangle \mathcal{Q}_q^k \quad (\text{Ann. IV.7})$$

L'opérateur \mathcal{Q}^{eg} peut ainsi s'écrire :

$$\mathcal{Q}^{eg} = a_0^0 \mathcal{Q}_0^0 + \sum_{q=-1}^1 a_q^1 \mathcal{Q}_q^1 + \sum_{q=-2}^2 a_q^2 \mathcal{Q}_q^2 \quad (\text{Ann. IV.8})$$

où les coefficients a_q^k correspondent à :

$$a_q^k = \sum_i \sum_j \langle 11kq | 1q_i 1q_j \rangle \quad (\text{Ann. IV.9})$$

Les coefficients a_q^k sont donnés dans le tableau (Ann. IV.1) pour des faisceaux ayant des polarisations standard.

2. Expressions générales.

En utilisant cette décomposition, on peut montrer [Grynberg 77] la relation suivante :

$$\sum_{M_g} \sum_{M_e} \left| \langle J_e M_e | Q^{eg} | J_g M_g \rangle \right|^2 = \quad (\text{Ann.IV.10})$$

$$\frac{1}{(\hbar\Delta)^2} \left| \langle eJ_e \parallel d^{(1)} \parallel rJ_r \rangle \right|^2 \left| \langle rJ_r \parallel d^{(1)} \parallel gJ_g \rangle \right|^2 \sum_{k=0}^2 \left\{ \begin{matrix} J_g & J_e & k \\ 1 & 1 & J_r \end{matrix} \right\}^2 \sum_{q=-k}^k |a_q^k|^2$$

Cette méthode présente donc l'intérêt de conduire à des expressions générales pour le facteur de forme \mathcal{F} introduit au Chapitre II §C) :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2J_g + 1} \left| \langle eJ_e \parallel d^{(1)} \parallel rJ_r \rangle \right|^2 \left| \langle rJ_r \parallel d^{(1)} \parallel gJ_g \rangle \right|^2 \sum_{k=0}^2 \left\{ \begin{matrix} J_g & J_e & k \\ 1 & 1 & J_r \end{matrix} \right\}^2 \sum_{q=-k}^k |a_q^k|^2 \quad (\text{Ann. IV.11})$$

Cette formule présente l'avantage de faire apparaître de façon découplée l'effet des polarisations des champs et l'effet de la structure atomique.

En procédant de la même façon que pour la partie (II.C), on en déduit des expressions générales pour les déphasages non linéaires :

$$\phi_1^{nl(2\text{photons})} = n_{at} \ell \frac{3\lambda_{rg}^2}{\pi} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3 \frac{\Gamma_{rg} / 2 (\Gamma_{rg} / 2)^2}{\delta \Delta^2} \frac{I_2}{I_{gr}^{sat}} \left\{ \frac{\Gamma_{er} 2J_e + 1}{\Gamma_{rg} 2J_g + 1} \sum_{k=0}^2 \left\{ \begin{matrix} J_g & J_e & k \\ 1 & 1 & J_r \end{matrix} \right\}^2 \sum_{q=-2}^2 |a_q^k|^2 \right\} \quad (\text{Ann. IV.11a})$$

$$\phi_2^{nl(2\text{photons})} = n_{at} \ell \frac{3\lambda_{rg}^2}{\pi} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \frac{\Gamma_{rg} / 2 (\Gamma_{rg} / 2)^2}{\delta \Delta^2} \frac{I_1}{I_{gr}^{sat}} \left\{ \frac{\Gamma_{er} 2J_e + 1}{\Gamma_{rg} 2J_g + 1} \sum_{k=0}^2 \left\{ \begin{matrix} J_g & J_e & k \\ 1 & 1 & J_r \end{matrix} \right\}^2 \sum_{q=-2}^2 |a_q^k|^2 \right\} \quad (\text{Ann. IV.11b})$$

Onde ① Onde ②	σ ($q_1 = -1$)	π ($q_1 = 0$)	σ_+ ($q_1 = +1$)
σ ($q_2 = -1$)	$a_q^2 = \delta_{q,2}$ $a_q^1 = 0$ $a_0^0 = 0$	$a_q^2 = \delta_{q,-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_q^1 = \delta_{q,0} \frac{1}{\sqrt{6}}$ $a_0^0 = 0$	$a_q^2 = \delta_{q,0} \frac{1}{\sqrt{6}}$ $a_q^1 = -\delta_{q,0} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
π ($q_2 = 0$)	$a_q^2 = \delta_{q,1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_q^1 = \delta_{q,-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_0^0 = 0$	$a_q^2 = \delta_{q,0} \sqrt{\frac{2}{3}}$ $a_q^1 = 0$ $a_0^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$a_q^2 = \delta_{q,1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_q^1 = -\delta_{q,1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_0^0 = 0$
σ_+ ($q_2 = 1$)	$a_q^2 = \delta_{q,0} \frac{1}{\sqrt{6}}$ $a_q^1 = \delta_{q,0} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$a_q^2 = \delta_{q,1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_q^1 = \delta_{q,1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $a_0^0 = 0$	$a_q^2 = \delta_{q,2}$ $a_q^1 = 0$ $a_0^0 = 0$

Tableau Ann. IV.1 :

Composantes tensorielles de l'hamiltonien effectif à deux niveaux, en fonction des polarisations des deux ondes interagissant dans la transition à deux photons [Grynberg 77].

3. Cas particuliers considérés précédemment.

Considérons les deux types d'interaction envisagés dans au Chapitre II § C :

a) Comparaison des interactions ($\sigma_+/\sigma_+ + \sigma_-$) dans les processus
 (a) ($3s\ 1/2 \rightarrow 3p\ 3/2 \rightarrow 3d\ 3/2$) et (b) ($3s\ 1/2 \rightarrow 3p\ 3/2 \rightarrow 3d\ 5/2$)

La polarisation des champs correspond à :

$$\sum_k \sum_q |a_q^k|^2 = 1/3 \ (k=0), \ 1/2 \ (k=1) \ \text{ou} \ 7/6 \ (k=2) \quad (\text{Ann.IV.14})$$

En fonction des coefficients "6-j" :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J_g = \frac{1}{2} & J_e & 0 \\ 1 & 1 & J_r = \frac{3}{2} \end{array} \right\}^2 = 0 \quad \text{pour} \quad J_e = \frac{3}{2} \ \text{et} \ \frac{5}{2} \quad (\text{Ann. IV.15.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J_g = \frac{1}{2} & J_e & 1 \\ 1 & 1 & J_r = \frac{3}{2} \end{array} \right\}^2 = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad J_e = \frac{5}{2} \\ \frac{5}{72} & \text{pour} \quad J_e = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{Ann. IV.15.b})$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J_g = \frac{1}{2} & J_e & 2 \\ 1 & 1 & J_r = \frac{3}{2} \end{array} \right\}^2 = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{pour} \quad J_e = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{120} & \text{pour} \quad J_e = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{Ann. IV.15.c})$$

et du rapport des éléments de matrice réduits :

$$\frac{\left\langle 3d\ \frac{5}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3p\ \frac{3}{2} \right\rangle}{\left\langle 3d\ \frac{5}{2} \parallel d^{(1)} \parallel 3p\ \frac{3}{2} \right\rangle} = \frac{1}{9} \quad (\text{Ann. IV.16})$$

on retrouve le rapport entre les deux facteurs de forme:

$$\frac{\mathcal{F}(a)}{\mathcal{F}(b)} = \frac{16}{189}$$

b) Comparaison des interactions σ_+/σ_+ et σ_+/σ_- dans le processus (b)

La polarisation des champs correspond à :

$$\sum_k \sum_q |a_q^k|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k=1 \\ 1 \text{ pour } (\sigma_+ / \sigma_+), \frac{1}{6} \text{ pour } (\sigma_+ / \sigma_-) & \text{si } k=2 \end{cases} \quad (\text{Ann. IV.18})$$

ce qui conduit directement à :

$$\mathcal{F}(\sigma_+ / \sigma_+) = 6 \mathcal{F}(\sigma_+ / \sigma_-) \quad (\text{Ann. IV.19})$$

ANNEXE V**DETERMINATION DE LA DENSITE DU JET**

La densité du jet a d'abord été déterminée, pour différentes températures du four, par mesure directe de l'absorption d'un faisceau sonde (§ I). Pour des densités supérieures à 10^{11} atomes/cm³, cette méthode n'est plus assez précise. Nous avons alors utilisé la dispersion linéaire, produite par la résonance atomique, en mesurant, à l'aide d'un interféromètre le déphasage subi par ce même faisceau sonde.

I. MESURE DE L'ABSORPTION D'UN FAISCEAU SONDE.**1. Principe de l'expérience.**

On balaye un faisceau sonde, autour de la résonance correspondant à la transition entre le niveau fondamental $3s_{1/2}$ et le niveau excité $3p_{3/2}$. Ce faisceau a une intensité très faible afin de ne pas saturer la transition. Les données expérimentales sont comparées au calcul théorique de la section efficace de diffusion résonnante, prenant en compte les structures fines et hyperfines des niveaux.

On détermine par essais successifs, les deux paramètres ajustables (c'est à dire la densité atomique et la largeur Doppler due à la collimation du jet) de façon à faire coïncider la courbe théorique avec les observations expérimentales.

2. Structure hyperfine de la transition.

Comme indiqué au Chapitre II-§C, le niveau fondamental $3s\ ^2P_{1/2}$ se décompose en deux sous-niveaux hyperfins $F = 1$ et $F = 2$, distants de 1.771 GHz. En prenant l'expression du hamiltonien hyperfin incluant les termes dipolaires magnétiques et quadripolaires électriques, les écarts entre les sous-niveaux hyperfins de $3p\ ^2P_{3/2}$ sont donnés par :

$$E(F=3) - E(F=2) = 3\mathcal{A}_{3/2} + \mathcal{B}_{3/2} \quad (\text{Ann. V.1.a})$$

$$E(F=2) - E(F=1) = 2\mathcal{A}_{3/2} - \mathcal{B}_{3/2} \quad (\text{Ann. V.1.b})$$

$$E(F=1) - E(F=0) = \mathcal{A}_{3/2} - \mathcal{B}_{3/2} \quad (\text{Ann. V.1.c})$$

avec [Arimondo 77] :

$$\mathcal{A}_{3/2} = 19 \text{ MHz} \quad \mathcal{B}_{3/2} = 3 \text{ MHz} \quad (\text{Ann. V.2})$$

Le diagramme d'énergie, représentant la structure hyperfine des deux niveaux, est indiqué sur la figure Ann. V-1.

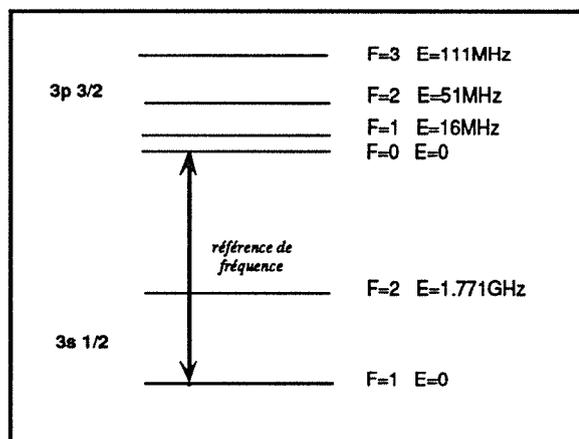


FIGURE Ann. V - 1 :
Structure hyperfine de la raie D2, utilisée pour mesurer la densité du jet atomique.

3. Détermination de la section efficace d'absorption.

a) Expressions théoriques.

En tenant compte de la structure Doppler due à la répartition des vitesses transverses dans le jet (que l'on modélise par une répartition maxwellienne correspondant à un équilibre

thermique à la température T), la section efficace d'absorption en intensité $\sigma_{FF'}$ d'un sous-niveau hyperfin F vers un sous-niveau F' peut s'écrire [Van der Speck 88] :

$$\sigma_{FF'} = n_{FF'} \cdot \frac{\lambda_o^3}{8\pi} \cdot \left(\frac{m}{2\pi RT} \right)^{1/2} \cdot \frac{2F'+1}{2F+1} \cdot \Gamma_{FF'} \cdot \exp[-\hat{\nu}^2] \quad (\text{Ann. V.3})$$

où :

□ n_F représente la population du sous-niveau F , définie par :

$$n_F = \frac{2F+1}{(2I+1)(2J+1)} \quad (\text{Ann. V.4})$$

□ $\Gamma_{FF'}$ représente le taux de transmission entre F et F' , en fonction de la durée de vie τ du niveau fin dont est issu le sous-niveau F' :

$$\Gamma_{FF'} = (2F+1)(2J'+1) \left\{ \begin{matrix} J & I & F \\ F' & 1 & J' \end{matrix} \right\}^2 \frac{1}{\tau} \quad (\text{Ann. V.5})$$

□ la fréquence réduite $\hat{\nu}$ est définie par :

$$\hat{\nu} = (\nu - \delta_{FF'}) \cdot \frac{\lambda_o}{\sqrt{8RT/m}} \quad (\text{Ann. V.6})$$

ν étant la distance à une référence de fréquence et $\delta_{FF'}$ l'écart de la transition de F vers F' par rapport à cette référence.

La section efficace totale d'absorption σ s'obtient en ajoutant les diverses contributions $\sigma_{FF'}$ (figure Ann.V-2). L'absorption du faisceau sonde, correspondant au rapport entre l'intensité entrante I^{in} et l'intensité en sortie I^{out} , est ensuite donnée par :

$$I^{\text{out}} = I^{\text{in}} e^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = n_{at} \cdot l \cdot \sigma \quad (\text{Ann. V.7})$$

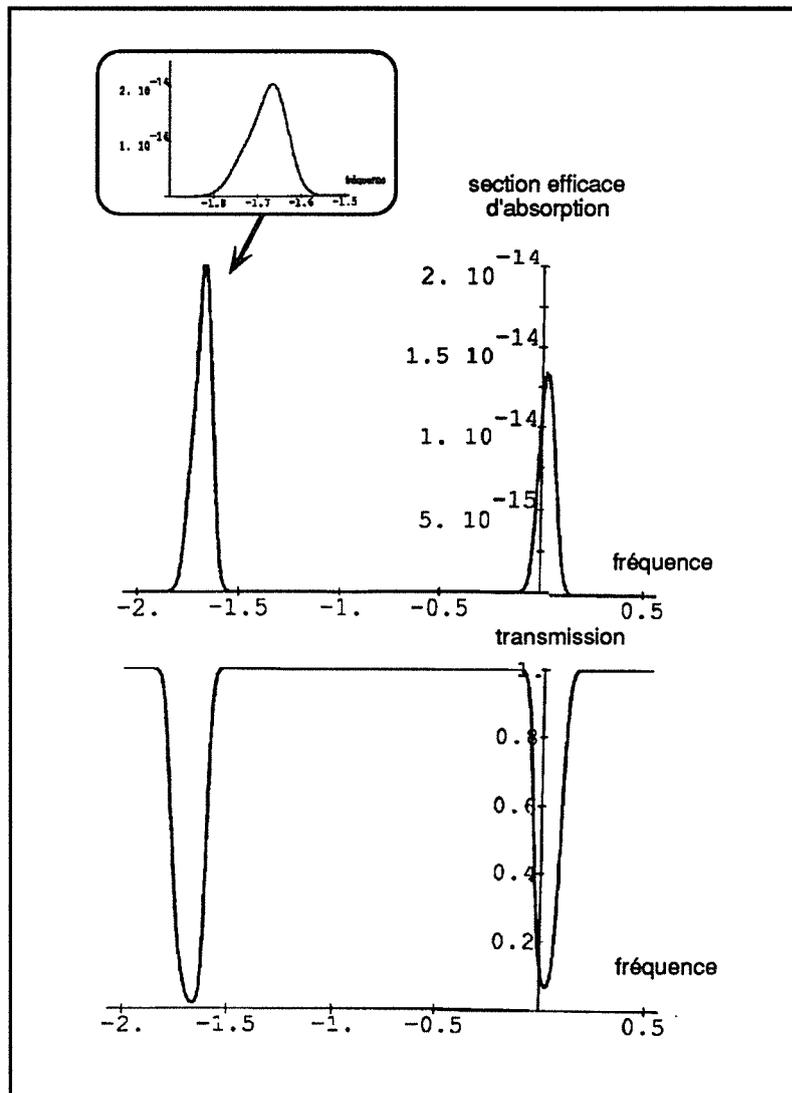


FIGURE AnnV - 2 :

Courbes théoriques donnant la section efficace d'absorption pour une densité $n=2 \cdot 10^{10} \text{ at/cm}^3$ et une température $T = 0.3 \text{ K}$ (correspondant à une largeur Doppler de 37 MHz FWHM), et la transmission à travers le jet d'un faisceau sonde (pour une longueur d'interaction de 1cm). La fréquence est normalisée comme indiqué dans l'Annexe.

Les deux raies correspondent aux transitions à partir des deux sous-niveaux hyperfins ($F=2$ puis $F=1$) du fondamental $3s1/2$. La dyssimétrie des courbes est due à la prise en compte de la structure hyperfine du niveau excité $3p3/2$.

4. Mesures expérimentales.

On ajuste les courbes théoriques aux mesures expérimentales d'absorption, à l'aide de n_{at} et T . La figure Ann.V-5 montre la détermination de ces deux paramètres, pour différentes températures du four.

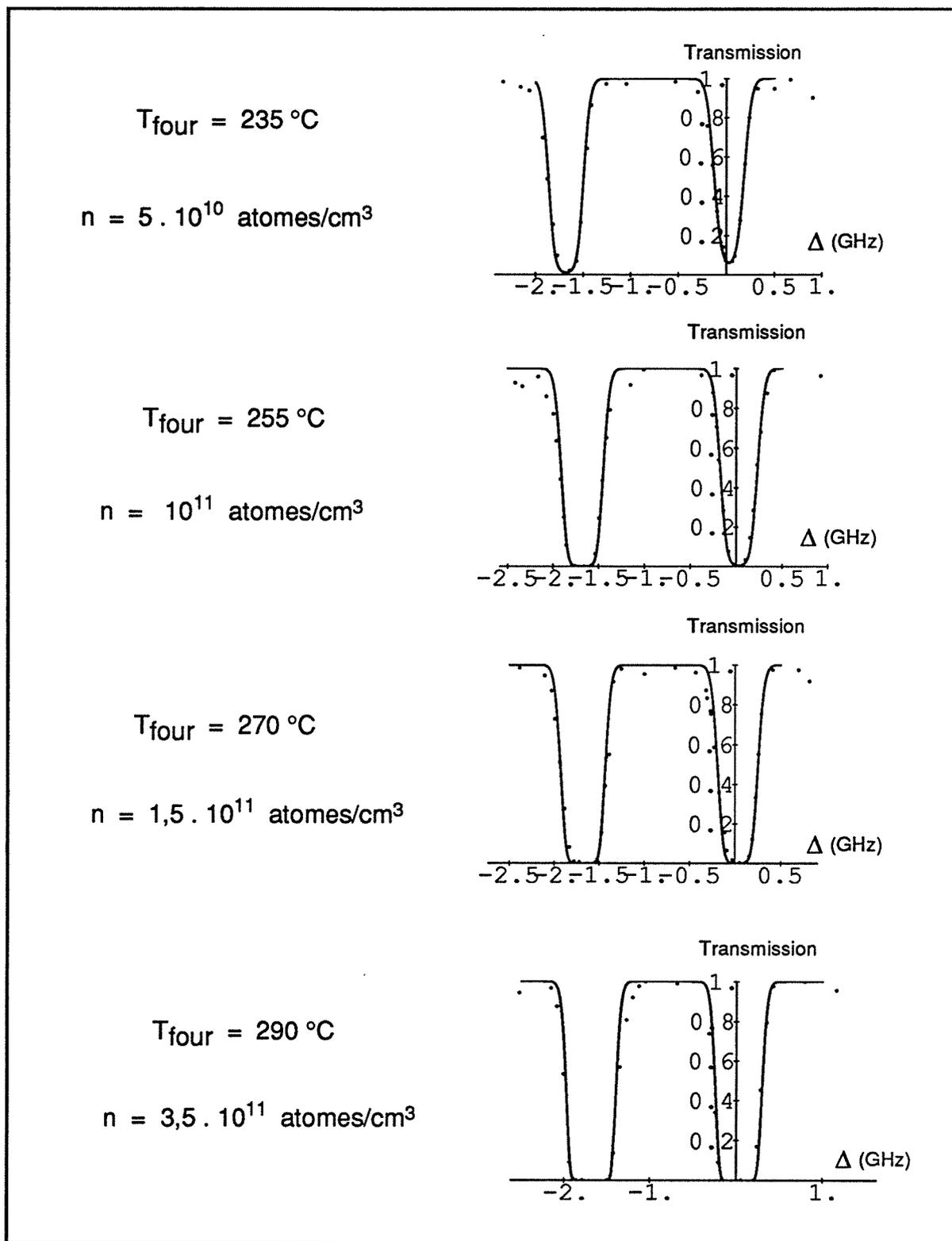


FIGURE Ann. II - 3 :

Détermination, pour différentes températures de chauffage de la densité du jet par ajustement des courbes théoriques aux points expérimentaux, relevés sur les courbes d'absorption du faisceau sonde.

Le four utilisé pour ces expériences a une simple ouverture circulaire (pas de micro-galettes en sortie). La largeur Doppler est de 200 MHz FWHM, soit environ 20 fois la largeur naturelle du niveau $3p_{3/2}$.

La différence dans les pieds des courbes s'explique par le fait que le modèle d'une simple distribution maxwellienne des vitesses ne correspond pas à la réelle distribution transverse des vitesses dans le jet.

II. MESURE DU DEPHASAGE LINEAIRE PRODUIT SUR UN FAISCEAU SONDE.

1. Principe de l'expérience.

On mesure directement la dispersion linéaire, en réalisant un interféromètre de Michelson dont l'un des bras passe à travers le jet (figure Ann.V-4). De façon à ne pas avoir de glissement des franges quand on fait varier la fréquence du laser, l'interféromètre est réglé au voisinage de la différence de marche nulle. Du fait de la dispersion linéaire introduite par les différentes transitions, on observe, lorsque le laser est balayé sur la résonance, une variation importante du chemin optique et donc de l'état d'interférence. Ceci se traduit en pratique par un rapide défilement des franges.

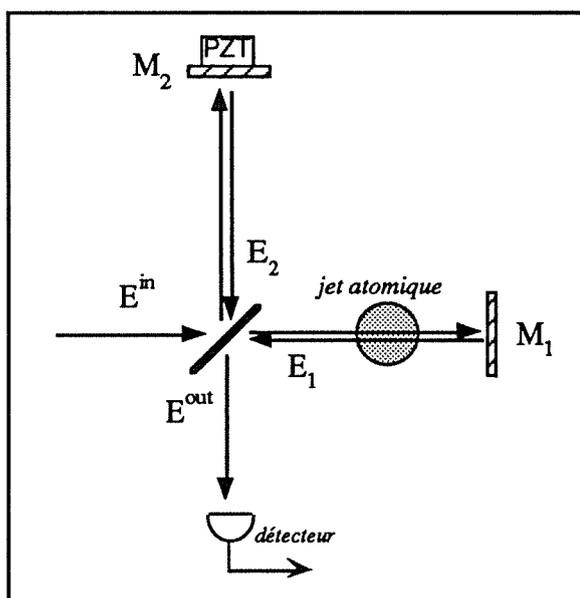


FIGURE Ann.V - 4 :

Principe de l'interféromètre permettant d'observer le déphasage linéaire produit sur un faisceau sonde par les résonances atomiques. Afin de pouvoir régler l'interféromètre, le miroir M2 est monté sur une cale piézoélectrique. Lorsque l'on balaye le laser sur les raies atomiques, cette cale est arrêée et la différence de chemin optique entre les deux bras provient uniquement de la dispersion linéaire introduite par les atomes.

2. Expressions théoriques.

a) Figure d'interférences.

Compte-tenu des notations introduites sur la figure Ann. II-4, les deux champs interférant en sortie s'écrivent :

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot E^{in} \cdot e^{-i\phi} e^{-\alpha/2} \quad E_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot E^{in} \quad (\text{Ann. V.8})$$

où ϕ et α correspondent à un double passage à travers le jet. Le déphasage ϕ peut se décomposer en ϕ_0 , déphasage entre les deux bras de l'interféromètre lorsque celui-ci ne contient

pas d'atomes, et ϕ_l , correspondant au déphasage introduit par les atomes.

Le champ total résultant est :

$$E^{out} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 + E_2) \quad (\text{Ann. V.9.a})$$

soit :

$$E^{out} = \frac{1}{2} E^{in} \left(e^{-\alpha/2} e^{-i(\phi_0 + \phi_l)} - 1 \right) \quad (\text{Ann. V.9.b})$$

ce qui correspond à une figure d'interférences :

$$\frac{I^{out}}{I^{in}} = \frac{1}{4} \left[1 + e^{-\alpha} + 2e^{-\alpha/2} \cos(\phi_0 + \phi_l) \right] \quad (\text{Ann. V.9.c})$$

Lorsque le laser est balayé sur les raies, les paramètres α et ϕ_l varient rapidement, du fait de l'absorption et de la dispersion introduites par les résonances atomiques.

b) Déphasage introduit par les atomes.

L'interaction du champ à ω_l , polarisé suivant $\vec{\epsilon}_l$, avec la transition entre les deux niveaux fins $J_g = 1/2$ et $J_r = 3/2$, produit un déphasage (en supposant les atomes immobiles) :

$$\phi_l^{lin} = n_{at} \ell \cdot \frac{\omega_l}{2\varepsilon_0 \hbar c} \cdot \frac{\Delta}{\Delta^2 + \left(\frac{\Gamma_{rg}}{2} \right)^2} \cdot \left[\mathcal{D}_{eff}^{lin} \right]^2 \quad (\text{Ann. V.10})$$

où \mathcal{D}_{eff}^{lin} correspond à un dipôle effectif, défini par :

$$\left[\mathcal{D}_{eff}^{lin} \right]^2 = \frac{1}{2J_g + 1} \cdot \sum_{M_g} \sum_{M_r} \left| \langle J_r M_r | \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_l | J_g M_g \rangle \right|^2 \quad (\text{Ann. V.11})$$

Ce terme est naturellement indépendant de la polarisation utilisée et, pour notre cas particulier :

$$\left[\mathcal{D}_{eff}^{lin} \right]^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left| \langle J_r = 3/2 \| d^{(1)} \| J_g = 1/2 \rangle \right|^2 \quad (\text{Ann. V.12a})$$

$$\left[\mathcal{D}_{eff}^{lin} \right]^2 = 2\pi \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\lambda_1}{2\pi} \right)^3 \cdot \hbar \Gamma_{rg} \quad (\text{Ann. V 12b})$$

En reportant dans l'expression donnant le déphasage linéaire :

$$\phi_I^{lin} = n_{at} \ell \cdot \frac{\lambda_1^2}{2\pi} \cdot \frac{\frac{\Gamma_{rg}}{2} \cdot \Delta}{\Delta^2 + \left(\frac{\Gamma_{rg}}{2} \right)^2} \quad (\text{Ann. V.13})$$

En négligeant tout effet de pompage entre les deux niveaux hyperfins $F = 1$ et $F = 2$ du fondamental, le déphasage linéaire total s'obtient simplement en ajoutant les contributions respectives, soit :

$$\phi_I = n_{at} \ell \cdot \frac{\lambda_1^2}{2\pi} \left[\frac{3}{8} \frac{(\Delta - \Delta_1) \cdot \frac{\Gamma_{rg}}{2}}{(\Delta - \Delta_1)^2 + \left(\frac{\Gamma_{rg}}{2} \right)^2} + \frac{5}{8} \frac{(\Delta - \Delta_2) \cdot \frac{\Gamma_{rg}}{2}}{(\Delta - \Delta_2)^2 + \left(\frac{\Gamma_{rg}}{2} \right)^2} \right] \quad (\text{Ann. V.14})$$

où Δ_1 et Δ_2 désignent respectivement la position des résonances correspondant à $F = 1$ et à $F = 2$, pris par rapport à une référence de fréquence donnée.

c) Courbes théoriques.

Pour chaque fréquence du laser sonde, on calcule le paramètre α donnant l'absorption totale d'après les résultats du § I, et le déphasage ϕ_I d'après (Ann.V.14). Ces expressions correspondent à des modèles très différents. L'absorption doit nécessairement être calculée en tenant compte de la largeur Doppler, tandis que la dispersion est calculée en supposant les atomes tous fixes. Cette approximation est justifiée par le fait que les phénomènes dispersifs (défilement des franges) apparaissent lorsqu'il n'y plus d'absorption, et donc en-dehors de la largeur Doppler.

La figure Ann. II-5 montre, qu'au-delà d'environ $5 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³, l'absorption ne permet plus de mesurer sensiblement la densité atomique, mais qu'on observe de très nettes différences sur la figure d'interférences. Cette dernière méthode s'avère donc beaucoup plus précise pour ces fortes densités.

d) Comparaison expérience-théorie.

Celle-ci est représentée sur la figure Ann. II-6. On peut en déduire une mesure de la densité atomique, ainsi que la valeur du déphasage linéaire ϕ_l^{lin} pour un désaccord Δ donné.

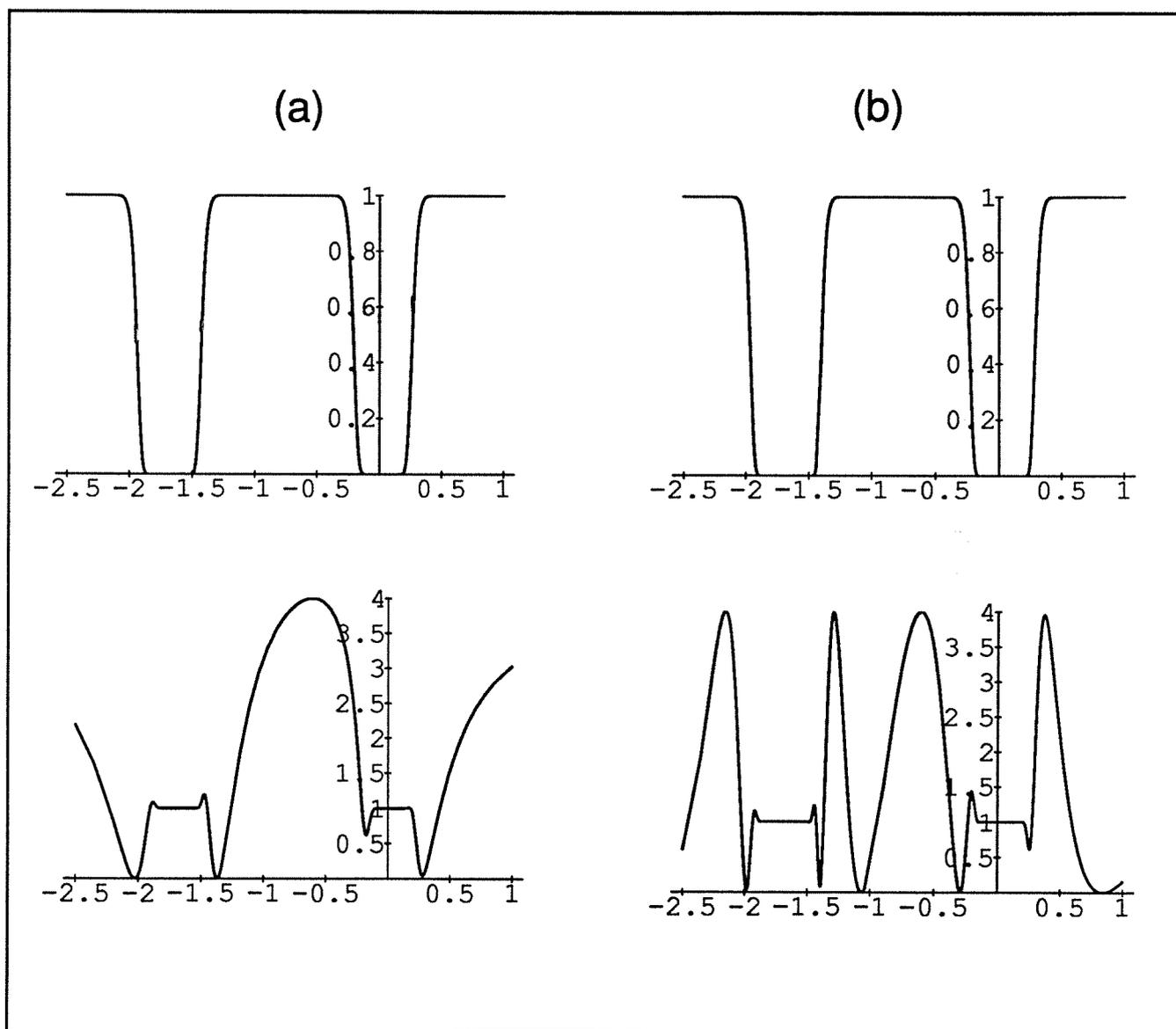


FIGURE Ann.V - 5 :

Courbes théoriques donnant l'absorption linéaire et la dispersion linéaire en fonction du désaccord D du laser excitant la transition inférieure. Les courbes du bas correspondent aux franges d'interférences d'un interféromètre de Michelson, dont l'un des bras contient le jet atomique. Les courbes du haut correspondent à la transmission à travers un double passage dans le jet.

Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à une densité de $3 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³

et de $8 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³. Pour ces densités, le signal d'absorption dans le jet est sensiblement identique dans les deux cas, tandis que les franges d'interférences sont nettement différentes. Ce dernier signal permet donc une mesure précise de la densité du jet.

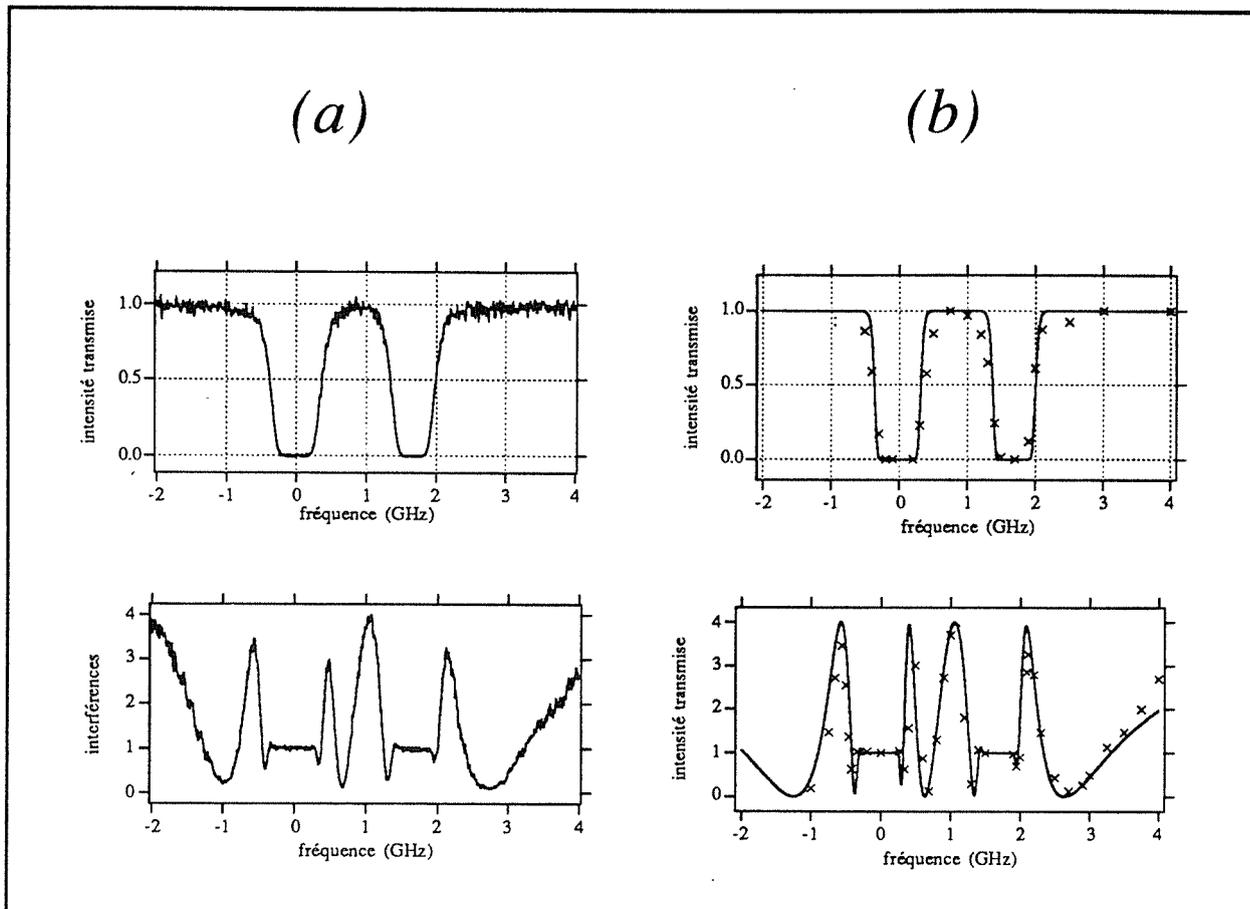


Figure Ann. V - 6 :

Comparaison des résultats expérimentaux (a) avec les expressions théoriques établies précédemment pour l'absorption et la dispersion linéaire (b). Les croix correspondent à des points repris sur les courbes expérimentales. L'accord est obtenu en ajustant à vue les deux paramètres, à savoir la densité dans le jet (ici, $n_{at} = 9\ 1011$ atomes/cm³) et la température représentant la largeur Doppler ($T = 3$ K).

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**



[F'MURR 81]

-
- [ABRAHAM 82] E. ABRAHAM and S.D. SMITH,
"Optical Bistability and Related Devices"
Rep. Prog. Phys., **45**, 815 (1982)
- [AGARWAL 80] G.S. AGARWAL,
"Bistability in Coherent Two-Photon Processes"
Opt. Commun., **35**, 149 (1980)
- [AGRAWAL 80] G.P. AGRAWAL and C. FLYTZANIS,
"Two-Photon Double-Beam Optical Bistability"
Phys. Rev. Lett., **44**, 1058 (1980)
- [ALSING 88] P. ALSING, G.J. MILBURN and D.F. WALLS,
"Quantum Nondemolition Measurements in Optical Cavities"
Phys. Rev. , **A 37**, 2970 (1988)
- [ARIMONDO 77] E. ARIMONDO, M. INGUSCIO and P. VIOLINO,
"Experimental Determinations of the Hyperfine Structure in the Alkali Atoms "
Rev. Mod. Phys., **49**, 31 (1977)
- [ARRECHI 78] F.T. ARRECHI and A. POLITI,
"Optical Bistability in a Resonant Two-Photon Absorber"
Lett. Nuovo Cimento, **23**, 65 (1978)
- [ASPECT 83] A. ASPECT,
"Trois tests expérimentaux des Inégalités de Bell par mesure de corrélation de polarisation de photons"
Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris Sud (1983).
- [BACHOR 88] H.A. BACHOR, M.D. LEVENSON, D.F. WALLS, S.H. PERLMUTTER and R.M. SHELBY,
"Quantum Non-Demolition Measurements in an Optical-Fiber Ring Resonator"
Phys. Rev., **A38**, 180 (1988).
- [BACHOR 89] H.A. BACHOR and P.T.H. FISK,
"Quantum Noise : a Limit in Photodetection"
Appl. Phys. B, **49**, 291 (1989).
- [BARNETT 89] S.M. BARNETT and D.T. PEGG,
"On the Hermitian Phase Operator"
J. Mod. Opt., **36**, 7 (1989).
- [BEIJERINCK 76] H.C.W. BEIJERINCK, M.P.J.M. STEVENS and N.F. VERSTEN,
"Monte-Carlo Calculation of Molecular Flow Through a Cylindrical Channel"
Physica, **83C**, 209 (1976).
- [BJORKHOLM 76] J.E. BJORKHOLM and P.F. LIAO,
"Line Shape and Strength of Two-Photon Absorption in an Atomic Vapor with a Resonant or Nearly-Resonant Intermediate State"
Phys. Rev., **A14**, 751 (1976).
- [BLOCH 81] D. BLOCH, M. DUCLOY and E. GIACOBINO,
"Heterodyne Doppler-Free Two-Photon Absorption and Dispersion in Rubidium Vapour"
J. Phys.B : At. Mol. Phys., **14**, L819 (1981).
- [BLOCKLEY 90] C.A. BLOCKLEY and D.F. WALLS,
"Quantum Nondemolition Measurements via a Two-Photon Transition"
Opt. Commun., **79**, 241 (1990).

- [BOHR 28] N. BOHR,
"The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory"
Nature, **121**, 580 (1928).
reproduit dans "Quantum Theory and Measurement",
J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983)
- [BRAGINSKY 80] V.B. BRAGINSKY, Y.L. VORONTSOV and K.S. THORNE,
"Quantum Non-Demolition Measurements"
Science, **209**, 547 (1980).
- Une récente et large liste de références peut également être trouvée dans :
V.B. BRAGINSKY,
"Resolution in Macroscopic Measurements : Progress and Prospects"
Soviet Physics Uspekhi, **31**, 836 (1988) [Usp. Fiz. Nauk. **156**, 93 (1988)].
- [BRILLET 85a] A. BRILLET, T. DAMOUR and Ph. TOURENC,
"Introduction to Gravitational Wave Research"
Ann. Phys. (Paris), **10**, 201 (1985)
- [BRILLET 85b] A. BRILLET,
"Interferometrie Gravitational Wave Antennae?"
Ann. Phys. (Paris), **10**, 219 (1985)
- [BRUNE 90] M. BRUNE, S. HAROCHE, V. LEFEVRE, J.M. RAIMOND and N. ZAGURY,
"Quantum Non-Demolition Measurement of Small Photon-Numbers by Rydberg-Atom Phase-Sensitive Detection"
Phys. Rev. Lett., **65**, 976 (1990).
- [CAGNAC 73] B. CAGNAC, G. GRYNBERG et F. BIRABEN,
"Spectroscopie d'absorption multiphotonique sans effet Doppler"
J. Physique (Paris), **34**, 845 (1973).
- [CASTELLI 88] F. CASTELLI, L.A. LUGIATO and M. VADACCHINO,
"Squeezing in Optical Bistability Without Adiabatic Elimination"
Nuovo Cimento, **10D**, 183 (1988).
- [CAVES 80] C.M. CAVES, K.S. THORNE, R.W.P. DREVER, V.D. SANDBERG and
M. ZIMMERMANN,
*"On the Measurement of a Weak Classical Force Coupled to a Quantum Mechanical Oscillator
- I. Issues of Principle"*
Rev. Mod. Phys., **52**, 341 (1980).
- [CAVES 81] C.M. CAVES,
"Quantum-Mechanical Noise in an Interferometer"
Phys. Rev., **D 23**, 1693 (1981).
- [CAVES 82] C.M. CAVES,
"Quantum Limits on Noise in Linear Amplifiers"
Phys. Rev., **D 26**, 1817 (1982).
- [CAVES 85a] C. M. CAVES,
"Defense of the Standard Quantum Limit for Free-Mass Position"
Phys. Rev. Lett., **54**, 2465 (1985).
- [CAVES 85b] C.M. CAVES and B.L. SCHUMAKER,
"New Formalism for Two-Photon Quantum Optics. I. Quadrature phases and squeezed states"
Phys. Rev., **A 31**, 3068 (1985).
- [CLAUSING 30] P. CLAUSING,
"Über die Strahlformung bei der Molekularströmung"
Annalen der Physik, **31**, 471 (1930).

-
- [COHEN 77] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU et F. LALÖE,
"Mécanique Quantique"
Tome 1, Complément EII, Hermann (1977).
- [COHEN 88] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG,
"Processus d'Interaction entre Photons et Atomes"
Inter Editions, Editions du CNRS (Paris) (1988).
- [COHEN 90] C. COHEN-TANNOUDJI,
Cours donné au Collège de France, 1990.
- [COLLET 84] M.J. COLLETT and C.W. GARDINER,
"Squeezing of Intracavity and Travelling-Wave Light Fields Produced in Parametric Amplification"
Phys. Rev., A **30**, 1386 (1984).
- [CORNEY 77] A. CORNEY,
"Atomic and Laser Spectroscopy"
Cambridge University Press (1977)
- [COURTY 90] J.M. COURTY,
"Les fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non-linéaire avec un réservoir harmonique"
Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (1990).
- [COURTY 91] J.M. COURTY, P. GRANGIER, L. HILICO and S. REYNAUD,
"Quantum Fluctuations in Optical Bistability : Calculations from Linear Response Theory"
Opt. Commun., **83**, 251 (1991).
- [DANCE 91] M. DANCE, M.J. COLLETT and D.F. WALLS,
"Quantum Non-demolition Measurements via Second-Harmonic Generation"
Phys. Rev. Lett., **66**, 1115 (1991).
- [DEVAUD 80] M. DEVAUD,
"Bistabilité optique et dispersion à deux photons"
Thèse de Doctorat 3ème Cycle, Université Pierre et Marie Curie (1980).
- [EKERT 90] A.K. EKERT and P.L. KNIGHT,
"Canonical Transformation and Decay into Phase-Sensitive Reservoirs"
Phys. Rev., A **42**, 487 (1990).
- [FABRE 91] C. FABRE and S. REYNAUD,
in *"Fundamental Systems in Quantum Optics"*, Les Houches, Session 53,
J. Dalibard, J.M. Raymond and J. Zinn-Justin eds (Elsevier Science, 1991).
- [FISK 86a] P.T.H. FISK, H.A. BACHOR and R.J. SANDEMANN,
"Investigation of the Dynamic Stark Effect in a $J=0 \rightarrow J=1 \rightarrow J=0$ Three Level System : I. Experiment"
Phys. Rev., A **33**, 2418 (1986).
- [FISK 86b] P.T.H. FISK, H.A. BACHOR and R.J. SANDEMANN,
"Investigation of the Dynamic Stark Effect in a $J=0 \rightarrow J=1 \rightarrow J=0$ Three-Level System : II. Theoretical Description"
Phys. Rev., A **33**, 2424 (1986).
- [F'MURR 81] F'MURR,
in *"Le Génie des Alpes"*, Dargaud (1981)
- [FORK 64] R.L. FORK, D.R. HERRIOTT et H. KOGELNIK,
"A Scanning Spherical Mirror Interferometer for Spectral Analysis of Laser Radiation"
Appl. Optics , **3**, 1471 (1964).

- [GALATOLA 89a] P. GALATOLA, L.A. LUGIATO, M. VADACCHINO, and N.B. ABRAHAM, "Squeezing in Two-Photon Optical Bistability and Laser with Injected Signal" *Opt. Commun.*, **69**, 419 (1989).
- [GALATOLA 89b] P. GALATOLA, L.A. LUGIATO, M. VADACCHINO, and N.B. ABRAHAM, "Phase Instability in Two-Photon Optical Bistability" *Opt. Commun.*, **69**, 414 (1989).
- [GAMOW 58] G. GAMOW, "The Principle of Uncertainty" *Scientific American.*, **198**, 51 (1958).
- [GARDINER 85] C.W. GARDINER and M.J. COLLETT, "Input and Output in Damped Quantum Systems : Quantum Stochastic Differential Equations and the Master Equation" *Phys. Rev.*, **A 31**, 3761 (1985)
- [GESTERKORN 78] S. GESTERKORN et P. LUC, "Atlas du Spectre d'Absorption de la Molécule d'Iode" Editions du CNRS (1978).
- [GHERI 92] K.M. GHERI, D.F. WALLS, P. GRANGIER and J.P. POIZAT, "QND Measurements using Ghost Transitions" Pre-tirage
- [GIACOBINO 80] E. GIACOBINO, M. DEVAUD, F. BIRABEN and G. GRYNBERG, "Doppler-Free Two-Photon Dispersion and Optical Bistability in Rubidium Vapor" *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 434 (1980).
- [GIBBS 85] H. M. GIBBS, "Optical Bistability : Controlling Light with Light" Academic Press (1985).
- [GIORDMAINE 60] J.A. GIORDMAINE and T.C. WANG, "Molecular Beam Formation by Long-Parallel Tubes" *J. Appl. Phys.*, **31**, 463 (1960).
- [GLAUBER 65] R.J. GLAUBER, Cours de l'Ecole d'Eté des Houches 1964, C. De Witt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji eds., Gordon and Breach (1965).
- [GRANGIER 86] P. GRANGIER, "Etude expérimentale de propriétés non-classiques de la lumière ; interférences à un photon" Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris-Sud (1986).
- [GRANGIER 87] P. GRANGIER, R.E. SLUSHER, B. YURKE and A. LA PORTA, "Squeezed-Light-Enhanced Polarization Interferometer" *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 2153 (1987).
- [GRANGIER 89a] P. GRANGIER, J.F. ROCH and S. REYNAUD, "Quantum Correlations and Non-Demolition Measurements Using Two-Photon Non-Linearities in Optical Cavities" *Opt. Commun.*, **72**, 387 (1989).
- [GRANGIER 89b] P. GRANGIER and J.F. ROCH, "Squeezing and Quantum Noise Correlations in Dispersive Two-Photon Optical Bistability" *Quantum Optics.*, **1**, 17 (1989).

-
- [GRANGIER 91a] P. GRANGIER and J.F. ROCH,
"Single-side-band Optical Quantum Non-Demolition Measurement"
Opt. Commun., **83**, 269 (1991).
- [GRANGIER 91b] P. GRANGIER, J.F. ROCH and G. ROGER,
"Experimental Observation of Backaction-Evading Measurement of an Optical Intensity in a Three-level Atomic Nonlinear System"
Phys. Rev. Lett., **66**, 1418 (1991).
- [GRANGIER 91c] P. GRANGIER, J.M. COURTY and S. REYNAUD,
"Characterization of Non-Ideal Quantum Non-Demolition Measurements"
Opt. Commun., à paraître (1991).
- [GRAVITE 83] "Quantum Theory, Experimental Gravitation and Measurement Theory",
P. Meystre and M.O. Scully, eds.,
Plenum Press (1983)
- [GRAY 78] H.R. GRAY and C.R. STROUD Jr.,
"Autler-Townes Effect in Double Optical Resonance"
Opt. Commun., **25**, 359 (1978).
- [GRYNBERG 77] G. GRYNBERG,
"Spectroscopie d'absorption à deux photons sans effet Doppler : application à l'étude du sodium et du néon"
Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- [GRYNBERG 80] G. GRYNBERG, M. DEVAUD, C. FLYTZANIS and B. CAGNAC,
"Doppler-Free Two-Photon Dispersion"
J. Physique (Paris), **41**, 931 (1980).
- [HAROCHE 91] S. HAROCHE,
in *"Fundamental Systems in Quantum Optics"*, Les Houches, Session 53,
J. Dalibard, J.M. Raymond and J. Zinn-Justin eds (Elsevier Science, 1991).
- [HERCHER 68] M. HERCHER
"The Spherical Mirror Fabry-Perot Interferometer"
Appl. Optics, **7**, 951 (1968).
- [HERMANN 80] J.A. HERMANN and B.V. THOMPSON,
"Two-Photon Optical Bistability with Spatial Effects"
Phys. Lett., **79A**, 153 (1980).
- [HERMANN 81] J.A. HERMANN,
"Stability Conditions for Two-Photon Optical Bistability in a Ring Cavity"
Opt. Commun., **37**, 431 (1981).
- [HERMANN 82] J.A. HERMANN and D.F. WALLS,
"Theory of Two-Photon Optical Tristability"
Phys. Rev., **A26**, 2085 (1982).
- [HOLLAND 90] M.J. HOLLAND, M. J. COLLETT, D.F. WALLS and M.D. LEVENSON,
"Non Ideal Quantum Measurements"
Phys. Rev. , **A 42**, 2995 (1990).
- [HOLLAND 91] M.J. HOLLAND, D.F. WALLS and P. ZOLLER,
"Quantum Non-Demolition Measurements of Photon-Number by Atomic-Beam Deflection"
Phys. Rev. Lett., **67**, 1715 (1991).

- [IMOTO 85] N. IMOTO, H.A. HAUS and Y. YAMAMOTO,
"Quantum Non-Demolition Measurement of the Photon-Number via the Optical Kerr Effect"
Phys. Rev., A 32, 2287 (1985).
- [IMOTO 87] N. IMOTO, S. WATKINS and Y. SASAKI,
"A Non-Linear Optical-Fiber Interferometer for Non-Demolitional Measurement of Photon Number"
Opt. Commun., 61, 159 (1987).
- [IMOTO 89] N. IMOTO and S. SAITO
"Quantum Non-Demolition Measurements of Photon-Number in a Lossy Optical Kerr Medium"
Phys. Rev., A 39, 675 (1989).
- [JAECKEL 90] M.T. JAECKEL and S. REYNAUD,
"Quantum Limits in Interferometric Measurements"
Europhysics Lett., 13, 301 (1990).
- [JONES 69] R.H. JONES, D.R. OLANDER and V.R. KRUGER,
"Molecular-Beam Sources Fabricated from Multichannel Arrays"
J. Appl. Phys., 40, 4641 (1969).
- [KAR 83] A.K. KAR, J.G.H. MATTHEW, S.D. SMITH, B. DAVIES and W. PRETTL,
"Optical Bistability in InSb at Room Temperature with Two-Photon Excitation"
Appl. Phys. Lett., 42, 334 (1983).
- [KOGELNIK 66] H.W. KOGELNIK and T. LI,
"Laser Beams and Resonators"
Appl. Optics, 5, 1550 (1966).
- [LANDAU 31] L. LANDAU and R. PEIERLS
"Erweiterung ders Unbestimmtheitsprinzipis für die Relativische Quantentheorie"
Z. Phys., 69, 56 (1931).
reproduit et traduit dans "Quantum Theory and Measurement",
J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983)
- [LA PORTA 89] A. LA PORTA, R.E. SLUSHER and B. YURKE,
"Back-Action Evading Mesurement of an Optical Field Using Parametric Down Conversion"
Phys. Rev. Lett., 62, 28 (1989).
- [LA PORTA 91] A. LA PORTA and R.E. SLUSHER,
"Squeezing Limits at High Parametric Gains"
Phys. Rev., A44, 2013 (1991).
- [LEVENSON 86] M.D. LEVENSON, R.M. SHELBY, M. REID and D.F. WALLS,
"Quantum Non-Demolition Detection of Optical Quadrature Aplitudes"
Phys. Rev.Lett., 57, 2473 (1986).
- [LEVENSON 87] M.D. LEVENSON and R.M. SHELBY,
"Four-Mode Squeezing and Applications"
J. Mod. Opt., 34, 775 (1987).
- [LIAO 76] P.F. LIAO and G.C. BJORKLUND,
"Polarization Rotation Induced by Resonant Two-Photon Interaction"
Phys. Rev. Lett., 36, 584 (1976).
- [LIAO 77] P.F. LIAO and G.C. BJORKLUND,
"Polarization Rotation Effects in Atomic Sodium Vapour"
Phys. Rev., A15, 2009 (1977).

- [LINDGARD 77] A. LINDGARD and S.E. NIELSEN,
"Transition Probabilities for the Alkali Isoelectronic Sequences",
Atomic and Nuclear Data Tables, **19**, 533 (1977).
- [LUGIATO 82] L.A. LUGIATO and G. STRINI,
"On Non-Classical Effects in Two-Photon Optical Bistability and Two-Photon Laser",
Opt. Commun., **41**, 374 (1982).
- [LUGIATO 84] L.A. LUGIATO,
"Theory of Optical Bistability",
in Progress In Optics, vol. XXI, ed. by E. Wolf, North Holland (1984).
- [LUGIATO 90] L.A. LUGIATO, P. GALATOLA and L.M. NARDUCCI,
"Universal Normal Form Description of Squeezing and Instabilities in Two-Photon Processes",
Opt. Commun., **76**, 276 (1982).
- [LUGIATO 91] L.A. LUGIATO,
in *"Fundamental Systems in Quantum Optics"*, Les Houches, Session 53,
J. Dalibard, J.M. Raymond and J. Zinn-Justin eds (Elsevier Science, 1991).
- [MERTZ 90] J. MERTZ, A. HEIDMANN, C. FABRE, E. GIACOBINO and S. REYNAUD,
"Observation of High-Intensity Sub-Poissonian Light Using an Optical Parametric Oscillator",
Phys. Rev. Lett., **64**, 2897 (1990).
- [MERTZ 91a] J. MERTZ,
"Réduction du bruit de photon à l'aide d'un asservissement sur des photons jumeaux produits par un Oscillateur Paramétrique Optique",
Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (1991).
- [MERTZ 91b] J. MERTZ, A. HEIDMANN and C. FABRE,
"Generation of Sub-Poissonian Light using Active Control with Twin-Beams",
Phys. Rev., **A44**, 3229 (1991).
- [MILBURN 83] G.J. MILBURN and D.F. WALLS,
"Quantum Non-Demolition Measurements via Quadratic Coupling",
Phys. Rev., **A28**, 2065 (1983).
- [MIN XIAO 87] MIN XIAO, LING-AN WU and H.J. KIMBLE,
"Precision Measurement Beyond the Shot-Noise Limit",
Phys. Rev. Lett., **59**, 278 (1987).
- [MIN XIAO 88] MIN XIAO, LING-AN WU and H.J. KIMBLE,
"Detection of Amplitude Modulation with Squeezed Light for Sensitivity Beyond the Shot-Noise Limit",
Opt. Lett., **13**, 476 (1988).
- [NABORS 90] C. NABORS and R.M. SHELBY,
"Two-color Squeezing and Sub-shot-noise Signal Recovery in doubly Resonant Optical Parametric Oscillators",
Phys. Rev., **A42**, 556 (1990).
- [NARDUCCI 77] L.M. NARDUCCI, W.W. EDISON, P. FURCINITTI and D.C. ETESON,
"Theory of a Two-Photon Laser Amplifier",
Phys. Rev., **A16**, 1665 (1977).

- [NESMEYANOV 63] A.N. NESMEYANOV,
"Vapor Pressure of the Elements",
Elsevier Publications (1963)
- [NOH 91] J.W. NOH, A. FOUGERES and L. MANDEL,
"Measurement of a Quantum Phase by Photon Counting",
Phys. Rev. Lett., **67**, 1426 (1991).
- [OZAWA 88] M. OZAWA,
"Measurement Breaking the Standard Quantum Limit for a Free-Mass Position",
Phys. Rev. Lett., **60**, 385 (1988).
- [OZAWA 90] M. OZAWA,
"Quantum Mechanical Models of Position Measurements",
Phys. Rev., **A41**, 1735 (1990).
- [PEGG 88] D.T. PEGG and S.M. BARNETT,
"Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics",
Europhys Lett., **6**, 483 (1988).
- [PEGG 89] D.T. PEGG and S.M. BARNETT,
"Phase Properties of the Quantized Single-Mode Electromagnetic Field",
Phys. Rev., **A39**, 1665 (1989).
- [PEYGHAMB. 91] N. PEYGHAMBARIAN, H.M. GIBBS, M.C. RUSHFORD and D.A. WEINBERGER,
"Observation of Biexcitonic Optical Bistability and Optical Limiting in CuCl",
Phys. Rev. Lett., **51**, 1692 (1983).
- [POIZAT 91] J.P. POIZAT, M.J. COLLETT and D.F. WALLS,
"Squeezing of Two Light Fields Coupled By a Two-Photon Transition In a Cavity"
Opt. Commun., **84**, 409 (1991).
- [POIZAT 92] J.P. POIZAT, M.J. COLLETT and D.F. WALLS,
"Non-Degenerate Two-Mode Squeezing and QND Measurement Using Three-Level Atoms in a Cavity"
accepté pour publication, Phys. Rev. A (1992)
- [RAMSAY 56] N.F. RAMSAY,
"Molecular Beams",
Oxford University Press (1956, réed.1989).
- [RAYZEN 87] M.G. RAYZEN, L.A. OROZCO, M. XIAO, T.L. BOYD and H.J. KIMBLE,
"Squeezed States Generation by the Normal Modes of a Coupled System",
Phys. Rev. Lett., **59**, 198 (1987).
- [REYNAUD 87] S. REYNAUD,
"Generation of Twin-Photon Beams by a Non-Degenerate Optical Parametric Oscillator",
Europhys. Lett., **4**, 427 (1987).
- [REYNAUD 89a] S. REYNAUD and A. HEIDMANN,
"A Semi-Classical Linear Input-Output Transformation for Quantum Fluctuations",
Opt. Commun., **71**, 209 (1989).
- [REYNAUD 89b] S. REYNAUD, C. FABRE, E. GIACOBINO and A. HEIDMANN,
"Photon Noise Reduction by Passive Optical Bistable Systems",
Phys. Rev., **A40**, 1440 (1989).
- [REYNAUD 90] S. REYNAUD,
"Introduction à la réduction du bruit quantique",
Ann. Phys. (Paris), **15**, 63 (1990).

-
- [REYNAUD 91] S. REYNAUD, A. HEIDMANN, E. GIACOBINO and C. FABRE,
"Quantum Fluctuations in Optical Systems",
in Progress In Optics, vol.XXIII, ed. by E. Wolf, North Holland (1991).
- [SHAPIRO 80] J.H. SHAPIRO,
"Optical Waveguide Tap with Infinitesimal Insertion Loss",
Opt. Lett., **5**, 351 (1980)
- [SHELBY 85] R.M. SHELBY, M.D. LEVENSON and P.W. BAYER,
"Guided-Acoustic-Wave Brillouin Scattering",
Phys. Rev., **B31**, 5244 (1985)
- [SHELBY 87] R.M. SHELBY and M.D. LEVENSON,
"Optical Quantum Nondemolition Detection Schemes in $\chi(2)$ Media",
Opt. Commun., **64**, 553 (1987)
- [SLUSHER 89] R.E. SLUSHER, A. LA PORTA and B. YURKE,
"Backaction Evasion Experiments",
Quantum Optics V, ed. by J.D. Harvey and D.F. Walls
Springer Proceedings in Physics, vol. 41, Springer-Verlag (1989)
- [SOBEL'MAN 72] I.I. SOBEL'MAN,
"An Introduction to the Theory of Atomic Spectra",
Pergamon Press (1972)
- [SPECTRO 85] "Ultrasensitive Laser Spectroscopy",
J.J. Snyder and R.A. Keller eds.,
J. Opt. Soc. Am., **B2**, 1428-1593 (1985).
- [SQUEEZING 87] Pour une revue sur les Etats Comprimés du Rayonnement, voir les deux numéros
spéciaux :
• J. Opt. Soc. Am., **B4**, n°10 (1987),
• J. Mod. Opt., **36**, n°6/7 (1987)
- [STOLEN 73] R.H. STOLEN and A. ASHKIN,
"Optical Kerr Effect in Glass Waveguide",
Appl. Phys. Lett., **22**, 294 (1973)
- [THORNE 78] K.S. THORNE, R.W. DREVER, C.M. CAVES, M. ZIMMERMANN
and V.D. SANDBERG
"Quantum Nondemolition Measurements of Harmonic Oscillators",
Phys. Rev. Lett. , **40**, 667 (1978)
- [UNRUH 79] W.G. UNRUH,
"Quantum Nondemolition and Gravity-Wave Detection",
Phys. Rev., **D19**, 2888 (1979)
- [VANDERSPECK 88] A.M. VANDERSPECK, J.J.L. MULDER and L.W.G. STEENHUYSEN,
"Vapor Pressure of Rubidium between 250 and 298 K Determined by Combined Fluorescence
and Absorption Measurements",
J. Opt. Soc. Am., **B5**, 1478 (1988)
- [VON NEUMANN 55] J. VON NEUMANN,
"Mathematical Foundations of Quantum Mechanics",
Princeton University Press (1955)
reproduit dans "Quantum Theory and Measurement",
J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds.,
Princeton University Press (1983)

-
- [WHITLEY 76] R.M. WHITLEY and C.R. STROUD Jr.,
"Double Optical Resonance",
Phys. Rev., A14, 1498 (1976)
- [YAMAMOTO 90] Y. YAMAMOTO,
"Quantum Communications and Related Technologies",
The Transactions of the IEICE, E73, 1598 (1990), n°10 (Special Issue on
Communication Theory and its Applications)
- [YARIV 89] A. YARIV,
"Quantum Electronics",
John Wiley and Sons (1989, 3eme ed.)
- [YUEN 83] H.P. YUEN,
"Contractive States and the Standard Quantum Limit for Monitoring Free-Mass Position",
Phys. Rev. Lett., 51, 719 (1983)
- [YURKE 85] B. YURKE,
"Optical Back-Action Evading Amplifiers",
J. Opt. Soc. Am., B2, 732 (1985)

RESUME

Le sujet de ce mémoire est l'étude de mesures Quantiques Non-Destructives (mesures QND) en Optique. Nous montrons, théoriquement et expérimentalement, qu'une telle mesure peut être réalisée en couplant deux faisceaux lumineux dans un milieu non-linéaire, ici une transition à deux photons dans un jet atomique de sodium. Le principe fondamental est d'utiliser une modulation de phase croisée (effet Kerr croisé) : les fluctuations quantiques d'intensité d'un faisceau laser, choisi comme "signal", peuvent alors être transférées non-destructivement sur les fluctuations de phase d'un autre faisceau, choisi comme "mesure". La perturbation due à la mesure apparaît sur le signal, sous la forme d'une augmentation de son bruit de phase. Afin d'augmenter le couplage entre les deux faisceaux, le milieu non-linéaire est placé dans une cavité optique. Cette configuration joue également le rôle de détection interférométrique, permettant la mesure de l'information apparue sur les fluctuations de phase du faisceau de mesure.

La mesure QND peut être caractérisée à l'aide de paramètres simples, directement mesurables. Les résultats obtenus expérimentalement montrent une amélioration fondamentale, par rapport aux performances de tout coupleur standard, tel qu'une simple lame semi-transparente.

Enfin, nous présentons une analyse d'un bistable à deux photons, couplant deux modes distincts du champ. Les résultats expérimentaux sont comparés avec le modèle correspondant à la modulation de phase croisée, ainsi qu'à une solution numérique de l'interaction entre les champs intra-cavité et les atomes à trois niveaux, décrites par les Equations de Bloch Optiques. Nous montrons théoriquement qu'un tel système permet de prédire plusieurs effets de réduction des fluctuations quantiques.

Mots Clés : Optique Quantique
Mesure Quantique
Bruit de Photons
Transition à deux photons
Sodium
Bistabilité Optique