

ORSAY  
n° d'ordre:

# THESE

## DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

PRESENTEE A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

PAR

PIERRE PILLET  
LABORATOIRE AIME COTTON  
C. N. R. S.

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

SUPERRADIANCE ET SUBRADIANCE  
DANS LES SYSTEMES ATOMIQUES A PLUSIEURS NIVEAUX.  
CONTRIBUTION THEORIQUE ET EXPERIMENTALE A L'ANALYSE  
DES PROPRIETES DE POLARISATION ET DE FLUCTUATIONS.

SOUTENUE LE 15 avril 1982 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM.	P. JACQUINOT	Président
	C. COHEN-TANNOUDJI	
Mme	A. CRUBELLIER	
MM.	S. HAROCHE	
	C. IMBERT	
	S. LIBERMAN	
	C. MANUS	



Le présent travail a été effectué au laboratoire Aimé Cotton. Je remercie Messieurs Pierre Jacquinet, Serge Feneuille et Sylvain Liberman de m'y avoir accueilli.

J'ai eu la grande chance de travailler sous la direction de Sylvain Liberman, à qui je suis heureux d'exprimer toute ma gratitude de m'avoir fait profiter de sa profonde compréhension de la physique, de son imagination et de ses conseils avisés.

C'est avec plaisir que je remercie Anne Crubellier dont j'ai pu apprécier la gentillesse et la compétence et avec qui j'ai collaboré de façon très fructueuse. Son aide amicale a souvent été décisive.

Je remercie également les membres du laboratoire avec qui j'ai travaillé, plus particulièrement Louis Cabaret, Didier Mayou, Marie-Gabrielle Schweighofer et Christine Vialle.

Je tiens à remercier Claude Cohen-Tannoudji et Serge Haroche, qui ont suivi avec attention la réalisation de ce travail depuis son début. Je remercie également Messieurs C. Imbert et C. Manus de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour cette thèse en acceptant de participer au Jury.

Je voudrais enfin exprimer toute ma reconnaissance à Madame Fontaine qui, avec une grande gentillesse et une grande efficacité, s'est chargée de la réalisation de ce mémoire et à Michèle Hoffman qui en a dessiné la plupart des figures.



TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u> .....	1	
Chapitre I : <u>EQUATIONS D'EVOLUTION DE LA SUPER-</u> <u>RADIANCE POUR DES SYSTEMES A PLUS</u> <u>DE DEUX NIVEAUX. CAS DE SYSTEMES</u> <u>A TROIS NIVEAUX</u> .....		7
I - <u>Superradiance pour des systèmes à plus de deux niveaux.</u>		
<u>Equations d'évolution.</u> .....	11	
1 - <u>DESCRIPTION DES SYSTEMES. PROPRIETE D'INDISCRNA-</u> <u>BILITE DES ATOMES.</u> .....	12	
a - Description du champ de rayonnement .....	12	
b - Description des atomes .....	13	
c - Le hamiltonien d'interaction atomes + champ couplés. ....	14	
d - Approximation de l'onde plane .....	16	
e - Indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ électromagnétique .....	17	
2 - <u>L'EQUATION PILOTE.</u> .....	19	
a - Approximation de Born-Markov .....	19	
b - Approximation de l'onde plane .....	24	
c - Approximation de Dicke .....	26	
d - Les états collectifs d'un système à deux niveaux	27	
e - Indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ de rayonnement et symétrie des fonctions d'onde atomiques .....	29	
3 - <u>L'EQUATION DE HEISENBERG ET LES EQUATIONS SEMI-</u> <u>CLASSIQUES</u> .....	31	

a - L'équation de Heisenberg .....	31
- Description des opérateurs du système atomique et du champ .....	31
- L'équation d'évolution de Heisenberg .....	32
b - Les équations semi-classiques .....	34
c - Démarrage de l'émission .....	35
d - Passage des équations de Heisenberg aux équations semi-classiques .....	37
e - Résolution des équations semi-classiques .....	38
f - Approximation du champ moyen .....	39
g - Approximation linéaire .....	40
4 - <u>COMPARAISON DES DIFFERENTES APPROCHES DE LA SUPERRADIANCE</u> .....	45
II - <u>Superradiance dans les systèmes à trois niveaux.</u> .....	51
1 - <u>SYSTEMES à TROIS NIVEAUX EN CASCADE</u> .....	53
2 - <u>SYSTEMES à TROIS NIVEAUX EN "Λ"</u> .....	59
3 - <u>SYSTEMES à TROIS NIVEAUX EN "V"</u> .....	63
a - Effets d'initiation .....	64
b - Effet d'inhibition .....	68
<u>Conclusion</u> .....	73
<u>Bibliographie du Chapitre I</u> .....	75
 Chapitre II : <u>SUPERRADIANCE ET SUBRADIANCE</u> .....	79
I - <u>Superradiance et subradiance pour des systèmes d'atomes</u> <u>à trois niveaux en "V"</u> .....	85
1 - <u>CAS DE DEUX ATOMES</u> .....	85
2 - <u>PROPRIETES D'INVARIANCE DU HAMILTONIEN</u> .....	86
3 - <u>CLASSIFICATION DES ETATS COLLECTIFS D'UN SYSTEME DE</u> <u>N ATOMES à n NIVEAUX SUIVANT LES REPRESENTATIONS</u> <u>IRREDUCTIBLES DE <math>S_N \times SU(n)</math></u> .....	88
4 - <u>SUBRADIANCE D'UN SYSTEME à DEUX NIVEAUX</u> .....	93
5 - <u>ETATS COLLECTIFS D'UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX</u> .....	94
6 - <u>EVOLUTION D'UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX EN "V"</u> .....	95
a) Effet d'initiation .....	96

b) Subradiance et effet d'inhibition .....	98
7 - <u>TAUX DE SUBRADIANCE POUR UN SYSTEME à TROIS</u>	
<u>NIVEAUX EN "V"</u> .....	99
8 - <u>LIEN ENTRE MELANGE STATISTIQUE D'ETATS ET TYPE</u>	
<u>DE SYMETRIE</u> .....	100
II - <u>Subradiance par "transition dégénérée"</u>	103
1 - <u>SYSTEME à QUATRE NIVEAUX</u> .....	103
a) Le cas de 2 atomes .....	
b) Les états subradiants .....	105
c) Le modèle semi-classique .....	107
2 - <u>SYSTEMES à TROIS NIVEAUX</u> .....	111
III - <u>Subradiance d'un système d'atomes contenus dans un</u>	
<u>petit volume</u> .....	112
IV - <u>Obstacles à la subradiance</u> .....	115
1 - <u>L'APPROXIMATION DE L'ONDE PLANE</u> .....	116
2 - <u>L'EFFET DOPPLER</u> .....	117
V - <u>Subradiance sur une transition <math>j \rightarrow j-1</math> . Possibilités</u>	
<u>expérimentales</u> .....	118
1 - <u>TAUX MINIMAL DE SUBRADIANCE DE L'EMISSION SUR UNE</u>	
<u>TRANSITION <math>j \rightarrow j-1</math></u> .....	118
2 - <u>EMISSION SUR UNE CASCADE <math>j \rightarrow j-1 \rightarrow j-2</math> .</u>	
<u>MANIFESTATION D'UN ETAT SUBRADIANT</u> .....	121
<u>Bibliographie du Chapitre II</u> .....	125
Chapitre III - <u>ANALYSE THEORIQUE DES PROPRIETES DE</u>	
<u>POLARISATION DE LA SUPERRADIANCE</u> .....	127
I - <u>Les équations d'évolution</u> .....	131
1 - <u>LE HAMILTONIEN DU SYSTEME</u> .....	131
a) Description des dipôles atomiques .....	131
b) Description du champ de rayonnement .....	132
c) Hamiltonien d'interaction atomes + champ .....	134
d) Choix d'un axe de quantification .....	136

2 - <u>LES EQUATIONS D'EVOLUTION SEMI-CLASSIQUES DE LA SUPERRADIANCE POUR UN SYSTEME DE N ATOMES à DEUX NIVEAUX DEGENERES</u> .....	137
II - <u>Polarisation de la lumière émise</u> .....	139
1 - <u>LES POLARISATIONS PROPRES DU SYSTEME</u> .....	139
2 - <u>TAUX DE POLARISATION AU DEBUT DE L'EMISSION</u> .....	145
3 - <u>POLARISATION DES IMPULSIONS SUPERRADIANTES</u> .....	146
4 - <u>ANALYSE DE LA POLARISATION D'UNE SERIE D'IMPULSIONS SUPERRADIANTES</u> .....	151
III - <u>Polarisation de la superradiance dans le cas de transitions <math>3/2 \rightarrow 1/2</math> et <math>1/2 \rightarrow 1/2</math></u> .....	153
1 - <u>TRANSITION <math>3/2 \rightarrow 1/2</math></u> .....	153
2 - <u>TRANSITION <math>1/2 \rightarrow 1/2</math></u> .....	153
<u>Conclusion</u> .....	162
<u>Bibliographie du Chapitre III</u> .....	163
Chapitre IV - <u>ETUDE EXPERIMENTALE DE LA POLARISATION DE LA SUPERRADIANCE ENTRE NIVEAUX EXCITES DU RUBIDIUM</u> .....	165
I - <u>Montage expérimental</u> .....	167
1 - <u>DESCRIPTION SCHEMATIQUE DE L'EXPERIENCE</u> .....	167
2 - <u>L'EXCITATION OPTIQUE</u> .....	170
3 - <u>LES SOURCES ATOMIQUES</u> .....	171
- Les jets de rubidium .....	171
- Les cellules de rubidium .....	173
4 - <u>LE DISPOSITIF DE DETECTION</u> .....	174
5 - <u>ANALYSE DE LA POLARISATION DES SIGNAUX SUPERRADIANTS</u> .....	175
II - <u>Descriptions et résultats des expériences</u> .....	179
1 - <u>PROCEDURE EXPERIMENTALE</u> .....	179
2 - <u>TRANSITIONS SUPERRADIANTES OBSERVEES</u> .....	179
3 - <u>ANALYSE DE LA POLARISATION DES SIGNAUX SUPERRADIANTS</u> .....	182

III - <u>Interprétation des résultats</u> .....	184
1 - <u>CAS DE LA CASCADE</u> $6p \rightarrow 6s \rightarrow 5p$ .....	187
a) <u>Excitation polarisée circulairement</u> .....	188
- Cascade $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ (Fig. IV-7-a) ....	188
- Transition $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ .....	188
- Transition $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ .....	188
- Cascade $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ (Fig. IV-7-c) ....	189
- Transition $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ .....	189
- Transition $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ .....	190
b) <u>Excitation polarisée linéairement</u> .....	192
- Cascade $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ (Fig. IV-7-b) ....	192
- Transition $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ .....	192
- Transition $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ .....	193
- Cascade $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ (Fig. IV-7-d) ....	194
- Transition $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ .....	194
- Transition $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ .....	194
2 - <u>CAS DE LA CASCADE</u> $6p \rightarrow 4d \rightarrow 5p$ .....	194
a) Cascade $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$ .....	195
b) Cascade $6p_{3/2} \rightarrow 4d_{5/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ .....	197
<u>Conclusion</u> .....	199
<u>Bibliographie du Chapitre IV</u> .....	201
Chapitre V - <u>ETUDE EXPERIMENTALE DES PROPRIETES</u> <u>DE FLUCTUATIONS DE LA SUPERRADIANCE POUR</u> <u>LA TRANSITION <math>6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}</math> DU RUBIDIUM</u> ..	203
I - <u>Fluctuations de la polarisation</u> .....	206
1 - <u>ELLIPTICITE DE LA POLARISATION</u> .....	206
2 - <u>FLUCTUATIONS DE LA DIRECTION DE LA POLARISATION</u> .....	209
3 - <u>INFLUENCE DE LA STRUCTURE HYPERFINE</u> .....	212
II - <u>Fluctuations de l'émission superradiante d'un système</u> <u>à deux niveaux</u> .....	217
1 - <u>FLUCTUATIONS D'INTENSITE</u> .....	218

2 - <u>FLUCTUATIONS DE RÉTARD</u> .....	221
III - <u>Etude expérimentale du pilotage de la polarisation</u> .....	225
1 - <u>ETUDE QUALITATIVE</u> .....	225
2 - <u>DETERMINATION DU SEUIL</u> .....	228
a) Montage expérimental .....	228
b) Conditions expérimentales .....	228
3 - <u>RESULTATS DE L'EXPERIENCE</u> .....	229
4 - <u>ANALYSE DES RESULTATS</u> .....	231
 <u>Conclusion</u>	
 Chapitre VI - <u>QUELQUES ASPECTS DUS AU POMPAGE</u>	
<u>EN SUPERRADIANCE</u> .....	239
I - <u>Superradiance en régime d'oscillations de pompage</u> .....	243
II - <u>Influence de la durée du pompage sur des systèmes à</u>	
<u>plusieurs niveaux</u> .....	249
1 - <u>CAS D'UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX EN "A" .</u>	
<u>EFFET DE DEPOLARISATION</u> .....	249
2 - <u>SUPERRADIANCE ENTRE UN NIVEAU EXCITE ET LE NIVEAU</u>	
<u>FONDAMENTAL D'UN ATOME</u> .....	250
<u>Bibliographie du Chapitre VI</u> .....	255
 Chapitre VII - <u>MISE EN EVIDENCE DE LA SUPERRADIANCE</u>	
<u>INDUITE PAR COLLISIONS</u> .....	257
<u>CONCLUSION</u> .....	273
 <u>Appendice A</u> - Solution de l'équation d'évolution de la	
superradiance dans la phase linéaire .....	277
 <u>Appendice B</u> - Probabilité pour un système à trois niveaux en	
en "V" décrit par une matrice densité factorisable et	
homogène de posséder un type de symétrie donnée .....	283

## INTRODUCTION



La fluorescence atomique, c'est-à-dire l'émission de lumière consécutive à une excitation, est un phénomène connu depuis fort longtemps. C'est l'interprétation de ces observations expérimentales qui est à l'origine de la mécanique quantique. Mais il faut attendre la fin des années 40 et l'élaboration de l'élégante théorie de l'électrodynamique quantique pour avoir une interprétation satisfaisante de l'effet le plus banal, l'émission spontanée ordinaire.

Dans une expérience idéale, on peut imaginer qu'un atome est porté, à un instant pris comme origine des temps, dans un état excité et laissé, à partir de cet instant, libre d'évoluer. La question est de savoir à quel instant ultérieur l'atome va se désexciter et émettre spontanément un photon. On montre que la probabilité qu'il a d'émettre ce photon décroît comme  $\exp[-\gamma t]$  où  $\gamma = 1/\tau$  est la probabilité d'émission spontanée par unité de temps pour la transition considérée. Une telle expérience est évidemment difficile à réaliser avec un seul atome. Dans une expérience avec un grand nombre  $N$  d'atomes excités, pourvu que les atomes soient indépendants les uns des autres, l'émission globale est la somme des émissions de chacun des  $N$  atomes et le signal détecté a l'allure d'une exponentielle décroissante de temps caractéristique  $\tau$ .

Dans certaines conditions expérimentales les atomes peuvent ne plus évoluer de manière indépendante. Ils émettent alors leur rayonnement par "bouffées", c'est-à-dire de manière beaucoup plus intense et beaucoup plus rapide. Cette émission se caractérise par une intensité qui est non plus proportionnelle à  $N$  mais à  $N^2$ , et une constante de temps raccourcie d'un facteur  $1/N$ . En outre, l'émission apparaît avec un certain retard par rapport à l'impulsion excitatrice qui détermine l'origine des temps. C'est le phénomène de superradiance, il est le résultat d'interférences interatomiques constructives qui apparaissent au cours de

l'émission. Cet effet prévu théoriquement dès 1954 n'a été mis en évidence et étudié expérimentalement qu'au début des années 1970.

Lorsque ce travail a été entrepris, les premières expériences de superradiance avaient permis d'étudier les propriétés d'intensité et de retard et de mettre en évidence le caractère cohérent de l'émission. De nombreuses investigations théoriques avaient également été consacrées à ce sujet, mais la plupart se limitaient au cas idéal d'un système d'atomes à deux niveaux. L'ambition de ce travail a été de généraliser le traitement de la superradiance à des situations plus complexes permettant à la fois une description plus réaliste du phénomène et ouvrant de nouvelles perspectives à l'étude de l'émission spontanée coopérative. Plusieurs voies ont successivement été explorées. L'étude de systèmes à plusieurs niveaux entre lesquels plusieurs transitions présentent un caractère coopératif a ainsi été entreprise. Le rôle de la dégénérescence des niveaux a été analysé. Les fluctuations macroscopiques de la superradiance ont été étudiées. Finalement l'influence du pompage et celle des collisions ont également été envisagées.

L'interprétation de l'émission spontanée coopérative en termes d'interférences interatomiques constructives conduit à poser le problème de l'existence des interférences destructives. L'origine physique des interférences entre atomes est liée à l'indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ rayonné. Par ailleurs on peut prévoir la nature des interférences à l'aide des propriétés de symétrie de la fonction d'onde par rapport à l'échange des atomes. Ainsi les interférences entre atomes sont constructives si la fonction d'onde est complètement symétrique ; elles conduisent alors à une accélération et à un renforcement de l'émission. C'est le phénomène de superradiance. Au contraire, une fonction d'onde partiellement antisymétrique par rapport à l'échange des atomes conduit à des interférences destructives ; l'émission est alors ralentie, voire arrêtée. C'est le phénomène de subradiance. Dans son état final le système, bien que non totalement désexcité, ne peut plus rayonner ; cet état est subradiant. La superradiance et la subradiance apparaissent

comme deux manifestations de l'émission spontanée coopérative dont elles constituent les aspects extrêmes. Les systèmes d'atomes à deux niveaux présentant initialement une inversion totale de population ne donnent pas lieu au phénomène de subradiance. En revanche des interférences destructives sont susceptibles d'apparaître dans le cas de certains systèmes à plusieurs niveaux. Des effets nouveaux se manifestent dans le cas de systèmes à plus de deux niveaux tels que plusieurs transitions présentent en même temps un caractère coopératif. Il s'agit par exemple d'effets de renforcement et d'inhibition de l'émission sur une transition par l'émission qui se produit sur les autres. Ces effets s'interprètent comme une compétition entre transitions partageant un niveau commun ou comme une interférence entre les champs émis sur chaque transition et sont le résultat d'interférences de nature constructive ou destructive entre les atomes. Plusieurs cas de systèmes à plus de deux niveaux donnant lieu au phénomène de subradiance ont été envisagés et font l'objet des Chapitres I et II.

Les problèmes liés à la dégénérescence des niveaux en superradiance découlent également de couplages entre transitions qui apparaissent lors de l'émission. La manifestation la plus intéressante est donnée par les propriétés de polarisation qui sont très différentes de celles rencontrées pour l'émission spontanée ordinaire. Une étude expérimentale et théorique a été effectuée dans le cas de transitions entre niveaux excités du rubidium et est exposée dans les Chapitres II et IV de ce mémoire. Le résultat le plus remarquable est l'existence de fluctuations d'une impulsion à l'autre de la direction de la polarisation linéaire de l'émission sur une transition  $1/2 \rightarrow 1/2$ . Ce phénomène s'interprète comme une brisure spontanée de symétrie. Cet effet est une manifestation des propriétés des fluctuations macroscopiques de l'émission superradiante, fluctuations qui avaient été observées sur l'intensité et le retard des impulsions superradiantes émises par un système à deux niveaux. On comprend l'origine de ces fluctuations : la superradiance démarre en effet sur l'émission spontanée ordinaire et l'on conçoit bien que les propriétés de fluctuations quantiques de l'émission spontanée se

retrouvent amplifiées en émission superradiante. Ces fluctuations caractérisent finalement la nature quantique du phénomène de superradiance. Elles permettent de plus, dans la mesure où le système est la superposition de deux sous-systèmes à deux niveaux, d'étudier, en s'affranchissant des fluctuations d'ordre expérimental, les fluctuations de retard et d'intensité d'un système à deux niveaux. Cette étude est présentée au Chapitre V.

En outre, certains comportements singuliers mis en évidence expérimentalement sont décrits à la fin de ce mémoire. Ils concernent essentiellement l'influence du pompage et des collisions et sont décrits aux Chapitres VI et VII.

## Chapitre I

EQUATIONS D'EVOLUTION DE LA SUPERRADIANCE POUR  
DES SYSTEMES A PLUS DE DEUX NIVEAUX.  
CAS DE SYSTEMES A TROIS NIVEAUX.



L'étude détaillée du phénomène de la superradiance est complexe dans la mesure où il s'agit d'un "problème à  $N$  corps" : on doit traiter l'évolution de  $N$  atomes couplés à un nombre infini de modes du champ électromagnétique. Nous allons décrire et comparer dans la première partie de ce chapitre les différents formalismes utilisés au cours de ce travail. Des approximations sont évidemment nécessaires. Les plus importantes seront décrites, leurs conséquences physiques analysées et les équations auxquelles elles conduisent établies. Nous rappellerons ainsi les différentes approches et traitements théoriques développés pour des systèmes d'atomes à deux niveaux et nous en généraliserons les équations d'évolution aux cas de systèmes à plusieurs niveaux. Dans ces derniers systèmes, plusieurs transitions sont couplées entre elles, soit qu'elles partagent un de leurs niveaux, soit qu'elles soient associées au même champ électromagnétique. Des effets nouveaux, spécifiques de l'émission spontanée coopérative, dus soit à la compétition des processus d'émission sur les différentes transitions, soit aux interférences des champs électromagnétiques émis sur chaque transition sont alors attendus.

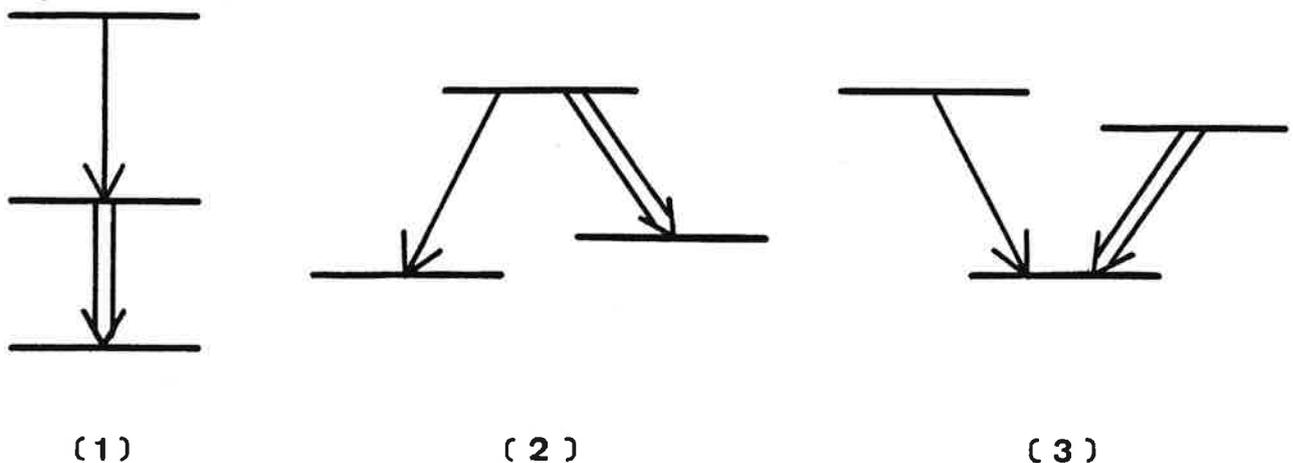


Figure I-1

Dans une deuxième partie, nous présenterons quelques exemples de systèmes à plusieurs niveaux que nous traiterons en appliquant les formalismes établis auparavant. Il s'agira de systèmes à trois niveaux disposés soit en cascade, soit en "A", soit en "V", schématisés sur la Figure I-1. Ces systèmes correspondent au cas où deux transitions superradiantes partagent un niveau commun. Nous verrons que l'émission superradiante sur une des transitions peut être alors renforcée ou au contraire inhibée par la présence de l'autre. Comme nous le montrerons, ces effets sont typiques de l'émission spontanée coopérative et nous les retrouverons par la suite pour des systèmes plus complexes.

## I - Superradiance pour des systèmes à plus de deux niveaux.

### Equations d'évolution.

Il ne s'agit pas dans ce chapitre d'exposer dans le détail les différents traitements de la superradiance dont on peut trouver de nombreux éléments dans les références [1 à 10]. Il est cependant utile de rappeler brièvement ici certains résultats que nous aurons à utiliser par la suite. Au passage nous généraliserons complètement les équations d'évolution au cas des systèmes à plusieurs niveaux [11,12]. Le problème essentiel est alors posé par la résolution de ces équations qui ne peut être effectuée que de manière numérique à l'aide d'un ordinateur et qui croît en difficulté au fur et à mesure que le nombre de niveaux et leur dégénérescence augmente.

Nous commençons par rappeler le formalisme nécessaire à l'étude du rayonnement d'un ensemble d'atomes contenu dans un grand volume cylindrique allongé [13]. Nous donnons les conditions d'émission coopérative. Elles découlent du caractère d'onde plane du champ rayonné qui se traduit par la propriété d'indiscernabilité locale des atomes vis-à-vis de celui-ci. Nous développons ensuite les différentes approches du phénomène. Une première approche analyse l'évolution du système "atomes + champ" en négligeant la réaction des atomes sur le champ [14]. Elle considère l'ensemble des atomes comme un système quantique global décrit par son opérateur densité dont l'évolution est régie par une équation pilote [4,6,9,10,15] établie dans le cadre des approximations de Born et Markov [16]. Elle est essentiellement quantique, met clairement en évidence les interférences interatomiques et permet d'interpréter la superradiance comme un phénomène d'émission spontanée coopérative. Elle est surtout utilisable dans le cadre de l'approximation de Dicke [17] et est alors bien adaptée à l'étude de l'émission d'un petit nombre d'atomes [4,12]. Une deuxième

approche préfère étudier directement un nombre restreint d'observables (champ, populations des différents niveaux et cohérences entre niveaux du système atomique, ...) sans se préoccuper de l'opérateur densité du système [1,5,7,8,9,10]. Elle est, de ce fait, beaucoup plus économique lorsque l'on considère un grand nombre d'atomes. L'évolution du système est traitée à l'aide de l'équation de Heisenberg écrite dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable. Les atomes initialement excités commencent à émettre spontanément et le champ rayonné acquiert rapidement un comportement classique [9]. L'équation de Heisenberg se ramène alors aux équations semi-classiques du rayonnement auxquelles elle est formellement identique. Cette approche privilégie l'aspect émission stimulée de la superradiance. Les deux approches sont cependant compatibles. Si la deuxième approche semble mieux adaptée pour rendre compte des expériences, où interviennent un grand nombre d'atomes (de  $10^9$  à  $10^{14}$ ), la première approche, qui met davantage en évidence les interférences interatomiques à l'origine du phénomène, est mieux à même d'interpréter physiquement les effets coopératifs.

## 1. DESCRIPTION DES SYSTEMES. PROPRIETE D'INDISCERNABILITE DES ATOMES.

### a) Description du champ de rayonnement.

Le champ de rayonnement  $\vec{E}$  est décrit à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation de photons  $a_{\vec{k}\lambda}^+$  et  $a_{\vec{k}\lambda}$  dans les différents modes de rayonnement caractérisés par le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et la polarisation  $\lambda$  de vecteur unitaire  $\vec{\epsilon}_\lambda$ . C'est un opérateur, combinaison linéaire des opérateurs  $a_{\vec{k}\lambda}^+$  et  $a_{\vec{k}\lambda}$ , qu'il est commode de séparer en deux parties dites de fréquence positive et négative, ne contenant respectivement que des opérateurs d'annihilation et de création :

$$\vec{E}^+(\vec{x}, t) = - \sum_{\vec{k}\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 v}} a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (\text{I-I-1})$$

$$\vec{E}^-(\vec{x}, t) = - \sum_{\vec{k}\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 v}} a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (\text{I-I-2})$$

$v$  est le volume de quantification du champ (choisi de manière arbitraire, il n'intervient pas dans les résultats finals).

Nous avons également utilisé une description classique du champ électromagnétique, dont l'évolution est alors régie par les équations de Maxwell.

b) Description des atomes.

Nous considérons un système de  $N$  atomes identiques contenus à l'intérieur d'un volume cylindrique allongé (voir Figure I-2).

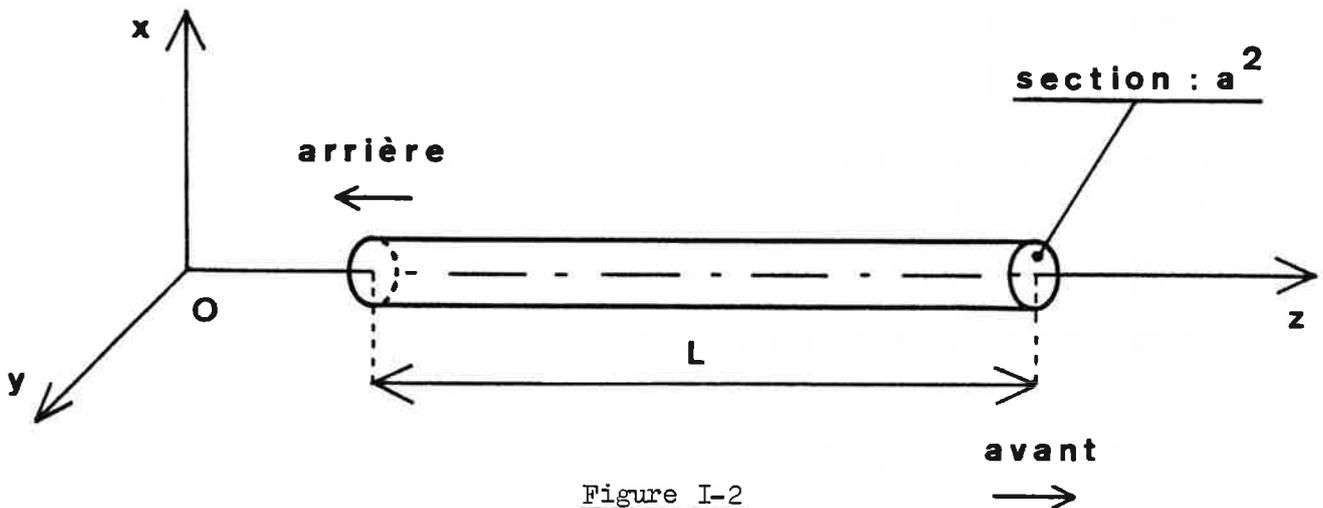


Figure I-2

Dans toute la suite de ce chapitre nous considérons des volumes émetteurs du type de celui de la Figure I-2, tels que la dimension transverse  $a$  du cylindre soit petite devant la longueur  $L$ . Nous supposons de plus que la (ou les) longueur(s) d'onde  $\lambda$  est (sont) très petite(s) devant les dimensions du volume. La condition :

$$\lambda \ll a \ll L \quad (\text{I-I-3})$$

est supposée remplie.

Les atomes sont situés aux points  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\alpha, \dots, \vec{x}_N$  et interagissent avec le champ électromagnétique. Ils sont supposés se répartir aléatoirement à l'intérieur du volume défini ci-dessus avec une densité

moyenne uniforme. Cette hypothèse décrit de manière approximative les systèmes expérimentaux où les atomes sont portés dans un état excité par une impulsion laser intense se propageant à travers une vapeur ou un jet. Les inhomogénéités de la distribution transverse des atomes excités dues à l'inhomogénéité de la section du faisceau laser excitateur ne devraient pas modifier de manière importante les propriétés de la superradiance, et sont négligées dans les traitements proposés.

Nous supposons ici que chaque atome possède  $n$  états, notés  $|i\rangle$ , d'énergie  $\hbar\omega_i$ , couplés entre eux par des opérateurs dipolaires électriques. On note pour chacune des transitions l'élément de matrice de l'opérateur dipôle électrique

$$\langle i | \vec{d} | j \rangle = \vec{d}_{ij} \quad . \quad (\text{I-I-4})$$

On introduit les opérateurs  $p_{ij}^\alpha$  qui font passer l'atome  $\alpha$  de l'état  $|j\rangle$  à l'état  $|i\rangle$  :

$$p_{ij}^\alpha = |i\rangle_\alpha \langle j| \quad . \quad (\text{I-I-5})$$

On note alors l'opérateur dipôle de l'atome  $\alpha$  associé à la transition  $i \rightarrow j$  :

$$\vec{d}_{ij}^\alpha = [p_{ij}^\alpha + p_{ji}^\alpha] \vec{d}_{ij} \quad (\text{I-I-6})$$

et le dipôle local de l'ensemble des atomes s'écrit :

$$\vec{D}(\vec{x}) = \sum_\alpha \sum_{i,j} \vec{d}_{ij}^\alpha \delta(\vec{x} - \vec{x}_\alpha) \quad . \quad (\text{I-I-7})$$

### c) Le hamiltonien d'interaction atomes + champ couplés.

L'évolution du système "atomes + champ" est régie par le hamiltonien  $H$  qui s'écrit :

$$H = H_A + H_R + H_I \quad (\text{I-I-8})$$

où :  $H_A$  est le hamiltonien des atomes seuls

$$H_A = \sum_\alpha \sum_i \hbar\omega_i p_{ii}^\alpha \quad (\text{I-I-9})$$

$H_R$  est le hamiltonien du champ électromagnétique seul :

$$H_R = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar c k a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} a_{\vec{k}, \lambda} \quad (\text{I-I-10})$$

On utilise par la suite le hamiltonien non perturbé  $H_0$  défini comme :

$$H_0 = H_A + H_R \quad (\text{I-I-11})$$

$H_I$  est le hamiltonien d'interaction

$$H_I = - \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (\text{I-I-12})$$

qui s'écrit, en remplaçant  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  par leurs expressions (I-I-7) et (I-I-1,2) et en négligeant la partie non résonnante du couplage (approximation du champ tournant) :

$$H_I = \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{i \neq j \\ \omega_i = \omega_j}} \sqrt{\frac{\hbar c k}{2 \epsilon_0 v}} (\vec{d}_{ij} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda}) \left\{ a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} p_{ji}^{\alpha} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}_{\alpha}} + a_{\vec{k}, \lambda} p_{ij}^{\alpha} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}_{\alpha}} \right\} \quad (\text{I-I-13})$$

Remarque : L'approximation du champ tournant consiste à ne garder dans l'expression de  $-\vec{D} \cdot \vec{E}$  que les termes qui conservent l'énergie comme  $p_{ji}^{\alpha} a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}$  ou  $p_{ij}^{\alpha} a_{\vec{k}, \lambda}$  et à négliger les termes non résonnants comme  $p_{ij}^{\alpha} a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}$  ou  $p_{ji}^{\alpha} a_{\vec{k}, \lambda}$ . Cette approximation est valide lorsque les temps caractéristiques de l'émission sont beaucoup plus longs que les périodes optiques  $(\frac{2\pi}{\omega_{ij}})$ . C'est bien le cas pour l'émission superradiante.

Si l'on utilise une description semi-classique du système, c'est-à-dire en considérant que le comportement du champ est classique, le hamiltonien d'interaction devient :

$$H_I = \sum_{\alpha} \sum_{i \neq j} \left\{ (\vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}(\vec{x}_{\alpha})) p_{ji}^{\alpha} + (\vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}(\vec{x}_{\alpha}))^{*} p_{ij}^{\alpha} \right\} \quad (\text{I-I-14})$$

d) Approximation de l'onde plane.

En émission superradiante, les modes du champ électromagnétique auxquels les atomes sont effectivement couplés dépendent fortement de la forme géométrique de l'échantillon. Un ensemble d'atomes excités, répartis aléatoirement à l'intérieur d'un volume cylindrique allongé du type de celui de la Figure I-2 avec une densité moyenne uniforme, émet préférentiellement suivant les deux directions avant et arrière parallèles du cylindre. Ce résultat est facilement obtenu lorsqu'on considère un ensemble de dipôles émettant en phase [1-13]. Dans ces conditions, on peut considérer qu'en première approximation le champ électromagnétique est la superposition de deux paquets d'ondes planes, se propageant suivant les directions avant et arrière du cylindre. Cette approximation, qui a été utilisée dans le cas de systèmes de  $N$  atomes à deux niveaux, s'applique bien sûr de la même façon à des systèmes de  $N$  atomes à  $n$  niveaux.

Nous rappelons [10,18,19] que les écarts à l'approximation de l'onde plane en superradiance sont minimales lorsque l'on choisit un milieu émetteur de nombre de Fresnel  $\mathcal{F}$  de l'ordre de l'unité :

$$\mathcal{F} = \frac{a^2}{\lambda L} = \frac{a/L}{\lambda/a} \approx 1 \quad (\text{I-I-15})$$

ce qui correspond au cas où l'angle de diffraction  $\lambda/a$  est du même ordre que l'angle d'ouverture géométrique  $a/L$  (c'est-à-dire où le nombre de modes de diffraction dans l'angle géométrique est de l'ordre de un).

Pour des nombres de Fresnel plus grands que l'unité ( $\mathcal{F} > 1$ ), l'émission se fait dans plusieurs lobes de diffraction contenus dans l'angle géométrique et l'hypothèse de l'onde plane devient rapidement insuffisante.

De même, pour des nombres de Fresnel inférieurs à l'unité ( $\mathcal{F} < 1$ ), l'angle de diffraction devient plus grand que l'angle géométrique, les termes de diffraction deviennent importants et l'hypothèse d'une onde plane devient difficile à justifier.

Des calculs prenant en compte les effets transverses [18] au cours de l'émission pour des valeurs de  $\mathcal{F}$  voisines de l'unité donnent des résultats en assez bon accord avec ceux qui utilisent l'approximation de l'onde plane. On peut ainsi considérer que cette approximation constitue une approche raisonnablement réaliste pour l'interprétation théorique des résultats expérimentaux. Dans cette approximation, le hamiltonien d'interaction du système donné par l'expression (I-I-13) devient :

$$H_I = \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}_z, \lambda} \sum_{\substack{i, j \\ \omega_i > \omega_j}} \sqrt{\frac{\hbar c |\mathbf{k}_z|}{2\epsilon_0 v}} (\vec{d}_{ij} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda}) \left( a_{\mathbf{k}_z, \lambda}^{+} P_{j, i}^{\alpha} e^{-ik_z z_{\alpha}} + a_{\mathbf{k}_z, \lambda} P_{i, j}^{\alpha} e^{ik_z z_{\alpha}} \right) \quad (\text{I-I-16})$$

dans laquelle on a écrit une somme sur  $\mathbf{k}_z$  à la place de :

$$\frac{v}{2\pi} \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}_z \quad . \quad (\text{I-I-17})$$

On obtiendrait une expression du hamiltonien semi-classique (I-I-14) dans l'approximation de l'onde plane en remplaçant  $\vec{x}_{\alpha}$  par  $z_{\alpha}$ .

e) Indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ électromagnétique.

Physiquement, l'approximation de l'onde plane conduit à supposer que les atomes d'un même plan d'onde sont indiscernables vis-à-vis du champ électromagnétique rayonné. Ceci signifie que, dans une tranche  $\mathcal{J}_k$  du milieu émetteur d'épaisseur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du rayonnement  $\lambda$ , les atomes sont indiscernables vis-à-vis du champ électromagnétique qu'ils rayonnent, c'est-à-dire que lorsqu'un photon s'échappe d'une tranche  $\mathcal{J}_k$  on ne peut savoir quel atome l'a émis.

Mathématiquement une telle propriété se traduit par une invariance locale du hamiltonien (I-I-16) par permutation des atomes à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{J}_k$ . Le hamiltonien est invariant par le groupe des permutations  $S_{N'}$ , où  $N'$  est le nombre d'atomes contenus à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{J}_k$ .

$$N' = \frac{N\lambda}{L} \quad . \quad (\text{I-I-18})$$

Cette propriété d'indiscernabilité locale des atomes est à l'origine d'interférences interatomiques locales qui traduisent le fait que l'émission spontanée est de nature coopérative. Pour que l'on puisse parler d'effets coopératifs, il faut donc au moins que  $N'$  soit plus grand que un :

$$N' > 1 \quad . \quad (I-I-19)$$

Cette condition correspond à la condition de seuil de la superradiance dans un grand volume du type de celui de la Figure I-2. Elle est généralement donnée pour un système à deux niveaux sous la forme :

$$T_{SR} < T_{SP} \quad (I-I-20)$$

où  $T_{SP}$  est le temps caractéristique de l'émission spontanée ordinaire, qui est égale à l'inverse de la probabilité de transition  $\Gamma$ ,  $T_{SR}$  est le temps caractéristique de l'émission superradiante défini par [2] :

$$T_{SR} = \frac{1}{N\Gamma\mu} \quad (I-I-21)$$

où  $\mu$  est le facteur de forme de l'échantillon qui, dans le cas schématisé sur la Figure I-2, est [1] :

$$\mu = \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{a^2} \quad . \quad (I-I-22)$$

La condition (I-I-20) s'écrit sous la forme d'une condition de seuil pour le nombre d'atomes excités :

$$N\mu = \frac{3}{8\pi} N \frac{\lambda^2}{a^2} > 1 \quad . \quad (I-I-23)$$

Si l'on considère un volume correspondant à un nombre de Fresnel ( $\mathcal{F} = \frac{a^2}{L\lambda}$ ) de l'ordre de l'unité, cette condition est bien équivalente au facteur  $\frac{3}{8\pi}$  près à la condition (I-I-19).

La condition (I-I-20) doit être modifiée lorsque l'on ne peut plus négliger les effets déphasants (tels que les collisions, l'effet Doppler, ...), et l'on doit comparer  $T_{SR}$  au temps caractéristique  $T_2^*$  associé à ces processus ; l'équation (I-I-20) devient :

$$T_{SR} < T_2^* \quad (I-I-24)$$

et la condition de seuil (I-I-23) s'écrit :

$$N > N_S = \frac{1}{\Gamma_{\mu} T_2^*} \quad . \quad (I-I-25)$$

Ces diverses conditions sont généralisables au cas d'un système d'atomes à plusieurs niveaux. Il faut alors définir, pour chaque transition, un temps caractéristique  $T_{SR}$  d'émission superradiante que l'on compare au temps caractéristique des effets déphasants  $T_2^*$  associé à la transition.

## 2. L'EQUATION PILOTE.

Pour établir l'équation pilote d'une assemblée de  $N$  atomes couplés au champ électromagnétique du vide, on fait généralement l'hypothèse que le système atomique ne perturbe pas de manière significative l'état du champ électromagnétique, c'est-à-dire qu'il interagit à chaque instant avec "le vide de photons". Une telle hypothèse revient à faire les approximations dites de Born et de Markov.

On peut trouver dans plusieurs références [1,4,6,9,10,15] les détails de l'établissement de l'équation pilote pour un système d'atomes à deux niveaux. Elle est généralisable au cas à  $n$  niveaux [11].

### a) Approximation de Born-Markov :

Le système "atome + champ" est décrit par son opérateur densité  $\Phi(t)$  qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Phi(t) = [H, \Phi(t)] \quad (I-I-26)$$

où  $H$  est le hamiltonien du système précédemment défini en (I-I-8).

A chaque instant l'état du système atomique est décrit par l'opérateur densité atomique  $\rho(t)$  :

$$\rho(t) = \text{Tr}_R \Phi(t) \quad (I-I-27)$$

où  $\text{Tr}_R$  indique que l'on prend la trace partielle de  $\Phi(t)$  sur les états du champ de rayonnement. Pour écrire l'équation pilote, il est pratique de passer en représentation d'interaction par rapport au hamiltonien non perturbé  $H_0$ . En représentation d'interaction un opérateur  $A$  quelconque devient :

$$\tilde{A}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} A e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (\text{I-I-28})$$

et l'équation d'évolution (I-I-26) devient :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t) = [\tilde{H}_I(t); \tilde{\Phi}(t)] \quad (\text{I-I-29})$$

A l'instant  $t=0$ , nous supposons que la matrice densité  $\tilde{\Phi}(0)$  du système est factorisable, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune corrélation entre le système atomique et le champ du "vide de photons" [16] :

$$\tilde{\Phi}(0) = \tilde{\rho}(0) \otimes |0\rangle_R \langle 0| \quad (\text{I-I-30})$$

où  $|0\rangle_R$  représente l'état du vide pour le champ électromagnétique et  $\tilde{\rho}(0)$  l'opérateur densité initial du système atomique.

On remarque que :

$$\text{Tr}_R[\tilde{H}_I(t), \tilde{\Phi}(0)] = 0 \quad (\text{I-I-31})$$

et l'équation d'évolution de  $\tilde{\rho}(t)$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \int_0^t d\tau [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t-\tau), \tilde{\Phi}(t-\tau)]] \quad (\text{I-I-32})$$

On peut simplifier cette équation en faisant les approximations de Born et de Markov. On rappelle que l'approximation de Born consiste à négliger les corrélations qui apparaissent entre le système atomique et le champ, c'est-à-dire à remplacer  $\tilde{\Phi}(t-\tau)$  dans le membre de droite de l'équation par l'expression  $\tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_R \langle 0|$  représentant le système atomique en présence du vide de photons : faire cette approximation revient à supposer que les atomes émettent à chaque instant dans le vide et donc à négliger la réaction du système émetteur sur le réservoir constitué par le champ de rayonnement quantifié. L'équation (I-I-32) devient :

$$\frac{d \tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \int_0^t d\tau [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_R \langle 0|]] \quad (\text{I-I-33})$$

L'approximation de Markov permet de ramener les équations intégral-différentielles (I-I-33) à un système d'équations différentielles. Les équations intégral-différentielles (I-I-33) décrivent un processus à "mémoire" : la dérivée de  $\tilde{\rho}(t)$  à l'instant  $t$  dépend de l'état antérieur du système aux instants  $(t-\tau)$ . L'approximation de Markov revient à considérer que la mémoire est courte devant les constantes d'évolution du système. On peut dans ces conditions remplacer  $\tilde{\rho}(t-\tau)$  par  $\tilde{\rho}(t)$  et la borne supérieure de l'intégration  $t$  par  $+\infty$ . L'équation (I-I-33) devient :

$$\frac{d \tilde{\rho}(t)}{dt} = - \frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[ \tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t-\tau), \tilde{\rho}(t) \otimes |0\rangle_R \langle 0|] \right] . \quad (\text{I-I-34})$$

En développant les termes du double commutateur du membre de droite, cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d \tilde{\rho}(t)}{dt} = & - \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\substack{i,j \\ \ell,m \\ \omega_i > \omega_j \\ \omega_\ell > \omega_m}} \frac{ck}{2\epsilon_0 v} (\vec{d}_{ij} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda) (\vec{d}_{\ell m} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda)^* \\ & \left[ \frac{\pi}{\hbar c} \delta(k-k_{\ell m}) \left\{ P_{i,j;\vec{k}} P_{m,\ell;\vec{k}} \tilde{\rho}(t) \right. \right. \\ & - P_{j,i;\vec{k}} \tilde{\rho}(t) P_{\ell,m;\vec{k}} - P_{m,\ell;\vec{k}} \tilde{\rho}(t) P_{i,j;\vec{k}} \\ & \left. \left. + \tilde{\rho}(t) P_{\ell,m;\vec{k}} P_{j,i;\vec{k}} \right\} \right. \\ & - i \frac{1}{c} \text{HP} \left( \frac{1}{k-k_{\ell m}} \right) \left\{ P_{i,j;\vec{k}} P_{m,\ell;\vec{k}} \tilde{\rho}(t) \right. \\ & \left. + P_{j,i;\vec{k}} \tilde{\rho}(t) P_{j,i;\vec{k}} - P_{m,\ell;\vec{k}} \tilde{\rho}(t) P_{i,j;\vec{k}} \right. \\ & \left. \left. - \tilde{\rho}(t) P_{\ell,m;\vec{k}} P_{j,i;\vec{k}} \right\} \right] \end{aligned}$$

L'opérateur collectif  $P_{i,j;\vec{k}}$  est défini comme suit :

$$P_{i,j;\vec{k}} = \sum_{\alpha=1}^N e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_\alpha} p_{ij}^\alpha, \quad \text{si } \omega_i > \omega_j \quad (\text{I-I-36})$$

ou

$$P_{i,j;\vec{k}} = \sum_{\alpha=1}^N e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_\alpha} p_{ij}^\alpha, \quad \text{si } \omega_j > \omega_i \quad (\text{I-I-37})$$

$$k_{\ell m} = \frac{\omega_\ell - \omega_m}{c} \quad (\text{I-I-38})$$

$\text{HP}\left(\frac{1}{k-k_{\ell m}}\right)$  signifie partie principale de  $\left(\frac{1}{k-k_{\ell m}}\right)$ .

Cette équation contient des termes de la forme  $P_{i,j;\vec{k}} P_{m,\ell;\vec{k}} \tilde{\rho}(t)$  qui traduisent l'existence d'interférences entre transitions [11,12]. Ces interférences ne sont importantes que lorsque les transitions sont dites "dégénérées", c'est-à-dire lorsque leur fréquence et leur polarisation sont peu différentes. Elles peuvent se manifester par des battements qui apparaissent sur les impulsions superradiantes. Ces battements ont été observés dans plusieurs cas expérimentaux [20,21,22] et étudiés théoriquement [23]. Ces interférences sont également à l'origine d'effets nouveaux spécifiques du comportement coopératif, qui seront étudiés en détail par la suite sous le terme de subradiance (cf. Chapitre II). Lorsque le temps d'évolution de l'émission est beaucoup plus long que la période de battement  $\left|\frac{2\pi}{c(k_{ij}-k_{\ell m})}\right|$  correspondant à la différence d'énergie entre les deux transitions, les interférences deviennent négligeables. L'équation pilote (I-I-35) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = & - \sum_{\vec{k},\lambda} \sum_{\substack{i,j \\ \omega_i > \omega_j}} \frac{ck}{2\epsilon_0 \hbar v} |\vec{d}_{ij}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda|^2 \\ & \frac{\pi}{c} \delta(k-k_{ij}) \left\{ [P_{i,j;\vec{k}} P_{j,i;\vec{k}}, \tilde{\rho}(t)]_+ - 2 P_{j,i;\vec{k}} \tilde{\rho}(t) P_{i,j;\vec{k}} \right\} \\ & - i \sum_{\vec{k},\lambda} \sum_{\substack{i,j \\ \omega_i > \omega_j}} \frac{ck}{2\epsilon_0 \hbar v} |\vec{d}_{ij}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda|^2 \frac{1}{c} \text{HP}\frac{1}{k-k_{ij}} [P_{i,j;\vec{k}} P_{j,i;\vec{k}}, \tilde{\rho}(t)] \end{aligned} \quad (\text{I-I-39})$$

On note que l'expression de l'équation pilote (I-I-39) est analogue à celle obtenue pour un système d'atomes à deux niveaux ; il faut simplement sommer sur toutes les transitions possibles.

La partie réelle de cette équation décrit l'amortissement collectif du système, la partie imaginaire les déplacements des niveaux liés au couplage collectif. Comme il a été remarqué dans les références [6-10], ce terme imaginaire traduit les effets de propagation du champ rayonné à travers le milieu. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

La validité de l'équation (I-I-35) repose sur la validité des approximations de Born et de Markov. Ces deux approximations sont ici intimement liées [10]. L'ensemble des atomes est considéré comme "un petit système" couplé au champ électromagnétique qui constitue "un grand réservoir" [14]. L'approximation de Born consiste à négliger les modifications du réservoir sous l'effet du couplage : le système interagit à chaque instant avec le "vide de photons". L'approximation de Markov néglige de plus le temps de corrélation  $\tau_c$  du petit système avec le réservoir ; elle revient à admettre que le système reste "figé" pendant le temps de corrélation du processus d'émission.

La validité de ces approximations a été étudiée en détail dans les références [9,10]. En particulier, on montre [9] que l'équation pilote prend la forme simple (I-I-35) si la condition :

$$N \frac{\tau_c}{T_{SR}} \ll 1 \quad (\text{I-I-40})$$

est remplie ; où  $T_{SR}$  est le temps caractéristique de l'émission super-radiante, défini en (I-I-21), et où  $\tau_c$  est le temps de corrélation qui est de l'ordre du temps de vol  $L/c$  des photons à travers le milieu atomique [3,9,10].

Lorsque la condition (I-I-40) n'est plus remplie, l'équation pilote obtenue après approximation de Born-Markov permet encore de calculer l'évolution des observables à évolution lente [10] (telles que le champ,

les populations des différents niveaux, la polarisation atomique du milieu, l'énergie émise ou les fonctions de corrélation d'ordre faible) pourvu que la condition [3] :

$$N \Gamma \mu \tau_c < 1 \quad (\text{I-I-41})$$

soit remplie.

Cette dernière condition peut s'écrire :

$$\tau_c < T_{\text{SR}} \quad . \quad (\text{I-I-42})$$

Elle signifie que le temps de corrélation  $\tau_c = \frac{L}{c}$  des photons à travers le milieu doit être inférieur au temps caractéristique d'évolution  $T_{\text{SR}}$  de l'émission superradiante. Cette condition est donc beaucoup moins sévère que la condition (I-I-40) qui impose que  $\tau_c$  soit plus court que  $\frac{T_{\text{SR}}}{N}$  qui correspond aux constantes de temps les plus rapides de l'équation (I-I-35) [9].

Lorsque la condition (I-I-42) n'est plus remplie, c'est-à-dire lorsque le temps de propagation de la lumière émise à travers le milieu est plus grand que le temps caractéristique de la superradiance, on ne peut plus parler réellement d'effets coopératifs pour l'ensemble du milieu. Le formalisme de l'équation pilote, dans lequel l'excitation est nécessairement réalisée au même instant dans tout le milieu atomique, prédit un phénomène de superradiance "par morceaux" [3] : différentes parties du système émettent alors indépendamment les unes des autres des impulsions lumineuses.

b) Approximation de l'onde plane.

L'équation donnée par l'expression (I-I-39) où l'on suppose qu'aucune transition n'est dégénérée devient dans l'approximation de l'onde plane :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = & - \sum_{\substack{i,j \\ \omega_i > \omega_j}} \Gamma_{ij} \mu_{ij} \left\{ \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ z_\alpha > z_\beta}} \left[ [p_{ij}^\alpha p_{ji}^\beta \tilde{\rho}(t) \right. \right. \\
& - p_{ji}^\beta \tilde{\rho}(t) p_{ij}^\alpha] e^{ik_{ij}(z_\alpha - z_\beta)} + [\tilde{\rho}(t) p_{ij}^\beta p_{ji}^\alpha \\
& \left. \left. - p_{ji}^\alpha \tilde{\rho}(t) p_{ij}^\beta] e^{-ik_{ij}(z_\alpha - z_\beta)} \right] \right. \\
& + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ z_\alpha < z_\beta}} \left[ [p_{ij}^\alpha p_{ji}^\beta \tilde{\rho}(t) - p_{ji}^\beta \tilde{\rho}(t) p_{ij}^\alpha] e^{-ik_{ij}(z_\alpha - z_\beta)} \right. \\
& \left. \left. + [\tilde{\rho}(t) p_{ij}^\beta p_{ji}^\alpha - p_{ji}^\alpha \tilde{\rho}(t) p_{ij}^\beta] e^{ik_{ij}(z_\alpha - z_\beta)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{I-I-43}$$

$$\Gamma_{ij} \mu_{ij} = \frac{k_{ij}}{2\epsilon_0 \hbar a^2} |\vec{d}_{ij}|^2 \tag{I-I-44}$$

où  $\Gamma_{ij}$  est la probabilité de transition pour la transition  $i \rightarrow j$ , et où  $\mu_{ij}$  est le facteur de forme de l'échantillon atomique pour la transition  $i \rightarrow j$

$$\mu_{ij} = \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda_{ij}^2}{a^2} \tag{I-I-45}$$

Lorsque plusieurs transitions partagent le même champ électromagnétique avec la même polarisation, il apparaît dans l'expression de l'équation pilote (I-I-38) des termes d'interférence dits par "transition dégénérée" ou "quasi-dégénérée". Dans ce cas, il faut utiliser l'équation pilote (I-I-35), ce qui revient à modifier l'équation (I-I-43) en remplaçant les termes de la forme :

$$\sum_{\substack{i,j \\ \omega_i > \omega_j}} \Gamma_{ij} \mu_{ij} p_{i,j}^\alpha p_{j,i}^\beta \tilde{\rho}(t) e^{ik_{ij}(z_\alpha - z_\beta)}$$

par des termes un peu plus compliqués :

$$\sum_{\substack{i,j \\ \ell,m \\ \omega_i > \omega_j \\ \omega_\ell > \omega_m}} \frac{k_{\ell m}}{2\epsilon_0 \hbar a^2} |\vec{d}_{ij}| |\vec{d}_{\ell m}| p_{i,j}^\alpha p_{m,\ell}^\beta \tilde{\rho}(t) e^{i(k_{ij} z_\alpha - k_{\ell m} z_\beta)}$$

Dans l'équation (I-I-43) la condition  $z_\alpha > z_\beta$  sur la sommation indique qu'un photon émis par l'atome  $\alpha$  ne pourra être réabsorbé que par un atome  $\beta$  situé plus en avant dans la direction Oz du milieu (Fig. I-2). Cette condition est directement liée à la propagation du champ rayonné vers l'avant du milieu émetteur. De même la condition inverse  $z_\alpha < z_\beta$  découle de la propagation du champ vers l'arrière.

L'équation pilote (I-I-38) écrite sous cette forme est peu utilisable. Cette équation, en effet, doit être projetée sur les  $n^N$  états des  $N$  atomes à  $n$  niveaux. Il est intéressant de la simplifier en utilisant l'approximation de Dicke.

c) Approximation de Dicke.

L'approximation de Dicke consiste à renoncer à décrire les effets de propagation du champ à travers le milieu [6-10]. Elle revient à traiter indépendamment l'émission vers l'avant et vers l'arrière et à remplacer dans (I-I-43) les sommations  $\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ z_\alpha > z_\beta}}$  et  $\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ z_\alpha < z_\beta}}$  par des sommations libres

$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta}$ . L'équation (I-I-43) devient :

$$\frac{d \tilde{\rho}(t)}{dt} = - \sum_{\substack{i, j \\ \omega_i > \omega_j}} \frac{\Gamma_{ij} \mu_{ij}}{2} \left\{ [R_{i,j}^+ R_{j,i}^-, \tilde{\rho}(t)]_+ - 2 R_{j,i}^- \tilde{\rho}(t) R_{i,j}^+ \right\} . \quad (\text{I-I-46})$$

On définit :

$$R_{i,j}^+ = P_{i,j; k_{ij}} = \sum_{\alpha=1}^N p_{ij}^\alpha e^{ik_{ij} z_\alpha} \quad (\text{I-I-47})$$

pour  $\omega_i > \omega_j$ , et

$$R_{j,i}^- = P_{j,i; k_{ij}} = \sum_{\alpha=1}^N p_{ji}^\alpha e^{-ik_{ij} z_\alpha} \quad (\text{I-I-48})$$

pour  $\omega_i > \omega_j$ .

On obtiendrait une équation quelque peu différente si on tenait compte des éventuels effets d'interférence, précédemment mentionnés, entre transitions dégénérées.

Sous la forme (I-I-46), l'équation pilote est analogue à l'équation originale de Dicke qu'il avait écrite pour décrire la superradiance dans un petit volume [24]. Bien qu'on ne puisse espérer qu'elle rende compte quantitativement de la superradiance dans un grand volume, elle constitue, comme on le verra, une approche relativement satisfaisante qui permet de comprendre simplement l'origine de nombreux effets.

d) Les états collectifs d'un système à deux niveaux.

L'approximation de Dicke a été utilisée pour des systèmes de  $N$  atomes à deux niveaux. Elle permet de limiter l'espace des états à prendre en considération lors de la résolution de l'équation pilote. Pour ce faire on définit une base d'états collectifs appelés états de Dicke.

Pour construire cette base, on décrit chaque atome à deux niveaux comme une particule de spin  $1/2$ . Les composantes de "pseudo-moments" cinétiques individuels se notent :

$$r^{+\alpha} = p_{21}^{\alpha} e^{ik_{21}z_{\alpha}} \quad (\text{I-I-49})$$

$$r^{-\alpha} = p_{12}^{\alpha} e^{ik_{21}z_{\alpha}} \quad (\text{I-I-50})$$

$$r^{(3)\alpha} = \frac{1}{2} (p_{22}^{\alpha} - p_{11}^{\alpha}) \quad (\text{I-I-51})$$

(on a choisi d'appeler ici 2 le niveau supérieur et 1 le niveau inférieur de la transition). Les composantes du "pseudo-moment" cinétique total s'écrivent :

$$R^{+} = \sum_{\alpha} r^{+\alpha} = P_{2,1;k_{21}} \quad (\text{I-I-52})$$

$$R^{-} = \sum_{\alpha} r^{-\alpha} = P_{1,2;k_{21}} \quad (\text{I-I-53})$$

$$R^{(3)\alpha} = \sum_{\alpha} r^{(3)\alpha} = \frac{1}{2} (p_{22}^{\alpha} - p_{11}^{\alpha}) \quad (\text{I-I-54})$$

Les états de Dicke que l'on note  $|r,m,g\rangle$  sont des états propres des opérateurs collectifs :

$$R^{(3)} = \sum_{\alpha} r^{(3)}_{\alpha} \quad (\text{I-I-55})$$

$$\text{et } R^2 = (R^{(3)})^2 + \frac{1}{2} (R^+ R^- + R^- R^+) \quad (\text{I-I-56})$$

dont les valeurs propres sont respectivement  $m$  et  $r(r+1)$  avec  $-r < m < r$  et  $r = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots, \frac{1}{2}$  ou  $0$ . L'indice  $g$  indique qu'il existe plusieurs états correspondant à un même couple de nombres quantiques  $(r,m)$ . La dégénérescence est égale à :

$$\frac{(2r+1)}{\binom{\frac{N}{2}+r+1}} C_N^{N/2+r} .$$

Le nombre  $m$  caractérise l'état d'excitation du système et donc son énergie ( $\frac{N}{2}+m$  atomes sont dans l'état excité). Le nombre  $r$  caractérise les sous-espaces de l'espace des états qui sont invariants par l'action des opérateurs collectifs  $R^+$  et  $R^-$ . Comme on le verra par la suite, il caractérise les possibilités de coopération des atomes lorsqu'ils sont dans l'état  $|r,m,g\rangle$ . Initialement Dicke [24] avait d'ailleurs appelé ce nombre quantique, nombre de coopération. Nous rappelons qu'un état  $|r,m\rangle$  est le produit partiellement symétrisé par rapport aux atomes de :

(i)  $(\frac{N}{2}-r)$  fonctions d'ondes de deux atomes complètement antisymétriques de la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle_{\alpha} |1\rangle_{\beta} - |1\rangle_{\alpha} |2\rangle_{\beta}) .$$

(ii)  $2r$  fonctions d'onde monoatomiques  $|2\rangle_{\alpha}$  ou  $|1\rangle_{\beta}$ .

Si  $r$  est différent de  $\frac{N}{2}$ , les états sont partiellement antisymétriques.

L'équation pilote du système s'écrit :

$$\frac{d \tilde{\rho}(t)}{dt} = - \frac{\Gamma_{\mu}}{2} \{ [R^+ R^-, \tilde{\rho}(t)]_+ - 2 R^- \tilde{\rho}(t) R^+ \} . \quad (\text{I-I-57})$$

Elle ne contient que les opérateurs atomiques collectifs  $R^+$  et  $R^-$ . Par conséquence, si initialement l'état du système appartient à l'un des sous-espaces invariants par  $R^+$  et  $R^-$  caractérisés par le nombre de coopération  $r$ , à chaque instant ultérieur l'état du système appartiendra

à ce sous espace : le nombre de coopération  $r$  est conservé tout au long de l'évolution.

Pour résoudre l'équation (I-I-57) dans le cas où à l'instant initial tous les atomes sont excités (qui est celui des expériences réalisées) on ne considère alors que les  $(N+1)$  états  $|\frac{N}{2}, m\rangle$ . Remarquons ici que ces états sont totalement symétriques par rapport à l'échange de deux atomes.

L'approximation de Dicke pour des systèmes à deux niveaux rend possible la résolution de l'équation pilote au moins pour des relativement petits nombres d'atomes [4]. Son intérêt est aussi de révéler la propriété de la conservation de  $r$  qui caractérise l'effet coopératif.

e) Indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ de rayonnement et symétrie des fonctions d'ondes atomiques.

La propriété de conservation du nombre de coopération  $r$  de Dicke est une propriété importante de la superradiance. Elle est reliée au fait que l'équation pilote (I-I-57) est invariante par le groupe des permutations  $S_N$ , c'est-à-dire que l'on ne modifie pas la forme de l'équation en échangeant deux indices atomiques quelconques. Le nombre de coopération  $r$  caractérise les propriétés de symétrie de l'état du système vis-à-vis de la permutation des atomes, propriétés qui se conservent tout au long de l'évolution. La propriété de conservation du nombre  $r$  traduit le fait que les atomes sont indiscernables vis-à-vis du champ électromagnétique qu'ils rayonnent, c'est-à-dire qu'on ne peut jamais savoir quel atome a émis un photon déterminé. Il apparaît ainsi de fortes corrélations entre les fonctions d'onde des différents atomes du milieu, qui découlent des termes d'interférences interatomiques  $r^{+\alpha} r^{-\beta} \tilde{\rho}(t)$  contenus dans l'équation pilote (I-I-57).

Lorsque l'on prend en compte les effets de propagation, l'équation écrite dans l'approximation de l'onde plane (I-I-43) et appliquée au cas

à deux niveaux n'est plus invariante par le groupe des permutations  $S_N$ . Comme nous l'avons mentionné précédemment, le hamiltonien du système, écrit dans l'approximation de l'onde plane, reste localement invariant par le groupe des permutations locales des atomes  $S_{N'}$ , à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{J}_k$  définie comme au paragraphe I-1-e). Il en est de même pour l'équation pilote d'un système à deux niveaux, qui découle de cet hamiltonien. Les interférences interatomiques et les corrélations entre atomes sont maintenant locales : l'émission possède un caractère coopératif "local". Les propriétés de symétrie de la fonction d'onde du système vis-à-vis de la permutation des atomes restent localement conservées. Il est alors possible de définir pour chaque tranche  $\mathcal{J}_k$  des états de Dicke en considérant un pseudo-moment cinétique local dont les composantes s'écrivent :

$$R'^+ = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_k} r^{+\alpha} \quad (\text{I-I-58})$$

$$R'^- = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_k} r^{-\alpha} \quad (\text{I-I-59})$$

$$R'^{(3)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_k} r^{(3)\alpha} \quad (\text{I-I-60})$$

On définit également un nombre de coopération local  $r'$  qui se conserve tout au long de l'évolution.

Pour des systèmes à plus de deux niveaux, on peut trouver des lois de conservation analogues à la loi de conservation de  $r$  pour des systèmes à deux niveaux. Il peut s'agir de lois de conservation globale obtenues dans l'approximation de Dicke ou locale dans l'approximation de l'onde plane. Comme nous le verrons ces lois de conservation permettent de prédire de nouveaux effets coopératifs. Pour les énoncer, il est nécessaire de généraliser la base des états collectifs de Dicke à des systèmes à plus de deux niveaux. Cette généralisation est moins immédiate que celle de l'équation pilote. Elle sera l'objet du chapitre qui suit.

### 3. L'EQUATION DE HEISENBERG ET LES EQUATIONS SEMI-CLASSIQUES.

Une autre approche théorique possible de la superradiance consiste à établir directement les équations d'évolution des quantités physiques observables. De plus, dans ce traitement, on ne néglige plus les réactions que produit le système atomique sur le champ. Dans ce paragraphe nous établissons tout d'abord un système d'équations purement quantiques (équations de Heisenberg), puis un système d'équations semi-classiques. Les équations quantiques semblent a priori les seules capables de décrire la superradiance qui est un phénomène d'émission spontanée coopérative. Cependant, après une brève période d'émission, elles se ramènent simplement aux équations semi-classiques. Nous nous plaçons dans tout ce paragraphe dans le cadre de l'approximation de l'onde plane que nous avons discutée précédemment. Pour simplifier les écritures, nous donnons ici l'expression des différentes équations (Heisenberg et semi-classiques) en ne considérant que le champ rayonné qui se propage dans la direction avant du volume émetteur (Figure I-2). Il a été montré [2,9] que cette dernière approximation ne modifie pas de manière trop significative les résultats quant au champ rayonné. Pour simplifier, nous supposons de plus ici que les transitions ne présentent pas de dégénérescence, ce qui permet de négliger les effets d'interférence.

#### a) L'équation de Heisenberg.

##### - Description des opérateurs du système atomique et du champ.

Les opérateurs seront décrits dans le cadre de l'approximation de l'enveloppe lentement variable [25]. On suppose que l'évolution temporelle des opérateurs du système atomique et du champ est lente devant les périodes optiques (ce qui correspond à la même condition que l'approximation du champ tournant) et que leur évolution spatiale est lente devant les longueurs d'onde des différentes transitions. L'opérateur enveloppe lentement variable  $\hat{\mathcal{E}}_{ij}$  du champ électromagnétique associé à la transition  $i \rightarrow j$  est défini par :

$$\mathcal{E}_{ij}(z,t) = -2 \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar c \mathbf{k}}{2\epsilon_0 V}} a_{\mathbf{k}}^+ e^{i\mathbf{k}z} e^{-i(\omega_{ij}t - \mathbf{k}_{ij}z)} \quad (\text{I-I-61})$$

(on suppose :  $\omega_i - \omega_j = \omega_{ij} > 0$ ).

Les opérateurs enveloppes lentement variables du système atomique s'écrivent :

$$\rho_{\ell m}(z,t) = \frac{1}{a^2} \sum_{\alpha=1}^N p_{\ell m}^{\alpha} \delta(z-z_{\alpha}) e^{-i((\omega_{\ell} - \omega_m)t - (\mathbf{k}_{\ell} - \mathbf{k}_m)z)} \quad (\text{I-I-62})$$

$\rho_{\ell\ell}(z,t)$  représente l'opérateur densité de population du niveau  $\ell$  au point  $z$  et au temps  $t$ ,  $\rho_{\ell m}(z,t)$  l'opérateur densité de cohérence entre les niveaux  $\ell$  et  $m$ .

- L'équation d'évolution de Heisenberg.

L'évolution des opérateurs décrivant le système atome + champ est donnée par l'équation de Heisenberg :

$$\frac{d}{dt} X = \frac{\partial}{\partial t} X + \frac{1}{i\hbar} [X, H] \quad (\text{I-I-63})$$

où  $X$  est un opérateur quelconque et  $H$  le hamiltonien du système défini par les expressions (I-I-8, 9, 10, 16).

A l'aide de cette équation, on établit les équations d'évolution du système

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{E}_{ij}(z,t) = -\frac{i\mathbf{k}_{ij}}{\epsilon_0} d_{ij} \rho_{ij}(z,t) \quad (\text{I-I-64})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\ell m}(z,t) = & -\frac{i}{2\hbar} \left\{ \sum_{\substack{i \\ \omega_{\ell} > \omega_i}} d_{i\ell} \mathcal{E}_{i\ell} \rho_{im} - \sum_{\substack{j \\ \omega_m < \omega_j}} d_{mj} \mathcal{E}_{mj} \rho_{\ell j} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{i \\ \omega_i > \omega_{\ell}}} d_{i\ell} \mathcal{E}_{i\ell}^+ \rho_{im} - \sum_{\substack{j \\ \omega_m > \omega_j}} d_{mj} \mathcal{E}_{mj}^+ \rho_{\ell j} \right\} \quad (\text{I-I-65}) \end{aligned}$$

On trouvera dans les références [9, 10] le détail des calculs effectués pour le cas d'un système à deux niveaux.

On peut transformer légèrement les équations (I-I-64 et 65) en utilisant le changement de variable qui introduit le temps retardé

$$\tau = t - \frac{z}{c} \quad . \quad (\text{I-I-66})$$

Les équations s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_{ij}(z, t) = - \frac{ik_{ij}}{\epsilon_0} d_{ij} \mathcal{Q}_{ij}(z, t) \quad (\text{I-I-67})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}_{lm}(z, t) = - \frac{i}{2\hbar} \left\{ \sum_{\substack{i \\ \omega_l > \omega_i}} d_{il} \mathcal{E}_{il} \mathcal{Q}_{im} - \sum_{\substack{j \\ \omega_m < \omega_j}} d_{mj} \mathcal{E}_{mj} \mathcal{Q}_{lj} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i \\ \omega_i > \omega_l}} d_{il} \mathcal{E}_{il}^+ \mathcal{Q}_{im} - \sum_{\substack{j \\ \omega_j < \omega_m}} d_{mj} \mathcal{E}_{mj} \mathcal{Q}_{lj} \right\} \quad (\text{I-I-68}) \end{aligned}$$

Nous utiliserons par la suite ce temps retardé  $\tau$  (plutôt que le temps  $t$ ) qui est mieux adapté pour rendre compte de l'excitation des atomes. Cette dernière est en effet réalisée par une impulsion laser très brève qui se propage à travers le milieu, c'est-à-dire que l'excitation se produit pour tous les atomes à l'instant  $\tau=0$ , c'est pourquoi ce type d'excitation est généralement appelée excitation balayée.

Les équations (I-I-64,65,67,68) sont valables dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable que nous avons définie plus haut. Ceci nécessite que la densité d'atomes du système reste faible. Plus précisément on montre [3,10] que ceci correspond à la condition :

$$N < \frac{1}{\Gamma_{ij} \mu_{ij} \lambda_{ij}/c} \frac{L}{\lambda_{ij}} \quad (\text{I-I-69})$$

pour chaque transition  $i \rightarrow j$ . Cette limite correspond, comme il a été montré dans la référence [10], à des distances entre atomes de l'ordre de leur dimension. Les équations (I-I-65,65,67,68) ne sont alors plus adaptées à la description de l'évolution. Nous n'abordons pas davantage ce problème et nous supposons toujours dans la suite de cet exposé que l'approximation de l'enveloppe lentement variable est justifiée.

Avant d'aborder le problème de la résolution de ces équations, nous donnons les équations semi-classiques d'un système de  $N$  atomes à  $n$  niveaux défini comme précédemment mais interagissant avec un champ électromagnétique ayant un comportement classique.

b) Les équations semi-classiques.

Le champ électromagnétique n'est plus décrit par un opérateur mais par un nombre complexe et son évolution est alors régie par les équations de Maxwell. Les équations d'évolution du système atomique sont données par celles de sa matrice densité [25,26] :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H', \rho(t)] \quad (\text{I-I-70})$$

où  $H'$  est le hamiltonien semi-classique :

$$H' = H_A + H'_I \quad . \quad (\text{I-I-71})$$

Le hamiltonien des atomes seuls  $H_A$  est donné par l'expression (I-I-9) et le hamiltonien d'interaction  $H'_I$  écrit dans l'approximation de l'onde plane par (I-I-14). Nous supposons qu'initialement la matrice densité est factorisable à l'instant  $t=0$  et donc à tout instant de l'émission :

$$\rho(t) = \prod_{\alpha} \rho^{\alpha}(t) \quad (\text{I-I-72})$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas de corrélations entre les atomes.

On définit les différentes grandeurs atomiques dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable comme :

$$Q_{ij}^{Cl}(z, \tau) = \text{Tr } \rho Q_{ij}(z, \tau) \quad . \quad (\text{I-I-73})$$

On établit ainsi les équations semi-classiques qui sont analogues aux équations de Heisenberg (I-I-67,68) en faisant la correspondance entre les opérateurs  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^+$ ,  $Q_{ii}$  et  $Q_{ij}$  et les nombres complexes  $\mathcal{E}^{Cl}$ ,  $\mathcal{E}^{Cl*}$ ,  $Q_{ii}^{Cl}$  et  $Q_{ij}^{Cl}$ . L'exposant Cl indique que l'on considère une description classique du champ. On a :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_{ij}^{Cl}(z, \tau) = -\frac{ik_{ij}}{\epsilon_0} d_{ij} Q_{ij}^{Cl}(z, \tau) \quad (\text{I-I-74})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Q_{lm}^{Cl}(z, \tau) = + \frac{i}{2\pi} \left\{ \sum_{\substack{i \\ \omega_l > \omega_i}} d_{il} \mathcal{E}_{il}^{Cl} Q_{im}^{Cl} - \sum_{\substack{j \\ \omega_m < \omega_j}} d_{mj} \mathcal{E}_{mj}^{Cl} Q_{lj}^{Cl} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i \\ \omega_i > \omega_l}} d_{il} \mathcal{E}_{il}^{Cl+} Q_{im}^{Cl} - \sum_{\substack{j \\ \omega_j < \omega_m}} d_{mj} \mathcal{E}_{mj}^{Cl} Q_{lj}^{Cl} \right\} . \quad (\text{I-I-75})$$

c) Démarrage de l'émission.

Initialement on considère que le système atomique couplé au champ électromagnétique du vide présente, sur diverses transitions, des inversions de populations totales, ce qui correspond à l'état d'excitation rencontré dans les expériences. Les équations semi-classiques (I-I-74,75) ne peuvent rendre compte du démarrage du système. En effet, pour une transition  $i \rightarrow j$  présentant initialement une inversion totale de population, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{ij}^{Cl}(z, \tau=0) = Q_{ij}^{Cl}(z, \tau=0) = 0 \\ Q_{ii}^{Cl}(z, \tau=0) = \frac{N_i}{V} \\ Q_{jj}^{Cl}(z, \tau=0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-I-76})$$

et le système n'évolue pas : ces conditions constituent un état métastable. Ce résultat n'est pas surprenant, nous traitons ici un phénomène d'émission spontanée dont on ne peut rendre compte à l'aide d'une théorie semi-classique. Il est absolument nécessaire de traiter quantiquement le champ électromagnétique pour rendre compte du démarrage.

Nous utilisons pour cela les équations de Heisenberg (I-I-67,68). Le champ et le système atomique sont ici décrits par des opérateurs qui ne commutent pas nécessairement entre eux. Cette dernière propriété permet d'expliquer la nature quantique du démarrage. Initialement les valeurs moyennes des opérateurs intervenant dans les équations sont :

$$\langle \mathcal{E}_{ij} \rangle_{\tau=0} = \langle Q_{ij} \rangle_{\tau=0} = 0 \quad (\text{I-I-77})$$

$$\langle Q_{ii} \rangle_{\tau=0} = \frac{N_i}{V} \quad (\text{I-I-78})$$

$$\langle Q_{jj} \rangle_{\tau=0} = 0 \quad (\text{I-I-79})$$

et

$$\langle \mathcal{E}_{il}^{(+)} Q_{im} \rangle_{\tau=0} = \langle \mathcal{E}_{mj}^{(+)} Q_{lj} \rangle_{\tau=0} = 0 \quad (\text{I-I-80})$$

On a de plus :

$$\langle \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{ij}^+ \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}^+) \rangle_{\tau=0} = \frac{\hbar c}{\epsilon_0 v} \frac{v}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} k^3 dk d\Omega_k \quad (\text{I-I-81})$$

La sommation s'effectue en ajoutant les contributions de tous les modes contenus dans le volume  $\Omega$  de l'espace des phases associé au cylindre actif. Ce volume de diffraction  $\Omega$  est une section conique d'angle solide  $\frac{\lambda^2}{a^2}$  et de longueur  $\frac{2\pi}{L}$ . On a :

$$\langle \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{ij}^+ \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}^+) \rangle_{\tau=0} = \frac{\hbar c}{\epsilon_0} \frac{k_{ij}}{V} \quad (\text{I-I-82})$$

où  $V = L a^2$  est le volume du cylindre actif.

On trouve enfin d'après (I-I-54)

$$\langle \frac{1}{2} (Q_{ij}^+ Q_{ij} + Q_{ij} Q_{ij}^+) \rangle_{\tau=0} = \frac{N_i}{V^2} \quad (\text{I-I-83})$$

Les relations (I-I-82) et (I-I-83) montrent qu'à l'instant initial  $\tau=0$  il existe un champ du vide et une cohérence optique, pour la transition  $i \rightarrow j$  associée, non nuls, mais de phases aléatoires. La relation (I-I-80) montre de plus qu'il n'existe pas de relation de phase entre le champ et la cohérence optique.

On montre [9] que pour des temps  $\tau > 0$ , le champ électromagnétique et la cohérence optique vont se corrélérer et permettre le début de la désexcitation du système. Ce problème a été discuté dans le cas d'un système à deux niveaux et est généralisable au cas de systèmes atomiques à plusieurs niveaux. On montre qu'après émission de quelques photons les corrélations entre le champ et les cohérences optiques deviennent totales, c'est-à-dire :

$$\frac{2|\langle \mathcal{E}^+ Q_{ij} - \mathcal{E} Q_{ij}^+ \rangle|}{\langle \mathcal{E}^+ \mathcal{E} + \mathcal{E} \mathcal{E}^+ \rangle \langle Q_{ij}^+ Q_{ij} + Q_{ij} Q_{ij}^+ \rangle} = 1 \quad (\text{I-I-84})$$

A partir du moment où la relation (I-I-84) est vérifiée, le champ et la cohérence optique sont fortement corrélés et peuvent être décrits par des grandeurs classiques en quadrature. Avec l'émission des tout premiers photons dans les modes superradiants, ce qui correspond à une période égale à quelques  $T_{SR}$ , courte devant le retard de l'impulsion, le champ acquiert un comportement classique qui se conserve durant le reste de l'évolution.

d) Passage des équations de Heisenberg aux équations semi-classiques.

Les équations de Heisenberg permettent de montrer que toutes les dérivées à l'origine de  $\langle \mathcal{E}_{ij} (Q_{ii} - Q_{jj}) \rangle$  sont nulles ; il en résulte qu'à chaque instant ultérieur de l'évolution, on a :

$$\langle \mathcal{E}_{ij} \rangle = \langle Q_{ij} \rangle = 0 \quad . \quad (\text{I-I-85})$$

Ceci ne signifie pas que le système n'évolue pas mais que le champ et la cohérence optique associée n'acquièrent pas de phases déterminées. Ce résultat n'est pas en désaccord avec le comportement classique du rayonnement une fois le démarrage quantique de l'émission assuré, il signifie seulement que la moyenne quantique des opérateurs  $\mathcal{E}_{ij}$  et  $Q_{ij}$ , que l'on peut interpréter comme la moyenne des grandeurs physiques qu'ils décrivent sur un ensemble de trajectoires classiques, est nulle.

On montre [9] en faisant la correspondance

$$|\mathcal{E}_{ij}^{Cl}|^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \langle \mathcal{E}_{ij}^+ \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}^+ \rangle \quad (\text{I-I-86})$$

$$|Q_{ij}^{Cl}|^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \langle Q_{ij}^+ Q_{ij} + Q_{ij} Q_{ij}^+ \rangle \quad (\text{I-I-87})$$

que, lorsque la relation (I-I-84) est vérifiée, les équations quantiques et classiques deviennent identiques. Le champ et la cohérence optique associée peuvent alors être décrits par des nombres complexes en quadrature. Les valeurs initiales de  $|\mathcal{E}_{ij}^{Cl}|^2$  et  $|Q_{ij}^{Cl}|^2$  sont données par

l'état du système à la fin de la phase quantique du démarrage, qui correspond à la période de mise en phase des différents dipôles émetteurs. Cette mise en phase est acquise très tôt au cours de l'émission et est caractéristique du comportement coopératif de l'émission. Bien évidemment, pour satisfaire la relation (I-I-85), la phase commune des dipôles possède un caractère aléatoire d'une impulsion à une autre.

e) Résolution des équations semi-classiques.

Pour étudier l'évolution d'un système superradiant, il suffit de résoudre les équations semi-classiques (I-I-74,75) pourvu que l'on ait étudié par ailleurs le démarrage de l'émission. On peut décrire ce dernier en injectant comme conditions initiales celles de l'état du système à la fin de la phase du démarrage que l'on peut évaluer par un calcul quantique [9]. Ceci correspond à une condition initiale pour le champ ou la cohérence optique dont l'ordre de grandeur est donné par les expressions (I-I-82) et (I-I-83).

Nous avons également utilisé pour simuler phénoménologiquement le démarrage du système des termes sources de champ et de cohérence optique dont les phases varient aléatoirement à l'intérieur du volume émetteur [2-5]. On décompose celui-ci en  $K$  tranches perpendiculairement à l'axe  $Oz$ , auxquelles on associe par exemple [3] une cohérence optique  $\mathcal{Q}_{ij}(0)$  de module :

$$|\mathcal{Q}_{ij}(0)| = \frac{\sqrt{\mathcal{Q}_{ii} K}}{V} \quad (\text{I-I-88})$$

avec une phase choisie aléatoirement d'une tranche à l'autre. Nous faisons donc l'hypothèse qu'initialement les atomes sont corrélés à l'intérieur des tranches mais qu'il n'existe pas de corrélations entre tranches. On devrait en principe choisir un nombre de tranches égal à  $(L/\lambda)$ . On se limite en fait à un très petit nombre de tranches compatibles avec les possibilités d'intégration numérique de l'ordinateur. Ce calcul permet néanmoins de montrer qu'il se bâtit une relation de phase entre le champ et la cohérence optique associée.

Le traitement du démarrage du système est difficile à traiter rigoureusement. Cependant quelle que soit la méthode choisie pour simuler phénoménologiquement celui-ci on obtient des résultats pratiquement identiques. L'évolution ultérieure calculée à l'aide des équations semi-classiques est en effet peu sensible aux conditions initiales, ce qui permet de rendre compte du phénomène même si l'on ne connaît qu'un ordre de grandeur du bruit constitué par l'émission spontanée responsable du démarrage. Notons finalement que l'état du système pris comme condition initiale des équations semi-classiques découle du traitement de l'émission spontanée et est sujet aux fluctuations quantiques de celle-ci. Ces fluctuations sont en quelque sorte amplifiées dans la suite de l'évolution et apparaissent comme des fluctuations macroscopiques des différentes grandeurs observables du système [5]. Nous reviendrons par la suite sur ces fluctuations macroscopiques de l'émission superradiante.

Nous allons utiliser dans la suite de ce travail les équations semi-classiques. Pour simplifier l'écriture nous y supprimons dorénavant, chaque fois qu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'exposant Cl. Les solutions des équations semi-classiques sont calculées numériquement avec l'aide d'un ordinateur. Il peut être intéressant de simplifier ces équations. Nous utilisons pour cela deux approximations que nous allons exposer dans les paragraphes qui suivent. Il s'agit de l'approximation du champ moyen et de l'approximation linéaire.

f) Approximation du champ moyen.

L'approximation du champ moyen consiste à ne pas prendre en compte les effets de propagation. On néglige à cette fin les corrélations spatiales pour le système atomique. Dans ces conditions on montre assez simplement que les équations semi-classiques (I-I-67,68) peuvent alors s'écrire :

$$\bar{\mathcal{E}}_{ij}(\tau) = - \frac{i k_{ij}}{\epsilon_0} L_{d_{ij}} \bar{\mathcal{Q}}_{ij}(\tau) \quad (\text{I-I-89})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \bar{Q}_{\ell m}(\tau) = & -\frac{i}{4\pi} \left\{ \sum_{\substack{i \\ \omega_\ell > \omega_i}} d_{i\ell} \bar{\mathcal{E}}_{i\ell}(\tau) \bar{Q}_{im}(\tau) \right. \\
& - \sum_{\substack{j \\ \omega_m < \omega_j}} d_{mj} \bar{\mathcal{E}}_{mj}(\tau) \bar{Q}_{\ell m}(\tau) + \sum_{\substack{i \\ \omega_i > \omega_\ell}} d_{i\ell} \bar{\mathcal{E}}_{i\ell}(\tau) \bar{Q}_{im}(\tau) \\
& \left. - \sum_{\substack{j \\ \omega_m > \omega_j}} d_{mj} \bar{\mathcal{E}}_{mj}(\tau) \bar{Q}_{\ell j}(\tau) \right\} \quad (\text{I-I-90})
\end{aligned}$$

$$\text{où : } \quad \bar{Q}_{\ell m}(\tau) = \frac{1}{L} \int_0^L dz Q_{\ell m}(z, \tau) \quad (\text{I-I-91})$$

$$\text{et : } \quad \bar{\mathcal{E}}_{ij}(\tau) = \mathcal{E}_{ij}(L, \tau) \quad (\text{I-I-92})$$

Cette approximation simplifie notablement les équations d'évolution. Elle permet d'interpréter qualitativement certains résultats. Nous l'avons utilisée lorsque les systèmes étudiés présentaient un grand nombre de niveaux. Cette approximation ne permet évidemment pas de rendre compte des effets dus à la propagation. Par exemple, les constantes de temps d'évolution [3] telles que le retard ou la largeur temporelle des impulsions superradiantes sont beaucoup plus longues que celles calculées dans l'approximation du champ moyen. Il existe aussi des effets dus uniquement à la propagation, c'est le cas des oscillations cohérentes (ou "ringings") [3,27] que peuvent présenter les impulsions superradiantes et qui sont directement liées aux absorptions et réémissions d'énergie électromagnétique par les atomes aux divers points de la cellule.

#### g) Approximation linéaire.

Les équations semi-classiques (I-I-74,75) qui décrivent l'évolution ne présentent pas en général de solution analytique simple même dans l'approximation du champ moyen. On calcule des solutions numériques avec l'aide d'un ordinateur mais le calcul devient très long lorsque le nombre d'états augmente. Nous donnons ici un traitement simplifié de ces

équations valable au début de l'émission, dans le cadre de l'approximation dite linéaire. Cette approximation consiste à supposer que le nombre de photons émis par le système reste très petit devant le nombre d'atomes excités. Elle ne permet évidemment pas de décrire réellement l'évolution de la superradiance. En effet l'intensité calculée de la lumière émise tend vers l'infini avec le temps. Cependant elle permet de faire certaines prédictions et, en particulier, de calculer un bon ordre de grandeur pour les délais [3] ou leurs fluctuations [28] (au moins dans le cas d'un système à deux niveaux). Cette approximation revient à considérer que les populations des différents niveaux atomiques et les cohérences (autres que les cohérences optiques associées à une transition permise) restent pratiquement constantes durant cette phase de l'émission. Nous donnons ici l'exemple d'un système de  $N$  atomes à deux niveaux. Dans l'approximation de l'onde plane, et en ne considérant qu'une seule direction de propagation, les équations semi-classiques s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = - \frac{i k_0}{2\epsilon_0} 2d \mathcal{Q} \quad (\text{I-I-93})$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \tau} = \frac{id}{2\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N} \quad (\text{I-I-94})$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = \frac{id}{\hbar} (\mathcal{E}^+ \mathcal{Q} - \mathcal{E} \mathcal{Q}^+) \quad (\text{I-I-95})$$

où  $\mathcal{N}$  est l'opérateur différence de population,  $\mathcal{Q}$  l'opérateur cohérence optique et  $\mathcal{E}$  l'opérateur champ électromagnétique.

Initialement :

$$\mathcal{N}(0) = \frac{N}{V} \quad (\text{I-I-96})$$

Nous faisons l'hypothèse qu'au début de l'émission :

$$\mathcal{N}(\tau) \simeq \mathcal{N}(0) = \frac{N}{V} \quad (\text{I-I-97})$$

et les équations (I-I-93 à 95) deviennent :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = - \frac{i k_0}{2\epsilon_0} 2d \mathcal{Q} \quad (\text{I-I-98})$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \tau} = \frac{id}{2\hbar} \frac{N}{V} \mathcal{E} \quad (\text{I-I-99})$$

Finalement on obtient pour le champ rayonné l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} = \frac{k_0 d^2 N}{2\epsilon_0 \pi a^2} \frac{1}{L} \mathcal{E} \quad (\text{I-I-100})$$

qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} = \frac{\mathcal{E}}{L T_{SR}} \quad (\text{I-I-101})$$

On peut trouver en Appendice A le détail des calculs de l'expression de  $\mathcal{E}$  calculée à l'aide de l'équation (I-I-101). On trouve, lorsqu'on choisit de simuler le démarrage du système par une cohérence optique initiale :

$$\mathcal{E}(z, \tau) = \int_0^{z'} dz' I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{(z-z')\tau}{T_{SR} L}} \right) \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{E}(z', 0) \quad (\text{I-I-102})$$

$$\text{où : } \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'}(z', 0) = - \frac{i k_0}{\epsilon_0} \mathcal{Q}(z', 0) \quad (\text{I-I-103})$$

Si on choisit  $\mathcal{Q}(z', 0)$  constant pour tout le milieu émetteur, on obtient

$$\mathcal{E}(z, \tau) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{L} \frac{T_{SR}}{\tau}} I_1 \left( 2 \sqrt{\frac{z\tau}{T_{SR} L}} \right) \left( - \frac{i k_0 L}{\epsilon_0} \mathcal{Q}(0) \right) \quad (\text{I-I-104})$$

Les fonctions  $I_0$  et  $I_1$  sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre zéro et un.

Si l'on traite le démarrage du système à l'aide d'un champ initial  $\mathcal{E}(0)$ , on obtient comme solution :

$$\mathcal{E}(z, \tau) = \mathcal{E}(0) I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{z\tau}{T_{SR} L}} \right) \quad (\text{I-I-105})$$

La Figure I-3 montre une comparaison de la solution de l'équation calculée sur ordinateur et de la valeur de  $\mathcal{E}$  calculée dans le cadre de l'approximation linéaire. Nous remarquons que cette approximation traite assez correctement le début de l'émission jusqu'au moment où l'impulsion super-radiante commence d'être émise. Ce calcul reste donc correct durant pratiquement toute la phase de l'émission précédant l'impulsion superradiante; à partir de cet instant les deux solutions divergent fortement. Il peut permettre d'interpréter certains résultats déjà acquis pendant cette phase

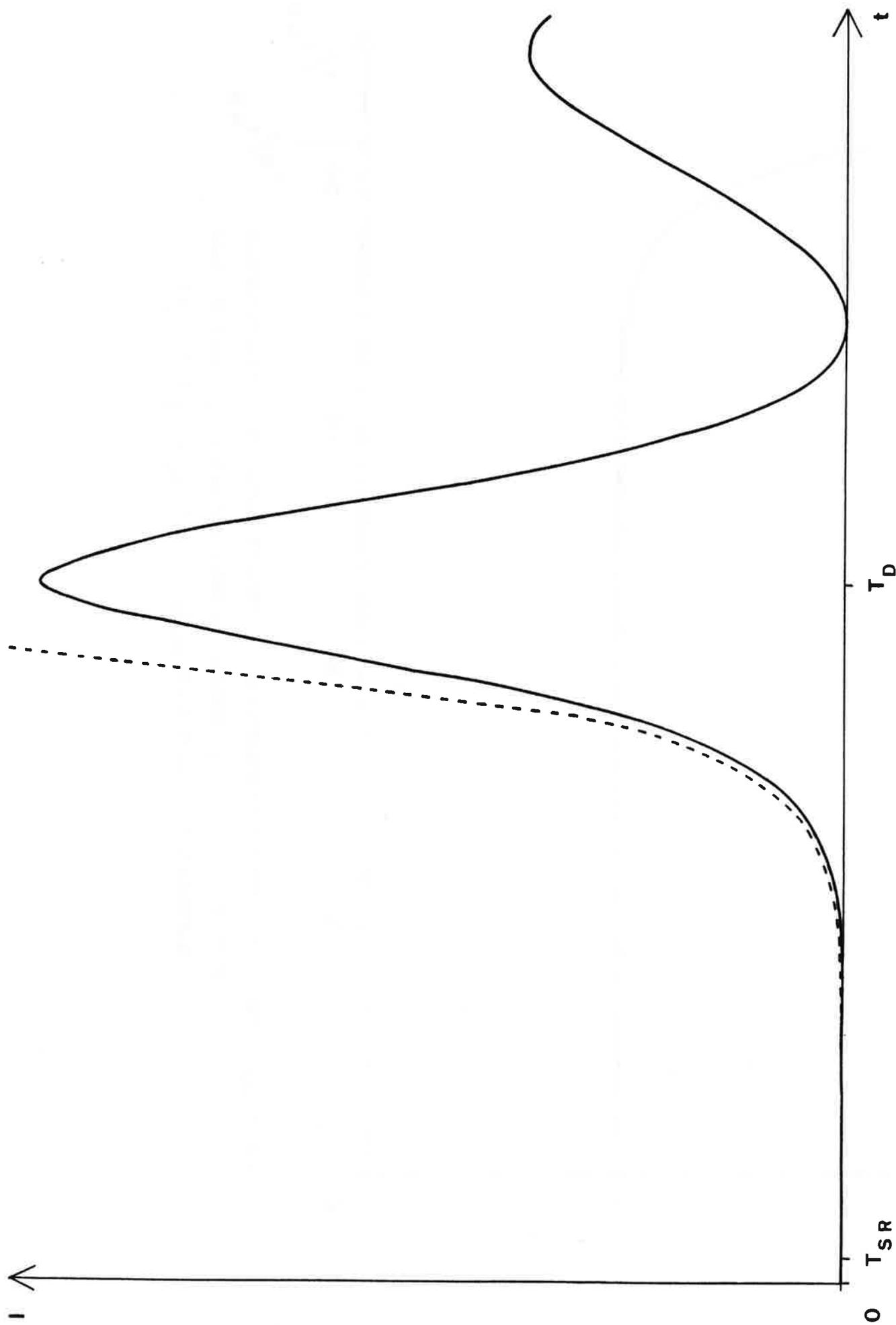


Figure 1-3 : La courbe en trait plein représente l'intensité de la superradiance calculée dans l'approximation de l'onde plane. Elle est comparée à la courbe en pointillé, qui correspond à un calcul dans l'approximation linéaire.

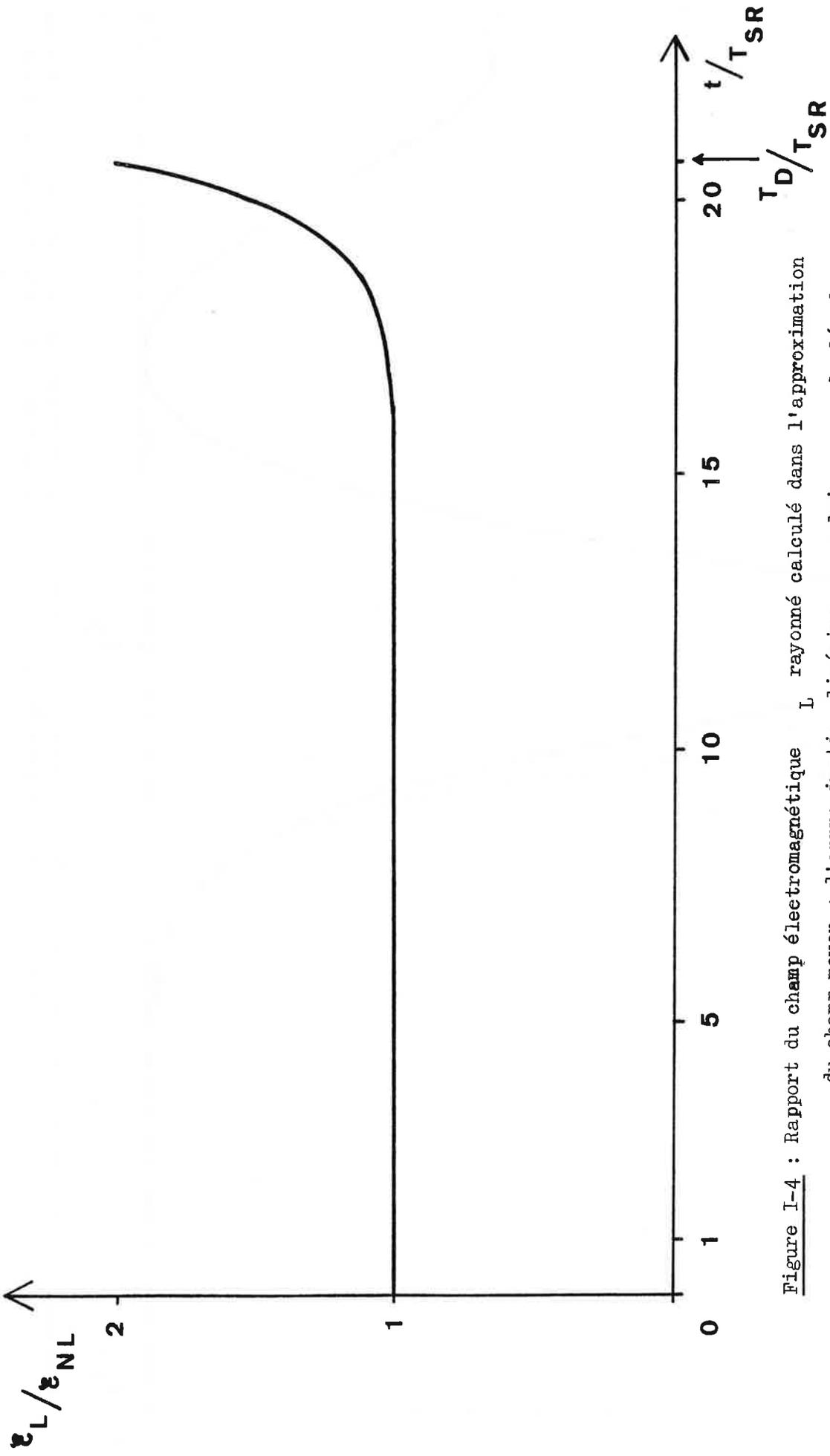


Figure I-4 : Rapport du champ électromagnétique  $L$  rayonné calculé dans l'approximation du champ moyen + l'approximation linéaire sur celui  $NL$  calculé dans l'approximation du champ moyen seule :  $L / NL = \frac{L(\tau)}{NL(\tau)}$ .

pourvu que l'on vérifie qu'ils restent non modifiés au moment de l'émission de l'impulsion superradiante.

On peut également utiliser l'approximation linéaire en même temps que l'approximation du champ moyen. Les équations du champ moyen sont obtenues en remplaçant  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{Q}$  par les grandeurs  $\overline{\mathcal{E}}$  et  $\overline{\mathcal{Q}}$  définies en (I-I-91 et 92), dans les équations (I-I-94,95). On substitue de plus à l'équation (I-I-93) l'équation :

$$\overline{\mathcal{E}} = - \frac{ik_0 L}{2\epsilon_0} \overline{\mathcal{Q}} \quad . \quad (I-I-106)$$

On obtient alors pour  $\overline{\mathcal{Q}}$  sans faire l'approximation linéaire :

$$\overline{\mathcal{Q}}_{NL}(\tau) = \frac{N/2V}{\text{ch} \frac{\tau - t_D}{2T_{SR}}} \quad (I-I-107)$$

avec  $t_D = T_{SR} \text{Log } N$  (I-I-108)

ce qui correspond à une cohérence optique initiale :

$$\overline{\mathcal{Q}}(0) = \frac{\sqrt{N}}{V} \quad . \quad (I-I-109)$$

Dans l'approximation linéaire on a simplement :

$$\overline{\mathcal{Q}}_L(\tau) = \overline{\mathcal{Q}}(0) e^{-\tau/2T_{SR}} \quad . \quad (I-I-110)$$

La figure I-4 représente la courbe  $\overline{\mathcal{Q}}_L(\tau) / \overline{\mathcal{Q}}_{NL}(\tau)$  pour  $N = 10^9$  atomes, ce qui correspond à un retard d'environ  $21 T_{SR}$  ; on voit que les deux courbes diffèrent de moins de 3% jusqu'à  $\tau = 17 T_{SR}$  .

#### 4. COMPARAISON DES DIFFERENTES APPROCHES DE LA SUPERRADIANCE.

Nous avons dans cette partie rappelé brièvement différentes approches théoriques de la superradiance. Une première approche se place dans le point de vue de Schrödinger et permet d'établir, pour rendre compte de la superradiance, une équation pilote. Cette approche rend bien compte du démarrage de la superradiance et met en relief les interférences

interatomiques responsables du comportement coopératif. Cependant elle ne paraît pas être la mieux adaptée pour calculer l'évolution du système. En effet, l'équation pilote n'est pratiquement utilisable que dans le cadre de l'approximation de Dicke et, de plus, sa résolution devient très vite difficile au fur et à mesure que le nombre d'atomes augmente. (Pour fixer les idées, les calculs réalisés jusque là ne prennent en compte que quelques centaines d'atomes [4,12]). La deuxième approche proposée se place dans le point de vue de Heisenberg et utilise les équations d'évolution des quantités physiques accessibles dans l'expérience. Elle permet de bien comprendre à la fois les aspects quantiques et classiques du phénomène. La superradiance est un phénomène quantique dans la mesure où il démarre sur l'émission spontanée. Les différents dipôles émetteurs se verrouillent en phase sous l'effet de l'émission spontanée. La superradiance est un phénomène classique dans la mesure où, une fois établi un réseau de dipôles en phase, les équations de Heisenberg sont identiques aux équations semi-classiques qui décrivent la suite de l'évolution.

Il a été montré [10] que l'équation pilote établie dans le cadre des approximations de Born et Markov est presque identique à l'équation de Heisenberg dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable. Il faut pour cela légèrement modifier ces équations. Les équations quantiques de Heisenberg (I-I-67,68) se mettent sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Q_{\ell, m}(z, \tau) = - \sum_{\substack{i \\ \omega_{\ell} > \omega_i}} \frac{k_{i\ell} |d_{i\ell}|^2}{2\epsilon_0 \hbar} \int_0^z dz' Q_{i, \ell}(z', \tau)$$

$$Q_{i, m}(z, \tau) + 3 \text{ autres termes analogues .} \quad (\text{I-I-111})$$

En remplaçant les  $Q_{\ell, m}$  par leur expression (I-I-62) on trouve :

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{p}_{\ell m}^{\alpha} = \sum_{\substack{i \\ \omega_{\ell} > \omega_i}} \frac{k_{i\ell} |d_{i\ell}|^2}{2\epsilon_0 \hbar a^2} \sum_{\substack{\beta \\ z_{\beta} < z_{\alpha}}} \tilde{p}_{i\ell}^{\beta} \tilde{p}_{i\ell}^{\alpha} + \dots \quad (\text{I-I-112})$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \tilde{p}_{\ell m}^{\alpha} &= p_{\ell m}^{\alpha} e^{-i((\omega_{\ell} - \omega_m)t - (k_{\ell} - k_m)z)} \\ &= p_{\ell m}^{\alpha} e^{-i(\omega_{\ell} - \omega_m)\tau} \end{aligned} \quad (\text{I-I-113})$$

On peut, à partir de l'équation pilote (I-I-38), trouver une expression analogue à l'équation (I-I-112) en écrivant l'équation d'évolution de la valeur moyenne de l'observable  $\tilde{p}_{\ell m}^{\alpha}$  (qui correspond à l'observable  $p_{\ell m}^{\alpha}$  en représentation d'interaction). On obtient, en négligeant l'émission vers l'arrière et en utilisant la relation :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{X} \rangle = \text{Tr} \left\langle \left[ \frac{d}{dt} \tilde{\rho}, \tilde{X} \right] \right\rangle \quad (\text{I-I-114})$$

où  $X$  représente une observable quelconque :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{p}_{\ell m}^{\alpha} \rangle = - \sum_{\substack{i \\ \omega_{\ell} > \omega_i}} \frac{k_{i\ell} |d_{i\ell}|^2}{2\epsilon_0 \pi a^2} \sum_{\substack{\beta \\ z_{\beta} < z_{\alpha}}} \langle \tilde{p}_{i\ell}^{\beta} \tilde{p}_{im}^{\alpha} \rangle + \dots \quad (\text{I-I-115})$$

Les équations (I-I-112) et (I-I-115) sont très analogues, il faut néanmoins remplacer le temps retardé  $\tau = t - z/c$  introduit dans les équations de Heisenberg (I-I-67,68) par le temps ordinaire  $t$  de l'équation (I-I-43). Cette restriction provient du fait que l'équation pilote est établie dans le cadre de l'approximation de Markov qui néglige le temps de cohérence  $\tau_c = L/c$  de l'émission. On notera que si le temps de propagation  $L/c$  est plus grand que le temps caractéristique  $T_{SR}$  de l'émission (la condition (I-I-33) n'est plus remplie), les deux approches ne sont plus rigoureusement équivalentes. Par la suite nous supposons toujours que la condition (I-I-33) est remplie, c'est-à-dire que l'on peut confondre dans les équations le temps  $t$  et le temps retardé  $\tau$ .

Si l'on se place dans l'approximation du champ moyen (I-I-74,75), l'équation (I-I-100) devient :

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{p}_{\ell m} = - \sum_{\substack{i \\ \omega_{\ell} > \omega_i}} \frac{1}{2} \frac{k_{i\ell} |d_{i\ell}|^2}{2\epsilon_0 \pi} \tilde{p}_{i\ell} \tilde{p}_{im} + \dots \quad (\text{I-I-116})$$

$$\text{avec } \tilde{P}_{\ell m} = \sum_{\alpha=1} p_{\ell m}^{\alpha} \quad (\text{I-I-117})$$

On obtient une équation équivalente pour les valeurs moyennes des observables  $p_{i\ell}$  dans le point de vue de Schrödinger en remplaçant le temps retardé  $\tau$  par  $t$  lorsque l'on part de l'équation pilote (I-I-46) écrite dans l'approximation de Dicke, qui est la même approximation que celle du champ moyen.

En définitive, les deux approches théoriques proposées doivent donner des résultats presque identiques. Les équations quantiques de Heisenberg et leur "prolongement" semi-classique sont cependant la forme la plus utilisable pour rendre compte des expériences de superradiance. On peut, de plus, dans ces équations, tenir compte d'autres effets qui interviennent lors de l'émission, tels que l'effet Doppler [3,9], le pompage des atomes dans un niveau excité [3,9,29], l'émission dans les modes transverses du volume [10,18], ... . Leur résolution devient cependant lourde lorsque le système atomique possède un grand nombre de niveaux. Les approximations du champ moyen ou l'approximation linéaire peuvent alors permettre d'obtenir de manière approchée certains résultats. Il est également intéressant d'étudier directement les propriétés d'invariance du hamiltonien qui permettent d'établir des lois de conservation des propriétés de symétrie de la fonction d'onde des atomes. On a vu que ces propriétés découlaient de l'indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ électromagnétique, elles peuvent, comme on le verra, permettre d'établir directement certains résultats.

La forme de l'équation pilote permet d'attendre des effets lorsque l'on considère des systèmes superradiants à plusieurs niveaux. Deux transitions peuvent partager un même niveau ; il apparaît dans l'équation pilote des termes d'interférence interatomique de la forme :

$$(p_{ij}^{\alpha} p_{ji}^{\beta} + p_{i\ell}^{\alpha} p_{\ell i}^{\beta}) \tilde{\rho}(t) ,$$

une transition peut être dégénérée et il apparaît des termes d'interférence de la forme :

$$p_{ij}^{\alpha} p_{\ell m}^{\beta} \tilde{\rho}(t) .$$

Pour commencer l'étude de l'influence de ces termes, nous allons exposer dans la deuxième partie de ce chapitre des cas très simples de systèmes à trois niveaux et mettre ainsi en évidence certains effets nouveaux qui peuvent apparaître dans des systèmes à plus de deux niveaux.



## II - Superradiance dans les systèmes à trois niveaux.

Nous considérons dans cette partie le cas de systèmes superradiants à trois niveaux en cascade, en "A" et en "V", dont plusieurs propriétés ont déjà été étudiées [10,12,30]. On note 0 le niveau commun aux deux transitions et 1 et 2 les deux autres niveaux. Les deux transitions sont de caractère dipolaire électrique de fréquence  $\omega_1$  pour la transition ( $0 \leftrightarrow 1$ ) et  $\omega_2$  pour ( $0 \leftrightarrow 2$ ) et de polarisations respectives  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . On appelle  $d_1$  et  $d_2$  les éléments de matrice de l'opérateur dipôle correspondant à chacune des transitions :

$$d_1 = \langle 1 | \vec{d} \cdot \vec{e}_1 | 0 \rangle \quad (\text{I-II-1})$$

$$d_2 = \langle 2 | \vec{d} \cdot \vec{e}_2 | 0 \rangle \quad (\text{I-II-2})$$

et  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  leurs probabilités de transition :

$$\Gamma_1 = \frac{\omega_1^3}{c^3} \frac{1}{3\pi\epsilon_0\hbar} |d_1|^2 \quad (\text{I-II-3})$$

$$\Gamma_2 = \frac{\omega_2^3}{c^3} \frac{1}{3\pi\epsilon_0\hbar} |d_2|^2 \quad (\text{I-II-4})$$

Pour caractériser les différents systèmes à trois niveaux, on utilise les paramètres  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  égaux à plus ou moins un :  $\epsilon_1$  (resp.  $\epsilon_2$ ) égal à +1, indique que le niveau 1 (resp. 2) est le niveau supérieur de la transition ( $0 \leftrightarrow 1$ ) (resp. ( $0 \leftrightarrow 2$ )),  $\epsilon_1$  (resp.  $\epsilon_2$ ) égal à -1, indique que le niveau 0 est le niveau supérieur. Le système à trois niveaux en cascade sera caractérisé par  $\epsilon_1 = +1$  et  $\epsilon_2 = -1$ , celui en "A" par  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$  et celui en "V" par  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = +1$ .

D'après (I-I-74 et 75), les équations semi-classiques qui décrivent l'évolution d'un système à trois niveaux s'écrivent :

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial \tau} = i \epsilon_1 \frac{d_1}{2\hbar} \left[ \mathcal{E}_1^* Q_{10}^{(\epsilon_1)} - \mathcal{E}_1 Q_{01}^{(\epsilon_1)} \right] \quad (\text{I-II-5})$$

$$\frac{\partial Q_{22}}{\partial \tau} = i \epsilon_2 \frac{d_2}{2\hbar} \left[ \mathcal{E}_2^* Q_{20}^{(\epsilon_2)} - \mathcal{E}_2 Q_{02}^{(\epsilon_2)} \right] \quad (\text{I-II-6})$$

$$\frac{\partial Q_{00}}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \tau} (Q_{11} + Q_{22}) \quad (\text{I-II-7})$$

$$\frac{\partial Q_{10}^{(\epsilon_1)}}{\partial \tau} = \frac{i}{2\hbar} \left[ \epsilon_1 d_1 \mathcal{E}_1 (Q_{11} - Q_{00}) + \epsilon_1 d_2 \mathcal{E}_2^{(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)} Q_{12}^{(\epsilon_1)} \right] \quad (\text{I-II-8})$$

$$\frac{\partial Q_{20}^{(\epsilon_2)}}{\partial \tau} = \frac{i}{2\hbar} \left[ \epsilon_2 d_2 \mathcal{E}_2 (Q_{22} - Q_{00}) + \epsilon_2 d_1 \mathcal{E}_1^{(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)} Q_{21}^{(\epsilon_2)} \right] \quad (\text{I-II-9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Q_{12} = - \frac{i}{2\hbar} \left[ d_1 \mathcal{E}_1^{(\epsilon_1)} Q_{02} - d_2 \mathcal{E}_2^{(-\epsilon_2)} Q_{10} \right] \quad (\text{I-II-10})$$

pour la partie atomique et :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{dz} = - \frac{i k_1}{2 \epsilon_0} (2d_1 Q_{10}^{(\epsilon_1)}) \quad (\text{I-II-11})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_2}{dz} = - \frac{i k_2}{2 \epsilon_0} (2d_2 Q_{20}^{(\epsilon_2)}) \quad (\text{I-II-12})$$

pour la partie concernant les équations de Maxwell.  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont les enveloppes lentement variables des champs électromagnétiques associés aux transitions  $(0 \leftrightarrow 1)$  et  $(0 \leftrightarrow 2)$ ,  $Q_{00}$ ,  $Q_{11}$  et  $Q_{22}$  celles des populations associées aux niveaux 0, 1 et 2,  $Q_{12}$  celle de la cohérence entre les niveaux 1 et 2 et  $Q_{10}$  et  $Q_{20}$  celles des cohérences optiques associées aux transitions  $(0 \leftrightarrow 1)$  et  $(0 \leftrightarrow 2)$ . On a écrit  $\mathcal{E}_i^{(+1)}$  et  $Q_{ij}^{(+1)}$  à la place de  $\mathcal{E}_i$  et  $Q_{ij}$  et  $\mathcal{E}_i^{(-1)}$  et  $Q_{ij}^{(-1)}$  pour  $\mathcal{E}_i^*$  et  $Q_{ij}^* = Q_{ji}$ .

Le démarrage du système est simulé en prenant des conditions initiales pour les champs ou les cohérences optiques.

### 1. SYSTEMES à TROIS NIVEAUX EN CASCADE.

Nous considérons le système à trois niveaux en cascade schématisé sur la Figure I-5 :

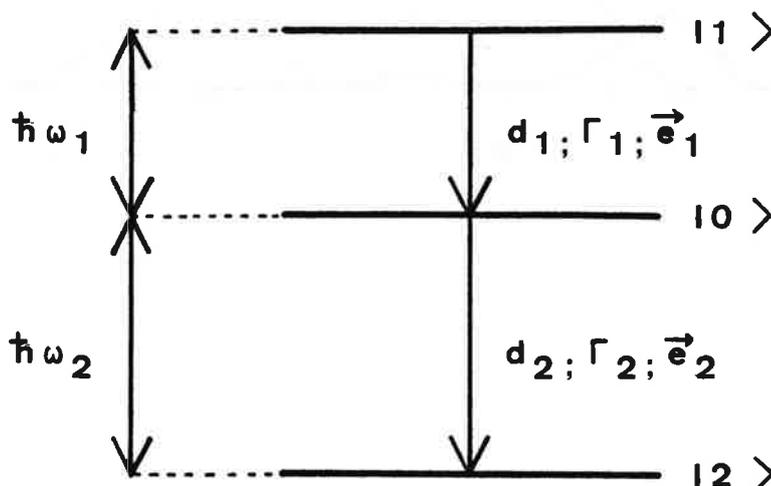
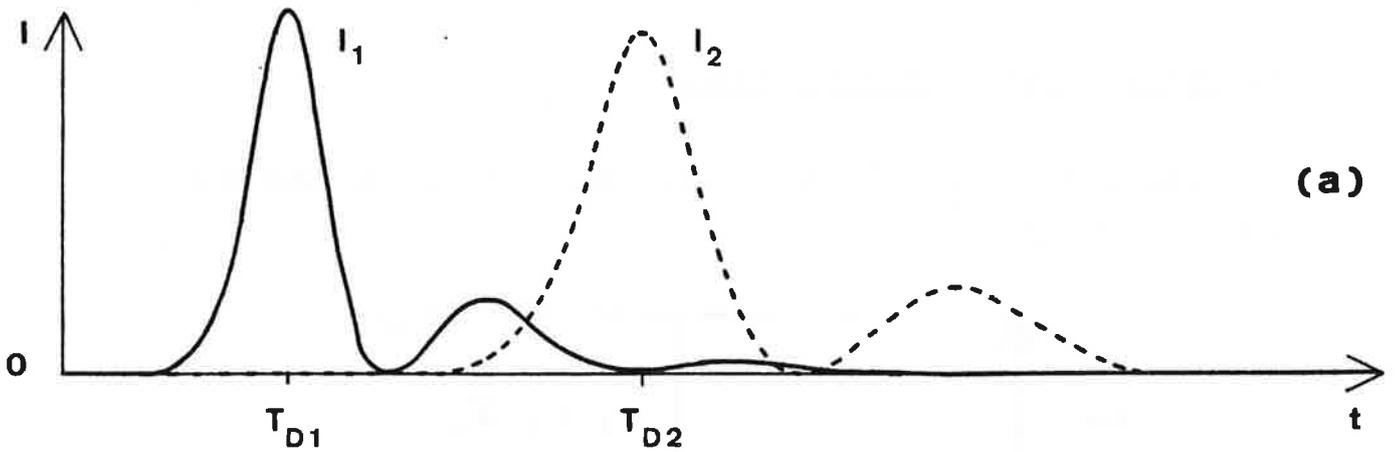


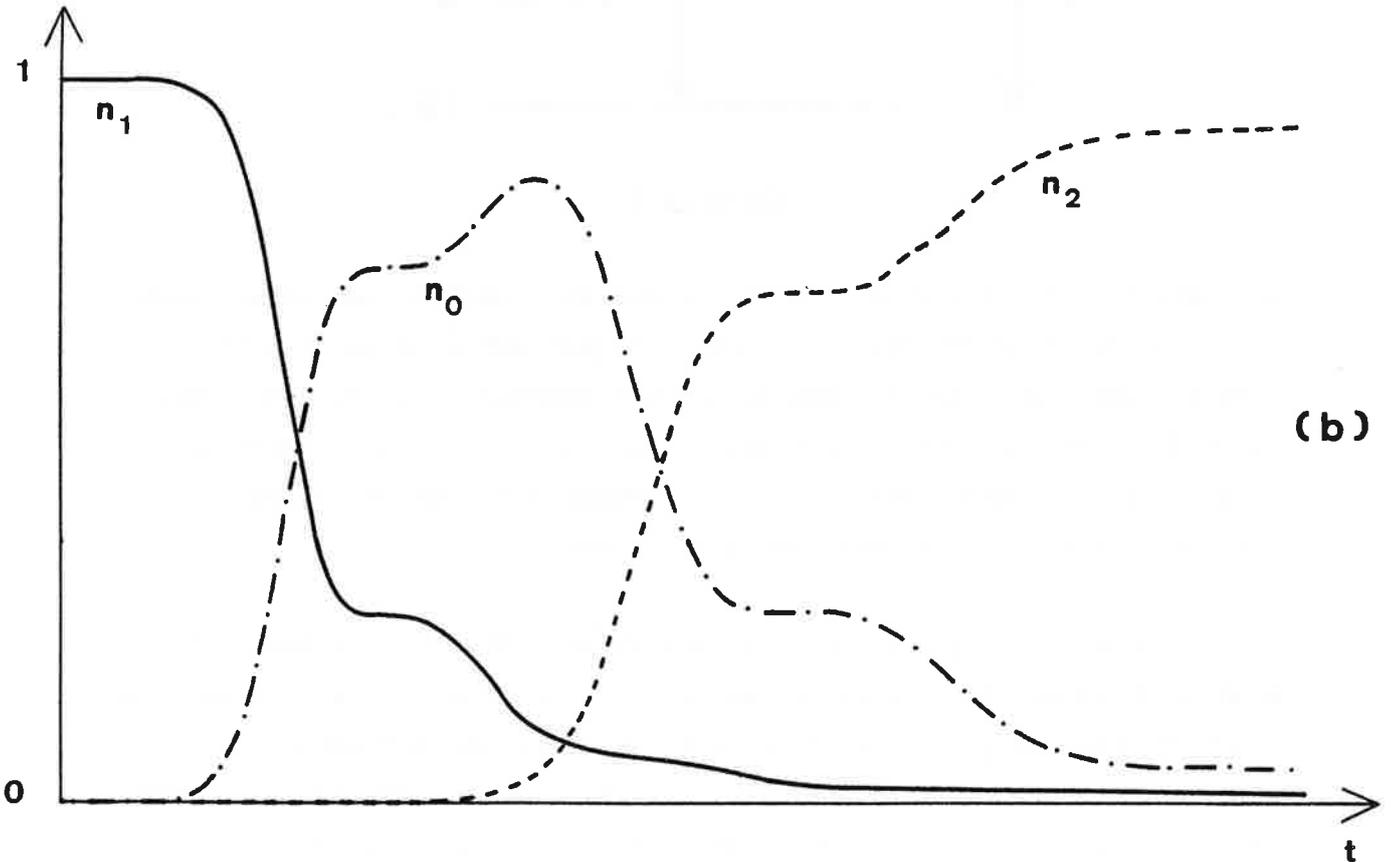
Figure I-5

Nous avons étudié son évolution donnée par les équations semi-classiques (I-II-5 à 12) pour différentes valeurs des paramètres caractérisant chaque transition. Les figures I-6 et I-7 montrent l'allure des variations des intensités émises sur les transitions 1 et 2 en fonction du temps, ainsi que celle des populations sommées sur tout le milieu des niveaux 0, 1 et 2, pour deux exemples différents.

Le premier exemple concerne un cas où la probabilité de transition pour le deuxième étage de la cascade ( $0 \rightarrow 2$ ) est inférieure à/ou du même ordre de grandeur que celle de la première partie de la cascade ( $1 \rightarrow 0$ ). L'émission se produit successivement sur les deux transitions. Le retard de la première impulsion émise (transition  $1 \rightarrow 0$ ) est celui obtenu si l'on considère la première transition  $1 \rightarrow 0$  seule. Le retard de la deuxième impulsion (transition  $0 \rightarrow 2$ ) par rapport à la première est égal à celui que l'on calcule en considérant la transition  $0 \rightarrow 2$  seule, les atomes étant initialement tous dans le niveau 0 (voir Figure I-6).



(a)



(b)

Figure I-6 :  $\Gamma_1 \mu_1 = \frac{3}{2} \Gamma_2 \mu_2$

(a)  $I_1$  et  $I_2$  représentent les intensités émises respectivement sur les transitions  $1 \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow 2$  de la cascade (l'échelle de  $I_2$  par rapport à  $I_1$  est divisée par 30).

(b)  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  représentent respectivement les populations totales des niveaux 0, 1 et 2. On a normalisé la somme  $(n_0 + n_1 + n_2)$  à 1.

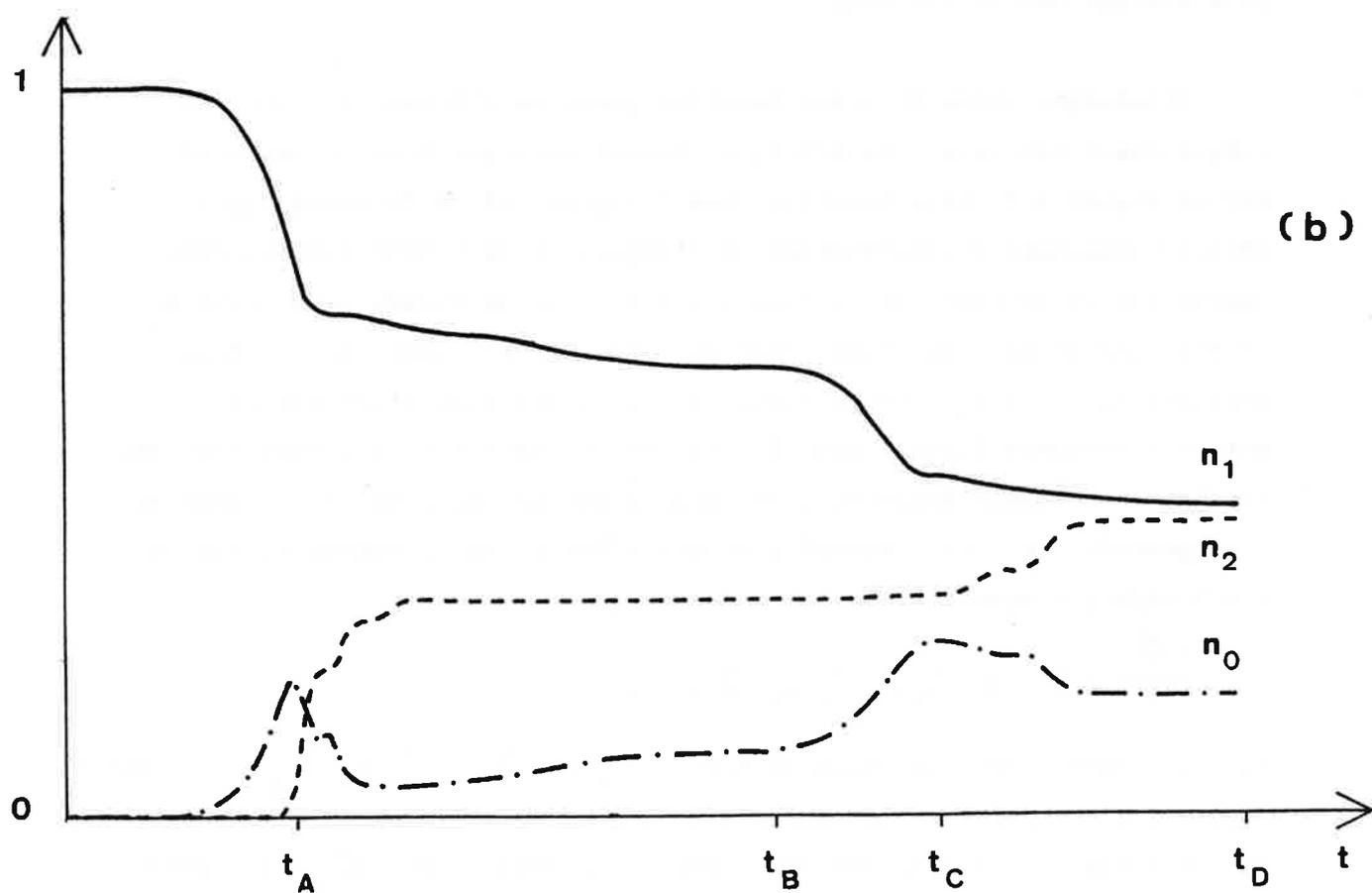
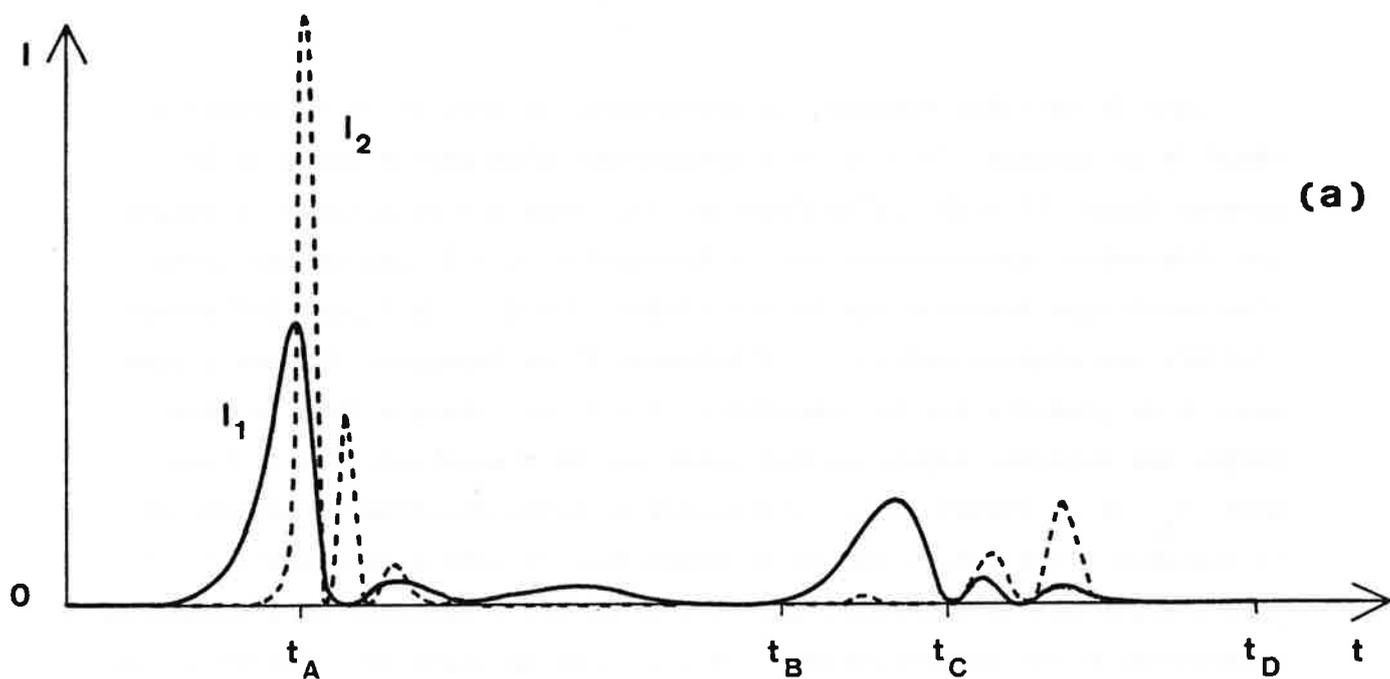


Figure I-7 :  $\Gamma_1 \mu_1 = 30 \Gamma_2 \mu_2$ .  
 (voir légende de la Figure I-6).

Dans le deuxième exemple, la probabilité de transition du deuxième étage de la cascade ( $0 \rightarrow 2$ ) est notablement plus grande que pour le premier étage ( $1 \rightarrow 0$ ) (d'un facteur 30). Dans ces conditions on conçoit que l'émission superradiante sur la transition  $0 \rightarrow 2$  puisse perturber l'émission superradiante sur la transition  $1 \rightarrow 0$ . La Figure I-7 montre l'allure des signaux calculés. L'émission d'une impulsion lumineuse commence à se produire sur la transition  $1 \rightarrow 0$  et presque dans le même temps, une deuxième impulsion est émise sur la transition  $0 \rightarrow 2$  (instant  $t_A$  de la Figure I-7). L'émission de cette deuxième impulsion est accompagnée d'une diminution de la population du niveau intermédiaire 0, dont l'effet est de ralentir, puis d'interrompre l'émission de l'impulsion superradiante sur la transition  $1 \rightarrow 0$ . Dans la suite de l'évolution les populations évoluent lentement jusqu'à l'instant  $t_B$  de la Figure I-7. Au-delà le système va réémettre à nouveau des impulsions superradiantes pour chacune des transitions.

L'interprétation de cette deuxième phase de l'émission n'est pas complètement triviale. En effet, un calcul analogue à celui présenté sur la Figure I-7, mais effectué dans l'approximation du champ moyen, prévoit également l'interruption de l'impulsion de l'émission superradiante sur la première transition ( $t < t_B$  sur la Figure I-7), mais ne prévoit pas l'émission d'une deuxième série d'impulsions sur les deux transitions ( $t > t_B$  sur la Figure I-7). L'émission n'est pas pour autant totalement bloquée mais le système se désexcite lentement avec des constantes de temps beaucoup plus longues que les constantes de temps de la superradiance. On comprend bien cet effet : dans l'approximation du champ moyen, l'équation (I-II-7) s'écrit :

$$\frac{\partial Q_{00}}{\partial t} = (\Gamma_1 \mu_1 Q_{11} - \Gamma_2 \mu_2 Q_{22}) Q_{00} \quad . \quad (\text{I-II-13})$$

Si à un instant de l'émission le terme  $(\Gamma_1 \mu_1 Q_{11} - \Gamma_2 \mu_2 Q_{22})$  devient négatif, il le reste à tout instant ultérieur de l'évolution car il n'y a pas de réexcitation possible des atomes. La population  $Q_{00}$  du niveau intermédiaire ne peut plus augmenter à nouveau et aucune autre impulsion lumineuse n'est à nouveau émise. Cet effet peut être interprété en

analysant le rôle des termes d'interférence interatomique responsables du comportement coopératif. Ce rôle est prépondérant lorsque les populations des deux niveaux bordant une transition sont importantes et lorsque leur cohérence est elle aussi importante. Dans le modèle du champ moyen la population du niveau intermédiaire devient et reste très faible. Par conséquent les interférences interatomiques interviennent de manière peu importante, ce qui explique que l'émission devient beaucoup plus lente.

L'intégration des équations semi-classiques (I-II-5 à 12) donne un résultat différent : une deuxième série d'impulsions est émise (Figure I-7 pour  $t > t_B$ ). Ce résultat est dû à la propagation du champ à travers le milieu qui n'est pas prise en compte dans le modèle du champ moyen. En effet, comme le montre la Figure I-8, les populations des différents niveaux ne se répartissent pas de manière homogène suivant l'axe de propagation. Le calcul montre que la population du niveau 0, sommée sur tout le volume, peut croître à nouveau (voir Figure I-7b). En effet, à l'intérieur de la cellule comme aux points P et P' de la Figure I-8b, le calcul montre que la dérivée de la population du niveau 0 est positive. En ces points les atomes se désexcitent du niveau 1 vers le niveau 0 et le champ électromagnétique qu'ils émettent ainsi peut être amplifié par le reste de la cellule. Une nouvelle impulsion superradiante est émise sur la transition  $1 \rightarrow 0$  suivie d'une autre impulsion superradiante sur la transition  $0 \rightarrow 2$ . Cette deuxième impulsion interrompt à nouveau l'émission de l'impulsion superradiante sur la transition  $1 \rightarrow 0$ . Le système continue alors à évoluer avec des constantes de temps plus lentes. Aussi loin que nous ayons continué l'intégration, nous n'avons pas obtenu de nouvelle série d'impulsions intenses. A ce stade de l'évolution (instant  $t_D$  de la Figure I-7) le système continue à évoluer lentement.

Finalement la présence du niveau 2 perturbe la superradiance sur la transition  $0 \rightarrow 1$  : l'émission superradiante sur cette transition se produit sous la forme de plusieurs impulsions qui sont chaque fois immédiatement suivies d'une impulsion sur la deuxième transition. Cet effet de superradiance "hachée", est un effet coopératif spécifique d'un système à

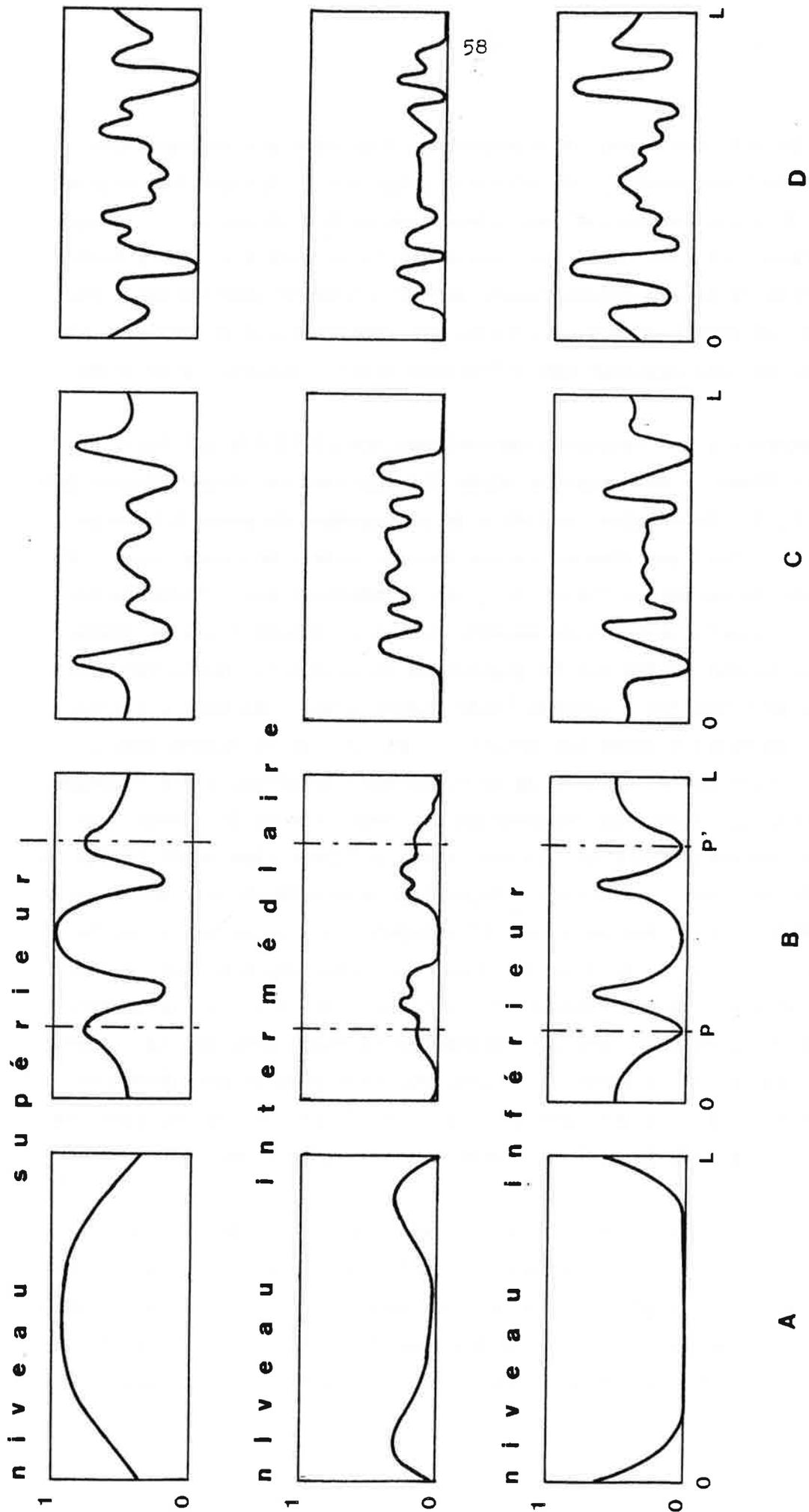


Figure I-8 : Variations dans le milieu atomique des populations des différents niveaux de la cascade aux instants  $t_A$ ,  $t_B$ ,  $t_C$  et  $t_D$ .

trois niveaux en cascade. Notons finalement que la différence entre le calcul effectué à partir des équations semi-classiques (I-I-5 à 12) et celui dans l'approximation du champ moyen est inattendue. La prise en compte des effets de propagation dans le traitement de la superradiance d'un système à deux niveaux donne des constantes de temps de l'évolution (retard ou largeur temporelle des impulsions) beaucoup plus longues que celles calculées dans l'approximation du champ moyen. Dans le système en cascade considéré ici la prise en compte des effets de propagation prévoit toujours, pour la première série d'impulsions, des retards et des largeurs temporelles plus grands que dans le modèle du champ moyen. Elle prévoit toutefois une accélération de l'évolution du système après l'émission de la première série d'impulsions par rapport au modèle du champ moyen.

## 2. SYSTEMES à TROIS NIVEAUX EN "Λ" .

Nous considérons maintenant le système à trois niveaux en "Λ" schématisé sur la Figure I-9 :

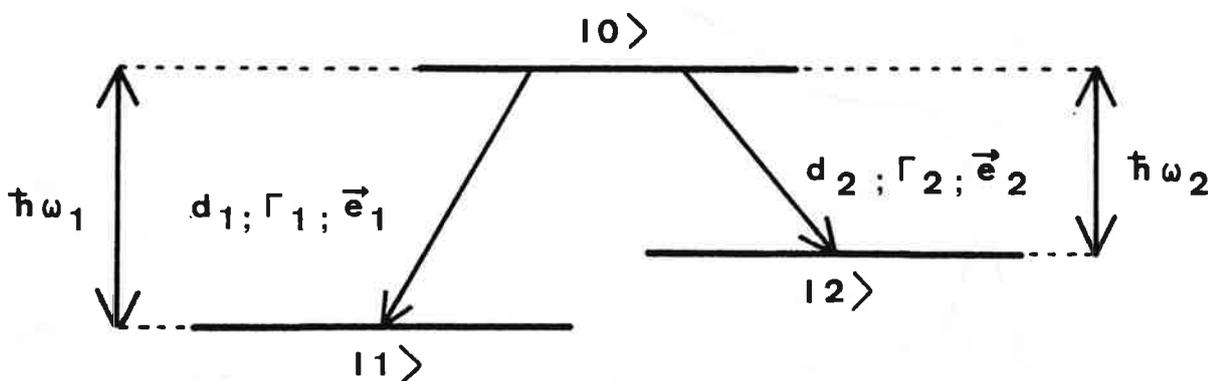
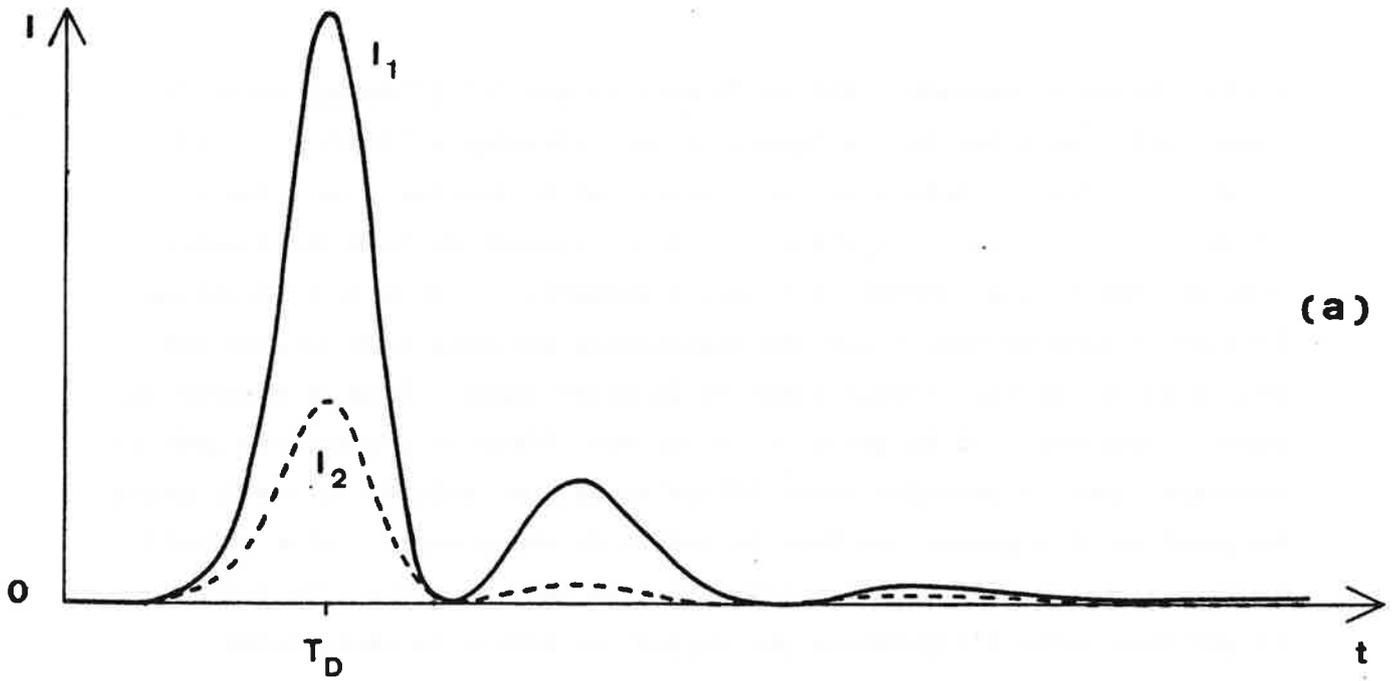
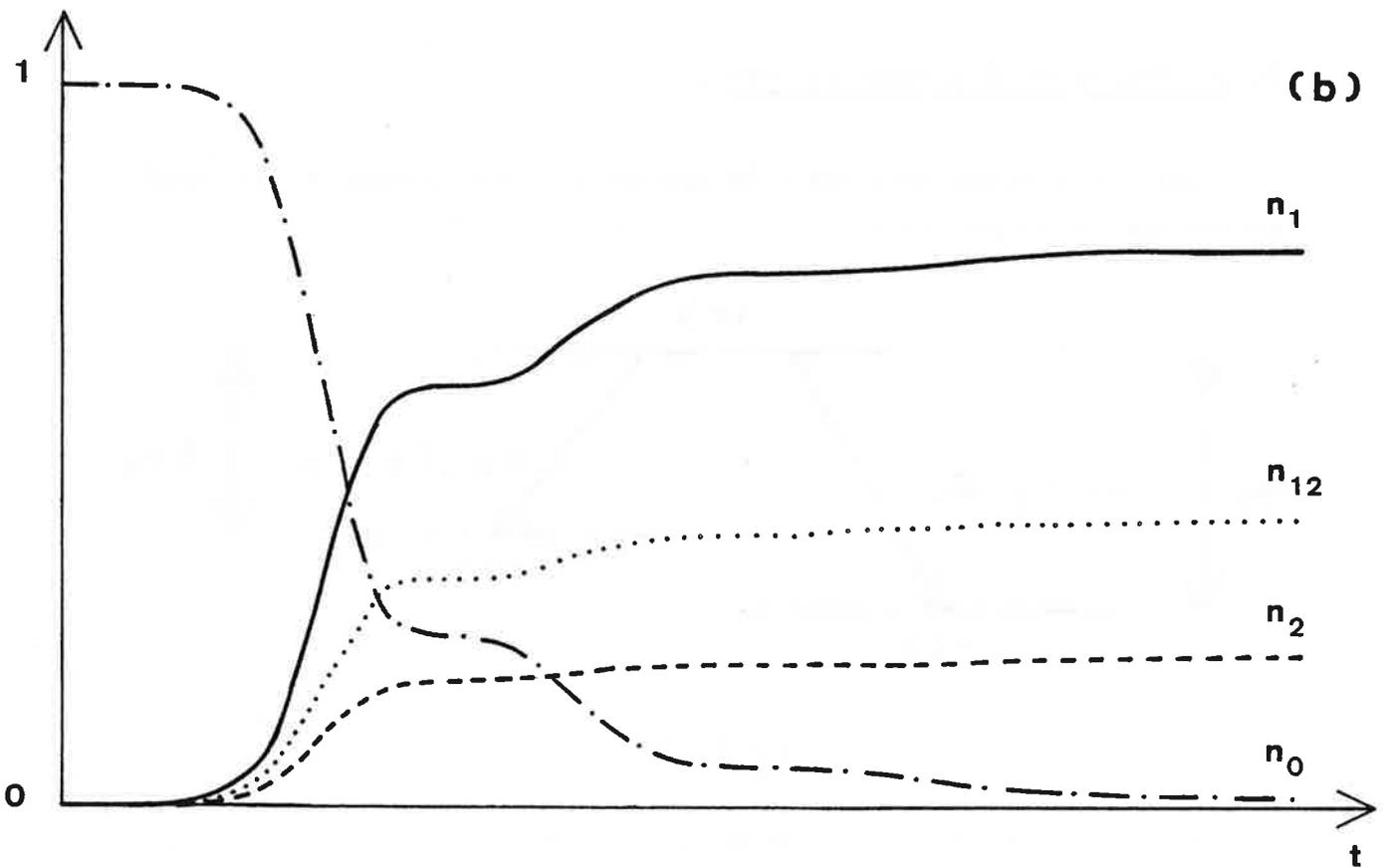


Figure I-9

Nous avons étudié son évolution donnée par les équations semi-classiques (I-II-5 à 12) pour diverses valeurs du rapport des probabilités de chaque transition. La Figure I-10 donne l'exemple de l'évolution d'un tel système pour un rapport  $\lambda$  de  $\Gamma_1 \mu_1$  sur  $\Gamma_2 \mu_2$  égal à 1, 2. On a tracé les variations en fonction du temps des champs rayonnés sur



(a)



(b)

Figure I-10 :  $\Gamma_1 \mu_1 = 1, 2 \Gamma_2 \mu_2$ .

a)  $I_1$  et  $I_2$  représentent les intensités émises respectivement sur les transitions  $0 \rightarrow 1$  et  $0 \rightarrow 2$ .

b)  $n_0, n_1$  et  $n_2$  représentent respectivement les populations totales des niveaux 0, 1 et 2,  $n_{12}$  la cohérence entre les niveaux 1 et 2 sommée sur tout le volume. On a normalisé la somme  $(n_0 + n_1 + n_2)$  à 1. A chaque instant de l'évolution on a :

$$n_{12}^2 = n_1 n_2 .$$

chaque transition (Figure I-10a) , des populations totales des différents niveaux et de la cohérence entre les niveaux 1 et 2, sommées sur tout le volume (Figure I-10b). Dans ces conditions l'émission se produit essentiellement sur la transition  $0 \rightarrow 1$  et est nettement inhibée sur la transition  $0 \rightarrow 2$  . L'état final est un état complètement désexcité tel que la cohérence entre les niveaux 1 et 2 est totale et tel que 20% des atomes sont dans le niveau 2. (Il y en aurait 45% si le système évoluait par émission spontanée ordinaire). Cet effet d'inhibition devient de plus en plus important au fur et à mesure que le rapport  $\lambda$  augmente.

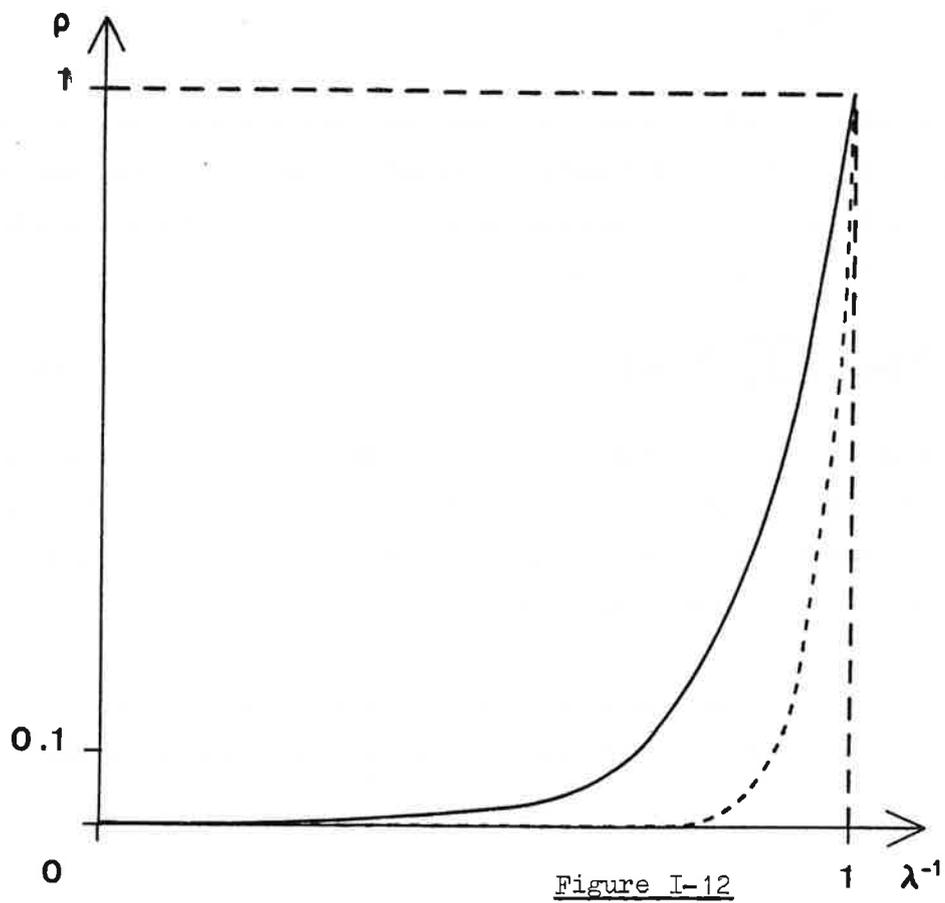
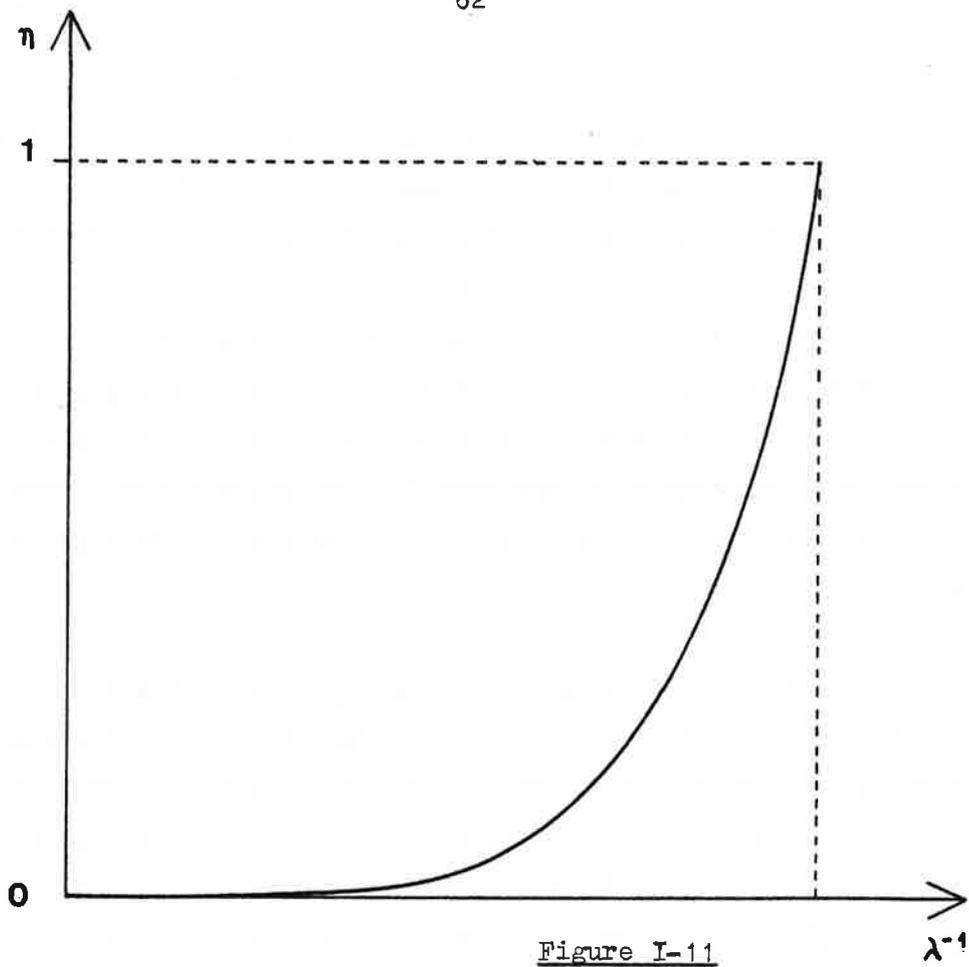
Les Figures I-11 et 12 (courbes en trait plein) montrent respectivement les variations en fonction de  $\lambda^{-1}$  du rapport  $\eta$  de l'intensité maximale rayonnée sur la transition  $0 \rightarrow 2$  à l'intensité maximale rayonnée sur la transition  $0 \rightarrow 1$  et du rapport  $\rho$  , de la population totale du niveau 2 à celle du niveau 1 à la fin de l'émission. Nous voyons que l'inhibition devient vite très importante : il n'y a que 5% environ des atomes dans le niveau 2 à la fin de l'émission si  $\lambda = 1,5$  , et 5% si  $\lambda = 3$  .

Nous avons comparé les courbes ainsi obtenues à celle que l'on peut calculer en utilisant l'approximation du champ moyen. Cette approximation permet d'établir une relation approchée entre les populations des niveaux 1 et 2 à la fin de l'émission,; on a :

$$\overline{Q}_{22}^{\text{Ch.M.}}(\infty) \approx \left( \overline{Q}_{11}^{\text{Ch.M.}}(\infty) \right)^\lambda \quad (\text{I-II-14})$$

Elle permet de tracer la courbe donnant le rapport  $\rho$  en fonction de  $\lambda$  (en pointillés sur la Figure I-12). Cette courbe varie comme celle calculée en prenant en compte les effets de propagation mais prévoit un nombre d'atomes dans l'état 2 beaucoup plus faible.

L'approximation linéaire permet de calculer les variations de  $\eta$  en fonction de  $\lambda^{-1}$  en utilisant les expressions approchées des maximums du champ données par :



$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1^0 I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{T_D}{T_{SR_1}}} \right) \\ \xi_2 &= \xi_2^0 I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{T_D}{T_{SR_2}}} \right) \end{aligned} \quad . \quad (I-II-15)$$

On a choisi pour  $T_D$  l'expression approchée donnée par [2] :

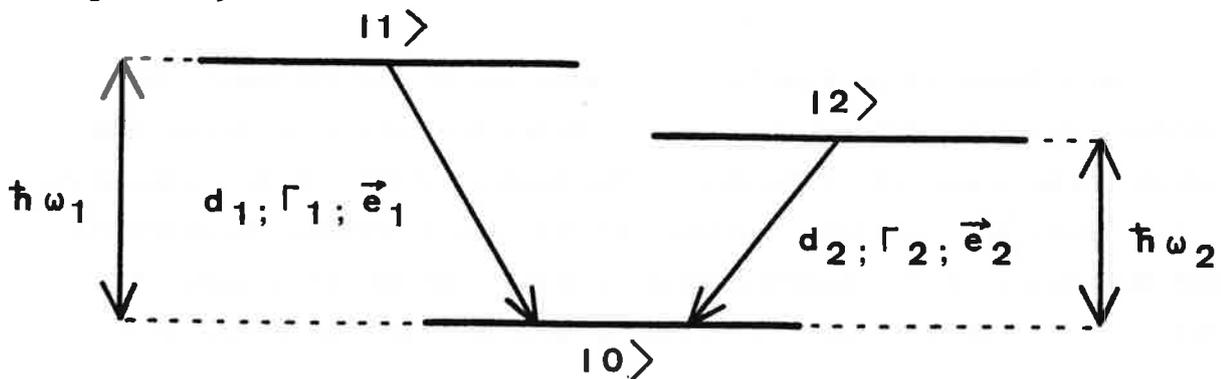
$$T_D \approx \frac{T_{SR_1}}{4} \left( \text{Log} \frac{d_1 \xi_1^0 T_{SR_1}}{\pi} \right)^2 .$$

Les variations de  $\eta$  en fonction de  $\lambda^{-1}$  ainsi calculées sont en bon accord avec la courbe calculée en prenant en compte les effets non linéaires (courbes confondues sur la Figure I-11).

C'est la rapidité de l'émission sur la transition  $0 \rightarrow 1$  qui conditionne le diagramme de rayonnement. En quelque sorte le niveau 0 est dépeuplé totalement au profit du niveau 1 avant que l'émission sur la transition  $0 \rightarrow 2$  ait eu le temps de débiter. Ce résultat peut être cependant mis en défaut lorsque le pompage des atomes n'est plus instantané [9,27], c'est-à-dire lorsqu'une impulsion superradiante est émise sur la transition la plus favorable avant la fin du processus d'excitation. Nous reviendrons sur cet aspect du problème dans le Chapitre VII.

### 3. SYSTEMES à TROIS NIVEAUX EN "V" .

Nous considérons le système à trois niveaux en "V" schématisé sur la Figure I-13 :



Nous étudions l'évolution de ce système donnée par les équations semi-classiques (I-II-5 à 12) en fonction de la cohérence initiale des niveaux 1 et 2. Nous exposons dans ce paragraphe deux exemples : l'un où la cohérence est totale, l'autre où elle est nulle. Ils conduisent pour l'émission à des effets de nature coopérative très différents. Dans le premier cas l'intensité d'émission sur chacune des transitions est renforcée par l'émission sur l'autre transition : il s'agit d'un effet d'initiation. Dans le deuxième cas la désexcitation complète du niveau 1 (resp. 2) est empêchée par la présence du niveau 2 (resp. 1) : il s'agit d'un effet d'inhibition. Dans les calculs que nous exposons, nous avons choisi des populations égales pour les niveaux 1 et 2.

a) Effet d'initiation.

La Figure I-14 représente un exemple de l'évolution de l'intensité des champs électromagnétiques émis, des populations totales des différents niveaux sommées sur tout le volume et de la cohérence entre les deux niveaux excités, dans le cas où la cohérence initiale  $\rho_{12}(0)$  est totale. La cohérence  $\rho_{12}$  reste maximale tout au long de l'évolution et les deux niveaux 1 et 2 se désexcitent de concert sur le niveau 0. La Figure I-15 représente l'évolution de l'intensité des champs électromagnétiques émis sur les transitions  $1 \rightarrow 0$  et  $2 \rightarrow 0$  lorsque chacune d'elles est traitée isolément en l'absence du troisième niveau. L'émission sur la transition la plus favorable accélère celle qui se produit sur la deuxième transition. Le niveau excité de la transition la moins probable se dépeuple plus rapidement en présence du troisième niveau qu'isolément. Dans l'état final, tous les atomes se retrouvent dans l'état désexcité 0.

Pour interpréter ce résultat, on montre que si, initialement, la cohérence entre les niveaux 1 et 2 est totale, les cohérences entre deux niveaux quelconques seront totales à tout instant ultérieur de l'évolution. On tire alors des équations (I-II-5,6,11,12) que la vitesse de désexcitation des niveaux 1 et 2 augmente avec la population du niveau zéro, du moins tant que celle-ci est inférieure à la somme des populations de 1

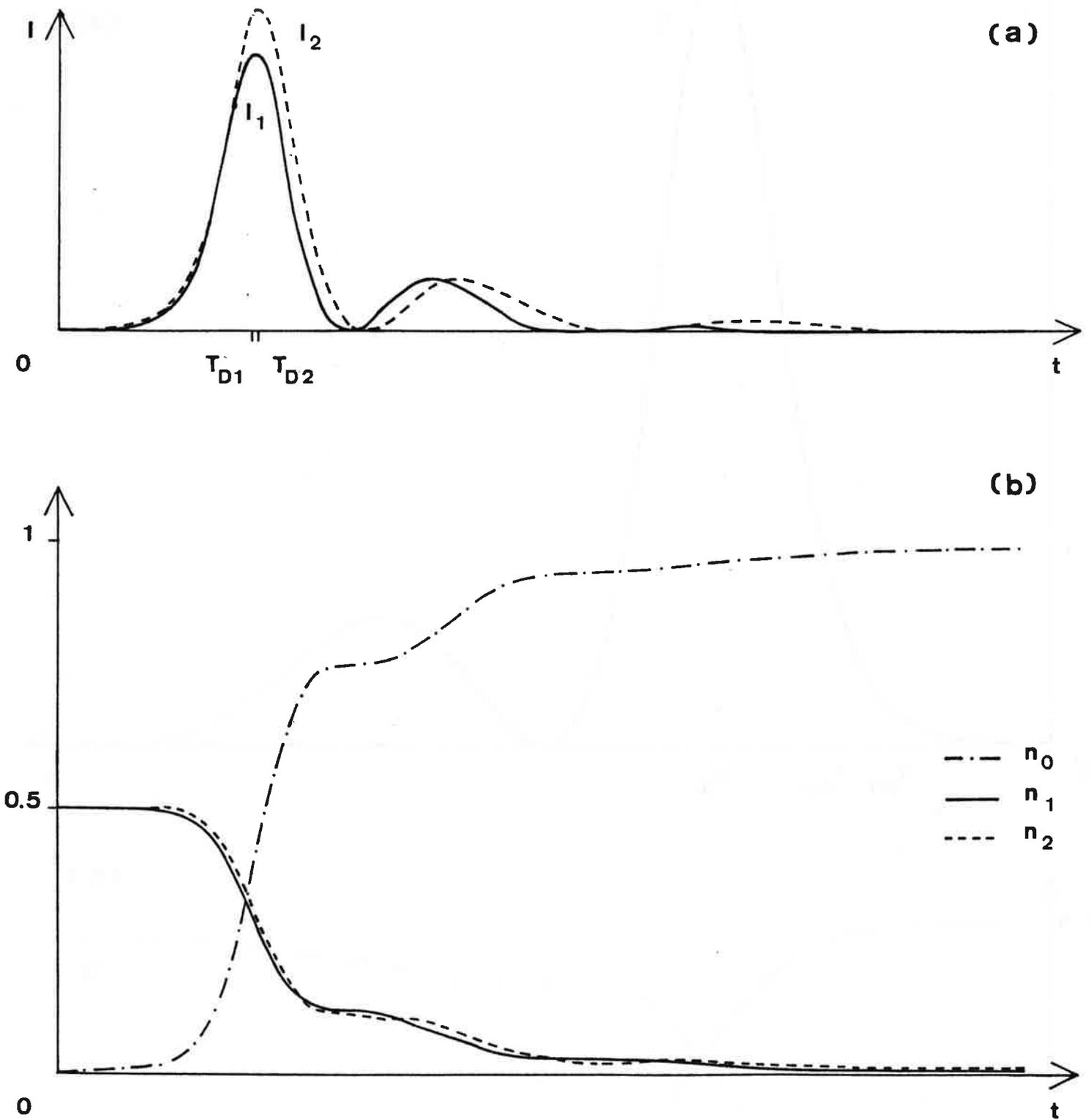


Figure I-14 :  $\Gamma_1\mu_1 = 1,2 \Gamma_2\mu_2$

- a)  $I_1$  et  $I_2$  représente les intensités émises respectivement sur les transitions  $1 \rightarrow 0$  et  $2 \rightarrow 0$ .
- b)  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  les populations totales des niveaux 0, 1 et 2.

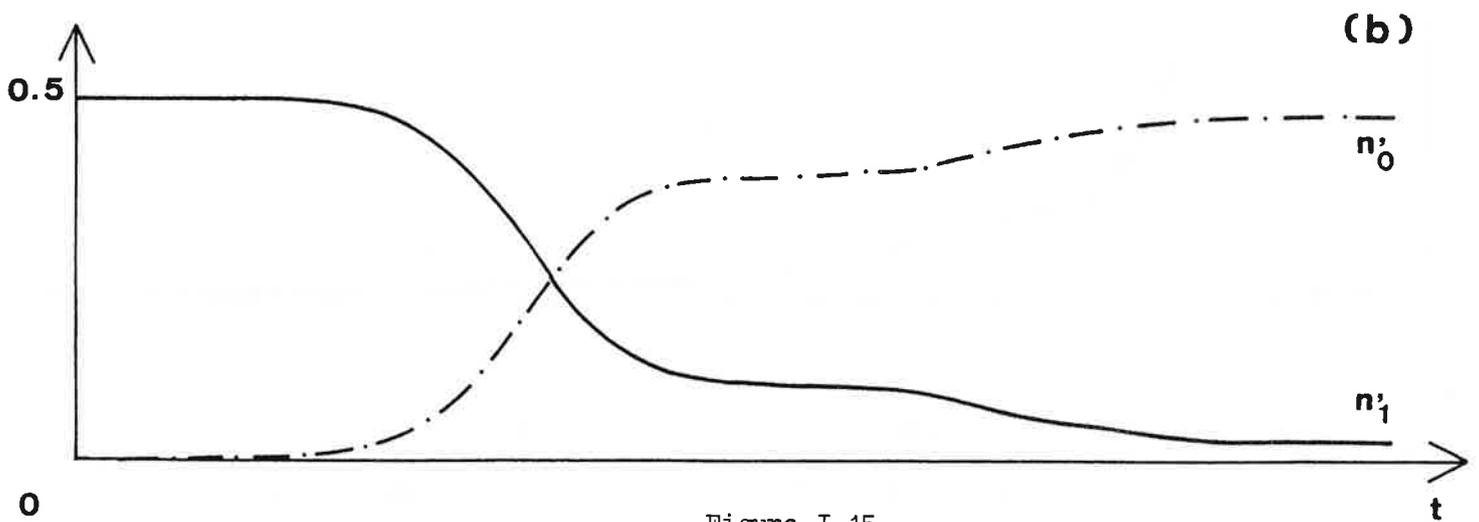
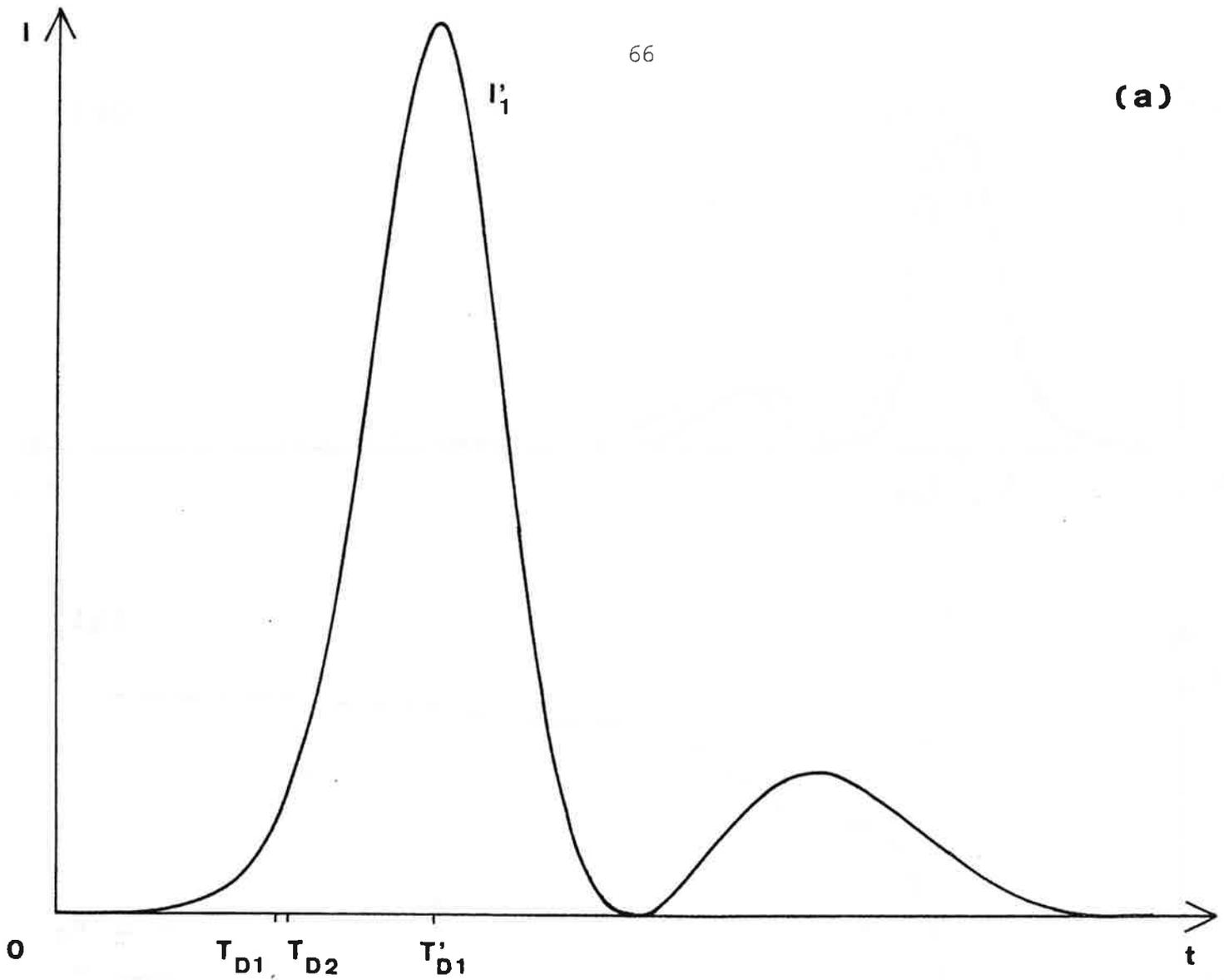
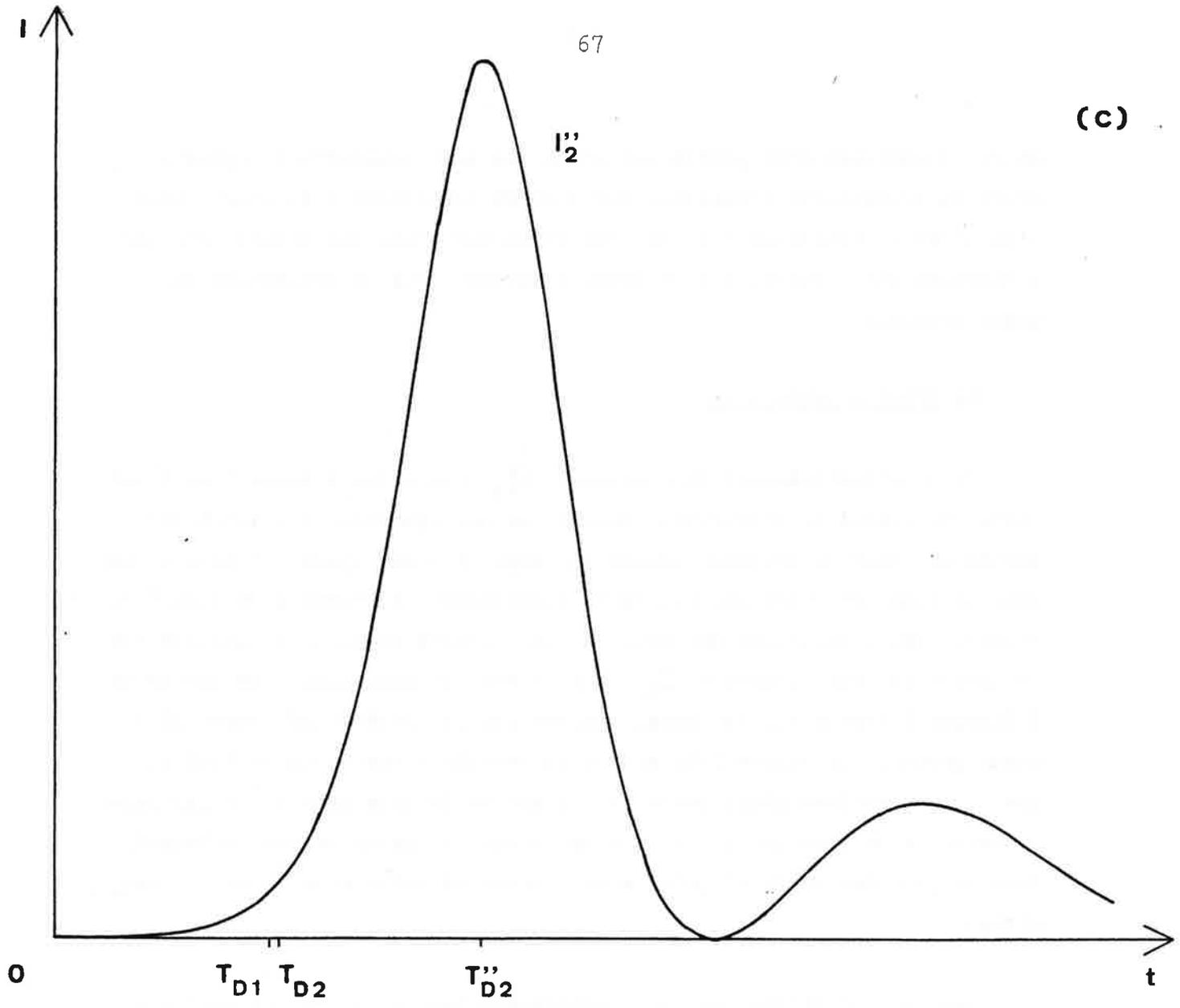
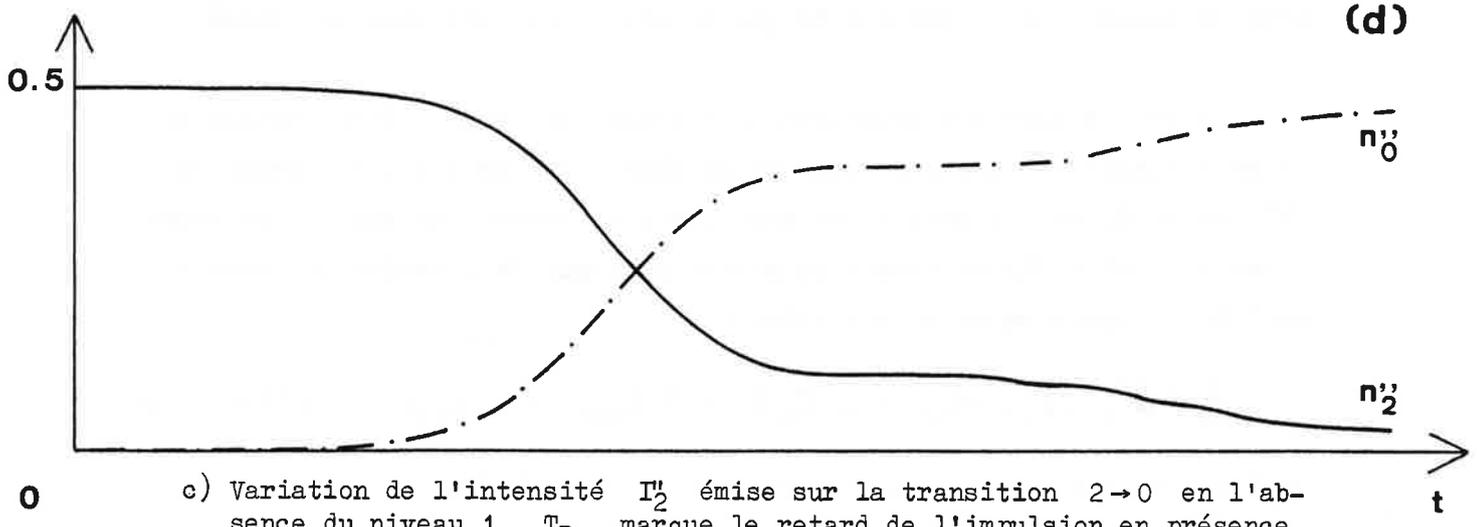


Figure I-15

- a) Variation de l'intensité  $I'_1$  émise sur la transition  $1 \rightarrow 0$  en l'absence du niveau 2.  $T_{D1}$  marque le retard de l'impulsion en présence du niveau 2 (l'échelle<sup>1</sup> de l'intensité est multipliée par 4 par rapport à la Figure I-14).
- b) Variation des populations totales  $n'_0$  et  $n'_1$  des niveaux 0 et 1 en l'absence du niveau 2.



(c)



(d)

- c) Variation de l'intensité  $I''_2$  émise sur la transition  $2 \rightarrow 0$  en l'absence du niveau 1.  $T_D$  marque le retard de l'impulsion en présence du niveau 1 (l'échelle<sup>2</sup> de l'intensité est multipliée par 4 par rapport à la Figure I-14).
- d) Variation des populations totales  $n''_0$  et  $n''_2$  des niveaux 0 et 2 en l'absence du niveau 1.

et 2. L'émission d'un photon sur l'une des deux transitions augmente alors la probabilité d'émission sur l'autre transition : il s'agit bien d'un effet d'initiation [12] de l'émission sur l'une des transitions par l'émission sur l'autre, qui se produit surtout pour la transition la moins probable.

b) Effet d'inhibition.

Lorsqu'initialement la cohérence  $\mathcal{Q}_{12}$  entre les niveaux 1 et 2 est nulle, le calcul de l'évolution donnée par les équations (I-II-5 à 12) montre que pour de grandes valeurs du temps  $t$ , la population totale des deux niveaux tend vers une constante généralement différente de zéro [10, 23,30]. Les populations des deux niveaux excités deviennent spatialement homogènes et leur cohérence  $\mathcal{Q}_{12}$  tend à devenir maximale. Une partie de l'énergie d'excitation est ainsi stockée par le système qui n'émet plus aucun photon. La Figure I-16 montre un exemple d'une telle évolution. Les niveaux excités n'ont perdu que la moitié de leur population initiale. On remarque de plus que l'émission se produit en priorité sur la transition la plus favorable et qu'elle est fortement inhibée sur l'autre transition.

Les cas intermédiaires où la cohérence n'est ni nulle, ni maximale, présentent également ce phénomène de rétention de l'énergie d'excitation mais de manière moins importante que le cas où la cohérence est nulle.

On peut donner une interprétation simple des effets d'inhibition de la superradiance rencontrés dans un système d'atomes à trois niveaux en "v" en étudiant les propriétés des équations semi-classiques. Les équations (I-II-5 à 10) décrivant la partie atomique de l'évolution conduisent à une équation de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathcal{Q}_{00}^2 + \mathcal{Q}_{11}^2 + \mathcal{Q}_{22}^2 + 2|\mathcal{Q}_{10}|^2 + 2|\mathcal{Q}_{20}|^2 + 2|\mathcal{Q}_{12}|^2) = 0 \quad (\text{I-II-16})$$

analogue à la conservation d'un vecteur de Bloch [3] .

On a en plus, évidemment, la conservation de la population totale :

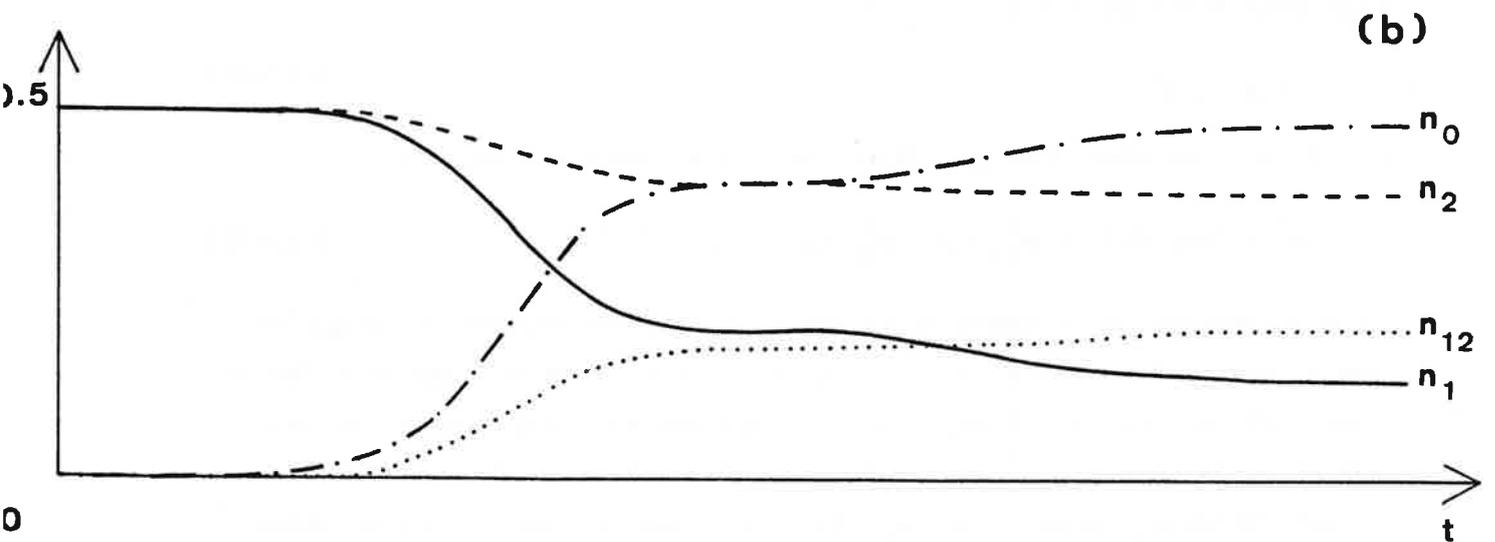
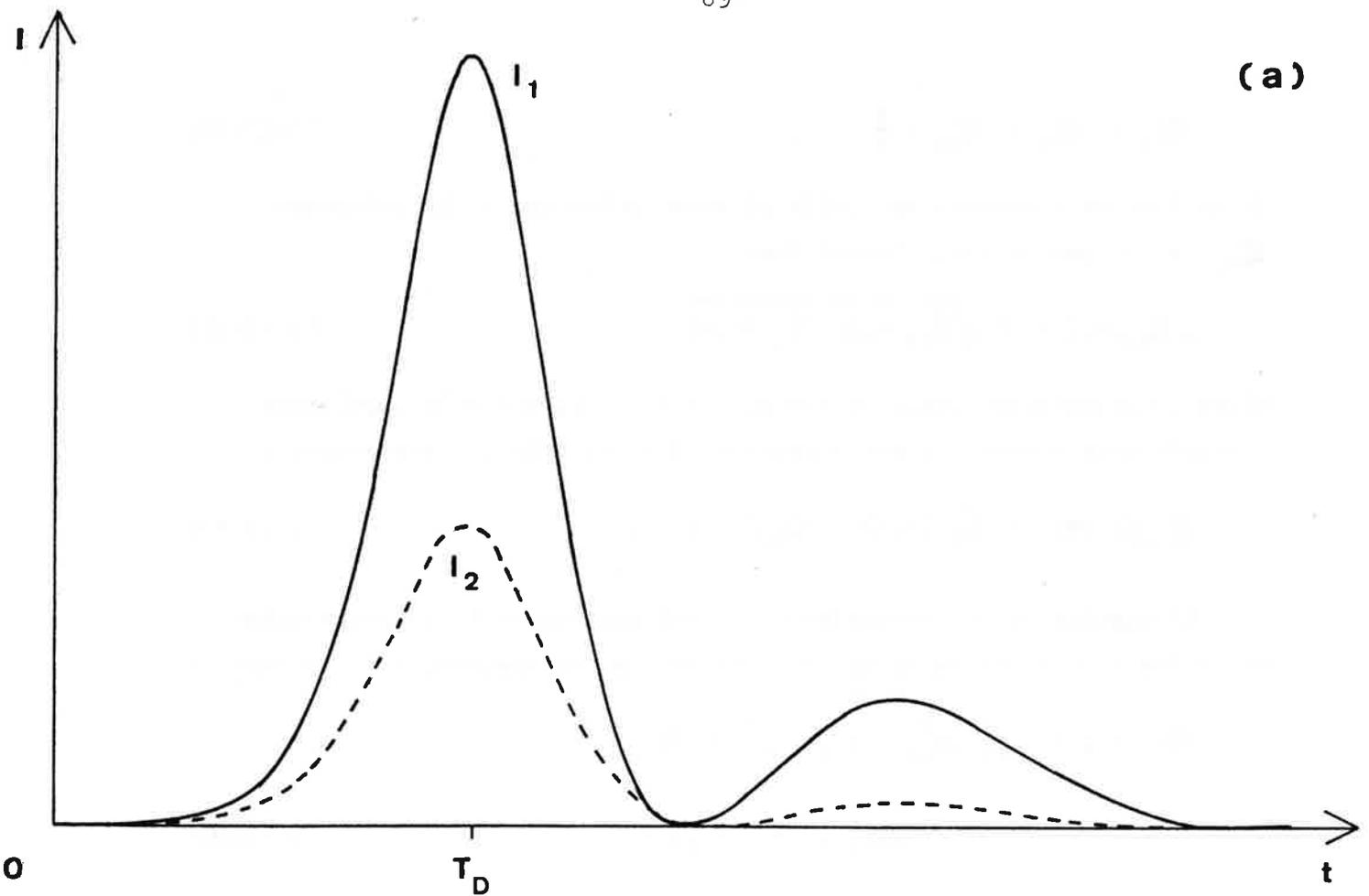


Figure I-16 :  $\Gamma_1\mu_1 = 1,2 \Gamma_2\mu_2$

- a) Variation des intensités  $I_1$  et  $I_2$  émises sur les transitions  $1 \rightarrow 0$  et  $2 \rightarrow 0$ .
- b) Variation des populations totales  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  des niveaux 0, 1 et 2 et de la cohérence sommée sur tout le volume  $n_{12}$  entre les niveaux 1 et 2.

$$Q_{00} + Q_{11} + Q_{22} = \frac{N}{V} \quad . \quad (\text{I-II-17})$$

L'équation de conservation (I-II-16) nous montre que si la cohérence  $Q_{12}$  n'est pas totale, c'est-à-dire :

$$|Q_{12}(z,0)| < \sqrt{Q_{11}(z,0) Q_{22}(z,0)} \quad (\text{I-II-18})$$

alors la population finale du niveau 0 est inférieure à la population initiale totale dans les états excités  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , c'est-à-dire :

$$Q_{00}(z,+\infty) < Q_{11}(z,0) + Q_{22}(z,0) \quad . \quad (\text{I-II-19})$$

L'équation de conservation (I-II-16) correspond à la conservation de la trace du carré de la matrice densité  $\rho$  du système. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\text{Tr } \rho^2) &= \frac{d}{dt} (\rho_{00}^2 + \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + 2|\rho_{12}|^2 \\ &\quad + 2|\rho_{01}|^2 + 2|\rho_{02}|^2) \end{aligned} \quad (\text{I-II-20})$$

$$\text{avec } \rho_{ij} = \Pi_{\alpha} \langle i | \rho^{\alpha} | j \rangle_{\alpha} \delta(z-z_{\alpha}) \quad . \quad (\text{I-II-21})$$

Elle peut s'écrire aussi

$$\text{Tr } \rho^2 = \sigma^2 \quad (\text{I-II-22})$$

où  $\sigma$  est une constante qui dépend des conditions initiales :

$$\sigma^2 = \text{Tr}(\rho(0))^2 = \rho_{11}^2(0) + \rho_{22}^2(0) + 2|\rho_{12}(0)|^2 \quad . \quad (\text{I-II-23})$$

La conservation de la trace du carré de la matrice densité  $\rho$  signifie que la "nature" de l'état du système se conserve tout au long de l'évolution. Si  $\sigma$  est égal à un, l'état du système est initialement un cas pur et reste un cas pur tout au long de l'évolution. Si, au contraire,  $\sigma$  est différent de un, le système est initialement dans un mélange statistique d'états et reste dans un mélange statistique d'états tout le reste de l'évolution. En particulier, l'état final du système sera un mélange statistique d'états et ne pourra donc être l'état complètement désexcité ( $\rho_{00} = 1$ ) qui correspond à un cas pur.

Ce raisonnement permet d'obtenir des résultats plus quantitatifs. La loi de conservation de la population totale (I-II-17) correspond à la conservation de la trace de la matrice densité  $\rho$  et s'écrit :

$$\text{Tr } \rho = \rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} = 1 \quad . \quad (\text{I-II-24})$$

On a également :

$$|\rho_{12}|^2 \leq \rho_{11} \rho_{22} \quad . \quad (\text{I-II-25})$$

Les relations (I-II-23,24) conduisent à la condition sur  $\sigma^2$  :

$$\frac{1}{2} \leq \sigma^2 \leq 1 \quad . \quad (\text{I-II-26})$$

À la fin de l'évolution le système n'émet plus d'énergie électromagnétique et les cohérences optiques tendent vers zéro (d'après I-II-8,9), d'où :

$$\rho_{10}^{(\infty)} = \rho_{20}^{(\infty)} = 0 \quad (\text{I-II-27})$$

et la trace de  $\rho^2$  devient :

$$\text{Tr}(\rho^{(\infty)})^2 = \rho_{00}^{(\infty)} + \rho_{11}^{(\infty)} + \rho_{22}^{(\infty)} + 2|\rho_{12}^{(\infty)}|^2 = \sigma^2 \quad . \quad (\text{I-II-28})$$

En utilisant la relation (I-II-24), l'équation devient :

$$\rho_{00}^{(\infty)2} + (\rho_{11}^{(\infty)} + \rho_{22}^{(\infty)})^2 \geq \sigma^2 \quad (\text{I-II-29})$$

ou encore :

$$2\rho_{00}^{(\infty)2} - 2\rho_{00}^{(\infty)} + 1 \geq \sigma^2 \quad (\text{I-II-30})$$

ce qui implique :

$$\frac{1 - \sqrt{2\sigma^2 - 1}}{2} \leq \rho_{00}^{(\infty)} \leq \frac{1 + \sqrt{2\sigma^2 - 1}}{2} \quad (\text{I-II-31})$$

la valeur  $\frac{1 + \sqrt{2\sigma^2 - 1}}{2}$  constitue la valeur maximale possible de  $\rho_{00}^{(\infty)}$ .

On voit qu'à moins que  $\sigma^2$  soit égal à un, l'état final ne peut jamais être l'état complètement désexcité. Une partie de l'énergie d'excitation est piégée par le système qui, à la fin de l'évolution, est dans un état non désexcité mais n'émet pas de photons. La conservation de la trace de

$\rho^2$  ne permet pas de conclure que l'état final est celui où le maximum de photons a été émis (c'est-à-dire correspondant à  $\rho_{00}(\infty)$  maximum), mais si c'est effectivement le cas la cohérence  $|\rho_{12}(\infty)|$  est alors totale.

La proportion minimum d'atomes restant dans les niveaux excités est donnée par :

$$\tau_{\min} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{2\sigma^2 - 1}) \quad . \quad (\text{I-II-32})$$

L'analyse des résultats numériques nous montre que le système tend vers un état présentant ce taux minimum d'atomes dans un état excité.

## Conclusion

Le traitement théorique de l'émission spontanée coopérative ou superradiance de systèmes d'atomes à trois niveaux donne des résultats très différents de ceux que l'on rencontre en émission spontanée ordinaire. Il s'agit d'effets coopératifs nouveaux, soit d'initiation, soit d'inhibition de l'émission d'une transition par l'autre [12]. Leur origine physique doit être recherchée dans les interférences interatomiques qui interviennent au cours de l'émission et sur lesquelles l'approche semi-classique utilisée ici ne met pas réellement l'accent. Le Chapitre II de ce mémoire va s'attacher à faire davantage apparaître l'émission spontanée coopérative en termes d'interférences interatomiques dont certaines sont spécifiques de systèmes à plusieurs niveaux. Cette approche, qui nous conduit à généraliser les états de Dicke, permet, en particulier, de donner une interprétation plus physique du phénomène de désexcitation incomplète (ou subradiance), dont on dégagera alors d'autres cas typiques.

Le comportement spécifique des systèmes à plusieurs niveaux en émission spontanée coopérative se traduit par des propriétés de polarisation très différentes de l'émission spontanée ordinaire non coopérative. Nous aborderons dans les Chapitres III et V ces aspects de la polarisation de la lumière superradiante et nous utiliserons notamment les résultats obtenus pour des systèmes à trois niveaux pour déterminer la polarisation de l'émission.



Bibliographie du Chapitre I

- [1] N. E. Rehler and J. H. Eberly, Phys. Rev. A 3, 1735 (1971) ;  
voir également :  
L. Allen and J. H. Eberly, "Optical Resonance and Two Level Atoms",  
ed. Wiley (1975).
- [2] J. C. McGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. A 14, 1169 (1976) ;  
voir également :  
I. P. Herman, J. C. McGillivray, N. Skribanowitz and M. S. Feld,  
Laser Spectroscopy (p. 379), ed. R. G. Brewer and A. Mooradian ;  
N. Skribanowitz, Thèse, Institut de Technologie du Massachusetts  
(1972) : "Coherent effects in optically pumped HF gas" ;  
J. C. McGillivray, "Superradiance in an extended, optically thick  
medium" (degree of Bachelor of Science).
- [3] F. T. Arecchi and E. Courtens, Phys. Rev. A 2, 1730 (1970) ;  
voir également :  
F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, Fundamental  
and Applied Laser Physics, p. 835 (ed. Feld, Javan, Kurnit).
- [4] R. Bonifacio and G. Preparata, Phys. Rev. A 2, 336 (1970) ;  
R. Bonifacio, P. Schwendimann and F. Haake, Phys. Rev. A 4, 302  
(1971) ; Phys. Rev. A 4, 854 (1971) ;  
R. Bonifacio and L. A. Lugiato, Phys. Rev. A 11, 1507 (1975) ; Phys.  
Rev. A 12, 587 (1975) ;  
G. Banfi and R. Bonifacio, Phys. Rev. A 12, 2068 (1975) ;  
R. Bonifacio, L. A. Lugiato and A. Airolidi Crescentini, Phys. Rev. A  
13, 1648 (1976).
- [5] F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus and R. Glauber, Phys. Rev. A  
20, 2047 (1979) ;  
voir également :  
F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus, R. Glauber and F. Hopf,  
Phys. Rev. Letters 42, 1740 (1979) ;

- F. Haake, J. Haus, H. King, G. Schröder and R. Glauber, Phys. Rev. Letters 45, 558 (1980) ;
- F. Haake, Proceedings of the Fourth International Conference on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979).
- [6] E. Ressayre et A. Tallet, Phys. Rev. A 12, 1725 (1975) ; Phys. Rev. A 15, 2410 (1977) ; Phys. Rev. A 18, 2196 (1978).
- [7] D. Polder, M. F. H. Schuurmans, Q. H. F. Vreken, Phys. Rev. A 19, 1192 (1979) ;
- voir également :
- M. F. H. Schuurmans and D. Polder, Proceedings of the Fourth International Conference on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979).
- [8] F. A. Hopf, Phys. Rev. A 20, 2064 (1979).
- [9] P. Pillet, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1977) (non publiée).
- [10] M. Gross, Thèse d'Etat, Université Paris VI (1980) (non publiée).
- [11] A. Crubellier and M. G. Schweighofer, Phys. Rev. A 18, 1797 (1978).
- [12] A. Crubellier, Phys. Rev. A 15, 2430 (1977).
- [13] R. H. Dicke, Quantum Electronics, ed. Grivet and Bloembergen, Vol. I (Columbia University Press, N.Y., 1964).
- [14] C. Cohen-Tannoudji, Les Houches Summer School, Juillet 1975, publié dans Frontiers in laser spectroscopy, session XXVII, R. Balian, S. Haroche and S. Liberman, Editors, North Holland (1976).
- [15] G. S. Agarwal, Quantum Optics 70, Springer tracts in Modern Physics (1974) ;
- voir également :
- G. S. Agarwal, Phys. Rev. 178, 2025 (1969) ; Phys. Rev. A 2, 2038 (1970) ; Phys. Rev. A 3, 1783 (1971) ; Phys. Rev. A 4, 1791 (1971) ; Phys. Rev. A 4, 1778 (1971) ; Phys. Rev. A 7, 1195 (1973).
- [16] C. Cohen-Tannoudji, Cours du Collège de France, 1975-76 (non publié).
- [17] C. T. Lee, Phys. Rev. A 12, 575 (1975) ; Phys. Rev. A 13, 1657 (1976) ; Phys. Rev. A 14, 1926 (1976) ; Phys. Rev. A 15, 2019 (1977) ; Phys. Rev. A 16, 301 (1977).
- [18] F. P. Mattar, H. M. Gibbs, S. McCall and M. F. Feld, Phys. Rev. Letters 46, 1123 (1981).

- [19] M. Le Berre-Rousseau, E. Ressayre and A. Tallet, Phys. Rev. Letters 43, 1314 (1979).
- [20] Q. H. F. Vreken, H. M. J. Hikspoors and H. M. Gibbs, Phys. Rev. Letters 38, 764 (1977).
- [21] M. Gross, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Letters 40, 1711 (1978).
- [22] J. Marek, J. Phys. B 12, L 229 (1979).
- [23] J. M. Raimond, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1979) (non publiée).
- [24] R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 99 (1954).
- [25] M. S. Feld, Les Houches Summer School, Juillet 1975, publié dans Frontiers in laser spectroscopy, session XXVII, R. Balian, S. Haroche and S. Liberman, Editors, North Holland (1976).
- [26] A. Iosevigi and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. 185, 517 (1969).
- [27] M. Gross, C. Fabre, P. Pillet and S. Haroche, Phys. Rev. Letters 36, 1035 (1976) ;  
voir également :  
S. Haroche, C. Fabre, M. Gross and P. Pillet, in Atomic Physics 5, ed. R. Marrus, P. Prior et H. Shugart (Plenum, N.Y., 1977).
- [28] F. Haake, J. W. Haus, H. King, G. Schröder and R. Glauber, Phys. Rev. A 23, 1322 (1981).
- [29] A. Crubellier, S. Liberman, D. Mayou, P. Pillet and M.-G. Schweighofer, Opt. Letters 7, 16 (1982) ;  
voir également :  
D. Mayou, Thèse de 3ème cycle, Université Paris-VI (1981)(non publiée).
- [30] A. Crubellier, S. Liberman and P. Pillet, Opt. Commun. 33, 143 (1980).



## Chapitre II

### SUPERRADIANCE ET SUBRADIANCE.



Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la propriété d'indiscernabilité locale des atomes vis-à-vis du champ électromagnétique est à l'origine d'interférences interatomiques locales qui sont la manifestation du caractère coopératif de l'émission. La superradiance est le résultat d'interférences interatomiques constructives qui apparaissent au cours de l'émission : son intensité devient alors proportionnelle au carré du nombre d'atomes. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la possibilité d'apparition d'interférences destructives au cours de l'émission. Si les interférences deviennent totalement destructives il y a arrêt de l'émission sans que le système atomique soit pour autant dans son état de plus basse énergie, c'est-à-dire totalement désexcité. Un tel phénomène est nommé subradiance et l'état du système est alors appelé sub-radiant. La possibilité de subradiance a déjà été mentionnée dans le papier original de Dicke [1] dans le cas d'un exemple de deux neutrons dans un champ magnétique uniforme. L'émission spontanée d'un système à deux atomes à deux niveaux, problème qui a été étudié en détail [2 à 6], peut donner lieu au phénomène de subradiance. Soient 1 et 0 le niveau supérieur et inférieur des deux atomes que l'on différencie à l'aide des indices 1 et 2. On suppose ici que la distance entre les deux atomes est beaucoup plus courte que la longueur d'onde, de telle sorte que les atomes émettent de manière coopérative. Si un seul atome est excité et si l'état du système est une fonction d'onde symétrique par rapport à l'échange des deux atomes,

$$|\Psi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2) ,$$

la probabilité qu'a l'ensemble des deux atomes d'émettre un photon est double de celle qu'aurait un seul atome excité. Si, en revanche, la fonction d'onde qui décrit l'état du système est antisymétrique par rapport à l'échange des deux atomes,

$$|\Psi\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 - |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2) ,$$

la durée de vie du système est allongée par rapport au temps d'émission spontanée d'un seul atome et tend vers l'infini si la distance entre les deux atomes tend vers zéro. Un photon se trouve ainsi piégé par deux atomes. L'état  $|\Psi\rangle_-$  est un état subradiant. Il apparaît sur cet exemple très simple que le comportement coopératif de deux atomes peut conduire à deux effets tout à fait différents :

- soit à une augmentation de la probabilité de désexcitation, les interférences atomiques agissant de manière constructive : c'est le phénomène de superradiance ;
- soit à un arrêt de l'émission, les interférences interatomiques agissant de manière destructive : c'est le phénomène de subradiance.

Le caractère constructif ou destructif des interférences est déterminé par la propriété de symétrie ou d'antisymétrie de la fonction d'onde.

Le phénomène de subradiance se manifeste également dans les processus de diffusion multiple cohérente [7]. La connexion entre diffusion multiple cohérente et superradiance a par ailleurs été montrée [8]. Dans les références [7,8] la possibilité pour une assemblée de  $N$  atomes dont l'un est excité de piéger un photon a été clairement montrée. La possibilité pour un système de  $N$  atomes de piéger  $\frac{N}{2}$  atomes a été mentionnée dans les références [9,10], où a été introduit pour la première fois le mot subradiance. Il est important de remarquer ici qu'aucune expérience mettant en évidence un état subradiant pour  $N$  atomes n'a été proposée dans le cas de systèmes à deux niveaux. En effet un système de  $N$  atomes à deux niveaux, tous dans l'état excité (ce qui constitue un état initial de toutes les expériences de superradiance) se désexcitent totalement sans donner lieu au phénomène de subradiance. Nous verrons que, dans le cas de systèmes d'atomes à plusieurs niveaux, des conditions réalistes peuvent être envisagées pour mettre en évidence expérimentalement le phénomène de subradiance.

Nous examinons dans ce chapitre différents cas pouvant donner lieu à de la subradiance. Nous montrons que l'état subradiant vers lequel évolue le système est un état partiellement antisymétrique par rapport

à l'échange des atomes et que cette propriété détermine l'importance du caractère destructif des interférences interatomiques.

Nous traitons d'abord un cas où la subradiance est liée à la conservation des propriétés de symétrie de la fonction d'onde du système atomique, propriétés que nous caractériserons par des "types de symétrie". Un exemple typique est donné dans ce cas par un système à trois niveaux en " $\gamma$ " comme celui traité au Chapitre I. Si l'importance du phénomène de subradiance est, en dernière analyse, donnée par les propriétés de symétrie de la fonction d'onde, il existe dans certains cas une correspondance entre la notion de type de symétrie et celle de mélange statistique d'état [11], ce qui nous permet de bien comprendre le phénomène de subradiance que nous avons entrevu au Chapitre I pour des systèmes d'atomes à trois niveaux en " $\gamma$ ".

Nous développons par la suite le phénomène de subradiance "par transition dégénérée". Lorsque plusieurs transitions sont résonnantes avec le même champ électromagnétique (même polarisation, même fréquence), des interférences interatomiques destructives peuvent se produire et le système évolue également vers un état subradiant. Des systèmes à quatre niveaux [12] ou à trois niveaux en cascade peuvent présenter un comportement subradiant.

Nous abordons également le cas d'un ensemble d'atomes contenus dans un petit volume dont il a été montré par un calcul numérique qu'il ne peut pas toujours désexciter totalement [13]. Il s'agit donc d'un phénomène de subradiance. Nous donnons une interprétation de ce résultat en termes de symétrie et nous montrons qu'il découle de la non-conservation de la symétrie de la fonction d'onde du système.

Nous discutons ensuite des obstacles au phénomène de subradiance et des conditions d'existence d'un état subradiant.

Finalement, nous étudions la subradiance dans le cas d'une transition  $j \rightarrow j-1$ , exemple dont nous montrons qu'il pourrait donner lieu à une mise en évidence expérimentale d'un état subradiant.

I - Superradiance et Subradiance pour des systèmes d'atomes  
à trois niveaux en "V".

1. CAS DE DEUX ATOMES.

Nous considérons le cas de trois niveaux en "V". On note 0 le niveau inférieur commun aux deux transitions et on note 1 et 2 les niveaux supérieurs (cf. Figure I-9). On suppose ici que la distance entre les deux atomes est très petite devant les longueurs d'onde, de telle sorte que les atomes émettent de façon coopérative. On suppose qu'initialement l'état du système est donné par la fonction d'onde :

$$|\Psi\rangle_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 \otimes |2\rangle_2 + \varepsilon |2\rangle_1 \otimes |1\rangle_2) \quad (\text{II-I-1})$$

avec  $\varepsilon = \pm 1$ .

Après émission d'un premier photon on montre que l'état du système devient, soit :

$$|X_1\rangle_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |2\rangle_2 + \varepsilon |2\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) \quad (\text{II-I-2})$$

si le photon a été émis sur la transition  $1 \rightarrow 0$ , soit :

$$|X_2\rangle_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + \varepsilon |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2) \quad (\text{II-I-3})$$

si le photon a été émis sur la transition  $2 \rightarrow 0$ .

L'état  $|X_1\rangle_{+1}$  (resp.  $|X_2\rangle_{+1}$ ) a une probabilité  $2\Gamma_2$  (resp.  $2\Gamma_1$ ) d'émettre un photon sur la transition  $2 \rightarrow 0$  (resp.  $1 \rightarrow 0$ ) ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les probabilités de transition de  $1 \rightarrow 0$  et  $2 \rightarrow 0$ ). Après émission d'un deuxième photon, l'état du système est l'état complètement désexcité

$$|\varphi\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \quad (\text{II-I-4})$$

Par contre, les états  $|X_1\rangle_{-1}$  et  $|X_2\rangle_{-1}$  sont des états métastables pour le système. On montre que, bien que non complètement désexcité, l'ensemble des deux atomes dans l'état  $|X_1\rangle_{-1}$  ou  $|X_2\rangle_{-1}$  ne peut émettre de nouveau photon. Les états  $|X_1\rangle_{-1}$  ou  $|X_2\rangle_{-1}$  constituent alors l'état final du système, ce sont des états subradiants.

On retrouve sur cet exemple les caractéristiques du comportement coopératif de l'émission spontanée d'un système de deux atomes. Si la fonction d'onde qui décrit l'état initial du système est symétrique par rapport à l'échange des deux atomes, les interférences interatomiques sont constructives, la probabilité de désexcitation augmente, c'est le phénomène de superradiance. En revanche si la fonction d'onde décrivant l'état initial du système est antisymétrique par rapport à l'échange des deux atomes, un photon reste piégé par le système, c'est le phénomène de subradiance. La propriété de symétrie de l'état initial détermine la nature du comportement coopératif. On remarque que cette propriété de symétrie est conservée par l'état du système.

Dans la suite de ce paragraphe, nous généralisons les conclusions obtenues pour deux atomes au cas de  $N$  atomes. Nous montrons que la nature constructive ou destructive des interférences interatomiques est déterminée par les propriétés de symétrie de la fonction d'onde décrivant l'état initial par rapport aux permutations des atomes, propriétés qui sont conservées au cours de l'évolution.

## 2. PROPRIETES D'INVARIANCE DU HAMILTONIEN.

Le hamiltonien écrit dans l'approximation de l'onde plane (I-I-16) et décrivant l'évolution d'un système de  $N$  atomes à  $n$  niveaux est localement invariant par rapport à la permutation des indices atomiques. On a vu que, physiquement, une telle propriété traduit l'indiscernabilité des atomes au voisinage d'un même plan d'onde et que mathématiquement elle se traduit par l'invariance locale du hamiltonien par rapport aux

groupes  $S_{N'}$ , des permutations des atomes à l'intérieur des tranches  $\mathcal{J}_k$  ( $N' = N \frac{\lambda}{L}$ ).

De plus, les opérateurs collectifs qui interviennent dans l'expression du hamiltonien (I-I-16) et agissent sur les atomes d'une tranche  $\mathcal{J}_k$  :

$$P_{i,j}^{(k)} = \sum_{\alpha \in k} P_{i,j}^{\alpha} \quad (\text{II-I-5})$$

engendrent l'algèbre de Lie d'un groupe  $SU(n)$  (groupe des matrices unimodulaires de dimension  $n$ ) ; les relations de commutation de ces opérateurs sont données par :

$$[P_{i,j}^{(k)}, P_{\ell,m}^{(k')}] = (\delta_{i\ell} P_{i,m}^{(k)} - \delta_{im} P_{\ell,j}^{(k)}) \delta_{k,k'} \quad (\text{II-I-6})$$

Ces opérateurs  $P_{i,j}^{(k)}$  commutent avec les éléments du groupe des permutation  $S_{N'}$ , associé à la tranche  $\mathcal{J}_k$ . Le groupe  $SU(n)$  est la généralisation pour un système à  $n$  niveaux du groupe  $SU(2)$  associé au spin fictif qui caractérise un système à deux niveaux.

Dans la suite du paragraphe I nous allons utiliser les propriétés du hamiltonien pour définir une base d'états collectifs pour un système de  $N$  atomes à  $n$  niveaux du même type que celle introduite par Dicke pour des systèmes de  $N$  atomes à deux niveaux. On cherche alors à déterminer des sous-espaces de l'espace des états du système qui soient invariants par l'action du hamiltonien, c'est-à-dire par l'action des éléments du groupe  $S_{N'}$ , et des éléments infinitésimaux  $P_{i,j}^{(k)}$  de l'algèbre de Lie du groupe  $SU(n)$ . Un tel problème revient à classer les états collectifs du système atomique suivant les représentations irréductibles du groupe produit  $S_{N'} \times SU(n)$ . On remarque d'ailleurs que les états de Dicke correspondent aux représentations irréductibles du groupe produit  $S_{N'} \times SU(2)$  [14]. Les groupes  $S_{N'}$  et  $SU(n)$  sont bien connus mathématiquement [14 à 22]. Les représentations irréductibles du groupe produit ont, par exemple, été utilisées en physique pour classer les états d'un atome à plusieurs électrons [16 à 19]. Nous allons voir que les représentations du groupe produit  $S_{N'} \times SU(n)$  sont

caractérisées par des tableaux standards d'Young (également appelés tableaux normaux d'Young) [16 à 19].

Remarque : Nous avons considéré l'expression (I-I-16) du hamiltonien donnée dans l'approximation de l'onde plane. Si on néglige les effets de propagation du champ à travers le milieu, le hamiltonien devient invariant globalement par permutation de tous les atomes, c'est-à-dire sous l'action des éléments de  $S_N$ . Il s'agit alors de classer les atomes suivant les représentations irréductibles du groupe produit de  $S_N \times SU(n)$ . Nous allons maintenant caractériser les états collectifs d'un système de  $N$  atomes à  $n$  niveaux indiscernables. Il est bien évident qu'il s'agit du même problème si les  $N$  atomes sont contenus dans une tranche  $\mathcal{V}_K$  (approximation de l'onde plane) ou si les  $N$  atomes sont contenus à l'intérieur du volume total (approximation du champ moyen).

### 3. CLASSIFICATION DES ETATS COLLECTIFS D'UN SYSTEME DE $N$ ATOMES à $n$ NIVEAUX SUIVANT LES REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES DE $S_N \times SU(n)$ .

On considère tout d'abord le cas d'un seul atome à  $n$  niveaux. L'espace  $\mathcal{E}_1$  des états, de dimension  $n$ , dont une base est  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle\}$ , n'est évidemment pas décomposable en sous-espaces invariants par l'action des éléments des groupes  $S_1$  et  $SU(n)$ . On dit qu'il n'existe qu'une seule représentation irréductible du produit des groupes  $S_1 \times SU(n)$ .

Si l'on considère maintenant le cas de deux atomes, l'espace des états est de dimension  $n^2$ , et une base est constituée par l'ensemble  $\mathcal{E}_2$  des états produits  $|i\rangle_1 |j\rangle_2$  (avec  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , les indices 1 et 2 permettant de différencier les deux atomes). On peut trouver deux sous-espaces invariants par l'action du groupe des permutations  $S_2$  et du groupe  $SU(n)$ . Il s'agit du sous-espace des états symétriques noté  $\mathcal{E}_2^+$  de dimension  $n(n+1)$  qui est engendré par la base  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|i\rangle_1 |j\rangle_2 + |j\rangle_1 |i\rangle_2) \right\}$  et du sous-espace des états antisymétriques

noté  $\mathcal{C}_2^-$  de dimension  $n(n-1)$  qui est engendré par la base  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|i\rangle_1 |j\rangle_2 - |j\rangle_1 |i\rangle_2) \right\}$ . Ces deux sous espaces correspondent aux deux représentations irréductibles de  $S_2 \times SU(n)$ . On caractérise ces représentations irréductibles à l'aide de tableaux standards d'Young notés :

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}} .$$

Nous reviendrons lorsque nous aborderons le cas de  $N$  atomes sur la définition des tableaux standards d'Young.

Si l'on passe maintenant au cas de trois atomes, l'espace des états  $\mathcal{C}_3$  est décomposable en deux sous-espaces  $\left\{ \mathcal{C}_2^+ \right\} \otimes \left\{ |i\rangle_3 \right\}$  et  $\left\{ \mathcal{C}_2^- \right\} \otimes \left\{ |i\rangle_3 \right\}$  qui sont invariants par l'action des groupes  $S_3$  et  $SU(n)$ .

Ces deux sous-espaces sont eux-mêmes décomposables en deux sous-espaces invariants. Les vecteurs de base qui engendrent ces sous-espaces sont :

$$(i) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (|i\rangle_1 |j\rangle_2 |k\rangle_3 + |j\rangle_1 |k\rangle_2 |i\rangle_3 + |k\rangle_1 |i\rangle_2 |j\rangle_3 + |i\rangle_1 |k\rangle_2 |j\rangle_3 + |j\rangle_1 |i\rangle_2 |k\rangle_3 + |k\rangle_1 |j\rangle_2 |i\rangle_3) \right\}$$

pour les états complètement symétriques,

$$(ii) \quad \left\{ \frac{1}{2} (|i\rangle_1 |j\rangle_2 |k\rangle_3 + |j\rangle_1 |i\rangle_2 |k\rangle_3 - |k\rangle_1 |j\rangle_2 |i\rangle_3 - |k\rangle_1 |i\rangle_2 |j\rangle_3) \right\}$$

$$(iii) \quad \left\{ \frac{1}{2} (|i\rangle_1 |j\rangle_2 |k\rangle_3 - |j\rangle_1 |i\rangle_2 |k\rangle_3 - |k\rangle_1 |j\rangle_2 |i\rangle_3 + |k\rangle_1 |i\rangle_2 |j\rangle_3) \right\}$$

$$(iv) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (|i\rangle_1 |j\rangle_2 |k\rangle_3 + |j\rangle_1 |k\rangle_2 |i\rangle_2 + |k\rangle_1 |i\rangle_2 |j\rangle_3 - |i\rangle_1 |k\rangle_2 |j\rangle_3 - |j\rangle_1 |i\rangle_2 |k\rangle_3 - |k\rangle_1 |j\rangle_2 |i\rangle_3) \right\}$$

pour les états les plus antisymétriques.

Ces quatre sous espaces sont les sous-espaces associés aux représentations irréductibles de  $S_3 \times SU(n)$ , que l'on caractérise à l'aide des tableaux

standards d'Young :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \hline 2 \\ \hline \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

On peut ainsi de proche en proche, en considérant le cas de 4,5, ...,N atomes, construire les sous-espaces de l'espace des états correspondant à un système de N atomes à n niveaux qui sont invariants par l'action du hamiltonien décrivant l'évolution. On montre ainsi [16] que l'on peut caractériser ces sous-espaces invariants à l'aide des tableaux standards d'Young qui caractérisent les représentations irréductibles de  $S_N \times SU(n)$ . Nous n'allons pas plus avant dans la démonstration de ces résultats, dont on peut trouver les éléments dans les références [16 à 19]. Nous rappelons la définition des tableaux standards d'Young.

Nous définissons tout d'abord un diagramme d'Young, associé à une partition de N, qui caractérise une représentation irréductible du groupe  $S_N$  [14]. Une partition de N notée  $\{l_1, l_2, \dots, l_h\}$  est définie par des nombres entiers  $l_i$  tels que  $l_1 + l_2 + \dots + l_h = N$  et  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_h$ . On lui associe un diagramme d'Young qui est composé de h lignes comprenant respectivement  $l_1$  cases pour la première,  $l_2$  cases pour la deuxième ... et  $l_h$  pour la dernière (voir Figure II-1)

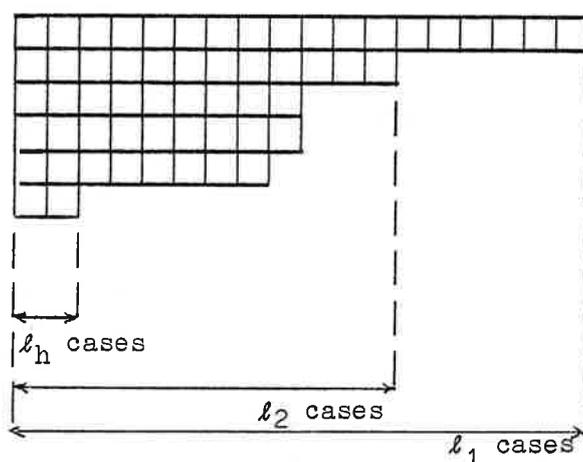


Figure II-1

On construit ensuite un tableau d'Young en associant à chaque case du diagramme d'Young un atome différent repéré par son indice  $\alpha$ . Pour construire enfin une fonction d'onde à partir d'un tableau d'Young, on associe un état monoatomique donné à chacun des atomes. On écrit ensuite pour chaque ligne le produit des états monoatomiques, que l'on symétrise complètement par rapport aux indices atomiques. On effectue le produit des produits obtenus pour chaque ligne et on antisymétrise suivant les différentes colonnes. On voit immédiatement à partir de cette construction que le fait qu'un atome possède  $n$  niveaux limite à  $n$  le nombre de colonnes. Les états à  $N$  atomes associés à un même tableau d'Young forment un sous-espace invariant par l'action des éléments des groupes  $S_N$  et  $SU(n)$  et donc par l'action du hamiltonien.

Pour ne considérer que des sous-espaces n'ayant aucun élément autre que l'élément nul commun, on se limite aux tableaux d'Young standards. Un tableau standard est défini par le fait que les indices atomiques  $\alpha$  associés à chaque case vont dans l'ordre croissant suivant les lignes et les colonnes. La Figure II-2 montre l'ensemble des tableaux "standards" pour la partition  $\{3,2,1\}$  de  $N=6$

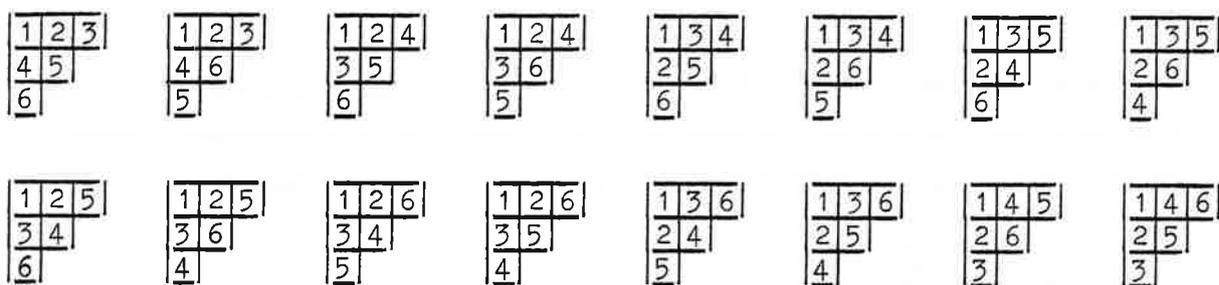


Figure II-2

On voit qu'il existe dans ce cas 16 tableaux standards (ou normaux) associés à un même diagramme. D'une manière générale le nombre de tableaux standards associés à un même diagramme d'Young  $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  est donné par la formule :

$$\mathcal{N}^{\circ} \{l_1, l_2, \dots, l_n\} = (l_1 + l_2 + \dots + l_n)! \frac{\prod_{i < k} (\lambda_i - \lambda_k)}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \quad (\text{II-I-7})$$

avec :

$$\lambda_1 = l_1 + h - 1 \quad , \quad \lambda_2 = l_2 + h - 2 \quad , \quad \dots \quad , \quad \lambda_h = l_h \quad .$$

La dimension d'une représentation irréductible du produit  $S_N \times SU(n)$  ou le nombre d'états linéairement indépendants associés à un même tableau standard est égale à la dimension de la représentation irréductible de  $SU(n)$  correspondant au même diagramme d'Young [18,19].

A chaque tableau d'Young standard est associé un sous-espace d'états collectifs du système. On caractérise finalement les états collectifs par :

(i) un "type de symétrie"  $x$  qui est une représentation irréductible de  $S_N$  et qui est lui-même caractérisé par une partition de  $N$  ou diagramme d'Young ;

(ii) un tableau standard d'Young  $\eta$  qui caractérise une représentation irréductible du produit des groupes  $S_N$  et  $SU(n)$  ;

(iii) par la donnée des états monoatomiques associés à chacune des cases du tableau.

Les états obtenus à partir d'un même tableau standard ne forment pas une base car leur nombre est supérieur à la dimension du sous-espace invariant. Notons que ces états sont les propres des opérateurs collectifs :

$$P_{i,i} = \sum_{\alpha=1}^N P_{i,i}^{\alpha} \quad (\text{II-I-8})$$

avec la valeur propre associée  $N_i$  (nombre d'atomes dans l'état  $i$ ).

Nous allons appliquer ces résultats au cas d'un système de  $N$  atomes à deux niveaux et montrer que l'on retrouve ainsi les états de Dicke. Nous l'appliquons ensuite au cas d'un système à trois niveaux. On montrera alors que l'utilisation de ces états permet de prédire des propriétés de subradiance pour l'évolution du système.



Dans les expériences de superradiance réalisées jusqu'à maintenant, l'état initial du système est l'état complètement excité  $|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ . L'état de plus basse énergie associé au type de symétrie caractérisé par  $r = \frac{N}{2}$  est l'état complètement désexcité, et il n'existe pas d'état subradiant associé à ce type de symétrie. Pour que le système se désexcite vers un état subradiant, il faut, à cause de la conservation du type de symétrie caractérisé par  $r$ , qu'il soit initialement excité dans un état  $|r, m, g\rangle$  avec  $r$  différent de  $\frac{N}{2}$ . A notre connaissance aucune excitation de ce type n'a été réalisée.

##### 5. ETATS COLLECTIFS D'UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX.

Pour des systèmes d'atomes à trois niveaux nous pouvons construire les états collectifs associés aux tableaux d'Young standards, comme des combinaisons des états produits  $\prod_{\alpha=1}^N |i\rangle_{\alpha}$  ( $i$  désignant l'un des trois niveaux 0, 1, 2). Pour une partition de  $N$  donnée  $\{l_1, l_2, l_3\}$ , un exemple d'état collectif est obtenu en effectuant le produit de :

(i)  $l_3$  fonctions d'onde de trois atomes totalement antisymétriques (qui concernent donc en tout  $3l_3$  atomes) et dont un exemple est :

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (|0\rangle_{\alpha} |1\rangle_{\beta} |2\rangle_{\gamma} + |1\rangle_{\alpha} |2\rangle_{\beta} |0\rangle_{\gamma} + |2\rangle_{\alpha} |0\rangle_{\beta} |1\rangle_{\gamma} - |0\rangle_{\alpha} |2\rangle_{\beta} |1\rangle_{\gamma} - |1\rangle_{\alpha} |0\rangle_{\beta} |2\rangle_{\gamma} - |2\rangle_{\alpha} |1\rangle_{\beta} |0\rangle_{\gamma}) ;$$

(ii)  $(l_2 - l_3)$  fonctions d'onde de deux atomes antisymétriques (qui concernent en tout  $2l_2$  atomes) et dont des exemples sont :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{\alpha} |1\rangle_{\beta} - |1\rangle_{\alpha} |0\rangle_{\beta})$$

ou  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{\alpha} |2\rangle_{\beta} - |2\rangle_{\alpha} |0\rangle_{\beta})$

ou encore  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{\alpha} |2\rangle_{\beta} - |2\rangle_{\alpha} |1\rangle_{\beta})$

(iii)  $(l_1, l_2)$  états monoatomiques  $|0\rangle_\alpha$ ,  $|1\rangle_\alpha$  ou  $|2\rangle_\alpha$ .

Il faut ensuite symétriser cet état par rapport aux atomes d'une même ligne.

Il est clair que, pour une fonction d'onde ainsi définie, un état monoatomique ne peut apparaître plus d'une fois dans une partie anti-symétrique. Une première conséquence est que le nombre maximum d'atomes dans un état donné ne peut pas être égal à  $N$  (à moins que  $l_2 = l_3 = 0$ , ce qui correspond à un état complètement symétrique). Pour une partition  $\{l_1, l_2, l_3\}$  donnée, le nombre maximum d'atomes dans un état donné est  $l_1$ . Nous allons maintenant utiliser ces états pour étudier l'évolution d'un système à trois niveaux en "V".

## 6. EVOLUTION D'UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX EN "V" .

Nous avons, au Chapitre I, traité à l'aide des équations semi-classiques l'évolution d'un système à trois niveaux en "V". Nous avons montré que deux types d'effets peuvent apparaître : un effet d'initiation, qui se produit lorsque la cohérence entre les deux niveaux excités est totale et un effet d'inhibition, qui se produit lorsque cette cohérence n'est plus totale. Dans ce paragraphe nous allons montrer que l'on peut retrouver et comprendre ces résultats à l'aide des propriétés de symétrie des états collectifs. Nous démontrons que l'apparition de l'un ou l'autre de ces effets dépend du type de symétrie de la fonction d'onde de l'état initial du système. Alors que, dans le paragraphe II-3 du chapitre précédent, les propriétés de l'émission étaient expliquées par la conservation du caractère de mélange statistique de l'état du système, ce qui se traduit par la conservation de la trace de  $\rho^2$ , nous expliquons ici ces propriétés par la conservation du "type de symétrie" de l'état du système. Nous allons envisager deux types de symétrie différents pour l'état initial, tels que l'on retrouve l'effet d'initiation et d'inhibition précédemment mentionnés. Cette nouvelle approche des propriétés de l'émission d'un système à trois niveaux en "V" permet, en mettant l'accent sur les

propriétés de symétrie du système atomique vis-à-vis de l'échange des atomes et sur leur conservation tant au long de l'évolution, d'interpréter ces phénomènes en termes d'interférence interatomique.

a) Effet d'initiation.

On suppose tout d'abord qu'initialement l'état du système est complètement symétrique et donc associé au type de symétrie  $\{N,0,0\}$  (il n'existe qu'un seul tableau standard pour ce type de symétrie). La conservation du type de symétrie de la fonction d'onde du système tout au long de l'évolution permet de se limiter à ne considérer que les états collectifs complètement symétriques. Ces états sont alors déterminés par les populations  $N_0$ ,  $N_1$  et  $N_2$  des différents niveaux. On les note  $|N_0, N_1, N_2\rangle$ .

Si l'on se place dans le cadre de l'approximation de Dicke, on montre à l'aide de l'équation pilote (I-I-46) écrite pour un système à trois niveaux en "V" que la probabilité de transition de l'état  $|N_0, N_1, N_2\rangle$  vers l'état  $|N_0+1, N_1-1, N_2\rangle$  est  $\Gamma_1 \mu_1 N_1 (N_0+1)$  et celle de l'état  $|N_0, N_1, N_2\rangle$  vers l'état  $|N_0+1, N_1, N_2-1\rangle$  est  $\Gamma_2 \mu_2 N_2 (N_0+1)$ . La Figure II-3 représente schématiquement les états collectifs complètement symétriques et les transitions possibles entre ces états. D'après ce diagramme, il est clair que l'émission d'un photon sur une transition donnée accroît la probabilité d'émission d'un photon sur l'autre transition [23].

Bien que négligeant les effets de propagation, l'interprétation de l'effet d'initiation de l'émission sur une transition par l'émission sur l'autre transition donnée ci-dessus met bien en relief les interférences interatomiques qui sont à l'origine de cet effet.

On retrouve le même résultat que celui obtenu au Chapitre I (paragraphe II-3) lorsque l'on choisit pour état initial du système une matrice densité factorisable telle que, pour chaque matrice densité monoatomique, la cohérence entre les niveaux excités soit totale.

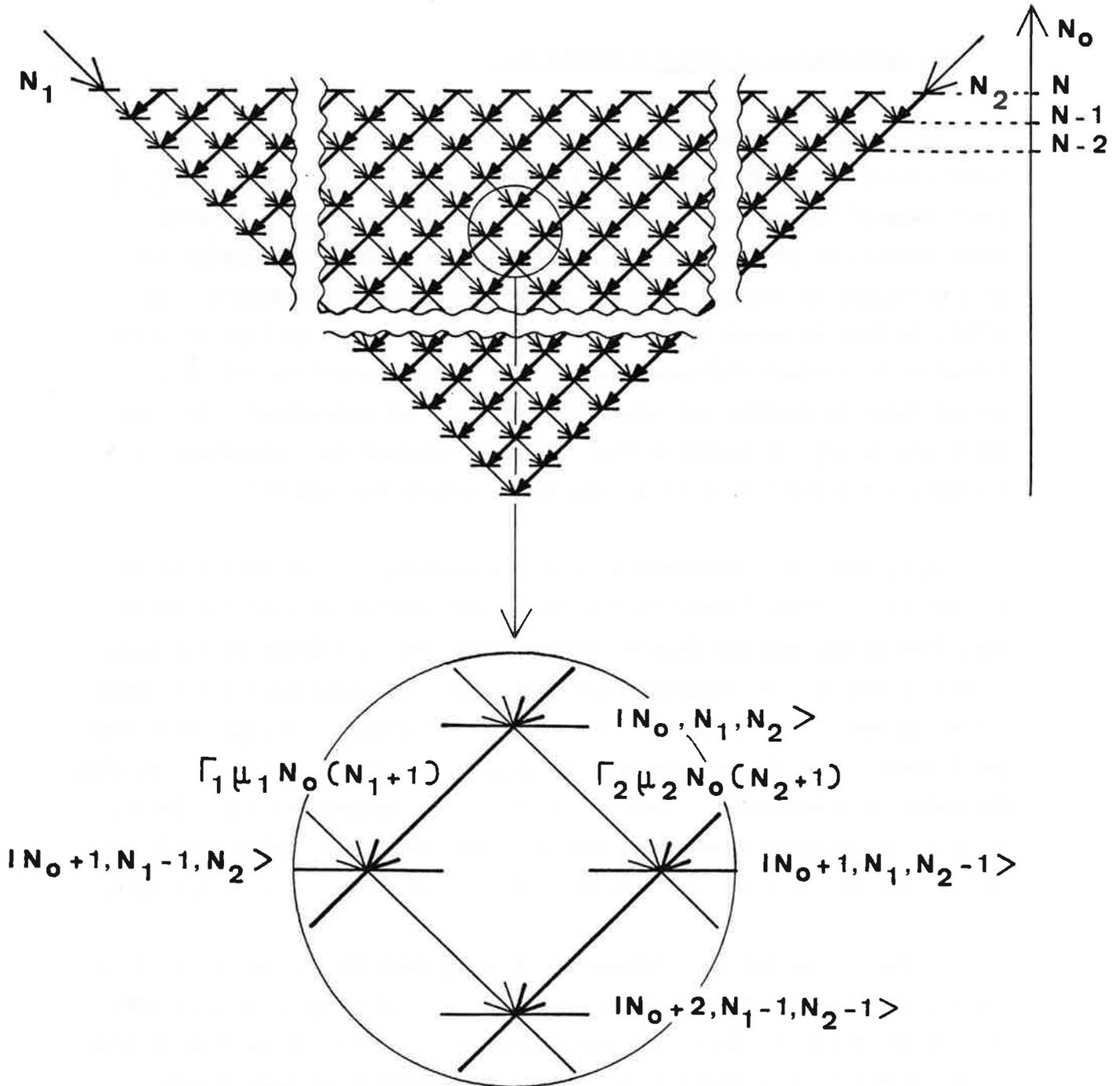


Figure II-3

Etats collectifs complètement symétriques d'un système à trois niveaux en "V". Chaque état  $|N_0, N_1, N_2\rangle$  est représenté par un trait horizontal, les transitions  $|N_0, N_1, N_2\rangle \rightarrow |N_0+1, N_1-1, N_2\rangle$  par une flèche en trait gras et les transitions  $|N_0, N_1, N_2\rangle \rightarrow |N_0+1, N_1, N_2-1\rangle$  par une flèche en trait plus fin. On a porté également les probabilités de transition.

b) Subradiance et effet d'inhibition.

On suppose maintenant que l'état initial correspond à des populations égales des états excités 1 et 2 et à un type de symétrie  $\left\{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 0\right\}$  (on a supposé pour simplifier que  $N$  est pair). Sans avoir à faire aucun calcul, on peut affirmer que les états de plus basse énergie que peut atteindre le système ne sont jamais complètement désexcités. En effet, le type de symétrie du système est conservé tout au long de l'évolution et le maximum d'atomes susceptibles de se désexciter est  $\frac{N}{2}$ . L'état final du système est nécessairement un état subradiant. La connaissance du type de symétrie fixe la valeur minimum du pourcentage  $\tau$  d'atomes qui restent dans l'état excité, c'est-à-dire ici 50% .

On retrouve un comportement semblable à celui d'un système à trois niveaux en "V" dont l'état est décrit par une matrice densité factorisable, dont chaque matrice densité monoatomique est un mélange statistique. Il est intéressant de remarquer que deux conditions initiales différentes - dans un cas l'état du système est caractérisé comme un mélange statistique d'états, dans l'autre cas par son type de symétrie - conduisent au même phénomène de subradiance. Nous allons dans les paragraphes qui suivent, analyser la correspondance entre ces deux traitements et, plus précisément, le lien qui existe entre mélange statistique d'états et type de symétrie.

Notons finalement que l'évolution d'un système de  $N$  atomes excités à trois niveaux en "V" initialement dans l'état excité précédemment défini de type de symétrie  $\left\{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 0\right\}$  est équivalente à l'évolution d'un système de  $\frac{N}{2}$  atomes à trois niveaux en "A" initialement tous dans l'état excité. On peut en effet se donner à chaque instant les nombres  $N_{12}$ ,  $N_{01}$  et  $N_{02}$  qui représentent respectivement le nombre de fonctions d'onde antisymétriques de deux états 0 et 1, 0 et 2, et 1 et 2 contenues dans la fonction d'onde  $|\Psi\rangle$  qui décrit le système. Les nombres  $N_{12}$ ,  $N_{01}$  et  $N_{02}$  caractérisent complètement un état d'une représentation irréductible de type de symétrie  $\left\{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 0\right\}$ . Il n'est pas nécessaire ici de préciser davantage la représentation irréductible particulière considérée. On

caractérise à chaque instant l'état du système de  $\frac{N}{2}$  atomes à trois niveaux en "A" par les nombres  $N'_0, N'_2$  et  $N'_1$  d'atomes dans les états 0, 2 et 1. En faisant correspondre  $N'_{12}$  avec  $N'_0$ ,  $N'_{01}$  avec  $N'_2$  et  $N'_{02}$  avec  $N'_1$ , on montre que l'équation pilote qui donne l'évolution de chacun de ces systèmes prend la même forme. Nous n'insistons pas ici sur le détail des calculs. On peut déduire des résultats obtenus du Chapitre I, pour un système d'atomes à trois niveaux en "A", l'état final du système de  $N$  atomes à trois niveaux en "V" considéré. On a :

$$N'_{12}(\infty) = 0$$

$$\text{et } N'_{01}(\infty) + N'_{02}(\infty) = \frac{N}{2} \quad (\text{II-I-9})$$

La population  $N_0$  du niveau 0 est :

$$N_0(\infty) = N'_{01}(\infty) + N'_{02}(\infty) = \frac{N}{2} \quad (\text{II-I-10})$$

et l'état final est un état subradiant. Le rapport des populations des niveaux 1 et 2 ( $N_1/N_2$ ) est alors égal au rapport des nombres  $N'_{01}$  sur  $N'_{02}$  qui est lui-même égal au rapport des populations  $N'_2$  et  $N'_1$  :

$$\frac{N_1(\infty)}{N_2(\infty)} = \frac{N'_{01}(\infty)}{N'_{02}(\infty)} = \frac{N'_2(\infty)}{N'_1(\infty)} \quad (\text{II-I-11})$$

L'analogie entre les systèmes à trois niveaux en "V" et en "A" permet de comprendre l'existence d'un effet d'inhibition de l'émission de la transition la moins probable par l'émission sur la transition la plus probable.

#### 7. TAUX DE SUBRADIANCE POUR UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX EN "V" .

La connaissance du type de symétrie de la fonction d'onde initiale permet de prédire la proportion minimale d'atomes dans les états excités, qu'on appellera taux minimal de subradiance :

$$\tau_{\min} = \frac{l_2 + l_3}{N'} \quad (\text{II-I-12})$$

pour un type de symétrie  $\{l_1, l_2, l_3\}$  avec  $l_1 + l_2 + l_3 = N'$ . Ce rapport est minimum pour le type de symétrie  $\{N', 0, 0\}$ , il vaut alors zéro, et

maximum pour le type de symétrie  $\left\{\frac{N'}{3}, \frac{N'}{3}, \frac{N'}{3}\right\}$ , il vaut alors  $2/3$ . Si on considère qu'initialement tous les atomes sont excités, le type de symétrie initial est de la forme  $\{l_1, l_2, 0\}$  et le rapport  $\tau$  est maximum pour le type de symétrie  $\left\{\frac{N'}{2}, \frac{N'}{2}, 0\right\}$ . Il vaut alors  $1/2$ .

On peut donner une expression du rapport  $\tau_{\min}$  lorsqu'on décrit le système à l'aide d'une matrice densité :

$$\tau_{\min} = \sum_k \sum_{\{l_1, l_2, l_3\}} f_k(\{l_1, l_2, l_3\}) \frac{l_2 + l_3}{N'} \quad (\text{II-I-13})$$

où  $f_k(\{l_1, l_2, l_3\})$  correspond à la trace partielle de la matrice densité à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{J}_k$  sur l'espace des représentations irréductibles correspondant au type de symétrie  $\{l_1, l_2, l_3\}$ , avec  $l_1 + l_2 + l_3 = N'$ .  $\sum_{\{l_1, l_2, l_3\}}$  indique qu'on somme sur tous les types de symétrie.  $\sum_k$  signifie que l'on somme sur toutes les tranches  $\mathcal{J}_k$  contenant  $N'$  atomes. Si l'on considère que l'état initial est complètement excité seuls les types de symétrie  $\{l_1, l_2, 0\}$  sont alors à prendre en compte et l'expression (II-I-13) donnant le rapport  $\tau_{\min}$  devient :

$$\tau_{\min} = \sum_k \sum_{\{l_1, l_2, 0\}} f_k(\{l_1, l_2, 0\}) \frac{l_2}{N'} \quad (\text{II-I-14})$$

## 8. LIEN ENTRE MELANGE STATISTIQUE D'ETATS ET TYPE DE SYMETRIE.

Nous allons analyser le lien qui existe entre les conditions initiales d'un système à trois niveaux en "V" qui conduisent au phénomène de subradiance.

Au Chapitre I les conditions initiales étaient données par une matrice densité factorisable :

$$\rho(z, t) = \prod_{\alpha} \rho^{\alpha}(t) \delta(z - z_{\alpha}) \quad (\text{II-I-15})$$

Nous supposerons de plus ici que toutes les matrices densité monoatomiques

$\rho^\alpha(0)$  sont identiques. On caractérise la nature de mélange statistique d'états du système par la trace de  $[\rho^\alpha(0)]^2$  que l'on prend égal à  $\sigma^2$ .

Dans ce chapitre, nous caractérisons l'état initial par son type de symétrie  $\{l_1, l_2, 0\}$ .

Un calcul basé sur la théorie des tableaux d'Young, que l'on peut trouver en Appendice B, permet de faire le lien entre les conditions initiales données par une matrice densité factorisable et homogène et celle données par un type de symétrie. On calcule la probabilité que l'état initial d'une tranche  $\mathcal{J}_k$ , donné par une matrice densité factorisable, possède un type de symétrie  $\{l_1, l_2, 0\}$ . On montre que, pourvu que  $N'$  (nombre d'atomes dans la tranche  $\mathcal{J}_k$ ) soit beaucoup plus grand que un (c'est-à-dire pourvu que l'émission soit coopérative), la trace partielle  $f_k(\{l_1, l_2, 0\})$  de la matrice densité à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{J}_k$  sur l'espace des représentations irréductibles correspondant au type de symétrie  $\{l_1, l_2, 0\}$  tend vers un si :

$$l_1 = \frac{1}{2} N' (1 + \sqrt{26^2 - 1}) \quad (\text{II-I-16})$$

$$l_2 = \frac{1}{2} N' (1 - \sqrt{26^2 - 1}) \quad (\text{II-I-17})$$

La probabilité que l'état du système possède un type de symétrie  $\{l_1, l_2, 0\}$  avec  $l_1$  et  $l_2$  donnés par les expressions ci-dessus est donc pratiquement égale à un.

Ce calcul permet de faire correspondre à un cas pur de la matrice densité atomique (II-I-15) un type de symétrie  $\{N', 0, 0\}$ . De même, à un mélange statistique caractérisé par le nombre  $\sigma$ , on associe un type de symétrie  $\{l_1, l_2, 0\}$  où  $l_1$  et  $l_2$  sont donnés par les expressions (II-I-16, 17). Il n'y a pas de correspondance vraiment générale entre type de symétrie et mélange statistique. Nous montrons ici que si la matrice densité est factorisable, il lui correspond un seul type de symétrie, qui dépend uniquement de  $\sigma^2$ . La notion de type de symétrie est mieux adaptée à la description de la subradiance puisqu'elle insiste sur les interférences

interatomiques dont la nature destructive ou constructive se déduit directement du type de symétrie.

Nous allons maintenant comparer les lois de conservation obtenues dans les deux approches. Pour cela on considère deux opérateurs invariants pour les groupes  $S_{N'}$  et  $SU(3)$ . Ces opérateurs sont les opérateurs qui commutent avec les éléments  $P_{i,j}^{(k)}$  et donc avec le hamiltonien qui décrit l'évolution. Le premier est l'opérateur population totale de la tranche

$$\mathcal{J}_k : N^{(k)} = \sum_{i=1}^3 P_{i,i}^{(k)} ; \quad (\text{II-I-18})$$

le second est l'opérateur suivant (appelé dans la littérature opérateur de Casimir) :

$$W^{(k)} = \sum_{i,z} P_{i,j}^{(k)} P_{j,i}^{(k)} . \quad (\text{II-I-19})$$

La propriété d'invariance de ces opérateurs est à rapprocher des lois de conservation de la trace de  $\rho$  et de  $\rho^2$ . On a en effet :

$$\langle N^{(k)} \rangle = \text{Tr}[\rho N^{(k)}] = N' . \quad (\text{II-I-20})$$

De même :

$$\langle W^{(k)} \rangle = \text{Tr}[\rho W^{(k)}] = N'(N'-1) \sigma^2 + 3N' . \quad (\text{II-I-21})$$

Il existe une correspondance entre l'invariance des opérateurs  $N^{(k)}$  et  $W^{(k)}$  et la conservation de la trace de  $\rho$  et de  $\rho^2$ . La valeur moyenne de l'opérateur de Casimir caractérise les propriétés de symétrie du système [17] et la trace de  $\rho^2$  caractérise donc aussi les propriétés de symétrie du système, lorsque  $\rho$  est factorisable.

Dans ces conditions, on comprend que la trace de  $\rho^2$  détermine le taux de subradiance. On retrouve le même résultat que l'on le calcule directement en utilisant la conservation de la trace de  $\rho^2$  (expression I-II-32) ou que l'on le déduise du type de symétrie le plus probable.

## II - Subradiance par "transition dégénérée".

Le phénomène de subradiance peut également se produire lorsque plusieurs transitions sont résonnantes avec le même champ électromagnétique (même fréquence, même polarisation). Lorsque, pour un tel système, un photon est émis, on ne peut pas savoir sur quelle transition il a effectivement été émis. Il se produit des interférences interatomiques entre les champs émis sur des transitions différentes. Ces interférences peuvent donner lieu à des phénomènes de battements superradiants qui ont été mis en évidence [24,25,26] et étudiés théoriquement [27]. Elles peuvent être également de nature destructive et être à l'origine d'un phénomène de subradiance que nous caractérisons comme subradiance par "transition dégénérée". Nous allons, dans ce paragraphe, étudier le cas d'un système à quatre niveaux comprenant deux transitions résonnantes avec le même champ et donnant lieu à un tel phénomène. Nous mentionnons également les cas où deux transitions résonnantes avec le même champ partagent de plus un niveau commun.

### 1. SYSTEME à QUATRE NIVEAUX.

Nous considérons un système de  $N$  atomes à quatre niveaux schématisé sur la Figure II-4

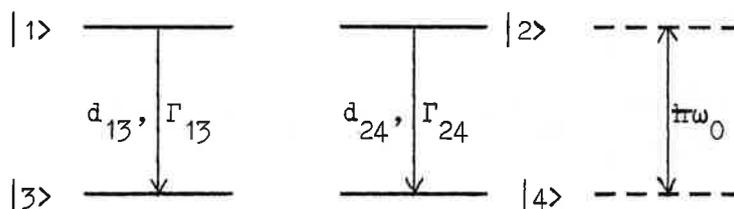


Figure II-4

Les niveaux supérieurs 1, 2 sont couplés respectivement aux niveaux 3, 4 par des transitions dipolaires électriques de même fréquence  $\omega_0$  et de même polarisation  $\vec{e}$ . On note :

$$d_{13} = \langle 1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | 3 \rangle$$

$$d_{24} = \langle 2 | \vec{D} \cdot \vec{e} | 4 \rangle$$

les dipôles correspondant à chacune des transitions  $1 \rightarrow 3$  et  $2 \rightarrow 4$ , et :

$$\Gamma_{13} = \frac{\omega_0^3}{c^3} \frac{1}{3\pi\epsilon_0\hbar} |d_{13}|^2 = c |d_{13}|^2$$

$$\Gamma_{24} = \frac{\omega_0^3}{c^3} \frac{1}{3\pi\epsilon_0\hbar} |d_{24}|^2 = c |d_{24}|^2$$

les probabilités de transition. On suppose qu'initialement les atomes se trouvent dans les états excités  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ .

a) Le cas de deux atomes.

Considérons un système constitué de deux atomes du type de ceux décrits ci-dessus. Supposons qu'à l'instant  $t=0$  les atomes sont préparés dans l'état excité :

$$|\Psi(0)\rangle = |1\rangle_1 |2\rangle_2 \quad (\text{II-II-1})$$

Nous nous proposons d'étudier l'évolution de cet ensemble pour voir dans quelle mesure il diffère de celui où les deux transitions évoluent indépendamment. Pour cela on étudie l'évolution de la matrice densité sur la base suivante :

$$|1,2\rangle = |1\rangle_1 |2\rangle_2$$

$$|+\rangle = \frac{1}{d_{13}^2 + d_{24}^2} (d_{13} |1\rangle_1 |4\rangle_2 + d_{24} |3\rangle_1 |2\rangle_2)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{d_{13}^2 + d_{24}^2} (d_{24} |1\rangle_1 |4\rangle_2 - d_{13} |3\rangle_1 |2\rangle_2)$$

$$|3,4\rangle = |3\rangle_1 |4\rangle_2$$

On suppose que les conditions de coopérativité sont remplies, c'est-à-dire que la distance entre les atomes est très petite devant la longueur d'onde [6]. L'équation pilote de ce système s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \langle 1,2 | \rho | 1,2 \rangle = - c (d_{12}^2 + d_{24}^2) \langle 1,2 | \rho | 1,2 \rangle \quad (\text{II-II-2})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle + | \rho | + \rangle &= - c (d_{13}^2 + d_{24}^2) \langle + | \rho | + \rangle \\ &+ c \frac{4d_{13}^2 d_{24}^2}{d_{13}^2 + d_{24}^2} \langle 1,2 | \rho | 1,2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{II-II-3})$$

$$\frac{d}{dt} \langle - | \rho | - \rangle = + c \frac{(d_{13}^2 - d_{24}^2)^2}{d_{13}^2 + d_{24}^2} \langle 1,2 | \rho | 1,2 \rangle \quad (\text{II-II-4})$$

$$\frac{d}{dt} \langle 3,4 | \rho | 3,4 \rangle = + c (d_{13}^2 + d_{24}^2) \langle + | \rho | + \rangle \quad (\text{II-II-5})$$

Les équations d'évolution des éléments de matrice  $\langle + | \rho | + \rangle$  et  $\langle - | \rho | - \rangle$  contiennent les termes d'interférences entre les dipôles des deux atomes. On montre à l'aide des équations (II-II-2 à 5) qu'à la fin de l'évolution

il existe une probabilité  $\left| \frac{(d_{13}^2 - d_{24}^2)}{d_{13}^2 + d_{24}^2} \right|^2$  que le système ne soit pas dans

l'état complètement désexcité mais dans l'état  $| - \rangle$  qui est subradiant. Cette probabilité est non nulle si les éléments de matrice dipolaires qui couplent les deux transitions sont différents. Cet exemple très simple met en évidence le phénomène de "subradiance par transition dégénérée". Il apparaît que les atomes peuvent alors interférer de façon destructive, le système évolue alors vers un état subradiant. Ce n'est pas ici l'état initial qui fixe le taux de subradiance mais le rapport entre les probabilités de transition.

#### b) Les états subradiants.

La généralisation des résultats précédents au cas d'un système de N atomes est non triviale. Nous pouvons cependant démontrer qu'il existe des états subradiants et donner leur expression.

L'équation pilote qui régit l'évolution du système s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho} = & - C [(d_1 R_1^+ + d_2 R_2^+) (d_1 R_1^- + d_2 R_2^-) , \tilde{\rho}(t)]_+ \\ & + 2C \{ (d_1 R_1^- + d_2 R_2^-) \tilde{\rho}(t) (d_1 R_1^+ + d_2 R_2^+) \} \end{aligned} \quad (\text{II-II-6})$$

où  $R_1^+ = P_{1,3;k_0}$  et  $R_2^+ = P_{2,4;k_0}$  .

Le fait que les deux transitions n'aient aucun niveau commun permet de décrire l'évolution du système dans la base des états produits des états de Dicke définis pour chacune des transitions :

$$\{|r_{1,m_1}\rangle \otimes |r_{2,m_2}\rangle\} .$$

On note que, bien que les atomes soient indiscernables vis-à-vis du champ électromagnétique rayonné, ils peuvent être séparés en deux classes différentes correspondant aux transitions  $(1 \rightarrow 3)$  et  $(2 \rightarrow 4)$ , sans qu'aucun échange d'atomes ne soit permis entre ces deux classes. Comme dans le cas de deux atomes, il se produit néanmoins des interférences interatomiques entre ces deux classes d'atomes dues aux interférences des champs sur les deux transitions.

Si on choisit comme état initial un état excité tel que les populations des niveaux 1 et 2 soient égales à  $N/2$ , on a :

$$|\Psi(0)\rangle = \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle \quad (\text{II-II-7})$$

et le système évolue alors dans le sous-espace des états de base

$$\left\{ \left| \frac{N}{2}, m_1 \right\rangle \otimes \left| \frac{N}{2}, m_2 \right\rangle \right\} .$$

Il reste cependant très compliqué de vouloir donner une solution générale de l'équation pilote, car les termes d'interférence, qui apparaissent dans l'équation, mélangent les populations et les cohérences entre les états de même énergie (c'est-à-dire de même valeur de  $(m_1 + m_2)$ ). Nous pouvons cependant, pour toute valeur négative de  $(m_1 + m_2)$  construire un état subradiant de la forme :

$$|S(p)\rangle = A \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = +p}} (-1)^{m_1 + N/2} d_{24}^{m_1 + N/2} d_{13}^{m_2 + N/2} \\ \sqrt{\frac{(N/2 - m_1)! (N/2 - m_2)!}{(N/2 + m_1)! (N/2 + m_2)!}} \left| \frac{N}{2}, m_1 \right\rangle \left| \frac{N}{2}, m_2 \right\rangle \quad (\text{II-II-8})$$

A est un facteur de normalisation et  $\frac{N}{2} < p < 0$ . On montre que :

$$(d_{13} R_1^- + d_{24} R_2^-) |S(p)\rangle = 0 \quad (\text{II-II-9})$$

ce qui signifie d'après l'équation pilote (II-II-6) que cet état est métastable. Mis à part le cas où les éléments de matrice dipolaires  $d_{13}$  et  $d_{24}$  sont égaux, les éléments de la matrice densité  $\langle S(p) | \tilde{\rho} | S(p) \rangle$  peuvent être différents de zéro. A la fin de l'émission tous les atomes sont concentrés dans ces états et l'inversion de population est donnée par :

$$\sum_{p=0}^{-N} -p \langle S(p) | \tilde{\rho}(\infty) | S(p) \rangle .$$

Le nombre d'atomes restant dans l'état excité est compris entre 0 et  $\frac{N}{2}$ . Il est difficile de calculer les éléments de matrice  $\langle S(p) | \tilde{\rho}(\infty) | S(p) \rangle$  et cette approche, qui montre l'existence d'états subradiants et la possibilité de subradiance, ne permet pas d'obtenir des résultats quantitatifs. Pour prédire l'importance de la subradiance, nous allons utiliser une approche semi-classique.

### c) Le modèle semi-classique.

Les équations semi-classiques qui décrivent l'évolution du système précédemment défini sont :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = - \frac{i k_0}{\epsilon_0} (d_{13} \mathcal{P}_{13} + d_{24} \mathcal{P}_{24}) \quad (\text{II-II-10})$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{13}}{\partial \tau} = \frac{i}{\hbar} (d_{13} \mathcal{E}^* \mathcal{P}_{13} - d_{13} \mathcal{E} \mathcal{P}_{13}^*) \quad (\text{II-II-11})$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{24}}{\partial \tau} = \frac{i}{\hbar} (d_{24} \mathcal{E}^* \mathcal{P}_{24} - d_{24} \mathcal{E} \mathcal{P}_{24}^*) \quad (\text{II-II-12})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{13}}{\partial \tau} = \frac{i d_{13}}{2\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N}_{13} \quad (\text{II-II-13})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{24}}{\partial \tau} = \frac{i d_{24}}{2\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N}_{24} \quad (\text{II-II-14})$$

$\mathcal{N}_{13}$  et  $\mathcal{N}_{24}$  représentent les différences de populations sur les transitions  $1 \rightarrow 3$  et  $2 \rightarrow 4$ ,  $\mathcal{P}_{13}$  et  $\mathcal{P}_{24}$  les cohérences optiques associées et  $\mathcal{E}$  le champ électromagnétique commun aux deux transitions.

On suppose qu'à l'instant initial le système est dans un état excité tel que :

$$\mathcal{N}_{13}(0) = \mathcal{N}_{24}(0) = \frac{N}{2} \times \frac{1}{V} \quad (\text{II-II-15})$$

les niveaux 1 et 2 étant également peuplés et les niveaux 3 et 4 vides.

On simule le démarrage du système à l'aide d'un champ initial  $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_0$ .

Le module des vecteurs de Bloch associés à chacune des transitions est conservé ; on a :

$$\mathcal{N}_{13}^2 + |\mathcal{P}_{13}|^2 = \frac{N^2}{4V^2} \quad (\text{II-II-16})$$

$$\mathcal{N}_{24}^2 + |\mathcal{P}_{24}|^2 = \frac{N^2}{4V^2} \quad (\text{II-II-17})$$

On peut donc poser :

$$\mathcal{N}_{13} = \frac{N}{2V} \cos \theta_{13} \quad (\text{II-II-18})$$

$$\mathcal{P}_{13} = i \frac{N}{2V} \sin \theta_{13} \quad (\text{II-II-19})$$

$$\mathcal{N}_{24} = \frac{N}{2V} \cos \theta_{24} \quad (\text{II-II-20})$$

$$\mathcal{P}_{24} = i \frac{N}{2V} \sin \theta_{24} \quad (\text{II-II-21})$$

Avec ces nouvelles notations les équations (II-II-13,14) deviennent :

$$\frac{\partial \theta_{13}}{\partial \tau} = \frac{d_{13}}{2\hbar} \zeta \quad (\text{II-II-22})$$

$$\frac{\partial \theta_{24}}{\partial \tau} = \frac{d_{24}}{2\hbar} \zeta \quad (\text{II-II-23})$$

Comme initialement  $\theta_{13}(z,0) = \theta_{24}(z,0)$ , on a à chaque instant :

$$\frac{\theta_{13}(z,\tau)}{d_{13}} = \frac{\theta_{24}(z,\tau)}{d_{24}} = \bar{\theta} \quad (\text{II-II-24})$$

A la fin de l'évolution, le champ et toutes ses dérivées sont nulles, en particulier :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-II-25})$$

ce qui peut s'écrire également :

$$d_{13} \mathcal{G}_{13} + d_{24} \mathcal{G}_{24} = 0 \quad (\text{II-II-26})$$

ou encore :

$$d_{12} \sin \theta_{13} + d_{24} \sin \theta_{24} = 0 \quad (\text{II-II-27})$$

Les équations (II-II-24) et (II-II-26) montrent que l'on ne peut avoir simultanément :  $\theta_{13} = \theta_{24} = \pi$  (si  $d_{13} \neq d_{24}$ ), et donc que les atomes ne peuvent être simultanément tous désexcités [12]. L'état final du système est nécessairement subradiant. L'équation (II-II-26) signifie qu'il existe des interférences destructives entre les champs émis sur les deux transitions.

La Figure II-5 montre un exemple de subradiance dans le cas d'une transition  $J = 3/2 \rightarrow J' = 1/2$  où initialement seuls les niveaux  $|J = 3/2, m_J = 3/2\rangle$  et  $|J = 3/2, m_J = 1/2\rangle$  sont peuplés. On observe dans ces conditions un taux de subradiance de l'ordre de 15%.

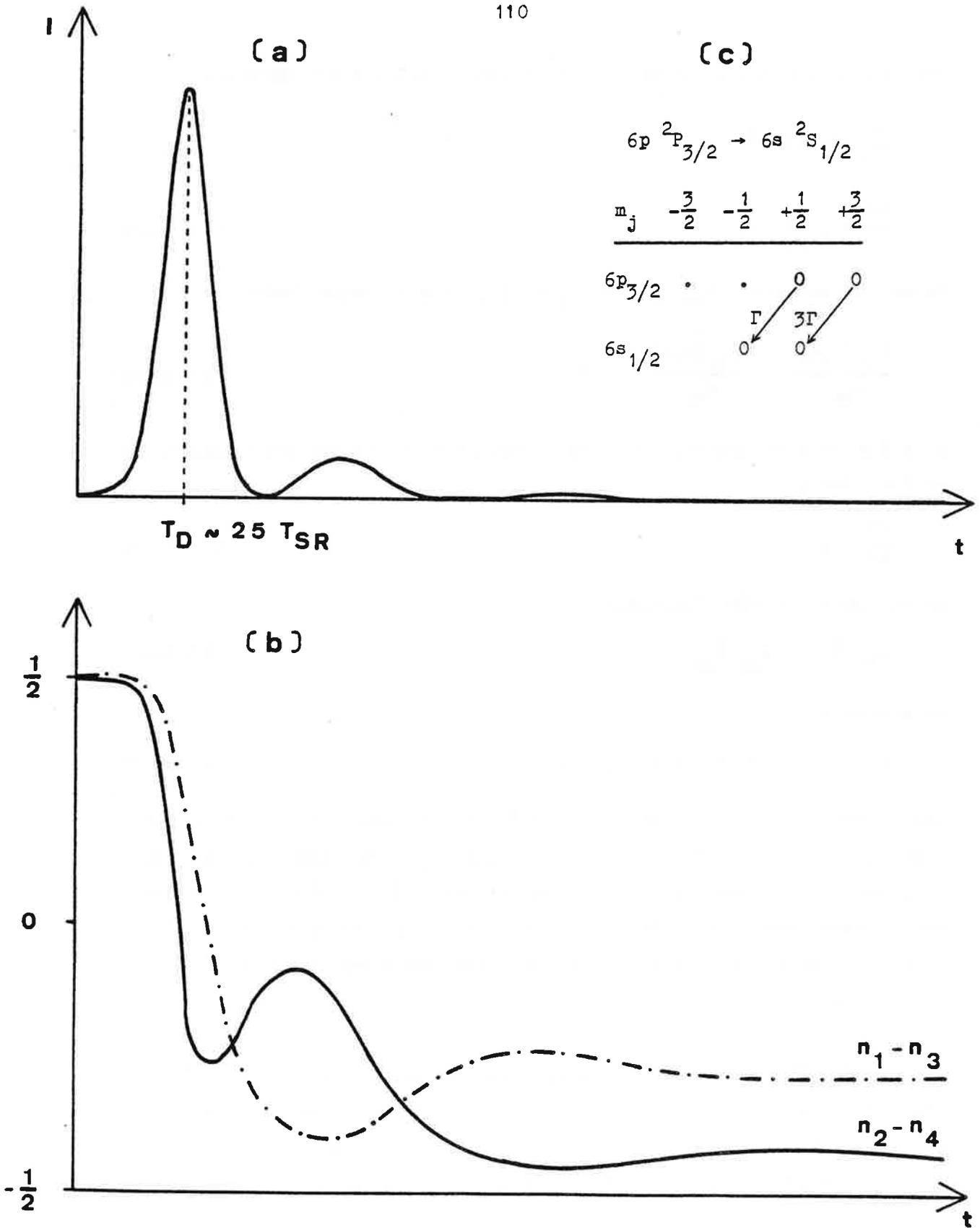


Figure II-5 : a)  $I$  : Intensité du champ émis.  
 b) Variation de la différence de populations totales  $(n_1 - n_3)$  entre les niveaux 1 et 3 et  $(n_2 - n_4)$  entre les niveaux 2 et 4.  
 c) Schéma de niveaux.

## 2. SYSTEMES à TROIS NIVEAUX.

Lorsque plusieurs transitions d'un système atomique sont résonnantes avec le même champ (même polarisation, même fréquence) et possèdent en plus un niveau commun, l'origine du couplage entre les transitions est double. Aux interférences interatomiques dues à l'indiscernabilité de champs émis sur des transitions différentes, s'ajoute le couplage dû au niveau commun à deux transitions. Nous considérons ici le cas d'un système à trois niveaux tel que ceux traités au Chapitre I, mais tel que les deux transitions soient résonnantes avec le même champ. A la fin de l'émission la relation entre les cohérences optiques des transitions :

$$d_1 Q_{10}^{(\varepsilon_1)} + d_2 Q_{20}^{(\varepsilon_2)} = 0 \quad (\text{II-II-28})$$

doit être vérifiée (les notations employées sont celles du Chapitre I, paragraphe II). Cette équation, comme dans le cas d'atomes à quatre niveaux précédemment traité, traduit la possibilité d'interférences destructives et donc la possibilité pour l'état final d'être subradiant. Mais l'existence d'un niveau commun pour les deux transitions impose de nouvelles contraintes pour l'évolution d'un système à trois niveaux. En particulier la loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{d_1^2} Q_{11} + \frac{1}{d_2^2} Q_{22} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{d_1 d_2} (Q_{12} + Q_{21}) \right) = 0 \quad (\text{II-II-29})$$

est à chaque instant vérifiée. Elle impose des conditions sur les populations et les cohérences des niveaux non communs aux deux transitions. Pour certaines conditions initiales, cette équation de conservation peut interdire au système de se désexciter totalement. En particulier dans le cas d'une cascade où le niveau intermédiaire est initialement excité, elle permet de prédire qu'en même temps que le niveau inférieur est peuplé, un transfert de population vers le niveau supérieur doit également se produire.

### III - Subradiance d'un système d'atomes contenus dans un petit volume.

Historiquement le phénomène de superradiance a été prédit par Dicke [1] pour un système d'atomes à deux niveaux contenus dans un volume dont les dimensions sont petites devant la longueur d'onde. Il a toutefois été montré [13] que les hypothèses faites par Dicke n'étaient précisément pas justifiées dans ce cas. Un calcul semi-classique, dont l'intégration numérique est relativement compliquée, montre en effet que le système évolue en suivant tout d'abord la trajectoire prédite par Dicke puis se bloque brusquement au cours de l'émission.

L'origine physique de cet effet a été analysée. Dans son traitement, Dicke suppose qu'à l'intérieur du volume émetteur tous les atomes voient le même champ électromagnétique, c'est-à-dire qu'ils sont indiscernables vis-à-vis du champ rayonné. Cette hypothèse peut sembler logique dans la mesure où la distance entre les atomes est très petite devant la longueur d'onde. Cette hypothèse est en fait excessive, car le champ à l'intérieur du volume varie de manière importante sur des distances inférieures à la longueur d'onde [12,13]. Les positions des atomes à l'intérieur du volume constituent en effet des singularités pour le champ. Il a été montré que ces singularités ne sont pas négligeables lorsque l'intensité du champ devient importante.

Nous proposons ici une interprétation de ce phénomène en termes de symétrie. Nous analysons tout d'abord le type de symétrie de l'état du système atomique au début et à la fin du calcul de l'évolution donné dans la référence [13]. Au début de l'émission le système suit la loi d'évolution prédite par Dicke. La fonction d'onde du système possède un type de symétrie complètement symétrique, c'est-à-dire  $\{N,0\}$ . A la fin de l'émission, le calcul de la référence [13] prévoit que le système se

bloque et que la différence de population  $\mathcal{N}$  entre les deux niveaux est alors approximativement nulle, et la cohérence  $\mathcal{Q}$  également. On a donc :

$$\mathcal{N} = \sum_{r,m,g} 2m f(r,m,g) = 0 \quad (\text{II-III-1})$$

$$\mathcal{Q}^2 = \sum_{r,m,g} 2(r^2 - m^2 + m) f(r,m,g) = 0 \quad (\text{II-III-2})$$

où  $f(r,m,g)$  est la probabilité pour le système d'être dans l'état de Dicke  $|r,m,g\rangle$ . Les équations (II-III-1 et 2) imposent que l'on ait :

$$r = m = 0 \quad . \quad (\text{II-III-3})$$

L'état final est donc un état qui possède un type de symétrie  $\left\{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right\}$ , c'est-à-dire que les atomes émetteurs interfèrent de manière totalement destructive.

Il y a un changement de type de symétrie entre l'état initial du système et son état final. Au commencement de l'émission, l'intensité du champ rayonné est faible et la loi de conservation des propriétés de symétrie reste valable. L'intensité du champ devenant importante, la loi de conservation des propriétés de symétrie n'est plus respectée et le type de symétrie  $\{N, 0\}$  de l'état initial n'est plus conservé. Lorsque l'intensité du champ diminue, la loi de conservation des propriétés de symétrie est restaurée. La fonction d'onde du système possède, comme on l'a vu, un type de symétrie  $\left\{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right\}$  et celui-ci est conservé dans toute la suite de l'émission. L'état final est donc subradiant.

Une analyse statistique du système atomique permet de retrouver ce résultat. Pour une énergie donnée, c'est-à-dire pour une valeur du nombre quantique  $m$  donnée, les états macroscopiques du système sont caractérisés par les nombres quantiques  $(r,m)$ . La dégénérescence d'un tel état, c'est-à-dire le nombre d'états microscopiques qui lui correspondent, ou encore le nombre d'états de Dicke  $|r,m,g\rangle$  associé à un couple  $(r,m)$ , est donné par :

$$v(r) = \frac{N! (2r+1)}{\left(\frac{N}{2} + r + 1\right)! \left(\frac{N}{2} - r\right)!} \quad (\text{II-III-4})$$

La Figure II-6 représente la courbe donnant la variation de  $v(r)$  en fonction de  $r$  pour  $r$  variant entre  $N/2$  et  $0$ . On voit que cette courbe varie très rapidement autour de la valeur de  $r$ ,  $\sqrt{N}$ , où elle est maximum. Pour une valeur de  $m$  petite donnée le nombre d'états de Dicke  $|r,m,g\rangle$  de  $r$  petit ( $\sim \sqrt{N}$ ) est beaucoup plus important que le nombre d'états de  $r$  grand ( $\sim N$ ). L'état final du système calculé dans la référence [13] correspond à l'état d'énergie donnée par  $m=0$  tel que le nombre d'états microscopiques  $|r,m,g\rangle$  est maximum, c'est-à-dire à l'état macroscopique le plus probable parmi ceux d'énergie nulle.

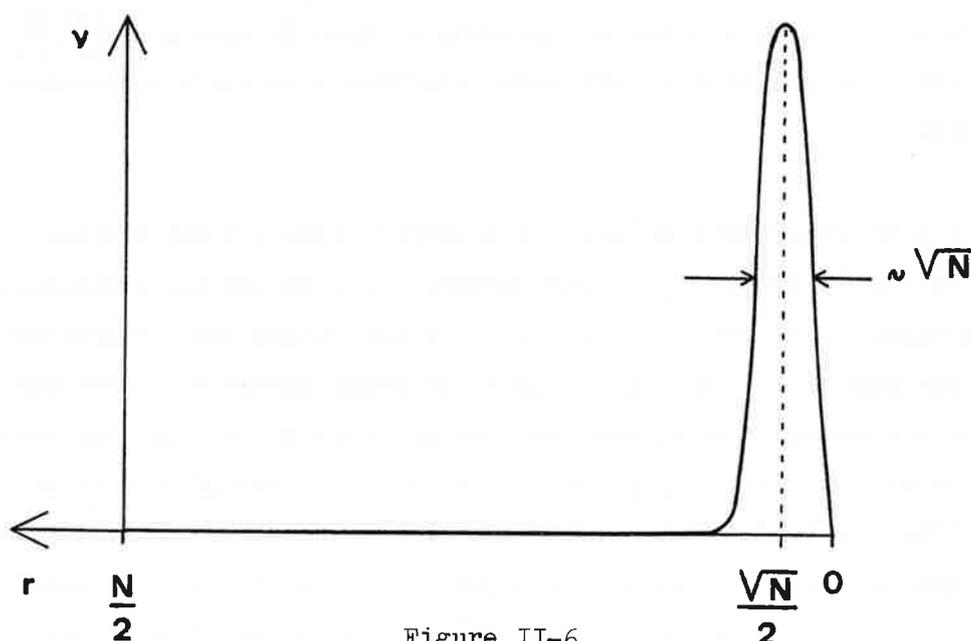


Figure II-6

Remarque : Dans le cas d'un système d'atomes à deux niveaux contenus dans un grand volume, des problèmes analogues à ceux développés dans ce paragraphe doivent être attendus lorsque le nombre d'atomes à l'intérieur d'une portion de volume de l'ordre de  $\lambda^3$  devient important. En effet pour une tranche  $\delta_k$  d'un volume cylindrique allongé on ne peut plus considérer que le champ reste homogène tout au long de l'évolution. Les positions des atomes émetteurs constituent alors autant de singularités pour le champ. En particulier, nous avons déjà mentionné que les approximations de l'enveloppe lentement variable et du champ tournant ne sont alors plus valables et les traitements que nous utilisons ne sont alors plus aptes à décrire l'évolution.

#### IV - Obstacles à la subradiance.

Nous avons, dans les paragraphes qui précèdent, présenté plusieurs exemples de systèmes atomiques dont l'état à la fin de l'évolution est un état subradiant. Dans tous les cas le phénomène de subradiance est un effet coopératif dû à l'indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ rayonné - résultat d'interférences interatomiques de nature totalement destructive dont l'importance est fixée par les propriétés de symétrie de l'état. Les causes de l'évolution du système vers un état subradiant peuvent être diverses. Pour le cas d'un système à trois niveaux en "V" la subradiance est la conséquence de la conservation du type de symétrie de l'état initial. Dans le cas d'un système qui présente des transitions dégénérées, la subradiance est due à l'indiscernabilité des photons émis sur les différentes transitions. Pour le cas d'un système à deux niveaux contenus dans un petit volume, la subradiance découle de la non-conservation du type de symétrie de l'état initial.

Nous allons dans ce paragraphe considérer les obstacles qui peuvent se présenter au phénomène de subradiance et qui surgissent lorsque les propriétés d'indiscernabilité des atomes disparaissent. Nous nous attachons à discuter les obstacles d'une part à l'évolution du système vers un état subradiant, d'autre part au maintien du système dans cet état. Nous abordons uniquement le cas d'atomes contenus dans un grand volume. Nous discutons les approximations et les hypothèses des traitements utilisés qui conduisent à prédire l'évolution d'un système atomique vers un état subradiant. Nous examinons en particulier l'approximation de l'onde plane et l'influence de l'effet Doppler.

## 1. L'APPROXIMATION DE L'ONDE PLANE.

L'approximation de l'onde plane signifie, comme nous l'avons vu, que l'on peut considérer que les atomes sont localement indiscernables vis-à-vis du champ électromagnétique. On en déduit une loi de conservation locale des propriétés de symétrie de la fonction d'onde du système atomique. C'est cette loi qui permet de comprendre l'apparition d'interférences interatomiques qui sont à l'origine du comportement coopératif de l'émission. Toute entorse à l'approximation de l'onde plane perturbe le comportement coopératif des atomes, c'est-à-dire la superradiance et la subradiance.

L'approximation de l'onde plane revient à négliger l'émission par le système dans les modes transverses du volume émetteur. Cette émission est effectivement négligeable en première approximation pendant la phase d'émission d'une impulsion superradiante, si on considère des nombres de Fresnel de l'ordre de un [28]. Pendant cette phase de l'émission, l'émission dans les modes transverses ne modifie donc pas de manière importante les propriétés d'indiscernabilité des atomes vis-à-vis du champ et les traitements effectués dans le cadre de l'approximation de l'onde plane doivent rendre compte de cette partie de l'évolution. En revanche, lors que le système se trouve dans un état subradiant, il ne rayonne plus dans les modes d'émission superradiante, pendant l'émission dans les modes transverses n'est pas inhibée. L'émission spontanée dans les modes transverses va désexciter les atomes et donc détruire l'état subradiant en un temps de l'ordre de  $T_{SP}$  qui est le temps caractéristique de l'émission spontanée.

Si l'on tient compte de l'émission transverse, on voit qu'un état subradiant ne peut exister que dans l'intervalle de temps entre sa création (après émission d'une impulsion superradiante avec un temps de retard  $T_D$  par rapport à l'excitation) et sa destruction (par émission spontanée au bout d'un temps  $T_{SP}$ ). Durant cette période, l'état subradiant peut être mis en évidence soit par les populations des différents niveaux, soit par les cohérences entre les niveaux.

2. L'EFFET DOPPLER.

L'intervalle de temps durant lequel l'état subradiant existe peut être encore réduit par tous les processus qui retardent l'émission de l'impulsion superradiante, ou qui accélèrent la destruction de l'état subradiant. L'effet Doppler en particulier est un obstacle à la subradiance dans la mesure où il ralentit, voire empêche, l'émission superradiante et donc la création d'un état subradiant. Il en est de même pour tout effet déphasant. La condition de seuil pour qu'un état subradiant puisse se bâtir est la condition de superradiance donnée par l'équation (I-I-24) :

$$T_{SR} < T_2^* \quad ; \quad (\text{II-IV-1})$$

dans cette condition le temps de déphasage Doppler est donné par :

$$T_2^* = \frac{\lambda}{4\pi(\text{Log } 2)\bar{v}} \quad (\text{II-IV-2})$$

où  $\bar{v}$  est la vitesse moyenne des atomes. La condition de seuil s'écrit :

$$T_{SR} < \frac{\lambda}{\bar{v}} \quad . \quad (\text{II-IV-3})$$

Elle signifie que les atomes ont un comportement coopératif s'ils restent à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{V}_k$  du volume (comme définie au Chapitre I) pendant un temps caractéristique de l'ordre de  $T_{SR}$ . Si cette condition n'est pas remplie, il n'y a pas d'interférences interatomiques, ni constructives, ni destructives. Si, en revanche, cette condition est remplie, le système peut évoluer vers un état subradiant. Pendant la suite de l'évolution les relations de phase entre les atomes sont détruites en un temps de l'ordre de  $T_2^*$ , car l'intensité du champ rayonné qui est nulle ne peut maintenir en phase les différents dipôles. Cependant les populations des différents niveaux et les cohérences entre les niveaux des atomes ne se sont pas détruites avant un temps de l'ordre de  $T_{SP}$ . Il est ainsi toujours possible, pendant un intervalle de temps compris entre le retard de l'impulsion superradiante et le temps d'émission spontanée non coopérative, de mettre en évidence la création d'un état subradiant.



est excité par une impulsion laser polarisée linéairement à partir d'un niveau de moment angulaire égal à  $j+1$  par exemple (On suppose que dans l'état de départ le système était dans un mélange statistique d'états). La trace du carré de la matrice densité est donnée par :

$$\text{Tr } \rho^2 = \sigma^2 = \frac{1}{2j+1} \quad . \quad (\text{II-V-2})$$

On peut montrer simplement que si :

$$\frac{1}{\sqrt{2j+1}} \ll \sigma < \frac{1}{\sqrt{2j-1}} \quad (\text{II-V-3})$$

l'état final du système ne peut jamais être complètement désexcité, c'est-à-dire que l'émission donnera lieu à de la subradiance. C'est le cas du système initialement décrit par la matrice densité (II-VI-1). Si nous supposons par contre que la matrice densité initiale du niveau  $j$  est donnée par :

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{II-V-4})$$

conditions qui sont obtenues lorsque le niveau  $j$  est excité à partir d'un niveau  $j-1$ . D'après la condition (II-V-3) le système initialement décrit par la matrice densité (II-V-4) ne donne a priori pas lieu à de la subradiance. La simple connaissance de  $\sigma$  permet de prédire l'apparition du phénomène de subradiance mais est en général insuffisante pour prédire quelle est la proportion minimale d'atomes qui restent excités à la fin de l'émission. Comme dans le cas d'un système d'atomes à trois niveaux, la subradiance d'une transition  $j \rightarrow j-1$  est due à la conservation du caractère mélange statistique d'états et peut être analysée en termes de symétrie.

Comme nous l'avons exposé au paragraphe I de ce chapitre, à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{J}_k$ , les atomes sont indiscernables vis-à-vis du champ rayonné. Les propriétés de symétrie de l'état initial à l'intérieur de cette tranche sont donc conservées. Initialement l'état des atomes à l'intérieur d'une tranche  $\mathcal{J}_k$  possède un type de symétrie qui est caractérisé par un diagramme d'Young à  $N$  cases réparties suivant un nombre de

lignes variant de un à  $(2j+1)$  qui est la dégénérescence du niveau supérieur.

Pour qu'un système de  $N$  atomes excités puisse se désexciter totalement, c'est-à-dire n'avoir plus aucun atome dans les sous-niveaux supérieurs, son état initial doit posséder un type de symétrie représenté par un diagramme d'Young à  $N$  cases réparties au maximum suivant  $(2j-1)$  lignes. Sans faire aucun calcul, on peut prédire, en utilisant les résultats du paragraphe I de ce chapitre, que l'évolution du système présente des caractéristiques de subradiance si l'état initial possède un type de symétrie représenté par un diagramme d'Young à  $2j$  ou  $2j+1$  lignes. La proportion minimum d'atomes qui restent dans le niveau  $j$  est donnée par :

$$\tau_{\min} = \frac{l_{2j} + l_{2j+1}}{N} \quad (\text{II-V-5})$$

où  $l_{2j}$  et  $l_{2j+1}$  sont les nombres de cases des  $2j^{\text{ième}}$  et  $2j+1^{\text{ième}}$  lignes.

Le rapport  $\tau_{\min}$  le plus grand possible est obtenu pour :

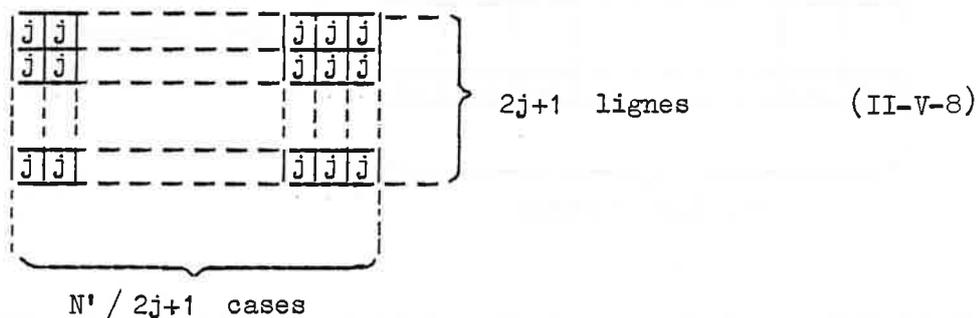
$$l_{2j} = l_{2j+1} = \frac{N}{2j+1} \quad (\text{II-V-6})$$

ce qui donne un taux de subradiance :

$$\tau_{\min} = \frac{2}{2j+1} \quad (\text{II-V-7})$$

On peut déterminer les types de symétrie que possède le système lorsqu'il est décrit par les matrices densité (II-V-1) et (II-V-4). Pour cela nous utilisons la valeur moyenne de l'opérateur de Casimir (II-I-19) dont on a montré qu'elle caractérisait les propriétés de symétrie du système [17]. On montre, en ne considérant dans chaque cas que les  $n$  états peuplés et en calculant la valeur moyenne de l'opérateur de Casimir pour le groupe  $SU(n)$  en fonction de la trace de  $\rho^2$ , que la valeur moyenne de cet opérateur correspond à sa valeur propre la plus basse, c'est-à-dire à un type de symétrie bien déterminé.

On montre ainsi que le système décrit par la matrice densité (II-V-1), dont la trace de  $\rho^2$  est  $\frac{1}{2j+1}$ , possède un type de symétrie caractérisé par un diagramme d'Young à  $(2j+1)$  lignes de  $N'/(2j+1)$  cases. Le taux de subradiance minimum est donné par (II-V-7). On note l'état du système à l'aide d'un diagramme d'Young à chacune des cases duquel on a associé un sous-état  $|j,m\rangle$  du niveau  $j$ ; nous ne précisons pas  $m$  sur le diagramme.



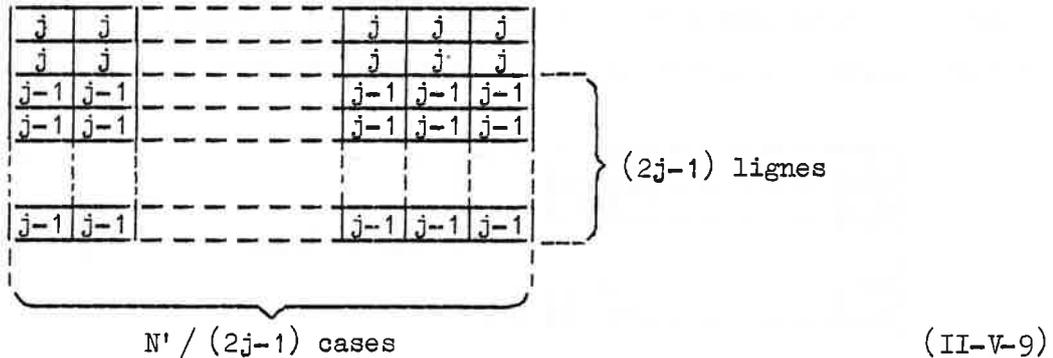
De même le système décrit par la matrice densité (II-V-4), dont la trace de  $\rho^2$  est  $\frac{1}{2j-1}$ , possède un type de symétrie caractérisé par un diagramme d'Young à  $(2j-1)$  lignes de  $N'/2j-1$  cases et le taux de subradiance minimum est alors nul. On peut noter cet état de la même manière que précédemment en associant à chaque cas un des sous-états  $|j,m\rangle$  peuplé.

On retrouve pour l'exemple de la transition  $j \rightarrow j-1$  le lien entre mélange statistique d'états et type de symétrie que nous avons développé au paragraphe I. L'utilisation de la conservation des types de symétrie permet ici de prédire le taux de subradiance minimal que peut présenter le système. Nous allons utiliser ces résultats pour traiter qualitativement le cas d'une cascade  $j \rightarrow j-1 \rightarrow j-2$ .

## 2. EMISSION SUR UNE CASCADE $j \rightarrow j-1 \rightarrow j-2$ . MANIFESTATION D'UN ETAT SUBRADIANT.

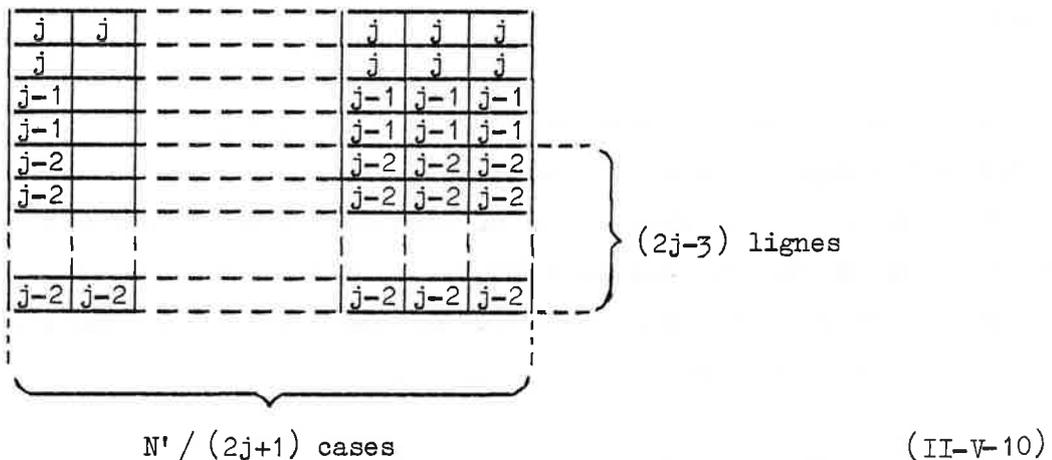
On considère la cascade  $j \rightarrow j-1 \rightarrow j-2$ . On suppose qu'initialement le système est décrit par la matrice densité (II-V-1), c'est-à-dire qu'il présente un taux de subradiance minimum égal à  $2/(2j+1)$  sur la

transition  $j \rightarrow j-1$ . Si l'on suppose qu'un état subradiant est effectivement atteint, l'état du système est alors décrit après l'émission d'une impulsion sur la transition  $j \rightarrow j-1$  par :



Sans la présence du niveau  $j-2$  cet état (II-V-9) serait subradiant. Si le système dans cet état ne peut effectivement pas émettre sur la transition  $j \rightarrow j-1$ , il peut en revanche émettre une impulsion superradiante sur la transition  $j-1 \rightarrow j-2$ .

Le système est alors dans un état décrit par un diagramme de la forme :



L'état du système après émission d'une impulsion sur la transition  $j-1 \rightarrow j-2$  n'est a priori plus subradiant pour la transition  $j \rightarrow j-1$ . La conservation du type de symétrie du système n'interdit en effet plus l'émission sur la transition  $j \rightarrow j-1$ . Dans certaines conditions il doit donc être possible d'observer une deuxième impulsion superradiante émise sur la transition  $j \rightarrow j-1$ .

Pour déterminer les conditions exactes de l'émission de cette deuxième impulsion sur la transition  $j \rightarrow j-1$ , il serait nécessaire de faire un calcul semi-classique complet de l'évolution de la cascade  $j \rightarrow j-1 \rightarrow j-2$ . Le problème de la polarisation de la superradiance sur les différentes transitions doit être traité soigneusement. Comme nous le verrons dans les chapitres qui suivent, la polarisation de l'émission superradiante peut varier aléatoirement d'une impulsion à l'autre, ce qui complique grandement l'étude. Notons finalement que les interférences entre les champs de même polarisation émis sur des transitions entre sous-niveaux Zeeman différents renforcent le taux de subradiance.

L'existence d'une deuxième impulsion émise sur la transition  $j \rightarrow j-1$  est due à l'apparition au cours de l'émission d'un état subradiant pour cette transition. Ainsi, en étudiant expérimentalement l'émission superradiante sur une cascade  $j \rightarrow j-1 \rightarrow j-2$ , l'observation d'une seconde impulsion sur la transition  $j \rightarrow j-1$  dans le cas où le système est initialement dans un état décrit par la matrice densité (II-V-1) et pas dans le cas où il est initialement excité dans un état décrit par la matrice densité (II-VI-2), serait une mise en évidence d'un état subradiant. Une telle expérience pourrait être réalisée dans le cas de la molécule HF pour laquelle a été réalisé la première expérience de subradiance [29].



Bibliographie du Chapitre II

- [1] R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 99 (1954).
- [2] M. J. Stephen, J. Chem. Phys. 40, 669 (1964).
- [3] D. A. Hutchinson and H. F. Hamerka, J. Chem. Phys. 41, 2006 (1964).
- [4] V. Ernst and P. Stehle, Phys. Rev. 176, 1456 (1968).
- [5] M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., in : Laser Physics (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1974), p. 401-403.
- [6] C. Cohen-Tannoudji, Cours du Collège de France, 1974-75.
- [7] J. P. Barrat, J. Physique Rad. 20, 541, 633, 657 (1959).
- [8] F. Ernst, Z. Physik 218, 111 (1969).
- [9] H. Freedhoff and J. Van Kranendonk, Can. J. Phys. 45, 1833 (1967).
- [10] C. R. Stroud, Jr., J. H. Eberly, W. L. Lama and L. Mandel, Phys. Rev. A 5, 1094 (1974).
- [11] A. Crubellier, S. Liberman and P. Pillet, Opt. Commun. 33, 143 (1980).
- [12] M. Gross, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris VI (1980) (non publiée).
- [13] R. Friedberg and S. R. Hartmann, Phys. Rev. A 10, 1728 (1974) ;  
Phys. Letters 40A, 365 (1972) ;  
voir également :  
R. Friedberg and S. R. Hartmann, Phys. Letters 37A, 4, 285 (1971) ;  
Phys. Letters 38a, 227 (1972) ;  
R. Friedberg, S. R. Hartmann and J. T. Manassah, Phys. Letters 40A,  
365 (1972) ;  
R. Friedberg and S. R. Hartmann, Opt. Commun. 10, 298 (1974) ;  
Phys. Rev. A 13, 495 (1976) ;  
R. Friedberg and B. Coffey, Phys. Rev. A 13, 1645 (1976).
- [14] A. Messiah, Mécanique Quantique, tome 2, Dunod (Paris).
- [15] M. Naïmark et A. Stern, Théorie des représentation des groupes, Editions de Moscou.
- [16] M. Chisholm, Group Theoretical Techniques in Quantum Chemistry, Academic Press (London) (1976).

- [17] B. R. Judd, *Operator Techniques in Atomic Spectroscopy*, McGraw-Hill, New York (1973).
- [18] G. Racah, *Group Theory and Spectroscopy*, *Ergebnisse der exakten Naturwiss* 37, Springer Verlag, Berlin (1965).
- [19] B. G. Wybourne, *Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy*, Wiley-Interscience, New York (1970).
- [20] T. Kahan, *Théorie des groupes en physique classique et quantique*, tomes 1 et 2, Dunod, Paris (1960).
- [21] R. Hermann, *Physical Aspects of Lie group theory*, Presses de l'Université de Montréal (1974).
- R. Hermann, *Lie group for physicists*, W.A. Benjamin, Inc. (1966).
- [22] J. P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris
- [23] A. Crubellier and M.-G. Schweighofer, *Phys. Rev. A* 18, 1797 (1978) ; A. Crubellier, *Phys. Rev. A* 15, 2430 (1977).
- [24] Q. H. F. Vrehen, H. M. J. Hikspoors and H. M. Gibbs, *Phys. Rev. Letters* 38, 764 (1977).
- [25] M. Gross, J. M. Raimond, S. Haroche, *Phys. Rev. Letters* 40, 1711, (1978).
- [26] J. Marek, *J. Phys. B* 12, L229 (1979).
- [27] F. P. Mattar, H. M. Gibbs, S. McCall and M. S. Feld, *Phys. Rev. Letters* 46, 1123 (1981).
- [28] J. C. McGillivray and M. S. Feld, *Phys. Rev. A* 14, 1169 (1976) ; voir également :
- I. P. Herman, J. C. McGillivray, N. Skribanowitz and M. S. Feld, *Laser Spectroscopy* (p. 379), Ed. R. G. Brewer and A. Mooradian. N. Skribanowitz, Thèse, Institut de Technologie du Massachusetts (1972) : "Coherent effects in optically pumped HF gas".
- J. C. McGillivray, "Superradiance in an extended, optically thick medium" (degree of Bachelor of Science).

Chapitre III

ANALYSE THEORIQUE DES PROPRIETES DE POLARISATION  
DE LA SUPERRADIANCE



La prise en compte de la dégénérescence des niveaux dans le traitement théorique de la superradiance conduit à des propriétés spécifiques pour l'émission superradiante. Plusieurs transitions entre sous-niveaux doivent en effet être traitées en même temps et des effets dus au couplage de ces transitions sont attendus. En particulier, les propriétés de polarisation des impulsions superradiantes sont très différentes de celles rencontrées en émission spontanée ordinaire [3]. Nous présentons dans ce chapitre un formalisme qui permet d'étudier les propriétés de polarisation des impulsions superradiantes pour une transition  $j \rightarrow j'$ . Nous utilisons ce formalisme pour des exemples simples de transitions  $j = 3/2 \rightarrow j' = 1/2$  et  $j = 1/2 \rightarrow j' = 1/2$ .

Dans les deux premières parties, nous développons les principaux aspects du formalisme employé pour traiter l'émission superradiante d'un système à deux niveaux dégénérés, de moment angulaire  $j$  et  $j'$ , couplés entre eux par un opérateur dipôle électrique (ou magnétique). Comme nous l'avons exposé au Chapitre I, le système considéré va commencer à émettre par émission spontanée et le champ va acquérir un comportement classique. Un tel comportement implique que le champ possède une phase qui évolue lentement devant la fréquence optique, ce qui, en termes de polarisation, signifie qu'à chaque instant la lumière est totalement polarisée et que sa polarisation évolue lentement. L'évolution du système est régie par les équations semi-classiques. On les utilise en simulant leur démarrage avec des conditions initiales soit pour les cohérences optiques, soit pour les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  du champ. Si une valeur approchée peut être établie pour le module de ces grandeurs initiales, le problème du choix de leurs phases reste néanmoins posé. Ce choix joue de plus un rôle essentiel pour déterminer la polarisation de la lumière émise et doit être examiné avec soin. On montre qu'il existe initialement deux polarisations "propres" orthogonales indépendantes pour

lesquelles la phase peut être fixée de manière arbitraire. Ces phases une fois choisies restent quasi-fixes tant que les équations semi-classiques peuvent être considérées comme approximativement linéaires, c'est-à-dire tant que le nombre de photons émis est faible vis-à-vis du nombre d'atomes excités. Ces considérations conduisent à un formalisme qui permet d'aborder l'étude des propriétés de polarisation et que nous appliquons, dans la dernière partie de ce chapitre, à deux exemples de transitions  $j = 3/2 \rightarrow j' = 1/2$  et  $j = 1/2 \rightarrow j' = 1/2$  qui s'avèrent particulièrement intéressants. En effet le premier exemple correspond au cas d'une émission superradiante dont la polarisation est complètement déterminée par les conditions d'excitation. En revanche, le deuxième exemple est typique d'une émission superradiante polarisée de manière aléatoire d'une impulsion à l'autre. Il constitue une manifestation particulièrement flagrante des fluctuations macroscopiques de la superradiance [4,5].

## I - Les équations d'évolution.

### 1. LE HAMILTONIEN DU SYSTEME.

#### a) Description des dipôles atomiques.

Nous considérons un système de  $N$  atomes à deux niveaux répartis de manière homogène à l'intérieur d'un volume cylindrique allongé du type de celui de la Figure I-2 (soit  $\vec{x}_\alpha$  la position des atomes avec  $\alpha = 1, \dots, N$ ). Les niveaux sont séparés par un intervalle d'énergie  $\hbar\omega_0$  et sont couplés entre eux par un dipôle électrique  $\vec{d}$ . Le niveau supérieur de chaque atome possède un moment angulaire  $j$  et le niveau inférieur  $j'$ . Nous allons être amenés à raisonner sur des sous-niveaux des niveaux des atomes et devons choisir un axe de quantification. Si aucune orientation privilégiée n'est imposée au système (par un champ électrique ou magnétique extérieur par exemple), nous pouvons choisir cet axe de manière arbitraire.

Soit  $\vec{w}$  le vecteur unitaire pour cet axe de quantification et soient  $\vec{e}_q$  (avec  $q = 0, +1, -1$ ) les vecteurs unitaires des polarisations  $\pi$ ,  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  associées au choix de cet axe. Nous notons  $|j, m\rangle$  les sous-niveaux du niveau supérieur ( $-j \leq m \leq j$ ) et  $|j', m'\rangle$  les sous-niveaux du niveau inférieur. Le dipôle de l'ensemble des atomes s'écrit :

$$\vec{D}(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{d}_\alpha \delta(\vec{x} - \vec{x}_\alpha) \quad (\text{III-I-1})$$

avec

$$\vec{d}_\alpha = \sum_{m'} \vec{d}_{j', m'; j, m} p_{j', m'; j, m}^\alpha + \text{H.C.} \quad , \quad (\text{III-I-2})$$

$\vec{d}_{j', m'; j, m}$  est l'élément de matrice dipolaire électrique pour la

transition  $|j,m\rangle \rightarrow |j',m'\rangle$  :

$$\vec{d}_{j',m';j,m} = \langle j',m' | \vec{d} | j,m \rangle \quad (\text{III-I-3})$$

$P_{j',m';j,m}^\alpha$  est l'opérateur de transition associé à l'atome d'indice  $\alpha$  :

$$P_{j',m';j,m}^\alpha = |j',m'\rangle_\alpha \langle j,m| \quad (\text{III-I-4})$$

D'après le théorème de Wigner-Eckart, on peut écrire :

$$\vec{d}_{j',m';j,m} = \sum_{q=0,1,-1} (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & 1 & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \langle j' || d^{(1)} || j \rangle \vec{e}_q \quad (\text{III-I-5})$$

$$\vec{d}_{j,m;j',m'} = \sum_{q=0,1,-1} (-1)^{j-m+q} \begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ -m & -q & m' \end{pmatrix} \langle j || d^{(1)} || j' \rangle \vec{e}_q^* \quad (\text{III-I-6})$$

où  $\begin{pmatrix} j' & 1 & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}$  est un symbole 3-j

$\langle j || d^{(1)} || j' \rangle$  est l'élément de matrice réduite.

On a :

$$\langle j || d^{(1)} || j' \rangle = (-1)^{j'-j} \langle j' || d^{(1)} || j \rangle^* \quad (\text{III-I-7})$$

On le supposera, sans perte de généralité, réel.

#### b) Description du champ de rayonnement.

Le champ de rayonnement est décrit par les équations (I-I-1,2). On peut décomposer les parties  $E^+$  et  $E^-$  de fréquence positive et négative sur les différentes directions de polarisation  $\vec{e}_q$ . On a :

$$\vec{E}^+ = \sum_q E_q^+ \vec{e}_q = \sum_q (-1)^q E_{-q}^+ \vec{e}_q^* \quad (\text{III-I-9})$$

$$\vec{E}^- = \sum_q E_q^- \vec{e}_q = \sum_q (-1)^q E_{-q}^- \vec{e}_q^* \quad (\text{III-I-9})$$

On utilisera par la suite les expressions :

$$\vec{E}^+ = \sum_q (\vec{E}^+ \cdot \vec{e}_q^*) \vec{e}_q \quad (\text{III-I-10})$$

$$\vec{E}^- = \sum_q (\vec{E}^- \cdot \vec{e}_q) \vec{e}_q^* \quad (\text{III-I-11})$$

$E_q^+$  (et  $E_q^-$ ) sont les composantes standard de l'opérateur vectoriel  $\vec{E}^+$  (et  $\vec{E}^-$ ) [6]. Si  $E_x^+$ ,  $E_y^+$  et  $E_z^+$  sont les composantes suivant  $O_{xyz}$ , les composantes standard sont :

$$E_{+1}^+ = - (E_x^+ + i E_y^+) / \sqrt{2} \quad (\text{III-I-12})$$

$$E_0^+ = E_z^+ \quad (\text{III-I-13})$$

$$E_{-1}^+ = (E_x^+ - i E_y^+) / \sqrt{2} \quad (\text{III-I-14})$$

Les vecteurs unitaires de polarisation  $q$  sont définis par :

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_z \quad (\text{III-I-15})$$

$$\vec{e}_{+1} = (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) / \sqrt{2} \quad (\text{III-I-16})$$

$$\vec{e}_{-1} = (\vec{e}_x - i \vec{e}_y) / \sqrt{2} \quad (\text{III-I-17})$$

On a :

$$\vec{e}_0^* = \vec{e}_0, \quad \vec{e}_1^* = -\vec{e}_{-1} \quad \text{et} \quad \vec{e}_{-1}^* = -\vec{e}_1 \quad (\text{III-I-18})$$

et par conséquent :

$$E_q^- = (-1)^q (E_{-q}^+)^+ \quad (\text{III-I-19})$$

Cette loi de conjugaison hermitique traduit le fait qu'une polarisation  $\sigma_+$  en absorption correspond à une polarisation  $\sigma_-$  en émission. Nous ne parlons pas ici de polarisation circulaire droite ou gauche, qui est définie intrinsèquement sans référence au système atomique, mais toujours de polarisations  $\sigma_+$  ou  $\sigma_-$  qui correspondent à des transitions entre sous-niveaux telles que :

$$\Delta m = m(\text{initial}) - m(\text{final}) \quad (\text{III-I-20})$$

soit respectivement égal à  $+1$  ou  $-1$ , que l'on soit en régime d'émission ou d'absorption.

A partir des équations (I-I-1,2) on obtient, pour  $E_q^+$  et  $E_q^-$ , les expressions :

$$E_q^+ = - \sum_{\vec{k}\lambda} (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{e}_q^*) \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 v}} a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (\text{III-I-21})$$

$$E_{-q}^- = - \sum_{\vec{k}\lambda} (-1)^q (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{e}_q) \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 v}} a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (\text{III-I-22})$$

Pour chaque vecteur d'onde  $\vec{k}$  il faut faire la somme sur deux directions de polarisation  $\vec{\epsilon}_\lambda$  orthogonales entre elles et avec le vecteur d'ordre  $\vec{k}$ .

Nous avons choisi de donner ici une description quantique du champ bien que, par la suite, nous serons essentiellement amené à considérer celui-ci comme une grandeur classique. Nous reviendrons au cours de ce paragraphe sur le problème que pose le passage d'une description quantique à classique du champ.

c) Hamiltonien d'interaction atomes + champ.

L'évolution des atomes et du champ est régie par le hamiltonien du système donné au Chapitre I qui s'écrit :

$$H = H_A + H_R + H_I = H_0 + H_I \quad (\text{III-I-23})$$

où le hamiltonien des atomes seuls est donné ici par :

$$H_A = \sum_{\alpha=1}^N \sum_m \hbar\omega_0 p_{j,m;j,m}^\alpha \quad (\text{III-I-24})$$

avec

$$p_{j,m;j,m}^\alpha = |j,m\rangle_\alpha \langle j,m| \quad (\text{III-I-25})$$

( $\hbar\omega_0$  constitue l'écart d'énergie entre les deux niveaux dégénérés) ; le hamiltonien du champ de rayonnement seul est donné par l'expression (I-I-10), le hamiltonien d'interaction  $H_I$  est obtenu en remplaçant dans l'expression (I-I-12)  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  par leurs expressions (III-I-1) et (III-I-21,22). En négligeant la partie antirésonnante du couplage (approximation du champ tournant), on obtient :

$$\begin{aligned}
H_I = \sum_{\substack{\vec{k}, \lambda \\ \epsilon_\lambda \perp \vec{k}}} \sum_{\alpha=1} \sum_{m, m'} \left\{ \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}} (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{e}_q) (-1)^{j'-m'} \right. \\
\left. \begin{pmatrix} j' & 1 & m \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \langle j' \| d^{(1)} \| j \rangle p_{j', m'; j, m}^\alpha a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_\alpha} \right. \\
+ \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}} (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{e}_q^*) (-1)^{j-m+q} \begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ -m & -q & m' \end{pmatrix} \\
\left. \langle j \| d^{(1)} \| j' \rangle p_{j, m; j', m'}^\alpha a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_\alpha} \right\} . \quad (\text{III-I-26})
\end{aligned}$$

On définit les opérateurs

$$r_q^{-\alpha} = (2j+1)^{1/2} \sum_{m, m'} (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & 1 & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} p_{j', m'; j, m}^\alpha \quad (\text{III-I-27})$$

$$r_q^{+\alpha} = \text{H.C.} \quad (\text{III-I-28})$$

ainsi que les opérateurs collectifs :

$$R_{q, \vec{k}}^- = \sum_{\alpha=1}^N r_q^{-\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_\alpha} \quad (\text{III-I-29})$$

$$\text{et } R_{q, \vec{k}}^+ = \sum_{\alpha=1}^N r_q^{+\alpha} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_\alpha} \quad (\text{III-I-30})$$

Ces opérateurs vérifient les propriétés de commutation suivantes :

$$[R_{q, \vec{k}}^+, R_{q', \vec{k}'}^+] = [R_{q, \vec{k}}^-, R_{q', \vec{k}'}^-] = 0 \quad (\text{III-I-31})$$

A l'aide de ces opérateurs le hamiltonien d'interaction s'écrit :

$$\begin{aligned}
H_I = \sum_{\substack{\vec{k}, \lambda \\ \epsilon_\lambda \perp \vec{k}}} \sum_{q=0, 1, -1} \frac{1}{(2j+1)^{1/2}} \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}} \langle j' \| d^{(1)} \| j \rangle \\
\left[ (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{e}_q) R_{q, \vec{k}}^- a_{\vec{k}, \lambda}^+ + (\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{e}_q^*) R_{q, \vec{k}}^+ a_{\vec{k}, \lambda} \right] . \quad (\text{III-I-32})
\end{aligned}$$

d) Choix d'un axe de quantification.

Dans la mesure où le champ électromagnétique émis a une structure d'onde plane, il est commode, si aucune orientation privilégiée n'est imposée au système atomique, de choisir l'axe de quantification suivant l'axe Oz du cylindre (voir Figure I-2) qui est aussi l'axe de propagation du champ rayonné. Le choix d'un tel axe de quantification permet de ne considérer que les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  du champ. Il est clair que la polarisation  $\pi$  n'intervient pas, car elle correspondrait à une émission dans les modes transverses du milieu, qui n'ont pas à être pris en compte dans l'émission superradiante. Seules les transitions entre sous-niveaux Zeeman  $\Delta m = \pm 1$  sont alors à considérer. Le comportement classique acquis par le champ, après émission des premiers photons, permet d'affirmer que la lumière superradiante est dans un état de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  ou dans un état de superposition cohérente de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  (c'est-à-dire dans un état de polarisation linéaire ou elliptique).

Dans l'hypothèse de l'onde plane le hamiltonien d'interaction (III-I-32) s'écrit :

$$H_I = \sum_{k_z} \sum_{q=\pm 1} \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{\hbar c |k_z|}{2\varepsilon_0 v}} \langle j' \| d^{(1)} \| j \rangle \sum_{\alpha=1}^N [r_q^{-\alpha} a_{k_z, q}^+ e^{-ik_z z \alpha} + r_q^{+\alpha} a_{k_z, q} e^{ik_z z \alpha}] \quad (\text{III-I-33})$$

où  $\sum_{k_z}$  signifie  $\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \times \frac{1}{a}$  .

Nous ne prenons en compte dans cette expression que les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , c'est-à-dire que nous limitons la somme sur  $q$  à  $\pm 1$ .

2. LES EQUATIONS D'EVOLUTION SEMI-CLASSIQUES DE LA SUPERRADIANCE POUR UN SYSTEME DE N ATOMES A DEUX NIVEAUX DEGENERES.

Dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, les équations semi-classiques donnant l'évolution d'un système superradiant  $j \rightarrow j'$  s'écrivent lorsqu'on ne considère que le champ se propageant vers l'avant (par souci de simplification nous ne considérons pas le champ rayonné vers l'arrière) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_q(z, \tau) = - \frac{ik_0}{2\epsilon_0} 2 \sum_{m, m'} (\vec{d}_{j', m'}; j, m \vec{e}_q^*) \mathcal{P}_{m, m'}(z, \tau) \quad (\text{III-I-34})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P}_{m, m'}(z, \tau) = & \frac{i}{2\hbar} \sum_{q=\pm 1} \left[ \sum_n (\vec{d}_{j', m'}; j, n \vec{e}_q^*) \right. \\ & \mathcal{E}_q(z, \tau) \mathcal{Q}_{m, n}(z, \tau) - \sum_{n'} (\vec{d}_{j', n'}; j, m \vec{e}_q^*) \\ & \left. \mathcal{E}_q(z, \tau) \mathcal{Q}_{n', m'}(z, \tau) \right] \end{aligned} \quad (\text{III-I-35})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{Q}_{m, n}(z, \tau) = & - \frac{i}{2\hbar} \sum_{q=\pm 1} \left\{ \sum_{m'} (\vec{d}_{j', m'}; j, m \vec{e}_q^*) \right. \\ & \left( \mathcal{E}_q(z, \tau) \mathcal{P}_{n, m'}^*(z, \tau) \right) - \sum_{m'} (\vec{d}_{j', m'}; j, n \vec{e}_q^*) \\ & \left. \left( \mathcal{E}_q^*(z, \tau) \mathcal{P}_{n, m'}^*(z, \tau) \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-I-36})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{Q}_{m', n'}(z, \tau) = & \frac{i}{2\hbar} \sum_{q=\pm 1} \left\{ \sum_m (\vec{d}_{j', m'}; j, m \vec{e}_q^*) \right. \\ & \left( \mathcal{E}_q(z, \tau) \mathcal{P}_{m, m'}^*(z, \tau) \right) - \sum_m (\vec{d}_{j', n'}; j, m \vec{e}_q^*) \\ & \left. \left( \mathcal{E}_q^*(z, \tau) \mathcal{P}_{m, n'}(z, \tau) \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-I-37})$$

$\mathcal{E}_q$  représente le champ de polarisation  $q$ ,  $\mathcal{P}_{m,m'}$  la cohérence optique associée à la transition  $|j,m\rangle \rightarrow |j',m'\rangle$ ,  $Q_{m,m}$  (resp.  $Q_{m',m'}$ ) la population du niveau  $|j,m\rangle$  (resp.  $|j',m'\rangle$ ), et  $Q_{m,n}$  (resp.  $Q_{m',n'}$ ) la cohérence entre les niveaux  $|j,m\rangle$  et  $|j,n\rangle$  (resp.  $|j',m'\rangle$  et  $|j',n'\rangle$ ).

Le choix de l'axe de quantification est conforme à celui exposé au paragraphe I-1-d du présent chapitre et l'on ne doit considérer que les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  du champ. Les équations (III-I-34 à 37) sont formellement identiques aux équations de Heisenberg que l'on peut obtenir en considérant les opérateurs enveloppes lentement variables du système atomique et du champ.

## II - Polarisation de la lumière émise.

Comme nous l'avons exposé au Chapitre I, les équations de Heisenberg permettent de montrer qu'à chaque instant de l'évolution la valeur moyenne de l'opérateur décrivant le champ est nulle

$$\langle \vec{\mathcal{E}}(Q) \rangle = 0 \quad (\text{III-II-1})$$

(l'exposant  $Q$  indique que nous nous plaçons dans le cadre d'une description complètement quantique du système, c'est-à-dire utilisant des opérateurs dont l'évolution est donnée par l'équation de Heisenberg). Cette valeur moyenne du champ, une fois le caractère classique de celui-ci acquis, peut être interprétée comme une moyenne effectuée sur un grand nombre d'impulsions superradiantes émises dans les mêmes conditions. Le fait que la valeur moyenne soit nulle signifie alors que la phase du champ d'une impulsion superradiante a une valeur donnée mais que cette valeur est aléatoire d'une impulsion à l'autre. Pour déterminer la polarisation de l'émission il est nécessaire de connaître la relation de phase entre les composantes du champ de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . Nous allons montrer que l'étude de l'évolution du système se ramène, du moins dans la période qui précède l'émission de l'impulsion, à calculer l'émission de deux composantes de polarisation orthogonales qui évoluent indépendamment ; la relation de phase entre ces deux composantes est aléatoire d'une impulsion à l'autre.

### 1. LES POLARISATIONS PROPRES DU SYSTEME.

Pour faire apparaître ces deux polarisations évoluant indépendamment que l'on appelle polarisations propres du système, nous allons transformer les équations semi-classiques (III-I-34 à 37) en leur appliquant l'appro-

ximation linéaire. Elle consiste à supposer que les populations et les cohérences des niveaux  $|j,m\rangle$  restent inchangées et très grandes devant celles des niveaux  $|j',m'\rangle$ . On peut alors écrire :

$$Q_{m,n}(z,\tau) \simeq Q_{m,n}(z,0) = Q_{m,n}^0 \quad (\text{III-II-2})$$

$$\text{et } Q_{m',n'}(z,\tau) \simeq 0 \quad (\text{III-II-3})$$

Dans ces conditions les équations d'évolution (III-I-34 à 37) deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_q(z,t) = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \sum_{m,m'} (\vec{d}_{j',m';j,m} \cdot \vec{e}_q^*) \mathcal{P}_{m,m'}(z,t) \quad (\text{III-II-4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{m,m'}(z,t) = \frac{i}{\hbar} \sum_{q=\pm 1} \left[ \sum_n (\vec{d}_{j',m';j,n} \cdot \vec{e}_q^*) Q_{m,n}^0 \mathcal{E}_q(z,t) \right] \quad (\text{III-II-5})$$

Elles se ramènent à une équation différentielle linéaire du second ordre pour les deux composantes  $\mathcal{E}_q$  du champ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \mathcal{E}_q(z,t) = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \sum_{m,m'} (\vec{d}_{j',m';j,m} \cdot \vec{e}_q^*) \frac{i}{\hbar} \sum_{q'=\pm 1} \left[ \sum_n (\vec{d}_{j',m';j,n} \cdot \vec{e}_{q'}^*) Q_{m,n}^0 \mathcal{E}_{q'}(z,t) \right], \quad (\text{III-II-6})$$

qui s'écrit encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \mathcal{E}_q(z,t) = \frac{k_0}{2\epsilon_0 \hbar} \sum_{q'=\pm 1} \left[ \sum_{m,m',n} (\vec{d}_{j',m';j,m} \cdot \vec{e}_q^*) (\vec{d}_{j',m';j,n} \cdot \vec{e}_{q'}^*) Q_{m,n}^0 \right] \mathcal{E}_{q'}(z,t), \quad (\text{III-II-7})$$

ou encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{+1}(z,t) \\ \mathcal{E}_{-1}(z,t) \end{pmatrix} = \frac{k_0}{2\epsilon_0 \hbar} \begin{pmatrix} C_{+1} & G \\ G^* & C_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{+1}(z,t) \\ \mathcal{E}_{-1}(z,t) \end{pmatrix}, \quad (\text{III-II-8})$$

avec :

$$C_{+1} = \frac{1}{V} \langle [R_{+1}^+, \vec{k}_0, R_{+1}^-, \vec{k}_0] \rangle_{t=0} \quad (\text{III-II-9})$$

$$C_{-1} = \frac{1}{V} \langle [R_{-1}^+, \vec{k}_0, R_{-1}^-, \vec{k}_0] \rangle_{t=0} \quad (\text{III-II-10})$$

$$G = \frac{1}{V} \langle [R_{+1}^+, \vec{k}_0, R_{-1}^-, \vec{k}_0] \rangle_{t=0} \quad (\text{III-II-11})$$

Les expressions de  $C_{\pm 1}$  et  $G$  sont données par :

$$\begin{aligned} C_{\pm 1} &= \sum_{m, m', n} (\vec{d}_{j', m'; j, m} \cdot \vec{e}_{\pm 1}^*) (\vec{d}_{j', m'; j, n} \cdot \vec{e}_{\pm 1}^*) Q_{m, n}^0 \\ &= \sum_{m, m'} (\vec{d}_{j', m'; j, m} \cdot \vec{e}_{\pm 1}^*)^2 Q_{m, m}^0 \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m, m'} (2j+1) \begin{pmatrix} j' & 1 & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}^2 \langle p_{j, m; j, m} \rangle_{t=0} \delta(z-z_\alpha) \end{aligned} \quad (\text{III-II-12})$$

et :

$$\begin{aligned} G &= \sum_{m, m', n} (\vec{d}_{j', m'; j, m} \cdot \vec{e}_{+1}^*) (\vec{d}_{j', m'; j, n} \cdot \vec{e}_{-1}^*) Q_{m, n}^0 \\ &= \sum_{m, m'} (\vec{d}_{j', m'; j, m} \cdot \vec{e}_{+1}^*) (\vec{d}_{j', m'; j, m+2} \cdot \vec{e}_{-1}^*) Q_{m, m+2}^0 \end{aligned} \quad (\text{III-II-13})$$

On peut modifier ces équations d'évolution en effectuant un changement de la base des vecteurs de polarisation. En effet le choix de la base  $(\vec{e}_{+1}, \vec{e}_{-1})$  pour décrire la polarisation du champ rayonné est arbitraire. Sans modifier le choix de l'axe de quantification, nous pouvons choisir une autre base  $(\vec{u}, \vec{v})$ , telle que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient deux polarisations orthogonales entre elles et avec l'axe de quantification  $Oz$ . Le changement de vecteurs de base de polarisation est déterminé par la matrice unitaire  $\mathcal{U}$  :

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \vec{e}_{+1} \\ \vec{e}_{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_{+1} \\ \vec{e}_{-1} \end{pmatrix} = \mathcal{U}^+ \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad (\text{III-II-14})$$

Pour une base  $(\vec{u}, \vec{v})$  quelconque, le système d'équations (III-II-8) s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_u(z,t) \\ \mathcal{G}_v(z,t) \end{pmatrix} = \frac{k_0}{2\epsilon_0 \pi L} \begin{pmatrix} \langle [R_{u,\vec{k}_0}^+, R_{u,\vec{k}_0}^-] \rangle_{t=0} & \langle [R_{u,\vec{k}_0}^+, R_{v,\vec{k}_0}^-] \rangle_{t=0} \\ \langle [R_{v,\vec{k}_0}^+, R_{u,\vec{k}_0}^-] \rangle_{t=0} & \langle [R_{v,\vec{k}_0}^+, R_{v,\vec{k}_0}^-] \rangle_{t=0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_u(z,t) \\ \mathcal{G}_v(z,t) \end{pmatrix} \quad (\text{III-II-15})$$

avec

$$R_u^- = \sum_{q=\pm 1} (\vec{e}_q \cdot \vec{u}^*) R_q^- \quad (\text{III-II-16})$$

et

$$R_v^- = \sum_{q=\pm 1} (\vec{e}_q \cdot \vec{v}^*) R_q^- \quad (\text{III-II-17})$$

On vérifie que, quelle que soit la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  choisie, les relations de commutation (III-I-31)

$$[R_u^-, R_v^-] = [R_u^+, R_v^+] = 0 \quad (\text{III-II-18})$$

demeurent valables.

Pour résoudre les équations durant la phase linéaire de l'évolution, il est pratique de choisir une base  $(\vec{u}, \vec{v})$  telle que la matrice régissant l'évolution soit diagonale, c'est-à-dire telle que :

$$\langle [R_{u,\vec{k}_0}^+, R_{v,\vec{k}_0}^-] \rangle_{t=0} = \langle [R_{v,\vec{k}_0}^+, R_{u,\vec{k}_0}^-] \rangle_{t=0} = 0 \quad (\text{III-II-19})$$

Une telle base, qui vérifie la relation (III-II-19) est dite base des polarisations propres du système. Pour déterminer cette base  $(\vec{u}, \vec{v})$  et les opérateurs de transition associés  $(R_u^-$  et  $R_v^-)$  des polarisations propres nous diagonalisons la matrice

$$\begin{pmatrix} C_{+1} & G \\ G^* & C_{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{III-II-20})$$

Les valeurs propres sont données par :

$$D_u = \langle [R_u^+, R_u^-] \rangle_{t=0} = \frac{c_{+1} + c_{-1} + \epsilon\sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{III-II-21})$$

$$D_v = \langle [R_v^+, R_v^-] \rangle_{t=0} = \frac{c_{+1} + c_{-1} - \epsilon\sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{III-II-22})$$

avec :

$$\Delta = \sqrt{(c_{+1} - c_{-1})^2 + 4|G|^2} \quad (\text{III-II-23})$$

et 
$$\epsilon = \frac{c_{+1} - c_{-1}}{|c_{+1} - c_{-1}|} \quad (\text{III-II-24})$$

Si le discriminant  $\Delta$  est différent de zéro, nous pouvons déterminer les vecteurs propres et la matrice de changement de base  $\mathcal{U}$ . La forme la plus générale de la matrice  $\mathcal{U}$  s'écrit :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} +\cos \theta e^{-i\alpha} & -\sin \theta e^{i\alpha} \\ \sin \theta e^{-i\alpha} & \cos \theta e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{III-II-25})$$

avec  $\theta$  variant entre 0 et  $\pi/4$  et  $\alpha$  de 0 à  $\pi$  (les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont définis chacun à une phase près).

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  correspondent à des polarisations elliptiques (voir Figure III-1) de sens inverse + et - , dont les grands axes font respectivement un angle  $\alpha$  et  $\alpha + \pi/2$  et dont l'ellipticité est

$$\frac{\text{grand axe}}{\text{petit axe}} = \cotg \varphi = \cotg (\theta + \pi/4)$$

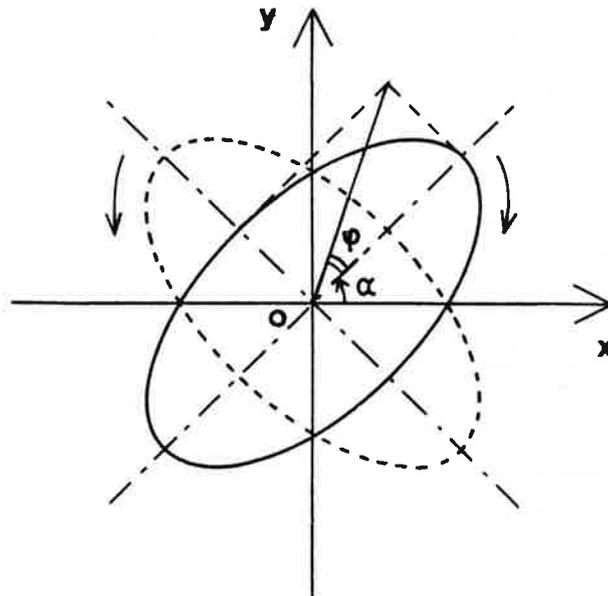


Figure III-1

On a ici :

$$\cos \theta = \left[ \frac{\sqrt{\Delta} + |c_{+1} - c_{-1}|}{\sqrt{\Delta}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-II-26})$$

$$\sin \theta = \left[ \frac{\sqrt{\Delta} - |c_{+1} - c_{-1}|}{\sqrt{\Delta}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-II-27})$$

$$\text{et } \alpha = \frac{1}{2} \text{Arg } G + \frac{1}{4} (1+\epsilon) \pi \pmod{\pi} . \quad (\text{III-II-28})$$

Si le discriminant  $\Delta$  est égal à zéro, c'est-à-dire si la matrice (III-II-20) est une matrice scalaire (proportionnelle à la matrice unité), toute base orthonormée de polarisation constitue une base de polarisations propres qui vérifie les relations (III-II-19). Quelle que soit la base choisie, la matrice régissant l'évolution (III-II-20) reste identique à elle-même. Dans ce cas nous pouvons choisir une base de manière arbitraire.

Après passage dans la base des polarisations propres du système, les équations d'évolution du champ rayonné s'écrivent :

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \tau} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_u(z, \tau) \\ \mathcal{E}_v(z, \tau) \end{pmatrix} = \frac{k_0}{2\epsilon_0 \hbar} \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_u(z, \tau) \\ \mathcal{E}_v(z, \tau) \end{pmatrix} \quad (\text{III-II-29})$$

Ces équations restent valables tant que l'approximation linéaire est correcte, donc au début de l'émission. Le système se ramène à deux équations différentielles indépendantes du second ordre pour les fonctions  $\mathcal{E}_u(z, \tau)$  et  $\mathcal{E}_v(z, \tau)$  :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_u}{\partial z \partial \tau} = \frac{1}{T_{SR_u} L} \mathcal{E}_u \quad (\text{III-II-30})$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_v}{\partial z \partial \tau} = \frac{1}{T_{SR_v} L} \mathcal{E}_v \quad (\text{III-II-31})$$

$$\text{avec } T_{SR_u} = \frac{1}{\Gamma \mu D_u} \quad (\text{III-II-32})$$

$$T_{SR_v} = \frac{1}{\Gamma \mu D_v} \quad (\text{III-II-33})$$

$T_{SR_u}$  et  $T_{SR_v}$  représentent respectivement les temps caractéristiques d'évolution du champ suivant les directions de polarisation  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$\Gamma$  est la probabilité de la transition  $j \rightarrow j'$  :

$$\Gamma = \frac{1}{2j+1} \frac{k_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar} |\langle j || d^{(1)} || j' \rangle|^2 \quad (\text{III-II-34})$$

$\mu$  est le facteur de forme de l'échantillon défini en (I-I-22).

## 2. TAUX DE POLARISATION AU DEBUT DE L'EMISSION.

On obtiendrait évidemment des équations identiques pour les opérateurs quantiques enveloppes lentement variables de champ suivant les polarisations  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Les équations (III-II-30,31) peuvent donc être considérées soit comme équations semi-classiques soit comme équations quantiques. Dans les deux cas les équations ne sont évidemment valables que tant que l'approximation linéaire est justifiée. Dans la mesure où les composantes du champ de polarisation  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  évoluent indépendamment, il ne se bâtit pas de relation de phase entre eux durant la période qui correspond à la phase linéaire. On a à chaque instant :

$$\langle \mathcal{E}_v^{(Q)+} \mathcal{E}_u^{(Q)-} \rangle = 0 \quad (\text{III-II-35})$$

où l'exposant  $Q$  indique que l'on considère des opérateurs quantiques.

L'intensité moyenne de la lumière émise suivant une polarisation  $\vec{\epsilon}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle J_{\vec{\epsilon}}^{(Q)}(\tau) \rangle = & \langle \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{\vec{\epsilon}}^{+(Q)}(L, \tau) \mathcal{E}^{-(Q)}(L, \tau) \\ & + \mathcal{E}_{\vec{\epsilon}}^{-(Q)}(L, \tau) \mathcal{E}_{\vec{\epsilon}}^{+(Q)}(L, \tau)) \rangle \end{aligned} \quad (\text{III-II-36})$$

avec :

$$\mathcal{E}_{\vec{\epsilon}}^{+(Q)} = \vec{\mathcal{E}}^{(Q)} \cdot \vec{\epsilon}^* \quad (\text{III-II-37})$$

On montre que l'on a, d'après (III-II-37) :

$$\langle \mathcal{J}_{\varepsilon}^{(Q)}(\tau) \rangle = \langle \mathcal{J}_u^{(Q)}(\tau) \rangle |\vec{u} \cdot \vec{\varepsilon}^*|^2 + \langle \mathcal{J}_v^{(Q)}(\tau) \rangle |\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}^*|^2 \quad (\text{III-II-38})$$

La relation (III-II-35) nous permet d'écrire le taux de polarisation  $\xi$  sous la forme :

$$\xi = \frac{\langle \mathcal{J}_u^{(Q)} \rangle - \langle \mathcal{J}_v^{(Q)} \rangle}{\langle \mathcal{J}_u^{(Q)} \rangle + \langle \mathcal{J}_v^{(Q)} \rangle} \quad (\text{III-II-39})$$

### 3. POLARISATION DES IMPULSIONS SUPERRADIANTES.

Les équations de Heisenberg décrivent correctement l'évolution depuis le début et leur évolution est identique à celle des équations semi-classiques dès que le champ a acquis un comportement classique. Les composantes de polarisation  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont alors décrites par des nombres complexes qui suivant les lois d'évolution des équations semi-classiques. Dans le cadre de l'approximation linéaire, en prenant pour conditions initiales :

$$\mathcal{E}_u(z, 0) = \mathcal{E}_u^0 \quad (\text{III-II-40})$$

$$\mathcal{E}_v(z, 0) = \mathcal{E}_v^0 \quad (\text{III-II-41})$$

l'évolution des composantes  $\mathcal{E}_u$  et  $\mathcal{E}_v$  du champ varie comme (cf. Appendice A) :

$$\mathcal{E}_u(z, \tau) = \mathcal{E}_u^0 I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{z\tau}{L_T^2 \text{SR}_u}} \right) \quad (\text{III-II-42})$$

$$\mathcal{E}_v(z, \tau) = \mathcal{E}_v^0 I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{z\tau}{L_T^2 \text{SR}_v}} \right) \quad (\text{III-II-43})$$

(  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro ).

L'intensité rayonnée pour chaque polarisation  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est donnée par :

$$D_u(\tau) = |\mathcal{E}_u^0|^2 I_0^2 \left( 2 \sqrt{\frac{\tau}{T \text{SR}_u}} \right) \quad (\text{III-II-44})$$

$$D_v(\tau) = |\mathcal{E}_v^0|^2 I_0^2 \left( 2 \sqrt{\frac{\tau}{T \text{SR}_v}} \right) \quad (\text{III-II-45})$$

avec, comme conditions initiales :

$$\xi_u^0 = \xi^0 e^{i\varphi_u} \quad (\text{III-II-46})$$

$$\xi_v^0 = \xi^0 e^{i\varphi_v} \quad (\text{III-II-47})$$

$\varphi_u$  et  $\varphi_v$  sont les phases des composantes du champ de polarisation  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et sont choisies de manière arbitraire.  $\xi^0$  est le module du champ du vide, on a :

$$|\xi^0|^2 = \langle \mathcal{J}_u^{(Q)}(0) \rangle = \langle \mathcal{J}_v^{(Q)}(0) \rangle = \frac{\pi c k_0}{\epsilon_0 V} \quad (\text{III-II-48})$$

Il est justifié de choisir le même module  $\xi^0$  pour les conditions initiales des composantes du champ de polarisation  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la mesure où celui-ci varie peu durant la période où le champ n'a pas encore acquis un comportement classique. On peut de plus montrer que durant cette phase  $\langle \mathcal{D}_u^{(Q)}(\tau) \rangle$  et  $\langle \mathcal{J}_v^{(Q)}(\tau) \rangle$  varient respectivement comme  $I_0(2\sqrt{\frac{2\tau}{T_{SR}^u}})$  et  $I_0(2\sqrt{\frac{2\tau}{T_{SR}^v}})$ , qui, pour la période considérée, suivent pratiquement l'évolution de  $I_0^2(2\sqrt{\frac{\tau}{T_{SR}^u}})$  et  $I_0^2(2\sqrt{\frac{\tau}{T_{SR}^v}})$ . On peut dans ces conditions légitimement considérer que les équations (III-II-44,45) prennent également en compte la période correspondant à la phase quantique du démarrage de l'émission.

A l'instant initial le taux de polarisation est nul. Ce résultat doit être interprété avec précaution. Il ne signifie pas qu'il n'existe jamais de polarisations privilégiées pour l'émission spontanée ordinaire non coopérative dans les modes d'émission superradiante. Il signifie simplement que le champ du vide de photons n'est pas polarisé.

Il est intéressant d'étudier l'évolution du rapport  $\xi$ . On peut considérer que ce rapport correspond au taux de polarisation de l'impulsion superradiante tant que le champ n'a pas acquis de comportement classique. Il doit par contre être interprété comme un taux moyen de polarisation, pris pour un grand nombre d'impulsions, lorsque le champ possède

un caractère classique. Ceci reste vrai du moins tant que les composantes du champ de polarisation  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  évoluent indépendamment. Lorsque  $\xi$  est égal à  $+1$  (resp.  $-1$ ) la lumière est totalement polarisée suivant la direction  $\vec{u}$  (resp.  $\vec{v}$ ) quelle que soit l'impulsion considérée. Toute valeur intermédiaire, entre  $-1$  et  $+1$ , ne signifie pas que les impulsions ne sont pas ou ne sont que partiellement polarisées, mais que la polarisation de la superradiance possède, d'une impulsion à l'autre, un caractère aléatoire qui croît lorsque  $|\xi|$  diminue. Ces polarisations, qui sont différentes pour des impulsions émises dans des conditions d'excitation identiques, constituent une manifestation des propriétés de fluctuations macroscopiques de la superradiance [3,4,7].

On calcule l'évolution du taux moyen de polarisation  $\xi$  à l'aide des équations semi-classiques (III-I-34 à 37). Il est possible, en utilisant les solutions données par l'approximation linéaire, d'en donner une expression approchée valable avant l'émission de l'impulsion :

$$\xi = \frac{\left( \frac{I_0 \left( 2\sqrt{\frac{t}{T_{SR_u}}} \right)^2}{I_0 \left( 2\sqrt{\frac{t}{T_{SR_v}}} \right)^2} - 1 \right)}{\left( \frac{I_0 \left( 2\sqrt{\frac{t}{T_{SR_u}}} \right)^2}{I_0 \left( 2\sqrt{\frac{t}{T_{SR_v}}} \right)^2} + 1 \right)} \quad (\text{III-II-49})$$

La fonction de Bessel modifiée  $I_0$  est une fonction qui croît rapidement, de sorte que si :

$$T_{SR_u} < T_{SR_v} \quad (\text{III-II-50})$$

$\xi$  est positif et la lumière émise est alors en moyenne plutôt polarisée suivant la direction  $\vec{u}$ . Au contraire, si

$$T_{SR_u} > T_{SR_v} \quad (\text{III-II-51})$$

$\xi$  est alors négatif et la lumière est en moyenne plutôt polarisée suivant la direction  $\vec{v}$ .

La Figure III-2 montre l'évolution du taux  $\xi$ , pour différents rapports de  $T_{SR_u}$  sur  $T_{SR_v}$ , calculée dans l'approximation linéaire et ce sur une période de  $50 T_{SR_u}$  pendant laquelle les équations linéaires décrivent correctement l'évolution du système (cette période est en général de l'ordre du délai ; on utilise pour le montrer la formule approchée (I-II-17)[8]). A la fin de cette période, le taux de polarisation est par exemple supérieur à 80% si le temps caractéristique d'évolution  $T_{SR_u}$  associé à la direction de polarisation  $\vec{u}$  est supérieur au temps caractéristique  $T_{SR_v}$  associé à la direction de polarisation  $\vec{v}$  d'un facteur de l'ordre de 1,2 (l'intensité suivant la polarisation  $\vec{u}$  est alors 9 fois plus grande que celle suivant  $\vec{v}$ ). Il est difficile de conclure davantage. La suite de l'évolution, qui est décrite par les équations semi-classiques non linéaires, dépend fortement du système étudié. Cependant, dans la plupart des cas que nous avons considérés, le calcul numérique a montré que la direction de polarisation qui l'emportait durant la phase linéaire, l'emportait également pendant la phase non-linéaire. Ce résultat est à rapprocher du cas très simple de systèmes d'atomes à trois niveaux en "A" où la transition la plus favorable l'emporte sur l'autre en émission spontanée coopérative.

Remarque : Si on se place dans l'approximation du champ moyen (c'est-à-dire si on néglige les effets de propagation), un calcul simple, effectué dans le cadre de l'approximation linéaire, permet de calculer le taux de polarisation :

$$\xi = \frac{\frac{D_u}{D_v} e^{\mu \Gamma (D_u - D_v) t} - 1}{\frac{D_u}{D_v} e^{\mu \Gamma (D_u - D_v) t} + 1} \quad (\text{III-II-52})$$

Les résultats obtenus en tenant compte des effets de propagation ne sont donc pas qualitativement modifiés lorsque l'on néglige ceux-ci. On retrouve bien en effet que si :

$$T_{SR_u} < T_{SR_v}$$

la lumière est partiellement polarisée suivant la direction  $\vec{u}$ .

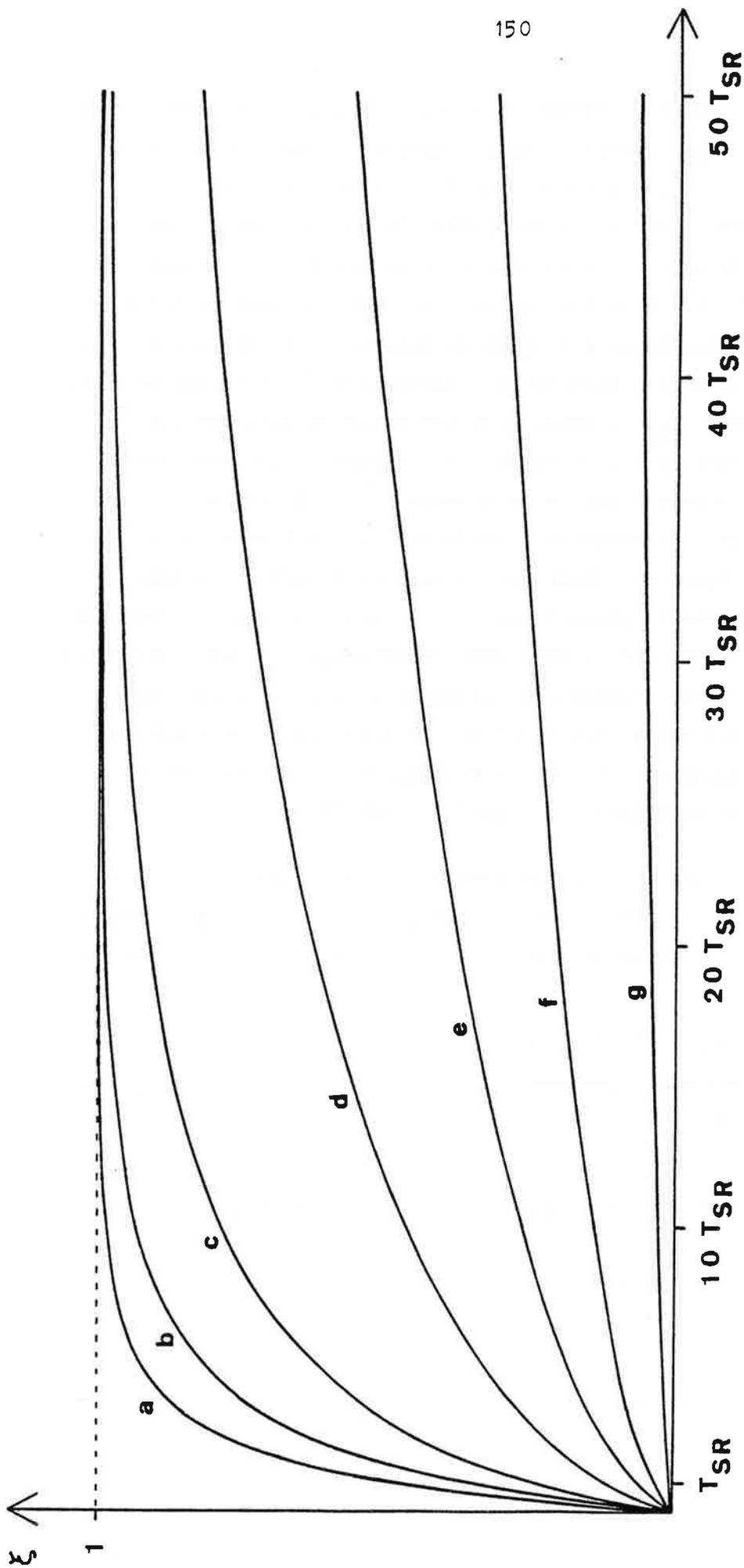


Figure III-2

(a) à (g) : évolution du taux  $\xi$  pour des rapports de  $T_{SR_u}$  sur  $T_{SR_v}$  égaux respectivement à 3 ; 2 ; 1,5 ; 1,2 ; 1,1 ; 1,05 ; 1,01 ( $T_{SR} = T_{SR_u}$ ) .

#### 4. ANALYSE DE LA POLARISATION D'UNE SERIE D'IMPULSIONS SUPERRADIANTES.

L'étude précédente a montré que la polarisation de la superradiance pouvait présenter un caractère aléatoire. Pour analyser la polarisation, une étude statistique d'une série d'impulsions superradiantes émises dans les mêmes conditions doit être entreprise. De manière générale, pour analyser la polarisation d'une impulsion lumineuse, il est en principe nécessaire de séparer le faisceau lumineux en un grand nombre de parties que l'on analyse chacune suivant une polarisation différente ( $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  et plusieurs polarisations linéaires réparties dans toutes les directions): à chaque instant on détermine ainsi la polarisation de l'impulsion et son taux de polarisation. Il n'est cependant pas nécessaire pour étudier la distribution statistique de la polarisation d'analyser chaque impulsion superradiante de cette manière. Cette distribution peut sans ambiguïté être caractérisée en analysant simplement chaque impulsion d'une part suivant deux directions de polarisation linéaires orthogonales et, d'autre part, suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ .

Une première étude statistique est effectuée en analysant chaque impulsion suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . On trace la fonction de distribution  $\mathcal{P}(\varphi)$  où  $\varphi$  est défini par :

$$\varphi = \text{Arctg} \sqrt{\frac{J_{\sigma_+}}{J_{\sigma_-}}} \quad (\text{III-II-53})$$

où  $J_{\sigma_+}$  et  $J_{\sigma_-}$  sont les intensités détectées suivant les directions de polarisation circulaire  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ .  $\varphi$  caractérise alors l'ellipticité de la polarisation de l'impulsion :

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{petit axe}}{\text{grand axe}} \quad (\text{III-II-54})$$

Une deuxième étude statistique est obtenue en analysant chaque impulsion suivant deux directions de polarisation linéaire orthogonales  $x$  et  $y$  (voir Figure I-2). On trace alors la distribution  $\mathcal{P}(\theta)$  du système où  $\theta$  est défini comme :

$$\theta = \text{Arctg} \sqrt{\frac{J_x}{J_y}} ; \quad (\text{III-II-55})$$

$J_x$  et  $J_y$  sont les intensités détectées suivant les directions de polarisation linéaire  $x$  et  $y$ . On peut déterminer à partir de  $\theta$  les directions des axes de l'ellipse de la polarisation. Soient  $\alpha$  et  $(\alpha + \frac{\pi}{2})$  l'angle que font ces deux directions avec la direction  $x$ , on a :

$$\cos^2 \theta = \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha \quad (\text{III-II-56})$$

$$\text{et} \quad \sin^2 \theta = \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha \quad (\text{III-II-57})$$

(voir Figure III-1).

Ces deux fonctions de distribution permettent de déterminer les caractéristiques de la polarisation d'une série d'impulsions. Une polarisation identique pour toute une série d'impulsions émises dans les mêmes conditions correspondra à deux fonctions  $\mathcal{P}(\varphi)$  et  $\mathcal{P}(\theta)$  représentées par des distributions de Dirac. Tout autre résultat indiquera que la polarisation possède un caract-re aléatoire. Nous allons maintenant appliquer cette méthode d'analyse à deux exemples correspondant aux transitions  $j = 3/2 \rightarrow j' = 1/2$  et  $j = 1/2 \rightarrow j' = 1/2$ .

### III - Polarisation de la superradiance dans le cas de transitions

$$\underline{3/2 \rightarrow 1/2 \text{ et } 1/2 \rightarrow 1/2 .}$$

#### 1. TRANSITION $3/2 \rightarrow 1/2$ .

Nous exposons l'étude des propriétés de polarisation de l'émission superradiante sur une transition  $j = 3/2 \rightarrow j' = 1/2$  . On suppose que le niveau supérieur de moment angulaire  $j = 3/2$  est excité à partir d'un niveau de moment angulaire  $j'' = 1/2$  qui peut être fondamental, par une impulsion laser très brève (percussionnelle) polarisée linéairement. Si l'on choisit l'axe de quantification du système suivant la direction de la polarisation linéaire, c'est-à-dire que l'on considère que l'excitation est polarisée  $\pi$  , la matrice densité initiale du niveau  $j = 3/2$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-III-1})$$

(les valeurs de  $m$  décroissent de gauche à droite et de haut en bas)

On a supposé que dans son état fondamental le système est dans un mélange statistique d'état. Si l'on tourne l'axe de quantification de façon à l'amener suivant la direction de propagation  $Oz$  , la matrice densité devient :

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -\sqrt{3}/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix} \quad (\text{III-III-2})$$

(On suppose que la direction de la polarisation linéaire de l'excitation correspond à la direction  $Oy$  (voir Figure I-2)).

Le calcul de l'évolution montre que l'émission superradiante est polarisée linéairement dans la même direction que l'excitation. On rappelle qu'en émission spontanée ordinaire la lumière émise suivant la direction Oz n'est pas polarisée.

Ce résultat peut être interprété en considérant les polarisations propres du système. Pour déterminer les polarisations propres, on doit diagonaliser la matrice donnée par l'expression (III-II-20) :

$$\begin{pmatrix} C_{+1} & G \\ G^* & C_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3N & -N \\ -N & 5/3N \end{pmatrix} \quad (\text{III-III-3})$$

où  $N$  est le nombre total d'atomes excités.

La matrice de changement de base  $\mathcal{U}$  donnée par les expressions (III-II-25 à 28) s'écrit :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (\text{III-III-4})$$

Les polarisations propres du système sont donc d'une part la direction Oy, qui est la direction de polarisation de l'excitation et à laquelle est associée la valeur propre  $D_u = \frac{8}{3} N$  et, d'autre part, la direction Ox perpendiculaire à laquelle est associée la valeur propre  $D_v = \frac{2}{3} N$ . Dans ces conditions on s'attend à ce que l'émission soit très fortement polarisée suivant la polarisation linéaire de direction Oy puisque le taux moyen de polarisation  $\xi$  atteint très vite la valeur un.

## 2. TRANSITION $1/2 \rightarrow 1/2$ .

Nous considérons maintenant une transition  $j = 1/2 \rightarrow j' = 1/2$ , dont on suppose que le niveau supérieur est excité à partir d'un niveau de moment angulaire  $j'' = 1/2$  (qui peut être le niveau fondamental). On fait l'hypothèse que l'état du système avant excitation est un mélange statistique d'états dont la matrice densité est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-III-5})$$

(On note que la matrice densité garde cette même forme quel que soit l'axe de quantification). Après excitation, la matrice densité associée au niveau  $j = 1/2$  prend la même forme que celle du fondamental donnée par (III-III-5), et ce, quel que soit le choix de l'axe de quantification du système. On prend pour la suite de l'exposé l'axe Oz comme axe de quantification (voir Figure I-2).

Ce système ne possède pas de polarisation propre privilégiée. Nous devons, en effet, pour déterminer les polarisations propres, diagonaliser la matrice donnée par l'expression (III-II-20) :

$$\begin{pmatrix} C_{+1} & G \\ G^* & C_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N/2 & 0 \\ 0 & N/2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-III-6})$$

Il s'agit ici d'une matrice scalaire qui garde la même forme quelle que soit la base de deux polarisations orthogonales choisie. Initialement toutes les directions de polarisation sont équi-probables. On montre que, durant toute la période correspondant à la phase linéaire de l'évolution, le taux moyen de polarisation reste égal à un et que toutes les directions de polarisations restent équi-probables. Cette distribution de polarisation va évoluer durant la phase non-linéaire de l'évolution, c'est-à-dire pendant l'émission proprement dite de l'impulsion superradiante. Nous avons, pour étudier cette distribution, utilisé plusieurs méthodes.

Tout d'abord, pour mettre en évidence le fait qu'il se bâtit au cours de l'émission une relation de phase entre les composantes du champ de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , nous avons effectué des calculs en simulant le démarrage de l'émission par des conditions initiales des composantes  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  du champ de module constant mais de phase variant aléatoirement à l'intérieur du milieu. Un calcul numérique montre que la relation de phase entre les deux composantes du champ s'établit en un temps de l'ordre de quelques  $T_{SR}$ .

Pour étudier la distribution statistique de la polarisation, nous avons utilisé le fait que, à l'instant initial, les polarisations du champ ont toutes la même probabilité. Nous avons choisi pour conditions initiales :

$$\vec{E}(z,0) = E_0(\cos \varphi_0 e^{-i\alpha_0} \vec{e}_{+1} - \sin \varphi_0 e^{+i\alpha_0} \vec{e}_{-1}) \quad (\text{III-III-7})$$

où les phases  $\varphi_0$  et  $\alpha_0$  ont une répartition de probabilité uniforme entre 0 et  $\pi$ .

Nous pouvons de cette façon calculer les distributions définies précédemment qui caractérisent la polarisation à chaque instant. Nous avons tracé sur la Figure III-3 la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$  où  $\varphi'$  est ici défini comme la fonction

$$\varphi' = \text{Arctg} \sqrt{\frac{J_{\sigma_+}^{\text{Max}}}{J_{\sigma_-}^{\text{Max}}}} \quad (\text{III-III-8})$$

où  $J_{\sigma_+}^{\text{Max}}$  et  $J_{\sigma_-}^{\text{Max}}$  sont les intensités maximales rayonnées suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . Notons que l'angle  $\varphi'$  défini ici ne correspond pas rigoureusement à un angle  $\varphi(t)$  défini par l'expression (III-II-53) puisque les maximums d'intensité ne se produisent pas exactement au même instant pour les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . La définition utilisée ici est mieux adaptée à l'étude expérimentale.

Nous avons également tracé sur la Figure III-4 un histogramme qui donne la distribution  $\mathcal{P}(\theta')$  où  $\theta'$  est ici défini comme la fonction

$$\theta' = \text{Arctg} \sqrt{\frac{J_x^{\text{Max}}}{J_y^{\text{Max}}}} \quad (\text{III-III-9})$$

où  $J_x^{\text{Max}}$  et  $J_y^{\text{Max}}$  correspondent aux intensités maximales rayonnées suivant deux directions de polarisation linéaire orthogonale  $x$  et  $y$  qui correspondent aux directions  $Ox$  et  $Oy$  de la Figure I-2. Remarquons qu'ici aussi  $\theta'$  ne correspond pas rigoureusement à l'angle  $\theta(t)$  donné par l'expression (III-II-54) puisque les maximums d'intensités rayonnées suivant les directions de polarisation linéaire  $x$  et  $y$  ne

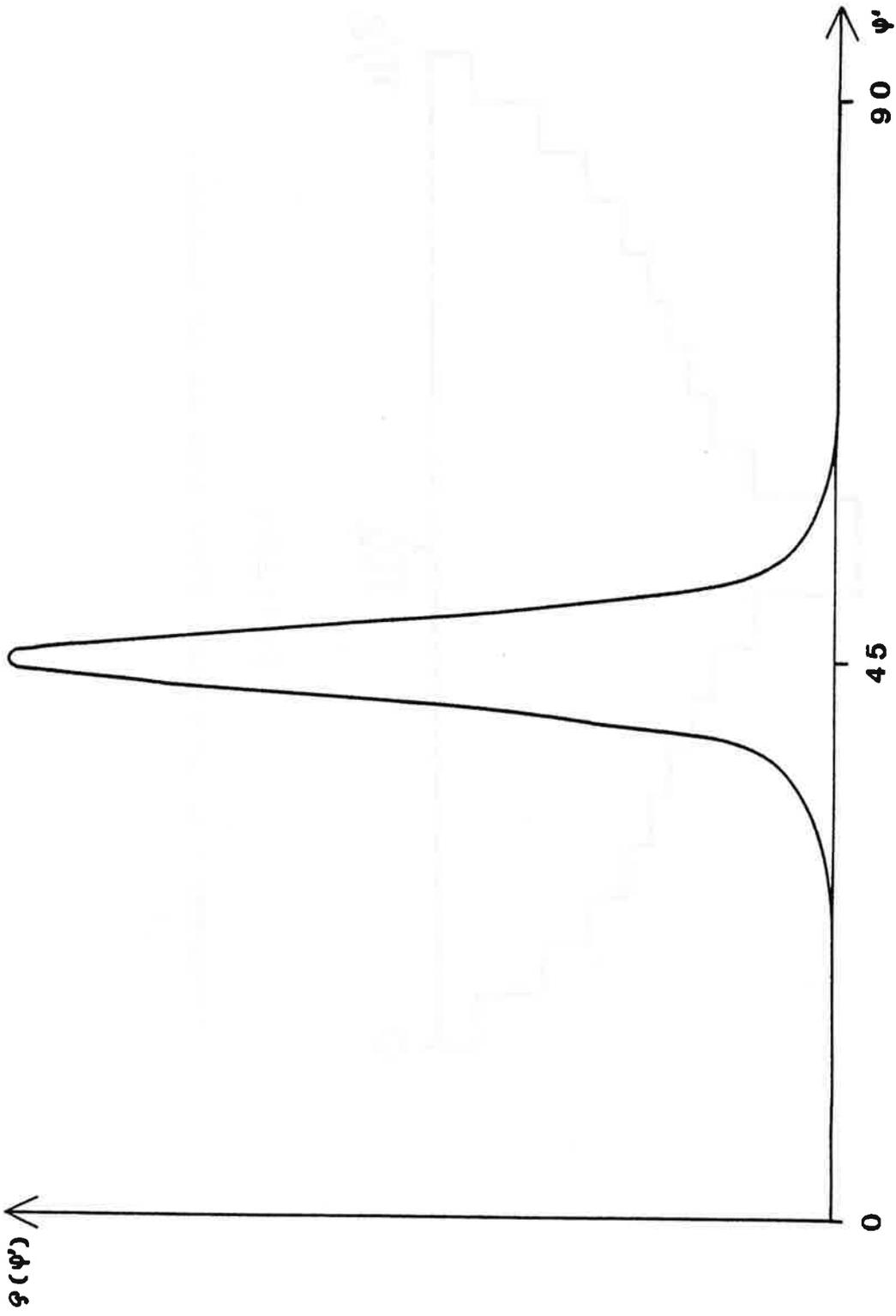


Figure III-3 : Distribution  $G(\psi')$  .

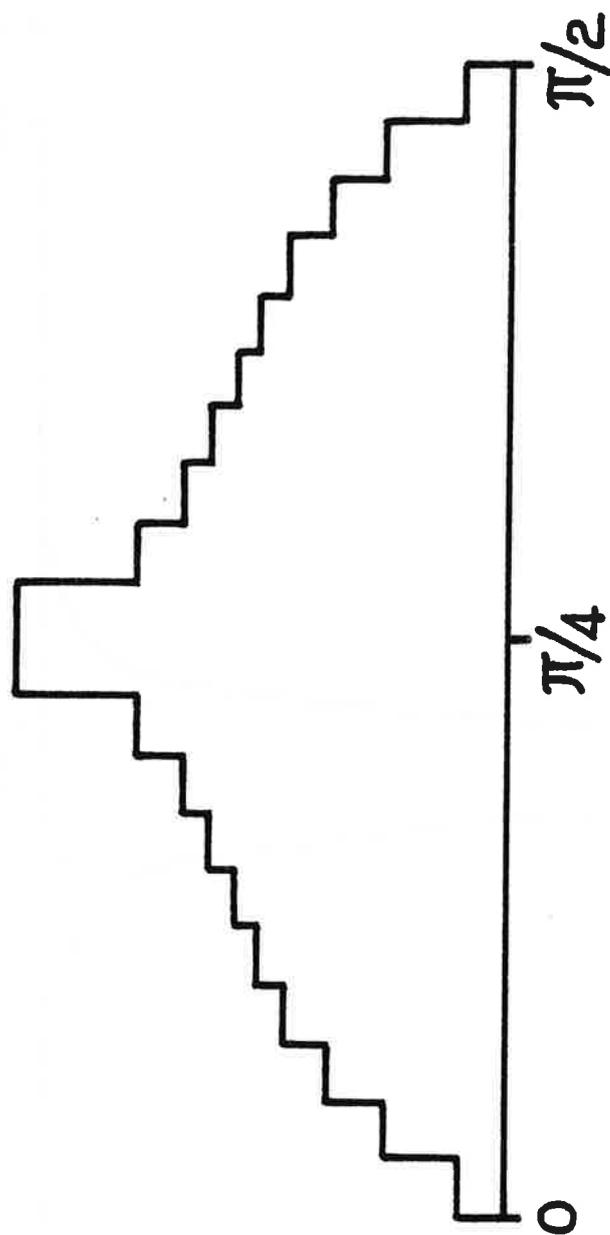


Figure III-4

Histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\theta')$  tracé pour 200 impulsions.

se produisent pas exactement en même temps. Il est cependant plus commode d'utiliser expérimentalement cette distribution qui prend en compte les maximums des intensités.

Nous voyons que les deux distributions sont très différentes. L'une,  $\mathcal{P}(\varphi')$ , obtenue en analysant suivant deux polarisations circulaires de sens opposé, est très étroite. Sa largeur à mi-hauteur caractérise l'écart quadratique de l'ellipticité de la polarisation de la superradiance :

$$\Delta\varphi' \approx 4,17^\circ \quad (\text{III-III-10})$$

ce qui donne un écart moyen à la valeur zéro du rapport petit axe sur grand axe égal à

$$\frac{\text{petit axe}}{\text{grand axe}} = 0,08 \quad (\text{III-III-11})$$

La distribution  $\mathcal{P}(\theta)$  est au contraire très large, la direction de la polarisation prend toutes les valeurs de  $\theta'$  avec une probabilité presque égale. La valeur  $\theta = \pi/4$  est cependant favorisée.

En première approximation on peut considérer qu'à la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$  il correspond un histogramme "colonne", où seule la valeur  $\varphi' = \frac{\pi}{4}$  est représentée et qu'à la distribution  $\mathcal{P}(\theta')$  il correspond un histogramme "plat" sans valeur de  $\theta'$  privilégiée. Ces deux distributions permettent de prévoir une polarisation pratiquement linéaire pour chaque impulsion superradiante. Sa direction est cependant aléatoire d'une impulsion à l'autre. On comprend bien ce résultat : le système associé à la transition  $j = 1/2 \rightarrow j' = 1/2$  est équivalent à deux sous-systèmes à deux niveaux identiques correspondant aux transitions entre sous-niveaux Zeeman  $|j = 1/2, m_j = +1/2\rangle \rightarrow |j' = 1/2, m_{j'} = -1/2\rangle$  et  $|j = 1/2, m_j = -1/2\rangle \rightarrow |j' = 1/2, m_{j'} = +1/2\rangle$ , auxquelles sont respectivement associés les champs électromagnétiques de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  (voir Figure III-5) :

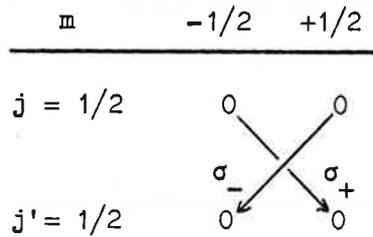


Figure III-5

On a donc approximativement, aux fluctuations près,

$$|\mathcal{E}_{\sigma_+}(L, \tau)| = |\mathcal{E}_{\sigma_-}(L, \tau)| \quad (\text{III-III-12})$$

Il existe une relation de phase aléatoire entre ces composantes et l'on a :

$$\vec{\mathcal{E}}(L, \tau) = \mathcal{E}_{\sigma_+}(L, \tau) e^{-i\theta} \vec{e}_{\sigma_+} - \mathcal{E}_{\sigma_-}(L, \tau) e^{+i\theta} \vec{e}_{\sigma_-} \quad \text{où } \theta \text{ prend n'importe}$$

quelle valeur entre 0 et  $\pi$ . Le champ rayonné possède donc une polarisation linéaire de direction aléatoire.

Un tel résultat peut être interprété comme une brisure spontanée de symétrie. En effet, après l'excitation du système, la matrice densité atomique est invariante par rotation autour de l'axe Oz et toutes les directions de polarisation sont équivalentes. Cette symétrie est brisée au moment de l'émission de la superradiance puisque celle-ci est polarisée linéairement suivant une direction bien déterminée mais choisie aléatoirement.

Notons enfin que ce résultat est très différent de celui que l'on obtient en émission spontanée ordinaire où l'émission n'est pas du tout polarisée.

Rappelons que la bosse centrale que présente l'histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\theta')$  et la largeur de l'histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$  montrent que la polarisation possède une certaine ellipticité. Cette ellipticité s'interprète si l'on considère que les maximums

d'intensité des deux sous-systèmes à deux niveaux présentent des fluctuations d'un coup à l'autre. On verra par la suite que l'étude de la polarisation de la superradiance émise sur une transition  $1/2 \rightarrow 1/2$  offre la possibilité d'étudier les fluctuations macroscopiques d'intensité et de délai de l'émission superradiante pour un système à deux niveaux, en s'affranchissant des fluctuations expérimentales.

### Conclusion

Le formalisme exposé dans ce chapitre va nous permettre d'interpréter les expériences du Chapitre IV, qui concernent l'étude de la polarisation d'impulsions superradiantes. Les deux exemples exposés à la fin de ce chapitre illustrent bien à notre avis les propriétés de polarisation de la superradiance que l'on peut s'attendre à rencontrer.

Dans le cas de la transition  $3/2 \rightarrow 1/2$ , la polarisation de la lumière superradiante est bien déterminée, elle est la même que celle de l'excitation. Au contraire, dans le cas  $1/2 \rightarrow 1/2$ , la polarisation n'est pas déterminée, elle est à peu près linéaire mais de direction aléatoire et ceci est interprété comme une brisure spontanée de symétrie. La différence entre les deux systèmes vient du fait que dans le premier cas nous créons, au cours de l'excitation, des cohérences entre les sous-niveaux Zeeman tels que  $\Delta m = 2$ . Ces cohérences gardent la mémoire de la polarisation de l'excitation et la restituent en fixant la polarisation de la superradiance. Dans le second cas, il n'existe pas de cohérences entre sous-niveaux Zeeman du niveau excité qui soient susceptibles de garder la mémoire de la polarisation de l'excitation. Rien ne permet alors de privilégier une direction particulière du plan  $xOy$ . Dans ces conditions la polarisation de la lumière superradiante présente un caractère aléatoire. On prendra garde que, lorsque la polarisation de la superradiance est bien déterminée d'une impulsion à l'autre, elle n'est pas nécessairement identique à celle de l'excitation. Nous verrons des cas où, par exemple, la polarisation de l'émission superradiante est orthogonale à celle de l'excitation.

Bibliographie du Chapitre III

- [1] A. Crubellier, Phys. Rev. A 15, 2430 (1977).
- [2] A. Crubellier and M.-G. Schweighofer, Phys. Rev. A 18, 1797 (1978).
- [3] A. Crubellier, S. Liberman and P. Pillet, Phys. Rev. Letters 41, 1237 (1978) ;  
voir également :  
A. Crubellier, C. Bréchnignac, Ph. Cahuzac and P. Pillet, Proceedings of the Fourth International Conference on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979).
- [4] A. Crubellier, S. Liberman, P. Pillet and M.-G. Schweighofer, J. Phys. B 14, L 177 (1981).
- [5] F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus and R. Glauber, Phys. Rev. A 20, 2047 (1979) ;  
voir également :  
F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus, R. Glauber and F. Hopf, Phys. Rev. Letters 42, 1740 (1979) ;  
F. Haake, J. Haus, H. King, G. Schröder and R. Glauber, Phys. Rev. Letters 45, 558 (1980) ;  
F. Haake, Proceedings of the Fourth International Conference on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979).
- [6] A. Messiah, Mécanique Quantique, Tome II, Dunod.
- [7] Q. H. F. Vrehen and J. J. der Weduwe, Phys. Rev. A 24, 2857 (1981). ;  
voir également :  
Q. H. F. Vrehen, Proceedings of the Fourth International Conference on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979) ;  
M. F. H. Schuurmans, Q. H. F. Vrehen, D. Polder and H. M. Gibbs, Advances in Atomic and Molecular Physics, vol. 17, p. 167 (1981).
- [8] J. C. McGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. A 14, 1168 (1976) ;  
voir également :

I. P. Herman, J. C. McGillivray, N. Skribanowitz and M. S. Feld,  
Laser Spectroscopy (p. 379), Ed. R. G. Brewer and A. Mooradian.  
N. Skribanowitz, Thèse, Institut de Technologie du Massachusetts  
(1972) : "Coherent effects in optically pumped HF gas" ;  
J. C. McGillivray, "Superradiance in an extended, optically thick  
medium", (degree of Bachelor of Science).

Chapitre IV

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA POLARISATION  
DE LA SUPERRADIANCE ENTRE NIVEAUX EXCITES  
DU RUBIDIUM.



Nous abordons maintenant la partie expérimentale de l'étude de la polarisation de superradiance réalisée pour des atomes de rubidium [1 à 3].

## I - Montage expérimental.

### 1. Description schématique de l'expérience.

Le principe de l'expérience est schématisé sur la Figure V-1. C'est celui de toutes les expériences de superradiance réalisées jusqu'à maintenant [1 à 18] et nous insisterons surtout sur les éléments nouveaux. Les atomes de rubidium sont excités depuis le niveau fondamental  $5s \ ^2S_{1/2}$  jusqu'au niveau  $6p \ ^2P_{3/2}$  ou  $6p \ ^2P_{1/2}$  à l'aide d'une impulsion laser. On détecte l'émission de lumière superradiante dans l'axe d'excitation à travers un filtre transparent pour l'impulsion superradiante étudiée et à l'aide d'une cellule photovoltaïque ou photoconductrice. Le signal reçu est analysé en polarisation.

(a)

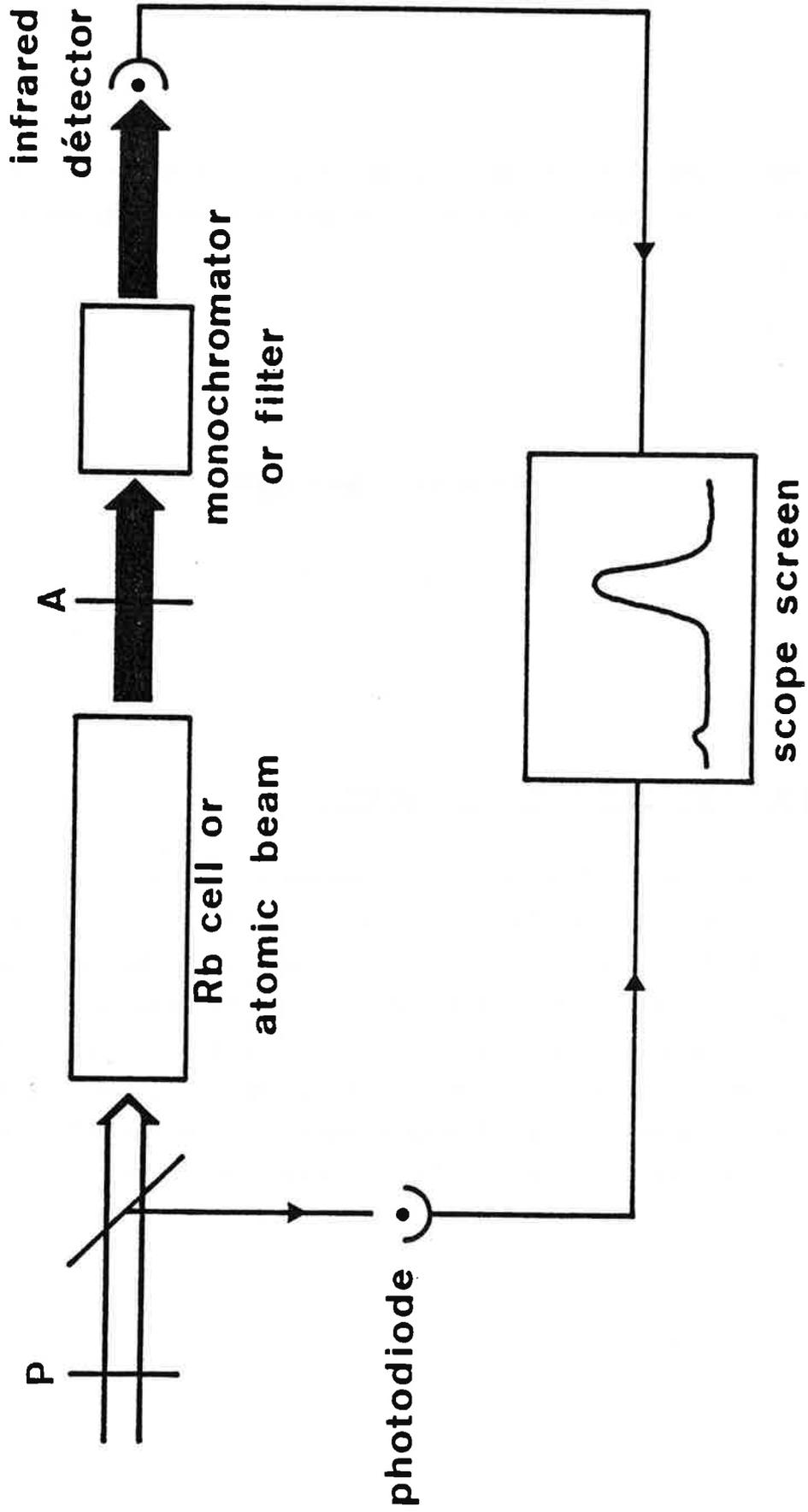
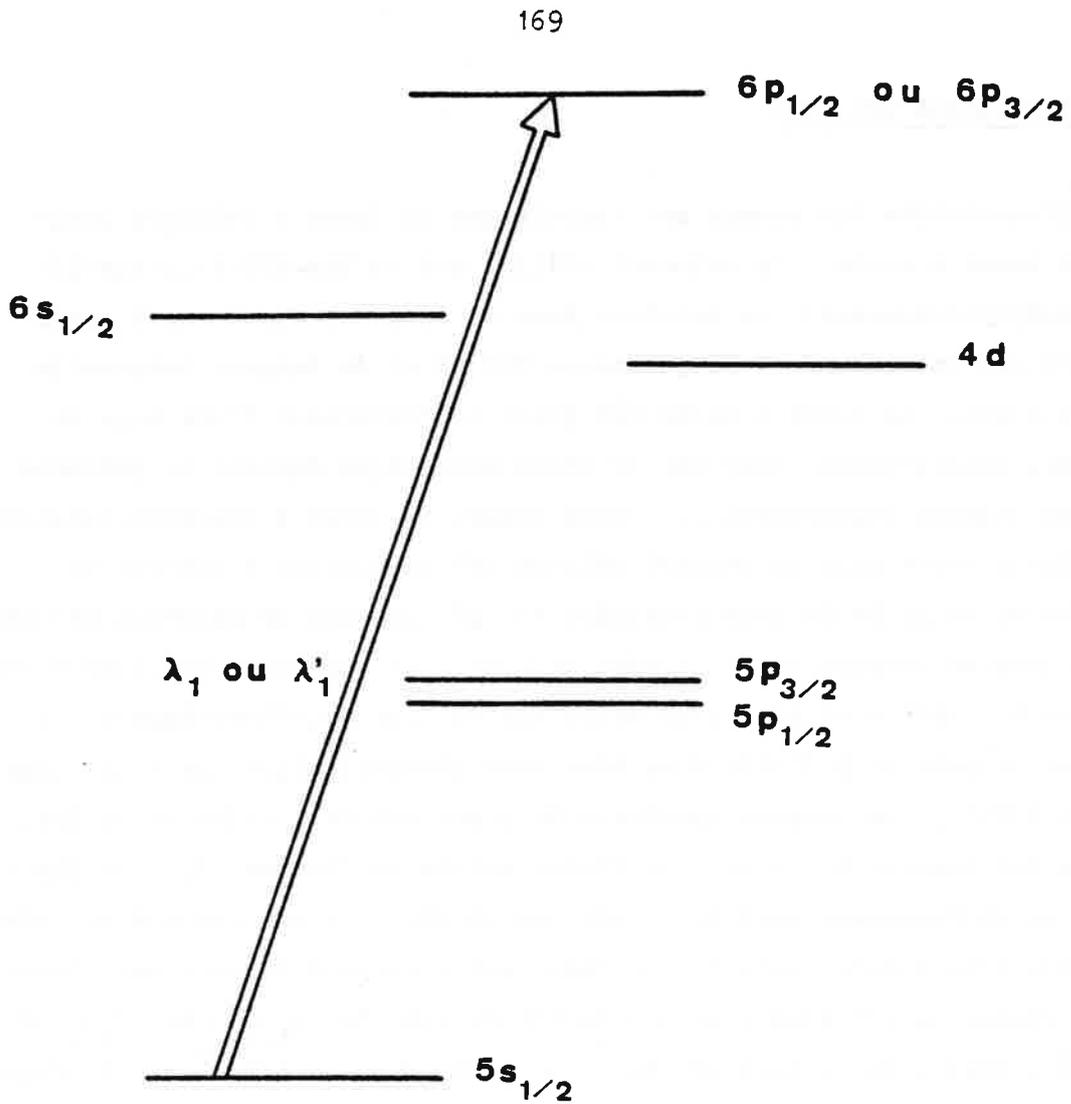


Figure IV-1-a : Montage expérimental.



(b)

Figure IV-1-b

Schéma de niveaux du rubidium : la longueur d'onde de l'excitation est

$$\lambda_1 = 4215 \text{ \AA} , \text{ pour la transition } 5s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 6p \ ^2P_{1/2}$$

$$\lambda'_1 = 4202 \text{ \AA} , \text{ pour la transition } 5s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 6p \ ^2P_{3/2}$$

## 2. L'EXCITATION OPTIQUE.

L'excitation des atomes est fournie par un laser à colorant pompé par un laser à azote. Le colorant utilisé est du Bis-MSB (1,4-bis-(2-methylstyryl)-benzène) en solution dans du dioxane. Le laser à azote délivre des impulsions UV de puissance 350 KW et de largeur temporelle 6 ns environ. Le laser à azote est placé à l'intérieur d'une cage de Faraday, indispensable pour que le bruit électrique rayonné ne perturbe pas les signaux superradiants. Ainsi pompé, le laser à colorant (utilisé sans Fabry-Perot dans la cavité) délivre des impulsions d'énergie de l'ordre de 80  $\mu\text{J}$  (elle peut atteindre 130  $\mu\text{J}$  lorsque le colorant est neuf) et de largeur temporelle de l'ordre de 6 ns. La puissance du laser a été mesurée à l'aide d'un détecteur Molelectron de type pyroélectrique et sa largeur temporelle à l'aide d'un détecteur photovoltaïque AsIn de type Judson J12LD. La largeur spectrale du laser est de l'ordre de 9 GHz. Elle a été mesurée à l'aide d'un étalon solide de finesse 20. Les fluctuations en fréquence sont de l'ordre de 20 GHz. Elles ont été mesurées à l'aide d'un monochromateur. Le laser est accordé à la longueur d'onde de résonance du rubidium : soit à la transition  $5s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 6p \ ^2P_{3/2}$  à 4202 Å, soit à la transition  $5s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 6p \ ^2P_{1/2}$  à 4215 Å (voir Figure V-1-b). La lumière excitatrice est enfin polarisée linéairement ou circulairement à l'aide de polariseurs de type Polaroid et d'une lame quart d'onde à 4210 Å. Dans ces conditions l'énergie disponible pour exciter les atomes est supérieure à 50  $\mu\text{J}$  ce qui permet d'atteindre la saturation pour l'excitation.

Pour s'affranchir des fluctuations de fréquence, nous avons également utilisé notre laser à colorant sans son miroir de sortie. La lumière excitatrice ainsi obtenue présente une grande largeur spectrale de l'ordre de  $50 \text{ cm}^{-1}$  et est pratiquement non polarisée. On peut parler dans ce cas d'une excitation à large bande incohérente. Elle permet néanmoins une excitation sélective des niveaux  $6p \ ^2P_{3/2}$  ou  $6p \ ^2P_{1/2}$  du rubidium qui sont séparés par  $77 \text{ cm}^{-1}$ . Bien que très diminuées, les instabilités du signal superradiant demeurent car l'impulsion excitatrice possède une structure spectrale.

### 3. LES SOURCES ATOMIQUES.

Nous avons réalisé nos expériences en utilisant soit des jets de rubidium, soit des cellules de rubidium.

#### Les jets de rubidium.

Les jets de rubidium utilisés sont des multijets. L'un est formé de 400 jets parallèles de diamètre 0,5 mm, de longueur 1 cm répartis sur un rectangle de longueur  $L = 10$  cm et de largeur  $l = 2,5$  mm environ (voir photo de la Figure V-2). Le rapport de collimation du multijet est celui de chacun des jets. Il a été mesuré et est compris entre dix et vingt. Le four, dans lequel est produite la vapeur atomique qui alimente le jet, est chauffé entre 200 et 250°C. Dans ces conditions, à un centimètre de la sortie des jets, on s'attend à une densité d'atomes de rubidium de l'ordre de  $10^{10}$  à  $10^{11}$  atomes/cm<sup>3</sup> [19,20], ce qui est en bon accord avec les mesures expérimentales effectuées à l'aide d'un fil chaud en platine. Ces densités d'atomes sont comparables à celles utilisées dans les expériences de superradiance réalisées dans le proche infrarouge [5]. Les atomes de rubidium ainsi produits sont excités à l'aide du faisceau laser décrit au paragraphe précédent qui se propage perpendiculairement à l'axe des jets et suivant la longueur  $L$  du rectangle sur lequel sont réparties les sorties des jets. L'excitation des atomes par un faisceau laser perpendiculaire aux jets permet d'augmenter le temps de déphasage Doppler  $T_2^*$  d'un facteur égal au temps de collimation, et donc diminuer le seuil de la superradiance de ce même facteur (condition I-I-25). Dans nos expériences, la limite d'observation de la superradiance n'est pas donnée par les conditions de seuil mais par la sensibilité de notre détection.

Nous avons également utilisé un autre multijet formé de 1000 jets parallèles de 0,1 mm de diamètre et de un centimètre de longueur. Les sorties des différents canaux du multijet sont réparties sur un rectangle de longueur  $L = 10$  cm et de largeur  $l = 2$  mm environ. La collimation

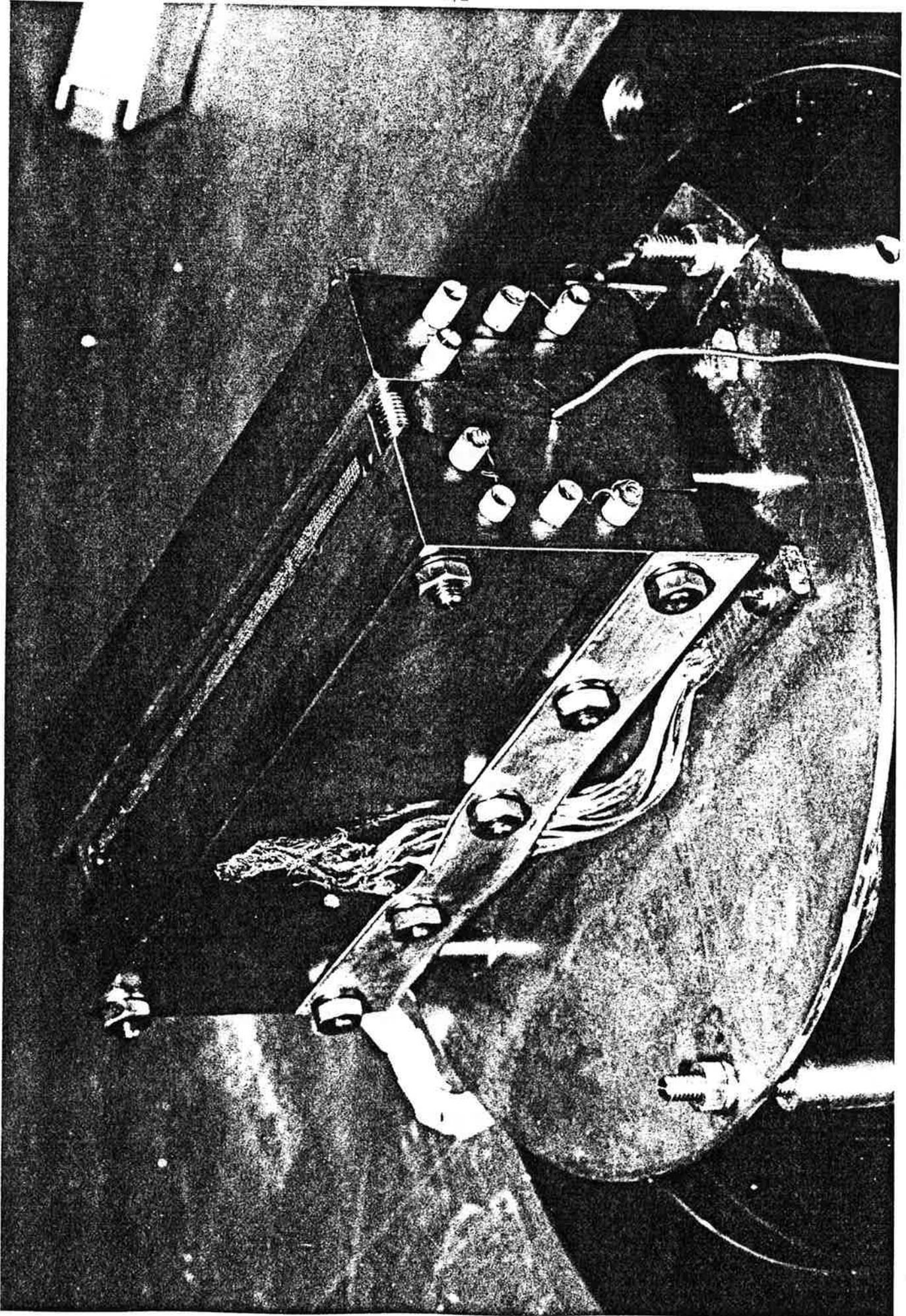


Figure IV-2 : Jet atomique.

de ce jet n'a pas été mesurée expérimentalement mais peut être estimée supérieure à vingt. Le four alimentant ce jet est chauffé dans les mêmes conditions que précédemment, ce qui permet d'obtenir des densités atomiques de l'ordre de  $10^9$  atomes/cm<sup>3</sup>. L'excitation des atomes se fait de la même manière que pour le multijet précédent.

Les fenêtres à travers lesquelles le jet est illuminé et la superradiance détectée sont en fluorine et montées perpendiculairement à l'axe du faisceau laser excitateur et du faisceau superradiant émis.

#### Les cellules de rubidium.

Nous avons utilisé des cellules en silice fondue de longueur  $L = 10$  cm et de diamètre  $l = 2$  cm. Les fenêtres des cellules sont en silice fondue, polies optiquement, et collées perpendiculairement à l'axe des cellules. Les cellules sont placées à l'intérieur de fours construits en matériau diamagnétique. Ces fours sont conçus de telle manière que le corps de la cellule et son queusot soient chauffés indépendamment. La température de la cellule et celle de son queusot sont régulées. Un dispositif électronique stabilise la température au degré près. On maintient les températures du four et du queusot constantes et peu différentes (un degré environ de différence) en imposant que celle du queusot soit toujours plus basse pour éviter de contaminer les fenêtres de la cellule. La température du queusot, qui constitue le point froid de la cellule, fixe la densité d'atomes de la cellule. Nous avons travaillé à des températures comprises entre 50°C et 150°C ce qui correspond à des densités d'atomes comprises entre  $10^{10}$  atomes/cm<sup>3</sup> et  $10^{13}$  atomes/cm<sup>3</sup>.

Le faisceau laser excitateur, dans le cas des cellules comme dans celui de jets, est focalisé à l'intérieur du milieu atomique et sa section est de l'ordre de 1 à 2 mm<sup>2</sup> sur toute la longueur du milieu actif. Le nombre de Fresnel correspondant ( $\mathcal{F} = \frac{S}{L\lambda}$ ) est de l'ordre de quelques unités (3 à 10), ce qui permet de considérer que l'interprétation théorique des résultats en terme d'onde plane est justifiée.

#### 4. LE DISPOSITIF DE DETECTION.

Les impulsions superradiantes émises dans le proche infrarouge suivant l'axe de l'excitation sont détectées soit par des cellules photoconductrices Ge-Au (SBRC), soit par des cellules photovoltaïques AsIn (Judson J12LD), polarisées en inverse à l'aide d'une pile 1,5 V. Dans les deux cas les temps de réponse des détecteurs sont de l'ordre de 2 ns. Pour augmenter l'intensité des signaux obtenus, nous utilisons des amplificateurs rapides (SCD) de bande passante 1 GHz et de gain 30 dB.

Pour séparer les différentes transitions, nous avons placé des filtres devant la cellule de détection, centrés à la longueur d'onde de la transition superradiante désirée et coupant totalement les longueurs d'onde des autres transitions. Les longueurs d'onde des différentes transitions ont, de plus, été mesurées avec un monochromateur de type SOPRA de résolution 1 GHz.

Les signaux superradiants ainsi obtenus sont analysés par une chaîne de détection rapide. Nous utilisons un analyseur de transitoires en temps réel. Il s'agit du "Transient Digitalizer" de Tektronix 7912 AD. Cet appareil permet d'enregistrer en temps réel le signal transitoire et de conserver l'information. Il possède une sortie video qui peut être branchée sur un magnétoscope et permet de stocker ainsi la totalité des signaux superradiants (le laser excitateur fonctionne à un taux de répétition de 10 Hz) sur bande magnétique. Il peut être également utilisé en mode digital. Pour traiter les signaux, l'analyseur de transitoires est couplé avec un micro-ordinateur du type Commodore CBM 3032 lui-même associé à une imprimante (Commodore 3022). Un programme (en langage machine) permet d'adapter les interfaces des appareils. On peut alors étudier complètement un signal superradiant, sa polarisation ... Ce dispositif permet de traiter un signal superradiant toutes les cinq à quinze secondes selon le type d'analyse que l'on désire. On possède ainsi un ensemble expérimental extrêmement efficace pour étudier la distribution statistique d'une série d'impulsions superradiantes en analysant en

quelques heures plusieurs centaines d'impulsions superradiantes. Il est particulièrement utile pour l'étude des fluctuations de la superradiance que nous exposons au chapitre suivant. Ce dispositif peut être également utilisé pour moyennner le signal sur un grand nombre de coups successifs. L'analyseur de transitoires est utilisé soit en monocanal avec un tiroir d'entrée Tektronix 7A19 de bande passante 500 MHz, soit en bicanal avec un tiroir d'entrée Tektronix 7A18 de bande passante 75 MHz, ce qui permet d'enregistrer sur une même trace les signaux délivrés simultanément par deux détecteurs différents.

##### 5. ANALYSE DE LA POLARISATION DES SIGNAUX SUPERRADIANTS.

Les transitions superradiantes analysées sont situées dans un domaine de longueur d'onde compris entre  $1,3 \mu$  et  $2,8 \mu$ . Nous avons utilisé des polariseurs de type Polaroid, qui sont efficaces jusqu'à  $2 \mu$  et, au-delà de cette limite, nous avons employé un polariseur à grille efficace dans un domaine de longueur d'onde compris entre  $2 \mu$  et  $35 \mu$ . Nous avons, de plus, utilisé des lames quart d'onde en quartz à  $2,8 \mu$ ,  $2,73 \mu$  et  $2,3 \mu$  et des lames quart d'onde en mica à  $1,5 \mu$  et  $1,3 \mu$ .

Nous avons également utilisé un dispositif composé de quatre lames de germanium d'épaisseur 10 mm, illuminé sous incidence de Brewster ( $76^\circ$ ) (voir Figure IV-3), qui sépare le faisceau superradiant en deux parties polarisées linéairement suivant deux directions orthogonales, et ce, de façon presque parfaite. Un tel dispositif est utilisable pour les longueurs d'onde à  $2,8 \mu$  et  $2,3 \mu$  et permet d'analyser la superradiance associée aux transitions  $6p \rightarrow 6s$  et  $6p \rightarrow 4d$  suivant deux directions de polarisations linéaires perpendiculaires. On peut ajouter devant ce dispositif une lame quart d'onde adaptée à la transition étudiée, placée perpendiculairement à l'axe de propagation du faisceau superradiant. On l'oriente de telle sorte que ses axes fassent un angle de  $45^\circ$  avec les directions d'analyse du polariseur formé par les quatre lames de germanium. Ce montage permet d'analyser les impulsions superradiantes suivant deux directions de polarisations circulaires de sens opposés. Les deux faisceaux

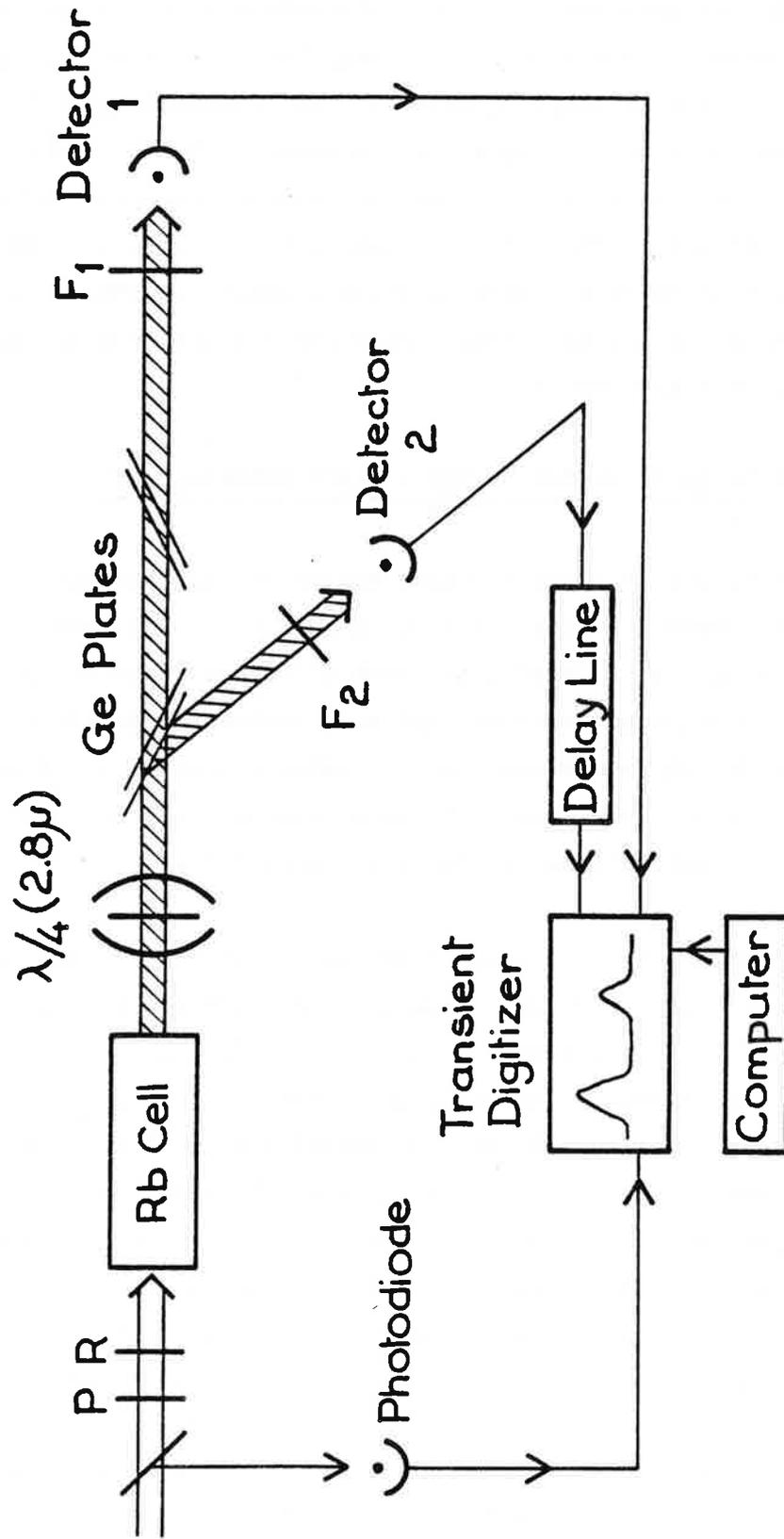


Figure IV-3 : Montage expérimental.

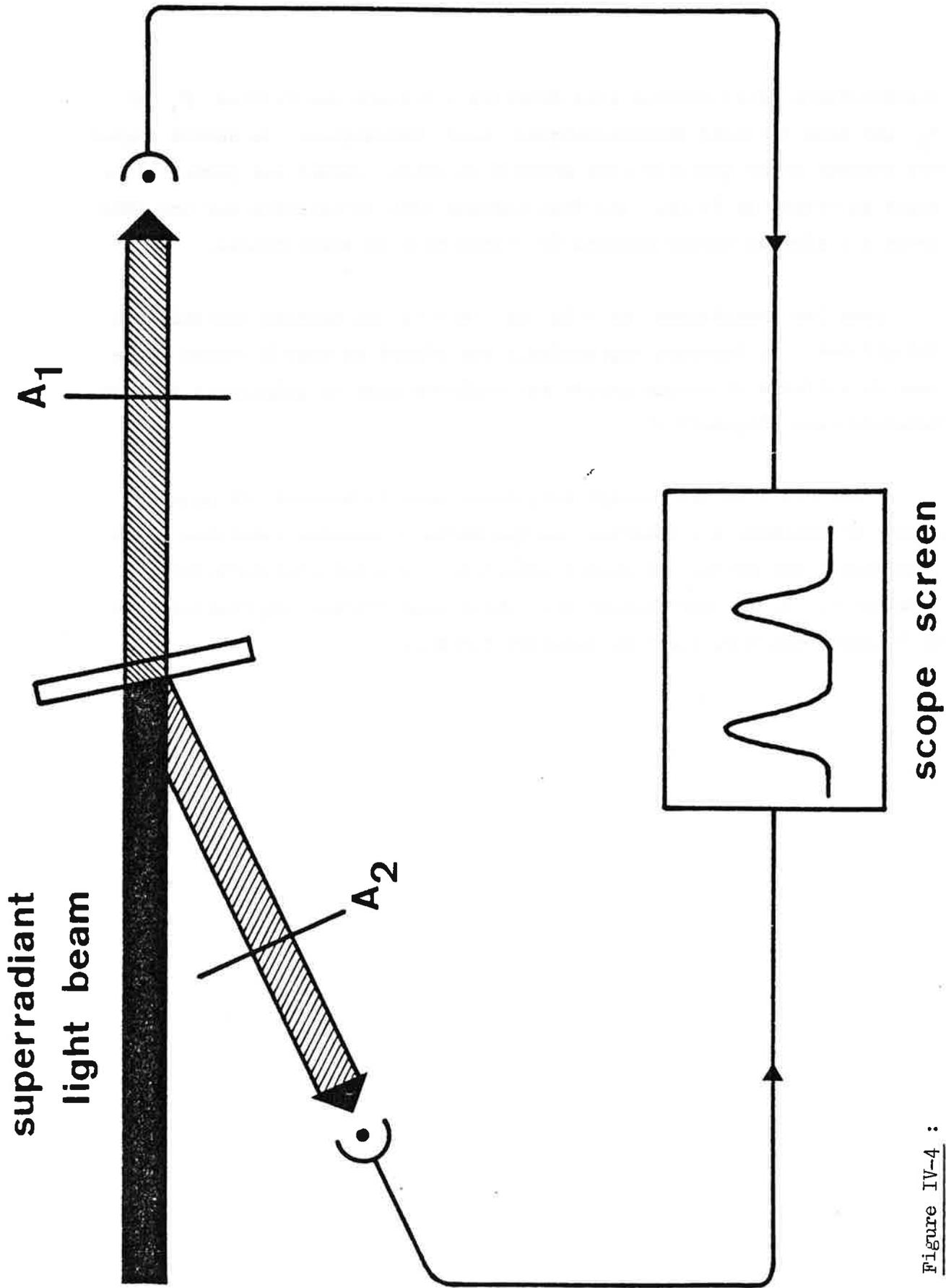


Figure IV-4 :

Élément du montage expérimental : analyse du faisceau lumineux suivant deux polarisations différentes.

superradiants ainsi obtenus sont détectés à travers des filtres  $F_1$  et  $F_2$  par deux cellules photovoltaïques AsIn identiques. Le second signal est retardé d'une quantité fixe grâce à un câble coaxial qui permet d'obtenir un retard de 50 ns. Les deux signaux sont enregistrés sur une même trace à l'aide du tiroir bicanal de l'analyseur de transitoires.

Pour les transitions  $6s \rightarrow 5p$  et  $4d \rightarrow 5p$  un montage équivalent a été utilisé. Le faisceau superradiant est séparé en deux à l'aide d'une lame de silicium et chaque partie est analysée avec un polariseur de type Polaroid (voir Figure IV-4).

L'intérêt d'un tel montage est, comme nous le verrons, de pouvoir mettre en évidence une polarisation qui varie de manière aléatoire d'une impulsion à une autre. Il permet également d'étudier l'ellipticité de l'émission. Il est particulièrement utile pour étudier les fluctuations de la superradiance, objet du chapitre suivant.

## II - Description et résultats des expériences.

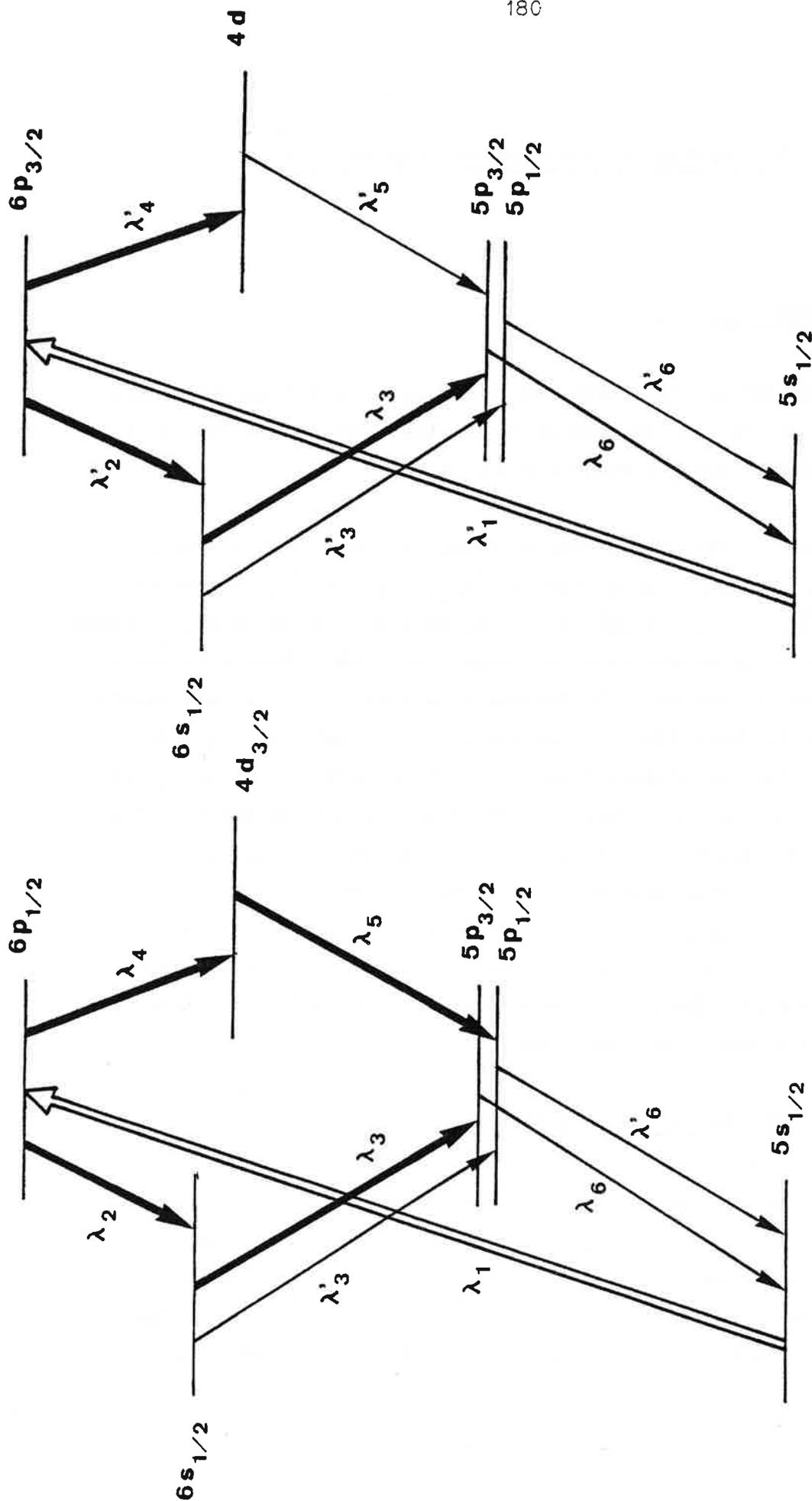
### 1. PROCEDURE EXPERIMENTALE.

Avant de donner les résultats expérimentaux, nous allons brièvement expliquer comment ils ont été obtenus en utilisant le montage décrit ci-dessus et schématisé sur les Figures IV-I-a et IV-3.

Pour réaliser l'excitation nous accordons le laser à la longueur d'onde 4215 Å pour exciter le niveau  $6p^2P_{1/2}$  ou 4202 Å pour exciter le niveau  $6p^2P_{3/2}$ . Cette opération est, dans un premier temps, réalisée à l'aide d'un monochromateur et d'une lampe à rubidium. Nous optimisons ensuite le signal en détectant la lumière superradiante. Dans ces conditions on sature la transition. Cette opération terminée, on place le détecteur dans l'axe de l'excitation. La surface de détection de la cellule étant très petite, on y focalise l'impulsion superradiante à l'aide d'une lentille en silice de 25 mm de focale (transparente dans le proche infrarouge). Le déclenchement de l'enregistrement se fait par l'intermédiaire d'une photodiode rapide (silicium) sur laquelle on envoie une fraction de l'impulsion laser excitatrice. La lumière est polarisée linéairement ou circulairement et on analyse en polarisation les différentes impulsions superradiantes émises.

### 2. TRANSITIONS SUPERRADIANTES OBSERVEES.

Nous avons observé des signaux lumineux superradiants émis à partir des niveaux  $6p^2P_{1/2}$  et  $6p^2P_{3/2}$ . Les différentes transitions sur lesquelles la superradiance a été observée sont représentées sur la Figure IV-5. Des enregistrements typiques d'impulsions superradiantes sont représentées sur la Figure IV-6. Les conditions d'observation



(a)

Figure IV-5

(b)

Transitions superradiantes observées : les flèches en traits gras représentent les transitions superradiantes les plus probables, en traits fins les transitions superradiantes plus difficilement observables. Les longueurs d'ondes sont données par :  $\lambda_2 = 2,79 \mu$ ,  $\lambda'_2 = 2,73 \mu$ ,  $\lambda_3 = 1,37 \mu$ ,  $\lambda'_3 = 1,32 \mu$ ,  $\lambda_4 = 2,29 \mu$ ,  $\lambda'_4 = 2,25 \mu$ ,  $\lambda_5 = 1,47 \mu$ ,  $\lambda'_5 = 1,53 \mu$ ,  $\lambda_6 = 7800 \text{ \AA}$ ,  $\lambda'_6 = 7947 \text{ \AA}$ .

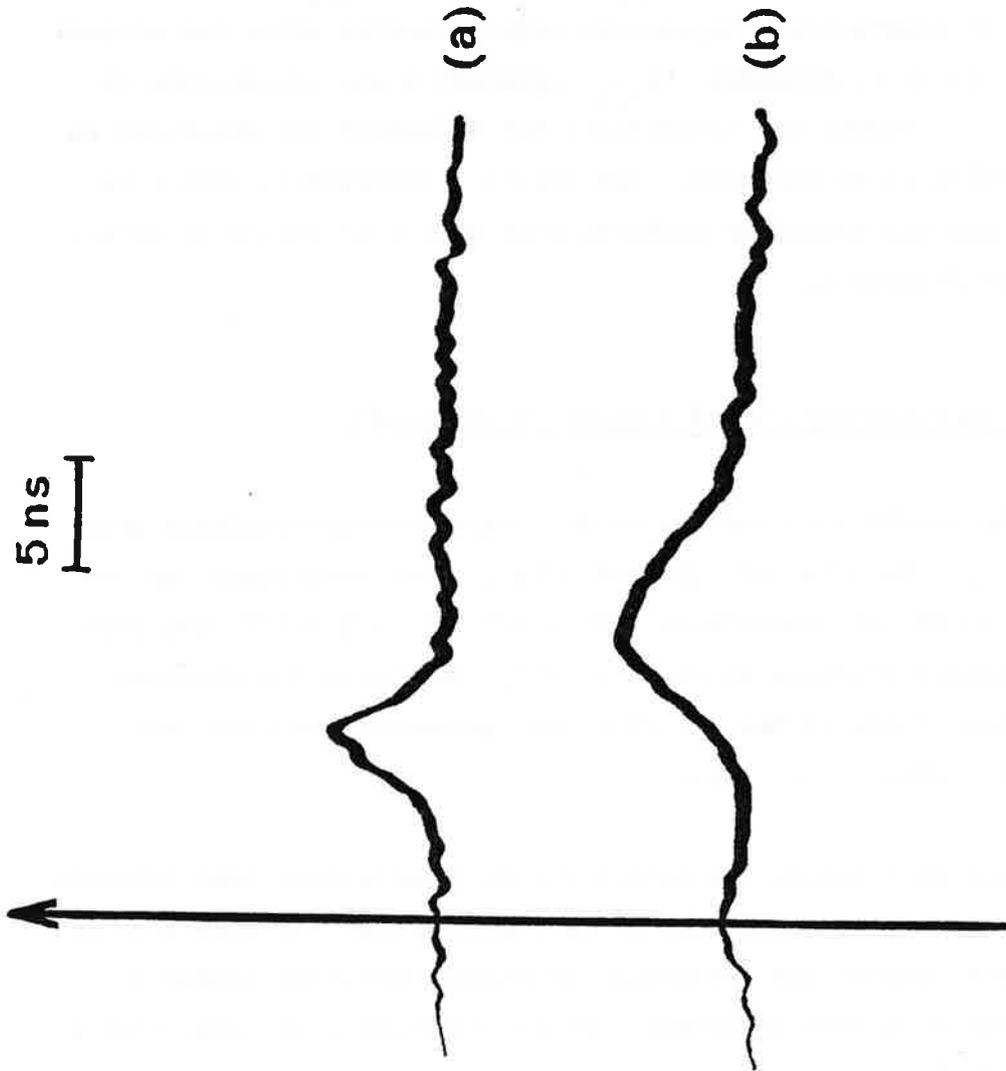


Figure IV-6

Enregistrements caractéristiques d'impulsions superradiantes. La trace (a) correspond à la transition  $6P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$  et la trace (b) à la transition  $6S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ . L'axe indique l'instant où se produit l'excitation ; on observe sur la trace (b) un léger pic correspondant au laser excitateur.

différent suivant les transitions. Les cascades  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  et  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  correspondent aux premières raies superradiantes observées dès une température de  $50^{\circ}\text{C}$  dans le cas d'une cellule de rubidium. La cascade  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$  et la transition  $6p_{3/2} \rightarrow 4d$  sont également très facilement observées. Il est plus difficile d'observer les transitions  $4d \rightarrow 5p_{3/2}$  et  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{1/2}$  qui apparaissent vers  $100^{\circ}\text{C}$ . L'observation d'impulsions superradiantes entre les niveaux  $5p_{3/2}$ ,  $5p_{1/2}$  et le fondamental  $5s_{1/2}$  apparaît à une température de l'ordre de  $80^{\circ}\text{C}$ . Toutes ces transitions ont également été observées en utilisant un multijet de rubidium. Les seuils d'observation donnés ne correspondent pas aux seuils de superradiance mais à la limite de sensibilité de notre détection.

### 3. ANALYSE DE LA POLARISATION DES SIGNAUX SUPERRADIANTS.

Nous avons étudié la polarisation de l'émission superradiante pour les cascades  $6p \rightarrow 6s \rightarrow 5p$  et  $6p \rightarrow 4d \rightarrow 5p$ . Nous remarquons que ces cascades comportent des transitions  $3/2 \rightarrow 1/2$  et  $1/2 \rightarrow 1/2$  que nous avons théoriquement étudiées au Chapitre III. On s'attend à observer des polarisations fixes et des polarisations présentant un caractère aléatoire d'une impulsion à l'autre.

Pour mettre en évidence des directions de polarisation bien déterminées, nous avons utilisé le montage de la Figure V-1-a. La direction de polarisation est obtenue par extinction du signal lorsqu'on tourne le polariseur. Les résultats présentant des fluctuations d'une impulsion à l'autre ont été obtenus à l'aide de montages du type de ceux schématisés sur les Figures IV-3 et IV-4, et en analysant statistiquement un grand nombre d'impulsions superradiantes suivant deux directions de polarisations linéaires orthogonales puis circulaires de sens opposés. Si la lumière est non polarisée, on doit obtenir pour chaque impulsion analysée suivant les procédures expérimentales définies ci-dessus des signaux identiques à la calibration près sur chacun des deux détecteurs. Tout autre résultat indique que la lumière émise est au moins partiellement polarisée.

Les résultats expérimentaux obtenus sont résumés sur le Tableau IV-1. Les résultats donnant des polarisations présentant un caractère aléatoire sont encadrés sur le Tableau IV-1.

Polarisation du laser excitateur  de la superradiance	$6p_{1/2}$		$6p_{3/2}$	
	linéaire $\vec{\epsilon}$	$\sigma_+$	linéaire $\vec{\epsilon}$	$\sigma_-$
$6p \rightarrow 6s_{1/2}$	linéaire $\vec{\epsilon}'$	$\sigma_-^*$	linéaire $\vec{\epsilon}$	$\sigma_-^*$
$6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$	linéaire $\vec{\epsilon}'$	$\sigma_-$	linéaire $\vec{\epsilon}'$	$\sigma_+$
$6p \rightarrow 4d$	linéaire $\vec{\epsilon}'$	$\sigma_+$	linéaire $\vec{\epsilon}$	$\sigma_+$
$4d \rightarrow 5p$	linéaire $\vec{\epsilon}'$	$\sigma_-$	linéaire $\vec{\epsilon}$	$\sigma_-$

Tableau IV-1

Résultats de l'étude des propriétés de polarisation de la superradiance. Dans le cas d'une polarisation linéaire de direction  $\vec{\epsilon}$  du laser excitateur, on observe une polarisation linéaire pour la superradiance soit de direction  $\vec{\epsilon}$ , soit de direction aléatoire  $\vec{\epsilon}'$  d'une impulsion à l'autre. Les résultats identiques à ceux que l'on obtient en émission spontanée ordinaire sont notés avec une astérisque.

### III - Interprétation des résultats.

Nous allons dans ce paragraphe donner l'interprétation théorique des résultats que nous avons obtenus. Dans notre interprétation, nous ne prenons pas en compte la structure hyperfine des niveaux du rubidium. Cette approximation est justifiée dans la mesure où les périodes associées aux écarts  $\omega_{hf}$  entre sous-niveaux hyperfins sont longues devant le temps caractéristique de la superradiance :

$$\frac{1}{\omega_{hf}} \gg T_{SR} \quad . \quad (IV-III-1)$$

Le Tableau V-2 donne les écarts hyperfins entre les différents niveaux du rubidium qui interviennent dans nos expériences. Les temps de couplage hyperfins sont grands devant les temps caractéristiques superradiants des différentes transitions, qui sont en général plus courts que la nanoseconde (les valeurs de ces temps caractéristiques calculées pour des densités d'atomes excités de  $10^{10}$  par  $\text{cm}^3$  sont rapportées sur le Tableau IV-2). La condition (IV-III-1) est donc bien remplie. Néanmoins nous verrons, dans une analyse plus fine de nos expériences, que l'on ne peut pas totalement négliger la structure hyperfine et qu'elle se manifeste notamment dans le cas où la polarisation présente un caractère aléatoire.

Dans notre interprétation nous allons traiter de manière découplée les différents étages des cascades. Comme nous l'avons remarqué au Chapitre I, ceci est justifié dans la mesure où les probabilités des différentes transitions sont du même ordre.

L'évolution du système sur les différentes transitions des cascades  $6p \rightarrow 6s \rightarrow 5p$  et  $6p \rightarrow 4d \rightarrow 5p$  a fait l'objet de calculs semi-classiques

TABLEAU V-2

Structure hyperfine du rubidium en MHz

 $^{85}\text{Rb}$  (72%) moment nucléaire  $I = 5/2$  $^{87}\text{Rb}$  (28%) moment nucléaire  $I = 3/2$ 

$^{85}\text{Rb}$		$^{87}\text{Rb}$		
$5s_{1/2}$	F=2	1265	F=2	2563
	F=2	-1771	F=1	-4271
$5p_{3/2}$	F=4	91	F=3	184
	F=3	-6	F=2	-61
	F=2	-79	F=1	-225
	F=1	-127	F=0	-307
$5p_{1/2}$	F=3	151	F=2	307
	F=2	-212	F=1	-511
$6s_{1/2}$	F=3	319	F=2	646
	F=2	-446	F=1	-1076
$6p_{3/2}$	F=4	30	F=3	60
	F=3	-2	F=2	-20
	F=2	-26	F=1	-74
	F=1	-42	F=0	-100
$6p_{1/2}$	F=3	50	F=2	101
	F=2	-69	F=1	-168

(la structure hyperfine du niveau 4d est négligeable)

Temps caractéristiques  $T_{\text{SR}}$  en ns des différentes transitions superradiantes observées pour une densité de  $10^{10}$  atomes par  $\text{cm}^3$

$6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$	.250
$6p_{3/2} \rightarrow 4d_{5/2}$	.976
$6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$	.251
$6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$	.658
$6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$	.348
$4d_{5/2} \rightarrow 5p_{3/2}$	.301
$4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$	.360

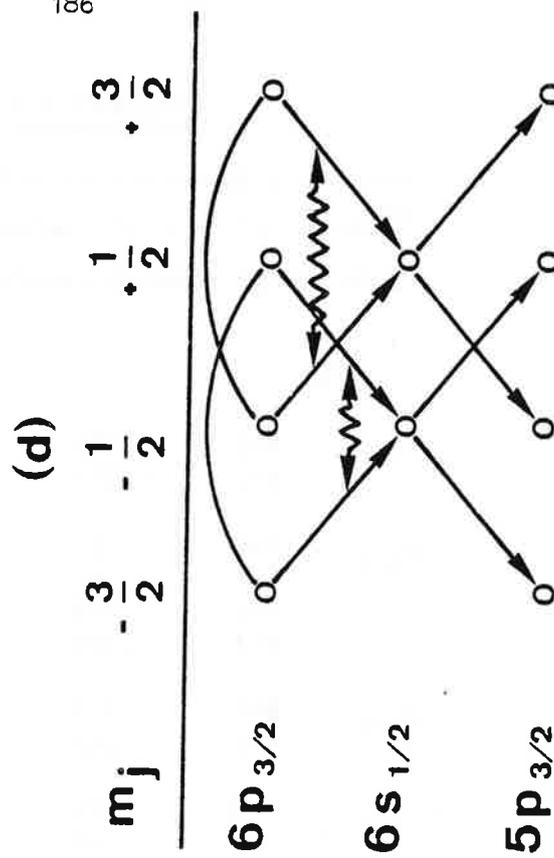
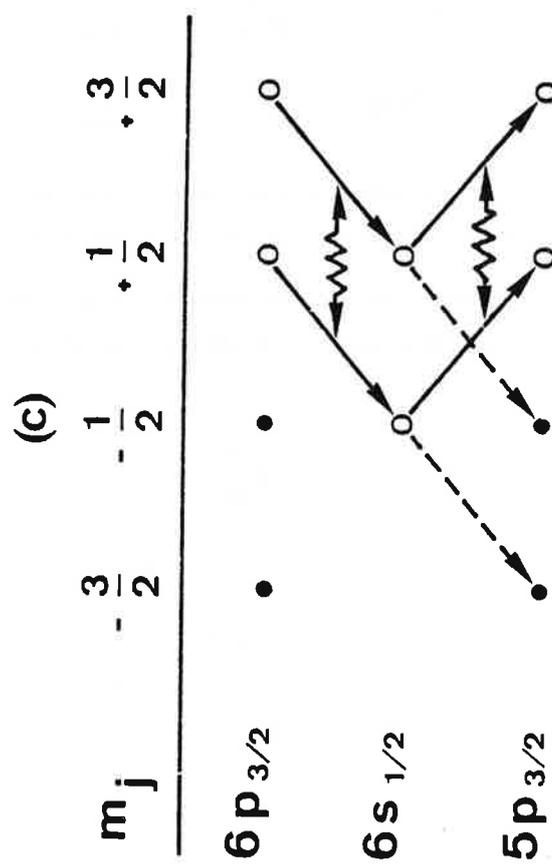
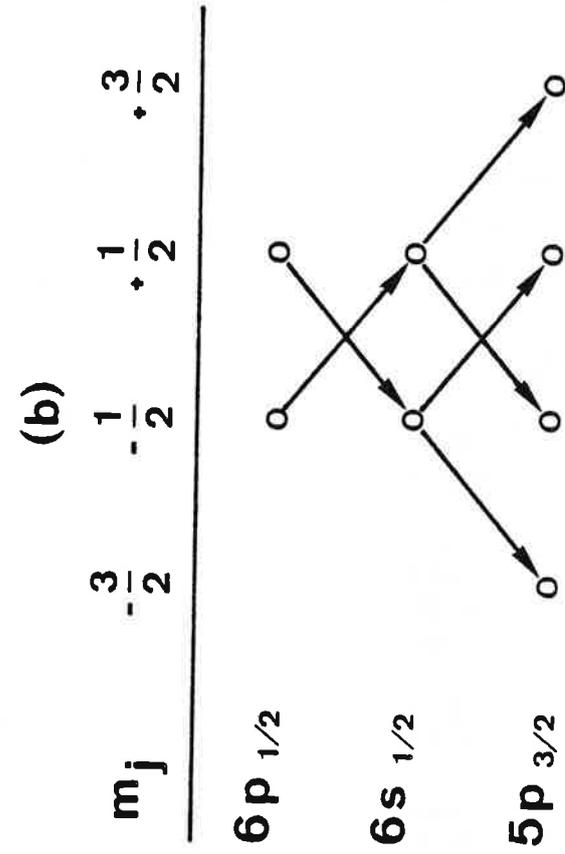
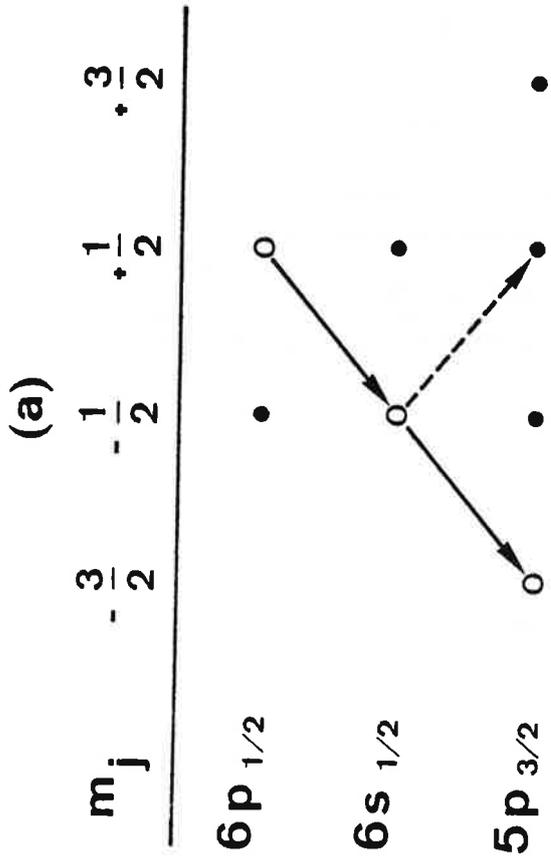


Figure IV-7

Représentation schématique des propriétés de polarisation observées pour la cascade  $6p \rightarrow 6s \rightarrow 5p$ . Les points représentent les niveaux non-peuplés, les ronds ceux qui le sont. Les flèches en traits pleins indiquent les transitions qui participent à l'émission et en traits pointillés celles dont l'émission est inhibée. Les cohérences non nulles entre sous-niveaux Zeeman sont représentées par un arc de cercle. On a également représenté les interférences entre transitions par une flèche brisée, lorsque ces interférences jouent un rôle important pour comprendre les résultats.

en utilisant le formalisme que nous avons développé au Chapitre III. Pour établir la matrice densité initiale du niveau excité  $6p$  nous avons considéré, comme c'est le cas dans nos expériences, que la puissance du faisceau laser excitateur permet d'atteindre la saturation. D'autres calculs ont également été effectués dans le cas où le champ laser est un champ faible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas saturation du milieu. Ces calculs montrent, pour les exemples que nous avons traités, que la polarisation n'est pas modifiée. L'accord entre la polarisation observée et celle prédite pour les différentes transitions a pu être vérifié.

Nous ne donnons pas dans ce paragraphe le détail de tous ces calculs, nous montrons, dans les cas où la polarisation n'est pas aléatoire, que cette polarisation correspond à la polarisation propre la plus favorable.

#### 1. CAS DE LA CASCADE $6p \rightarrow 6s \rightarrow 5p$ .

La Figure IV-7 représente les différentes transitions entre sous-niveaux Zeeman qui interviennent au cours de l'émission superradiante sur les cascades  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 6p_{3/2}$  et  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  dans le cas d'une excitation polarisée soit circulairement, soit linéairement. L'observation dans les expériences d'impulsions superradiantes correspondant à la transition  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{1/2}$  n'est pas prise en compte dans l'interprétation que nous donnons. L'émission de ces impulsions est un effet dû au pompage dans l'état excité des atomes, sur lequel nous reviendrons dans le Chapitre VI. Ces impulsions n'apparaissent pas dans le cas que nous interprétons, c'est-à-dire lorsque les impulsions superradiantes émises sur les différentes transitions des cascades  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 6p_{3/2}$  et  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  présentent un retard.

a) Excitation polarisée circulairement.- Cascade  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  (Figure V-7-a).- Transition  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$  :

Lorsque l'impulsion laser excitatrice est polarisée circulairement suivant  $\sigma_+$ , seul le sous-niveau Zeeman  $m_j = +1/2$  du niveau  $6p_{1/2}$  est initialement excité. L'émission superradiante sur la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$  est alors nécessairement polarisée suivant  $\sigma_-$ . Ce résultat ne diffère pas de celui que l'on obtiendrait pour l'émission spontanée ordinaire détectée dans la direction du rayonnement superradiant. A la fin de l'émission, seul le niveau  $m_j = -1/2$  du niveau  $6s_{1/2}$  est alors peuplé.

- Transition  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  :

La Figure IV-7-a montre que l'étude de cette transition se ramène au cas d'un système superradiant à trois niveaux en " $\Lambda$ " dont les deux transitions sont les transitions entre sous-niveaux Zeeman

$$\begin{aligned} &6s_{1/2} (m_j = -1/2) \rightarrow 5p_{3/2} (m_j = -3/2) \\ \text{et} \quad &6s_{1/2} (m_j = -1/2) \rightarrow 5p_{3/2} (m_j = +1/2) \quad ; \end{aligned}$$

les probabilités de transition diffèrent d'un facteur 3. Ce cas a été traité au Chapitre I, paragraphe II (Figure III-11 et 12) et a mis en évidence que la superradiance sur la transition la moins favorable (ici  $6s_{1/2} (m_j = -1/2) \rightarrow 5p_{3/2} (m_j = +1/2)$ ) est quasi-totalement inhibée lorsque la superradiance se produit sur la transition la plus favorable (ici  $6s_{1/2} (m_j = -1/2) \rightarrow 5p_{3/2} (m_j = -3/2)$ ). On montre donc que l'émission sur cette seconde partie de la cascade est polarisée suivant  $\sigma_-$ , ce qui est en accord avec l'expérience.

On note que les polarisations propres du système sont ici  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , la valeur propre associée à  $\sigma_- (\frac{N}{8})$  est supérieure d'un facteur 3 à celle associée à  $\sigma_+ (\frac{N}{24})$ . Il est alors naturel de s'attendre à ce

que la polarisation  $\sigma_-$  l'emporte sur  $\sigma_+$ , comme nous l'observons. Nous vérifions dans ce cas simple que la polarisation propre de valeur propre la plus forte l'emporte, comme nous l'avons postulé au Chapitre III.

- Cascade  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  (Figure IV-7-c).

Transition  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$  :

Lorsque l'impulsion laser excitatrice est polarisée circulairement suivant  $\sigma_+$ , seuls les sous-niveaux Zeeman  $m_j = +1/2$  et  $m_j = +3/2$  sont excités. L'émission superradiante ne peut se produire, comme on peut le voir sur la Figure IV-7-c que suivant la polarisation  $\sigma_-$ . Comme précédemment, ce résultat serait le même pour l'émission spontanée émise suivant la direction Oz.

L'intensité du faisceau laser excitateur permettant d'atteindre la saturation, les populations des sous-niveaux Zeeman  $m_j = +3/2$  et  $m_j = +1/2$  sont égales. Le système atomique associé à la transition  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$  est équivalente à un système à quatre niveaux tels que les deux transitions sont résonnantes avec le même champ électromagnétique (même fréquence et même polarisation). Nous avons vu au Chapitre II que l'état de ce système à la fin de l'évolution est un état subradiant : 15% environ des atomes restent dans un état excité, essentiellement dans le sous-niveau Zeeman  $6p_{3/2}$  ( $m_j = +1/2$ ). Après émission de l'impulsion superradiante sur la transition  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ , le sous-niveau Zeeman  $6s_{1/2}$  ( $m_j = -1/2$ ) est moins peuplé (environ 20% d'atomes en moins) que le sous-niveau Zeeman  $6s_{1/2}$  ( $m_j = +1/2$ ) (voir Figure II-5). L'étude de la polarisation de la seconde transition de la cascade va nous permettre de mettre en évidence indirectement cet effet de sub-radiance.

- Transition  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  :

Pour interpréter la polarisation de l'émission sur cette transition, nous comparons les valeurs propres associées aux polarisations propres du système qui sont ici  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . Nous avons :

$$D_{\sigma_+} = \frac{1}{8} N_{m_j=+1/2} + \frac{1}{24} N_{m_j=-1/2}$$

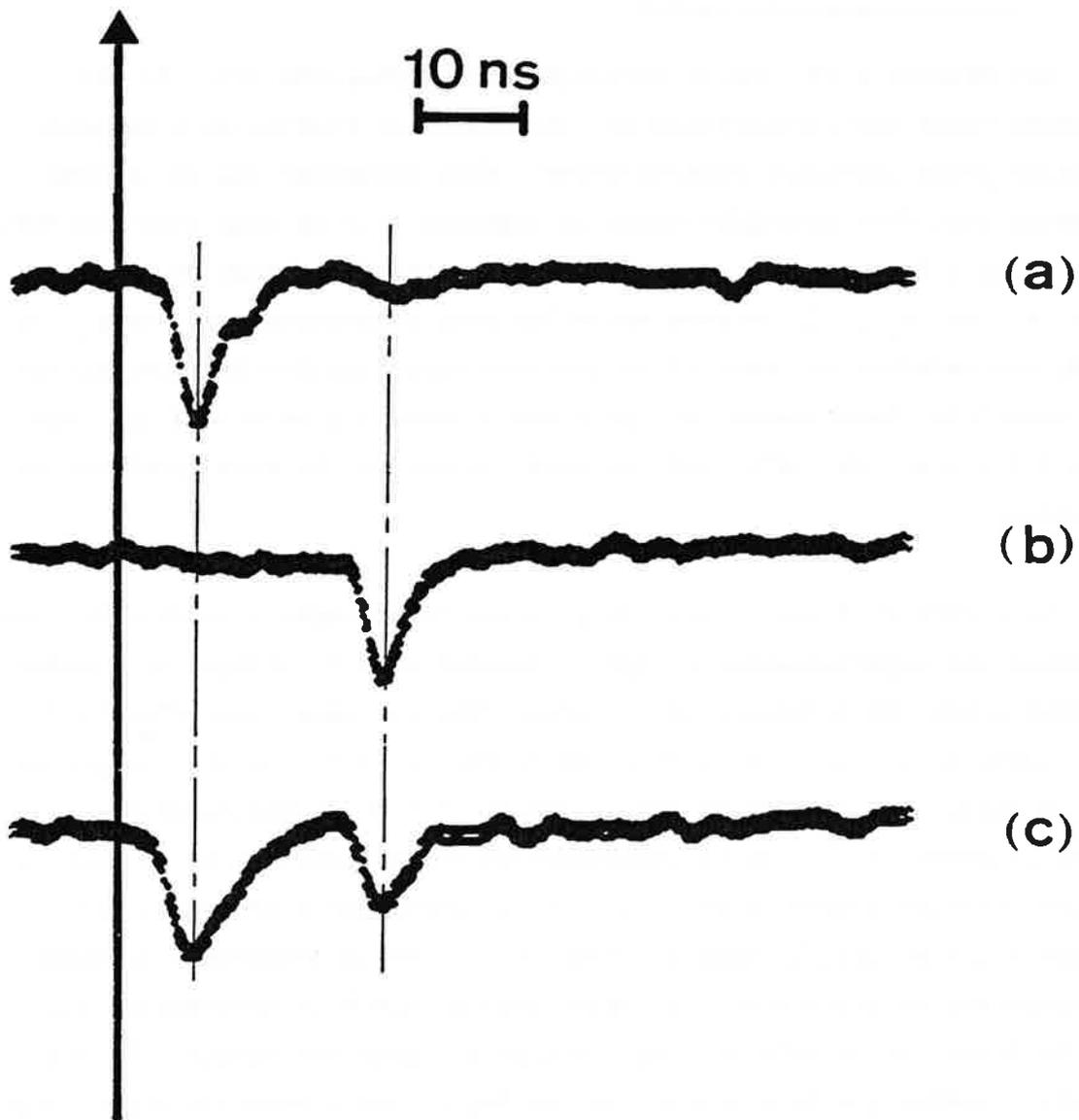
$$D_{\sigma_-} = \frac{1}{24} N_{m_j=+1/2} + \frac{1}{8} N_{m_j=-1/2}$$

où  $N_{m_j=+1/2}$  et  $N_{m_j=-1/2}$  sont les populations des niveaux  $m_j = +1/2$  et  $m_j = -1/2$  de  $6s_{1/2}$  à la fin de l'émission sur la transition  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ , que nous avons précédemment calculées. Dans ces conditions :

$$D_{\sigma_+} \approx 1,10 D_{\sigma_-}$$

La polarisation propre  $\sigma_+$  est donc légèrement plus favorable et l'émission superradiante suivant la polarisation  $\sigma_-$  doit en partie être inhibée. Un calcul sur ordinateur montre que l'émission suivant la polarisation  $\sigma_+$  l'emporte, comme il a été observé dans nos expériences. Ce résultat confirme l'existence d'une dissymétrie entre les populations des sous-niveaux Zeeman du niveau  $6s_{1/2}$ , elle-même conséquence d'un effet de subradiance sur la première partie de la cascade.

Lorsque l'excitation n'est pas saturante, la superradiance est totalement polarisée  $\sigma_+$  et l'émission suivant la polarisation  $\sigma_-$  complètement inhibée.



**laser pulse**

Figure IV-8

Enregistrements de signaux superradiants correspondant à la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ . Le premier pic de chaque trace correspond à une analyse de l'impulsion suivant une direction de polarisation et le deuxième pic suivant une direction orthogonale. L'axe de gauche correspond à l'origine des temps pour le premier pic.

b) Excitation polarisée linéairement.

- Cascade  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  (Figure IV-7-b).

- Transition  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$  :

Cet exemple a été traité théoriquement au Chapitre III. Il est présenté comme une illustration des propriétés de fluctuations de polarisation d'une impulsion superradiante. Nous rappelons que le système atomique peut être considéré comme la superposition de deux sous-systèmes identiques à deux niveaux auxquels sont associés les champs de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . Il se crée entre les deux composantes  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  du champ une relation de phase et en première approximation la superradiance est polarisée linéairement mais avec une direction aléatoire d'une impulsion à l'autre. Cet effet est interprété comme une brisure spontanée de symétrie.

La Figure IV-8 montre des enregistrements de signaux caractéristiques d'impulsions superradiantes analysées suivant deux directions de polarisations linéaires orthonormées, obtenues dans des conditions d'excitation identiques en utilisant le montage de la Figure IV-3. Le premier pic de chaque signal est enregistré par le détecteur 1 de la Figure IV-3. Il donne l'intensité  $\mathcal{J}_1$  de la composante du champ superradiant de polarisation linéaire transmise par les lames de germanium à Brewster. Le deuxième pic du signal donne l'intensité  $\mathcal{J}_2$  de la composante du champ superradiant de polarisation linéaire orthogonale à la précédente, qui est la direction de polarisation linéaire du laser excitateur. Un tel résultat montre que la polarisation des impulsions superradiantes fluctue de manière importante d'une impulsion à l'autre. Elle peut être quasiment polarisée linéairement suivant la direction du laser (cas b de la Figure IV-8) ou dans la direction perpendiculaire (cas a de la Figure IV-8). Toutes les situations intermédiaires possibles du type cas c ont également été rencontrées. De plus, une analyse suivant deux polarisations circulaires de sens opposés en utilisant toujours le montage de la

Figure IV-3 donne des signaux à peu près égaux pour les intensités maximales  $\int_{\sigma_+}^{\text{Max}}$  et  $\int_{\sigma_-}^{\text{Max}}$  des deux composantes  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  du champ.

Ces résultats prouvent le caractère aléatoire de la polarisation qui est, en première approximation, linéaire et de direction aléatoire d'une impulsion à l'autre. Nous allons, dans le chapitre qui suit, revenir sur l'étude de cette transition. Une analyse statistique nous a permis d'analyser plus complètement la polarisation et d'étudier le rôle de la structure hyperfine.

- Transition  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  :

La polarisation de l'émission sur la suite de la cascade présente également un caractère aléatoire. Comme dans le cas de la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ , nous avons analysé les impulsions superradiantes émises d'une part suivant deux directions de polarisation linéaire orthogonales et, d'autre part, suivant deux polarisations circulaires de sens opposés. Nous avons utilisé le montage donné par la Figure IV-4 car le dispositif de lames de germanium n'est pas adapté à la longueur d'onde de la transition  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ . Une telle analyse nous permet de conclure que la polarisation de la superradiance est, au moins en première approximation linéaire, de direction aléatoire d'une impulsion à l'autre. L'émission superradiante sur la transition  $j = 1/2 \rightarrow j' = 3/2$  offre une manifestation d'un phénomène de brisure spontanée de symétrie, comme celui rencontré pour la transition  $j = 1/2 \rightarrow j' = 1/2$ . Le niveau  $6s_{1/2}$  est peuplé par émission superradiante sur la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ . Bien que la matrice densité initiale du niveau  $6s_{1/2}$  soit invariante par rotation autour de l'axe Oz, l'émission superradiante est polarisée linéairement avec une direction arbitraire.

- Cascade  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  (Figure IV-7-d).

- Transition  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$  .

Cet exemple a été traité théoriquement au chapitre précédent. On a vu que les impulsions superradiantes étaient, comme nous l'avons observé expérimentalement, polarisées linéairement dans la même direction que l'excitation. Les cohérences créées au cours de l'excitation entre sous-niveaux Zeeman du niveau  $6p_{3/2}$  gardent la mémoire de la polarisation de l'excitation et la restituent lors de l'émission de l'impulsion.

- Transition  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  .

On observe pour la suite de la cascade une polarisation linéaire mais de direction aléatoire pour l'émission. Ce résultat s'interprète exactement de la même manière que dans le cas de la cascade  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  traitée précédemment. En effet la matrice densité du niveau  $6s_{1/2}$ , après émission sur la transition  $6p \rightarrow 6s$  est la même quel que soit le niveau  $6p$  initialement excité.

## 2. CAS DE LA CASCADE $6p \rightarrow 4d \rightarrow 5p$ .

Nous donnons maintenant l'interprétation des propriétés de polarisation de la superradiance sur la cascade  $6p \rightarrow 4d \rightarrow 5p$  . La superradiance ne se produit en général pas sur cette cascade et la totalité des atomes se désexcitent au profit du niveau  $6s$  . On a cependant montré [21] que, lorsque la durée de l'excitation du niveau supérieur d'un système superradiant en "A" est plus longue que le retard de l'impulsion superradiante émise sur la transition la plus probable, on observe également de la superradiance sur l'autre transition. L'émission superradiante sur la cascade  $6p \rightarrow 4d \rightarrow 5p$  se produit donc après celle sur la cascade  $6p \rightarrow 6s \rightarrow 5p$  . Pourvu que les impulsions sur la cascade  $6p \rightarrow 4d \rightarrow 5p$  présentent des retards plus grands que la durée de

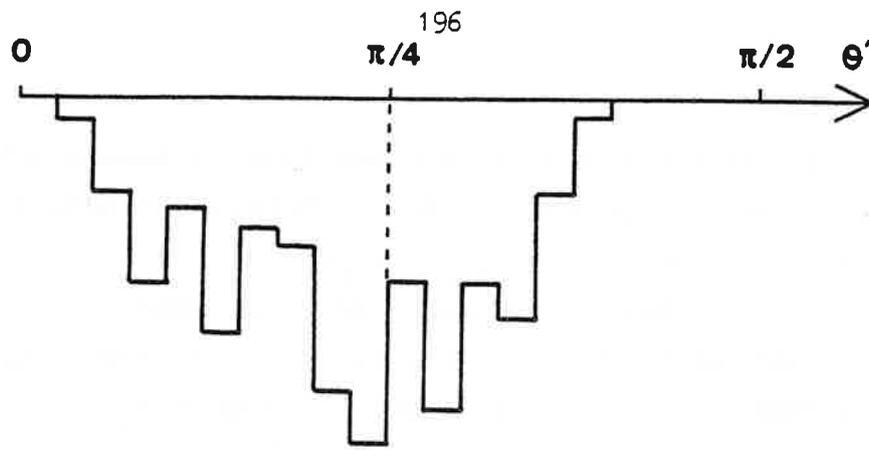
l'excitation et, dans la mesure où le niveau final de cascade est le niveau  $5p_{1/2}$ , il est justifié d'étudier l'émission sur cette cascade en ignorant l'autre cascade ( $6p \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ ).  
 sente les différents sous-niveaux Zeeman qui interviennent lors de l'émission. Les raisonnements et les calculs que l'on a effectués sont très semblables à ceux réalisés pour la cascade  $6p \rightarrow 6s \rightarrow 5p$ , nous insistons donc surtout sur les éléments nouveaux.

a) Cascade  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$  :

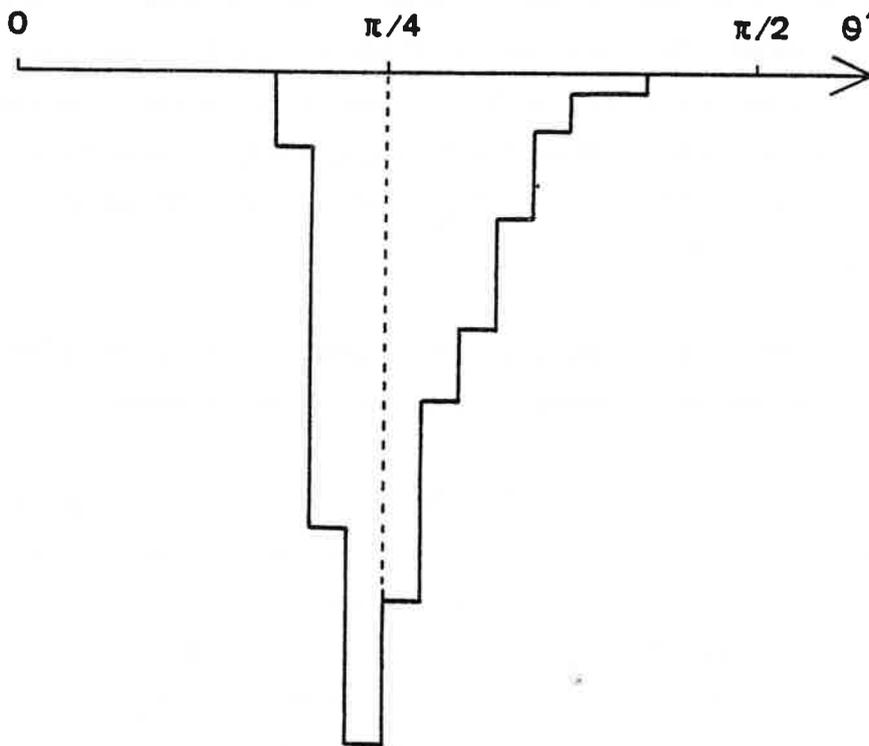
L'interprétation de la polarisation observée sur les différentes transitions de cette cascade peut être menée en utilisant les résultats établis précédemment tant dans le cas d'une excitation polarisée linéairement que dans le cas d'une excitation polarisée circulairement. On doit pour cela comparer la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$  avec la transition  $6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  et la transition  $4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$  avec la transition  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$ .

Lorsque l'excitation est polarisée circulairement, les effets d'inhibition permettent de comprendre la polarisation observée.

Lorsque l'excitation est polarisée linéairement, l'émission sur la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$  est polarisée linéairement mais avec une direction aléatoire. La suite de la cascade ( $4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$ ) est analogue à la transition  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2}$  lorsque le niveau  $6p_{3/2}$  est excité à partir du niveau  $5s_{1/2}$  par une impulsion laser polarisée linéairement. On en déduit que la polarisation de l'émission superradiante sur la transition  $4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$  est identique à celle de la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$ , c'est-à-dire linéaire avec la même direction aléatoire. Ce sont les cohérences créées, après émission sur la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$ , entre les sous-niveaux Zeeman du niveau  $4d_{3/2}$  qui gardent la mémoire de la direction aléatoire de la polarisation.



(b)



(a)

Figure IV-9

Histogrammes expérimentaux correspondant chacun à 140 impulsions analysées et étudiant les corrélations de la polarisation de la superradiance émise

sur les transitions de la cascade  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2} \rightarrow 5p_{1/2}$  :

a) analyse suivant la même polarisation ;

b) analyse suivant deux polarisations orthogonales.

Nous avons observé le caractère aléatoire de la polarisation sur les deux transitions lorsque l'excitation est polarisée linéairement. Nous avons également étudié la corrélation des polarisations sur les différentes parties de la cascade. A cette fin nous avons partagé l'impulsion superradiante en deux faisceaux. Nous avons placé sur chaque faisceau un filtre correspondant respectivement aux transitions  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$  et  $4d_{3/2} \rightarrow 5s_{1/2}$ . Nous avons ensuite analysé simultanément les deux faisceaux d'une part suivant la même direction de polarisation linéaire et, d'autre part, suivant deux directions de polarisation linéaires orthogonales (voir montage de la Figure IV-4). Nous avons tracé dans chacun de ces cas les histogrammes de distribution  $\mathcal{G}(\theta')$  où  $\theta'$  est défini comme :

$$\theta' = \text{Arctg} \sqrt{\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2}} \quad (\text{IV-III-1})$$

où  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  représentent les maximums de l'intensité des impulsions superradiantes des transitions  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$  et  $4d_{3/2} \rightarrow 5s_{1/2}$ . La Figure IV-9 montre l'allure des histogrammes obtenus. L'histogramme de la Figure IV-9-a, obtenu en analysant les impulsions suivant la même polarisation, est plus étroit que celui de la Figure IV-9-b, obtenu en les analysant suivant des polarisations perpendiculaires. Ce résultat est qualitativement en accord avec l'interprétation théorique donnée précédemment. Il est difficile d'obtenir un résultat plus quantitatif. Il est en effet difficile expérimentalement de calibrer correctement les détecteurs qui réagissent différemment pour les deux longueurs d'onde. De plus, comme nous le verrons dans le chapitre qui suit, le rôle de la structure hyperfine n'est pas complètement négligeable et doit être pris en compte si on veut interpréter plus complètement nos résultats.

b) Cascade  $6p_{3/2} \rightarrow 4d_{5/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  :

Les polarisations des impulsions superradiantes émises sur cette cascade sont bien déterminées, sans caractère aléatoire et correspondent toujours à la polarisation propre la plus favorable. L'étude des propriétés de polarisation permet de montrer que le niveau intermédiaire de

la cascade est le niveau  $4d_{5/2}$ . On remarque tout d'abord que la probabilité de transition de  $6p_{3/2} \rightarrow 4d_{5/2}$  est près de 9 fois plus grande que celle de  $6p_{3/2} \rightarrow 4d_{3/2}$ . Par ailleurs, dans le cas où l'excitation est polarisée circulairement  $\sigma_+$ , un calcul montre que, si le niveau intermédiaire est le niveau  $4d_{5/2}$ , l'émission superradiante est polarisée  $\sigma_+$  pour la transition  $6p_{3/2} \rightarrow 4d$  et  $\sigma_-$  pour la transition  $4d \rightarrow 5p_{1/2}$ . On obtient les polarisations circulaires de sens opposés pour les deux étages de la cascade lorsqu'on suppose que le niveau  $4d_{3/2}$  est le niveau intermédiaire. Les polarisations observées expérimentalement permettent donc d'affirmer que le niveau intermédiaire est bien le niveau  $4d_{5/2}$ .

### Conclusion.

Les propriétés de polarisation de l'émission spontanée coopérative ou superradiance sont très différentes de celles de l'émission spontanée ordinaire. Elles sont le résultat de couplages qui lient les différentes transitions entre sous-niveaux Zeeman et offrent une bonne illustration des effets nouveaux rencontrés en superradiance pour des systèmes à plusieurs niveaux. L'analyse des propriétés de polarisation a permis, en particulier, de mettre en évidence l'effet d'inhibition prédit pour un système à trois niveaux en "A" ou, plus indirectement, l'effet de subradiance pour un système à quatre niveaux. Le résultat le plus remarquable de ce chapitre concerne la polarisation linéaire de direction aléatoire de la superradiance sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$ . Nous allons, dans le chapitre qui suit, reprendre l'étude de ce cas en effectuant une analyse statistique détaillée de la polarisation des impulsions. Cette analyse permettra d'obtenir un ordre de grandeur expérimental des fluctuations que présente la superradiance d'un système à deux niveaux.



Bibliographie du Chapitre IV.

- [1] A. Crubellier, S. Liberman and P. Pillet, Phys. Rev. Letters 41, 1237 (1978).
- [2] A. Crubellier, S. Liberman, P. Pillet and M. G. Schweighofer, J. Phys. B 14, L 177 (1981).
- [3] A. Crubellier, C. Bréchnignac, Ph. Cahuzac and P. Pillet, Proceedings of the Fourth International Conference on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979).
- [4] N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. McGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. Letters 30, 309 (1973) ;  
voir également :  
N. Skribanowitz, I. P. Herman and M. S. Feld, Appl. Phys. Letters 21, 466 (1972) ;  
N. Skribanowitz, I. P. Herman, R. M. Osgood, Jr., M. S. Feld and A. Javan, Appl. Phys. Letters 20, 428 (1972) ;  
I. P. Herman, J. C. McGillivray, N. Skribanowitz and M. S. Feld, Laser Spectroscopy (p. 379), ed. R. G. Brewer and A. Mooradian ;  
N. Skribanowitz, Thèse, Institut de Technologie du Massachusetts (1972) : "Coherent effects in optically pumped HF gas".
- [5] M. Gross, C. Fabre, P. Pillet and S. Haroche, Phys. Rev. Letters 36, 1035 (1976) ;  
voir également :  
S. Haroche, C. Fabre, M. Gross and P. Pillet, in Atomic Physics 5, ed. R. Marrus, P. Prior et H. Shugart, Plenum, N. Y., 1977).
- [6] A. Flusberg, T. Mossberg and S. R. Hartmann, Phys. Letters 58A, 6, 373 (1976).
- [7] H. M. Gibbs, Q. H. F. Vrethen and H. M. J. Hikspoors, Phys. Rev. Letters 39, 547 (1977).
- [8] Q. H. F. Vrethen, H. M. J. Hikspoors and H. M. Gibbs, Phys. Rev. Letters 38, 764 (1977).

- [9] J. Marek, J. Phys. B 12, L229 (1979).
- [10] M. Gross, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Letters 40, 1711 (1978);  
voir également :  
J. M. Raimond, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI (1979).
- [11] Q. H. F. Vrehen, M. F. H. Schuurmans, Phys. Rev. Letters 42, 224 (1979).
- [12] N. W. Carlson, D. J. Jackson, A. L. Schalow, M. Gross, S. Haroche,  
Opt. Commun. 32, 350 (1980).
- [13] Q. H. F. Vrehen and J. J. der Weduwe, Phys. Rev. A 24, 2857 (1981) ;  
M. H. F. Schuurmans, Q. H. F. Vrehen, D. Polder and H. M. Gibbs,  
Advances in Atomic and Molecular Physics, vol. 17, p. 167 (1981) ;  
voit également :  
Q. H. F. Vrehen, Proceedings of the Fourth International Conference  
on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979).
- [14] C. Bréchnignac, Ph. Cahuzac, J. Physique Paris 40, L 123 (1979).
- [15] Ph. Cahuzac, H. Sontag and P. E. Toschek, Opt. Commun. 31, 37 (1979).
- [16] M. Gross, C. Fabre, P. Goy, S. Haroche et J. M. Raimond, Phys. Rev.  
Letters 43, 343 (1979).
- [17] F. Gounand, M. Hugon, R. P. Fournier and J. Berlande, J. Phys. B 12,  
547 (1979).
- [18] A. Crubellier, S. Liberman, D. Mayou, P. Pillet and M. G. Schweighofer,  
Opt. Letters 7, 16 (1982) ;  
voir également :  
D. Mayou, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1981) (non publiée).
- [19] A. N. Nesmeyanov, Vapour Pressure of the Chemical Elements, edited by  
R. Gary, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, London, New York (1963).
- [20] P. Jacquinet dans High Resolution Laser Spectroscopy, edited by  
K. Shimoda, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, p. 51 (1976).
- [21] P. Pillet, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1977)(non publiée).

Chapitre V

ETUDE EXPERIMENTALE DES PROPRIETES DE FLUCTUATIONS  
DE LA SUPERRADIANCE POUR LA TRANSITION  
 $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  DU RUBIDIUM



Pour préciser les résultats décrits au chapitre précédent concernant la polarisation aléatoire de l'émission sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$ , nous avons effectué une étude statistique de la polarisation des impulsions superradiantes. Cette étude a permis de confirmer le caractère aléatoire de la polarisation. Il apparaît cependant qu'il existe des directions de polarisation quelque peu privilégiées. Pour interpréter ces directions, il a été nécessaire de prendre en compte la structure hyperfine de l'atome. Cette étude nous a également permis d'étudier les fluctuations d'intensité et de retard d'un système à deux niveaux. Une transition  $1/2 \rightarrow 1/2$  est en effet équivalente à la superposition de deux sous-systèmes à deux niveaux identiques correspondant aux composantes du champ de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . Après chaque excitation du système on peut donc analyser deux impulsions respectivement de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  qui sont émises par des systèmes à deux niveaux rigoureusement identiques et dont les conditions initiales sont identiques. Cette étude a permis, en s'affranchissant des fluctuations expérimentales, de donner un ordre de grandeur des fluctuations d'intensité et de retard [1]. Finalement nous avons utilisé le caractère aléatoire de la polarisation pour établir un ordre de grandeur du bruit quantique dû à l'émission spontanée et responsable du démarrage de la superradiance.

## I - Fluctuations de la polarisation.

Pour étudier plus complètement la polarisation de la lumière émise sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  du rubidium, lorsque le niveau  $6p \ ^2P_{1/2}$  est excité à partir du fondamental  $5s \ ^2S_{1/2}$  par une impulsion laser polarisée linéairement, nous avons tracé des histogrammes correspondant aux distributions statistiques  $\mathcal{P}(\varphi')$  et  $\mathcal{P}(\theta')$  définies au Chapitre III (paragraphe III-2). Pour tracer l'histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$ , nous analysons chaque impulsion suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  et nous déduisons pour chaque impulsion l'angle :

$$\varphi' = \text{Arctg} \sqrt{\frac{J_{\sigma_+}^{\text{Max}}}{J_{\sigma_-}^{\text{Max}}}} \quad (\text{V-I-1})$$

où  $J_{\sigma_+}^{\text{Max}}$  et  $J_{\sigma_-}^{\text{Max}}$  correspondent aux maximums d'intensité émise avec les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . De même, pour tracer l'histogramme de distribution  $\mathcal{P}(\theta')$ , nous analysons chaque impulsion suivant deux directions  $x$  et  $y$  de polarisation linéaire perpendiculaires et nous calculons pour chaque impulsion l'angle  $\theta'$  :

$$\theta' = \text{Arctg} \sqrt{\frac{J_x^{\text{Max}}}{J_y^{\text{Max}}}} \quad (\text{V-I-2})$$

où  $J_x^{\text{Max}}$  et  $J_y^{\text{Max}}$  correspondent aux intensités maximales suivant les polarisations de direction  $x$  et  $y$ .

### 1. ELLIPTICITE DE LA POLARISATION.

Pour étudier l'ellipticité de la polarisation des impulsions super-radiantes, nous avons tracé l'histogramme de la distribution statistique

$\mathcal{P}(\varphi')$ . La Figure V-1 représente un histogramme expérimental typique correspondant à 200 impulsions analysées. En première approximation les signaux enregistrés par chacun des détecteurs sont égaux, l'histogramme est centré autour de la valeur moyenne de  $\varphi'$  ( $41,56^\circ$  pour l'histogramme expérimental de la Figure V-1). L'écart de cette valeur à la valeur  $45^\circ$  n'est pas reproductible d'un enregistrement à l'autre, il correspond à un artefact de l'expérience, dû à la difficulté d'obtenir une calibration du dispositif de détection. Cet histogramme présente de plus une certaine largeur. L'écart quadratique  $\Delta\varphi'$  autour de la valeur moyenne de  $\varphi'$  est donné par :

$$\Delta\varphi'_{\text{exp}} = 6,95^\circ \quad . \quad (V-I-3)$$

Cette valeur caractérise les fluctuations de l'ellipticité de la polarisation. Cet histogramme est comparé à un histogramme théorique (sur la Figure V-1) tracé pour des conditions correspondant aux conditions expérimentales. Cet histogramme théorique est centré autour de la valeur de  $\varphi'$  égale à  $45^\circ$  et son écart quadratique est donné par :

$$\Delta\varphi'_{\text{th}} = 4,17^\circ \quad . \quad (V-I-4)$$

La largeur de l'histogramme expérimental est légèrement plus grande que celle de l'histogramme théorique.

Pour évaluer l'élargissement de l'histogramme dû au dispositif d'analyse de notre montage expérimental, nous avons utilisé ce même dispositif expérimental pour analyser, suivant deux polarisations linéaires, des impulsions superradiantes polarisées circulairement, d'intensité comparable à celle des impulsions analysées pour l'histogramme de la Figure V-1. Ces impulsions sont obtenues par émission sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  lorsque le niveau  $6p \ ^2P_{1/2}$  est excité à partir du fondamental par une impulsion laser polarisée circulairement. Une telle analyse doit fournir des signaux égaux sur les deux détecteurs. Un histogramme de la distribution statistique  $\mathcal{P}(\theta')$  correspondant à 200 impulsions polarisées circulairement a été tracé. Cet histogramme est centré autour de la valeur  $43,56^\circ$  et l'écart quadratique de

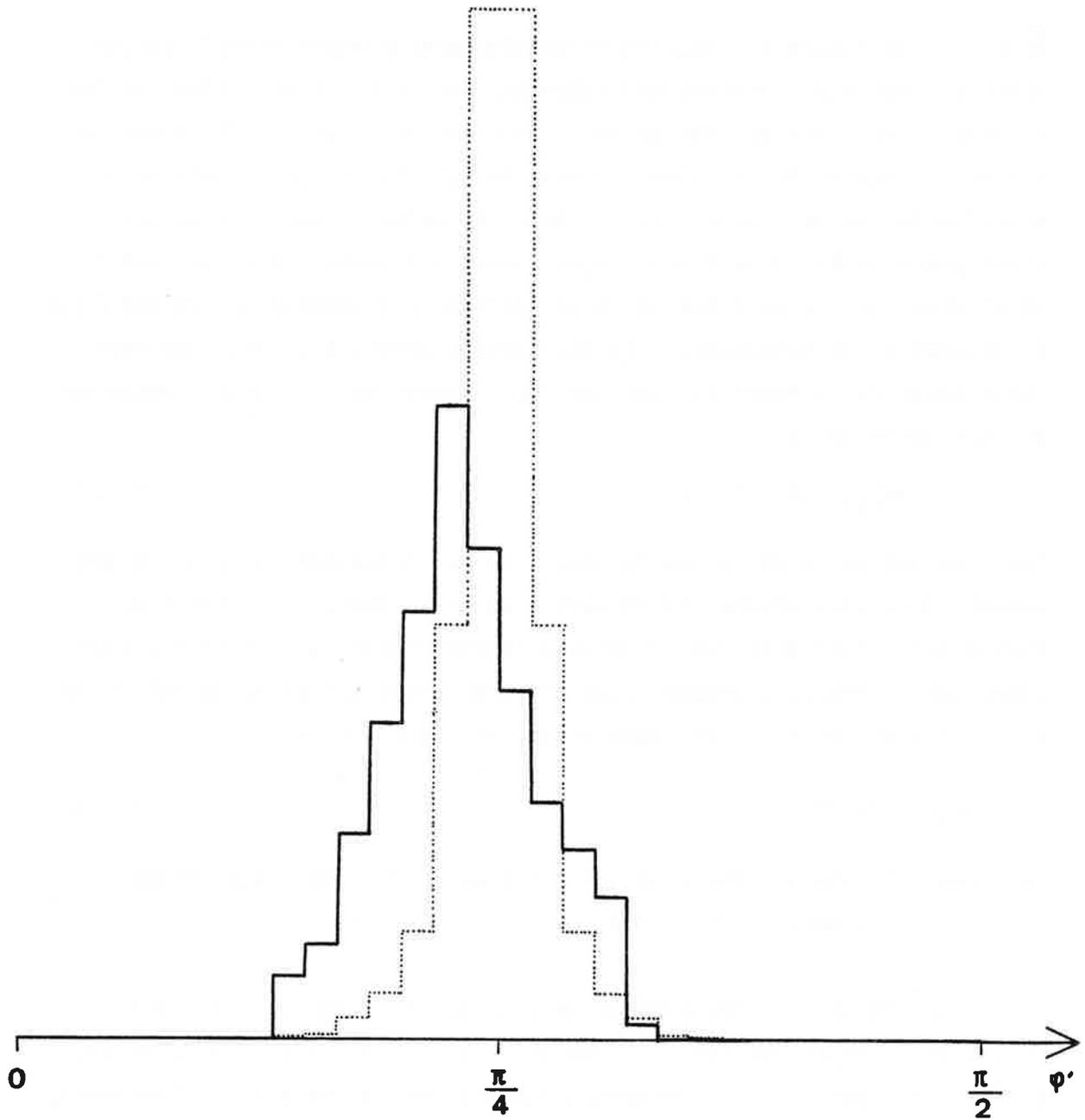


Figure V-1

En trait plein est représenté l'histogramme de la distribution ( $\varphi'$ ), obtenu en analysant 200 impulsions pour des conditions expérimentales correspondant à une température de la cellule de 80°C et à une section du faisceau de l'ordre du  $\text{mm}^2$ . Superposé à cet histogramme, en pointillés, est représenté l'histogramme théorique correspondant.

l'angle  $\theta'$  est égal à :

$$\Delta\theta' = 2,80^\circ \quad (V-I-5)$$

Cette étude complémentaire permet de donner une idée de la limite des possibilités d'analyse de notre montage. Elle peut en particulier expliquer l'élargissement de l'histogramme expérimental par rapport à l'histogramme théorique sur la Figure V-1. L'élargissement de l'histogramme de la Figure V-1 peut également être expliqué en tenant compte du fait que l'intensité des signaux obtenus est fonction du point de focalisation sur la surface sensible des détecteurs photovoltaïques AsIn. Des fluctuations de la géométrie du faisceau laser excitateur modifient le mode d'émission superradiant et la tache que forme le faisceau superradiant sur la surface sensible des détecteurs. Il est ainsi difficile d'obtenir une calibration exacte de notre dispositif expérimental.

## 2. FLUCTUATIONS DE DIRECTION DE LA POLARISATION.

L'histogramme expérimental de la Figure V-1 permet de montrer qu'en moyenne les impulsions superradiantes présentent une légère ellipticité en bon accord avec les prévisions théoriques. Pour étudier la distribution de la direction des axes de l'ellipse, nous traçons l'histogramme de la distribution statistique  $\mathcal{P}(\theta')$  précédemment définie. Les Figures V-2-a,b,c,d,e montrent de tels histogrammes expérimentaux. Les histogrammes a, b, c ont été obtenus dans les mêmes conditions d'excitation pour une polarisation du faisceau laser linéaire dont la direction est parallèle à celle de la polarisation réfléchiée par la lame de germanium à Brewster (détectée sur le détecteur 2 de la Figure V-3). L'histogramme d a été obtenu pour une direction de la polarisation du faisceau laser perpendiculaire à la précédente et l'histogramme e pour une direction faisant un angle de  $45^\circ$ . Ces histogrammes doivent être tous comparés avec l'histogramme théorique donné par la Figure V-2-f. Ce dernier histogramme est évidemment indépendant de la direction de la polarisation linéaire de l'excitation et a été calculé pour des conditions analogues à

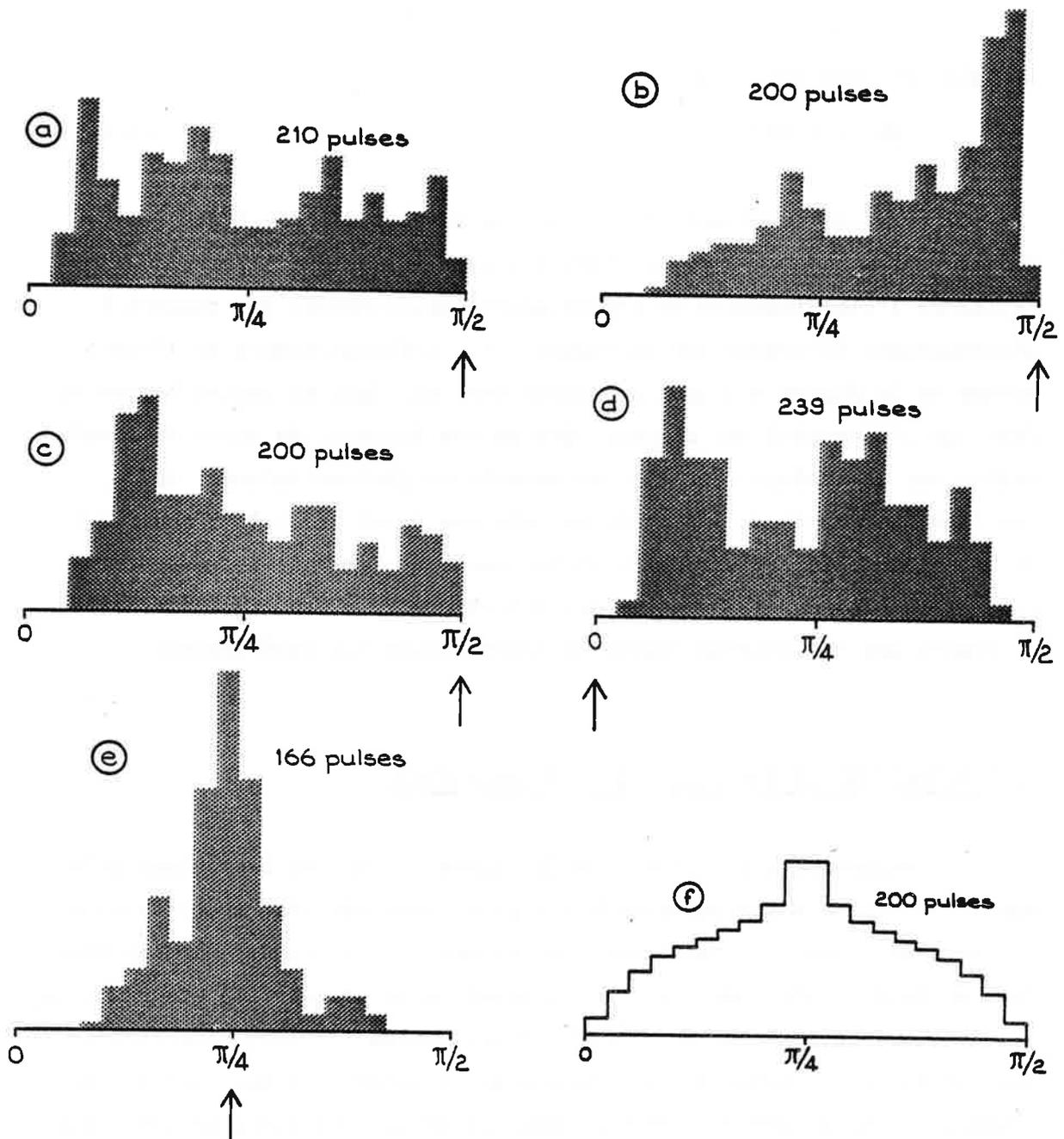


Figure V-2

(a) à (e) : Histogrammes expérimentaux de la distribution  $\mathcal{P}(\theta')$ . La valeur de  $\theta'$  correspondant à la direction de la polarisation de la lumière excitatrice est indiquée par une flèche. Les conditions expérimentales correspondant à tous ces histogrammes sont de  $80^\circ\text{C}$  pour la température de la cellule et de  $0,5 \text{ mm}^2$  pour la section du faisceau laser. (f) Histogramme théorique.

celles des histogrammes expérimentaux. La forme des histogrammes expérimentaux a, b, c, d, e dépend fortement de la direction de la polarisation linéaire de l'excitation. En particulier l'histogramme e est très nettement différent des autres. De plus, la forme des histogrammes obtenus pour des conditions de polarisation de l'excitation rigoureusement identiques (a, b, c) n'est pas rigoureusement reproductible.

Plusieurs origines possibles ont été suspectées pour expliquer ce désaccord inattendu et ont successivement été examinées. Nous avons tout d'abord testé l'influence du champ magnétique terrestre. A cette fin nous avons orienté l'axe du volume cylindre allongé où sont contenus les atomes de rubidium suivant différentes directions. Nous avons également enfermé la cellule contenant les atomes à l'intérieur d'une double boîte en mu-métal (le four est en matière diamagnétique) et, finalement, nous l'avons placé à l'intérieur d'un champ magnétique de l'ordre de 50 gauss fourni par des bobines de Helmholtz que nous avons orientées dans différentes directions. Ces divers tests n'ont pas modifié nos résultats et nous avons conclu que le champ magnétique terrestre ne jouait aucun rôle.

Nous avons soupçonné également un éventuel champ magnétique ou électrique résiduel dû au filament de chauffage de notre four. L'inertie calorifique de celui-ci étant importante, nous avons pu enregistrer des histogrammes une fois le système de chauffage du four coupé sans que la température varie de manière trop importante. Les histogrammes enregistrés dans ces conditions présentent les mêmes caractéristiques que ceux de la Figure V-2.

Nous avons enfin étudié l'effet d'une éventuelle anisotropie des fenêtres de la cellule ou d'une anisotropie introduite par la géométrie du faisceau laser en faisant effectuer une rotation autour de l'axe de propagation de la superradiance à divers éléments du montage expérimental sans modifier les résultats donnés par la Figure V-2.

Finalement, pour expliquer qualitativement les caractéristiques des histogrammes expérimentaux, il est nécessaire de prendre en compte à la fois la structure hyperfine des atomes et les instabilités en fréquence du faisceau laser.

### 3. INFLUENCE DE LA STRUCTURE HYPERFINE.

Nous avons affirmé au Chapitre IV que le rôle de la structure hyperfine est négligeable dans nos expériences puisque les temps de couplage hyperfin sont plus longs que les temps caractéristiques  $T_{SR}$  de la superradiance correspondant aux différentes transitions qui, ici, sont une fraction de nanoseconde (voir Tableau IV-2). En fait, les temps de couplage hyperfin ne sont pas en général beaucoup plus grands que les temps caractéristiques de superradiance et l'influence de la structure hyperfine peut en deuxième approximation n'être pas complètement négligeable.

La structure hyperfine peut affecter l'évolution du système par une éventuelle apparition de battements [2,3,4]. Nous avons effectivement, dans certaines conditions, observé des battements sur la forme de nos impulsions superradiantes. La présence de deux isotopes impairs,  $^{85}\text{Rb}$  et  $^{87}\text{Rb}$ , dans la vapeur fait qu'un grand nombre de fréquences interviennent. Dans nos conditions expérimentales, les battements étaient en général peu visibles et nous ne les avons pas étudiés. On peut trouver une analyse de ces battements dans la référence [4], où des fréquences correspondant à des écarts hyperfins et isotopiques sont mis en évidence.

L'analyse complète de l'influence de la structure hyperfine sur les propriétés de polarisation dans nos expériences est complexe et difficile. Nous devons en effet considérer un grand nombre de niveaux hyperfins, 24 pour l'isotope 85 du rubidium et 16 pour l'isotope 87. Nous avons effectué une analyse théorique des propriétés de polarisation de l'émission en tenant simplement compte de l'évolution au commencement de l'émission, c'est-à-dire lorsque les équations d'évolution peuvent s'écrire dans

l'approximation linéaire. Ce traitement permet d'interpréter les directions privilégiées qui apparaissent sur les histogrammes de la Figure V-2.

La Figure V-3 représente la structure hyperfine des niveaux  $6p\ ^2P_{1/2}$ ,  $6s\ ^2S_{1/2}$  et  $5s\ ^2S_{1/2}$ . Nous avons supposé dans notre traitement que la dégénérescence du niveau  $6s\ ^2S_{1/2}$  est levée mais pas celle du niveau  $6p\ ^2P_{1/2}$ . En effet, on peut admettre que le temps caractéristique associé à la structure hyperfine du niveau  $6p\ ^2P_{1/2}$  est très grand devant le temps caractéristique de la superradiance. Nous avons calculé les polarisations propres pour les différentes transitions  $6p\ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s\ ^2S_{1/2}$  IF des deux isotopes du rubidium, ainsi que les valeurs propres correspondantes.

La prise en compte seule de la structure hyperfine ne suffit pas à expliquer la forme des histogrammes expérimentaux. On montre en effet, qu'au début de l'émission, les polarisations ne sont pas déterminées, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de direction privilégiée, que l'on prenne ou non en compte la structure hyperfine du niveau  $6s\ ^2S_{1/2}$ . Pour comprendre la forme des histogrammes de la Figure V-2, nous devons tenir compte également de la structure hyperfine du niveau fondamental  $5s\ ^2S_{1/2}$ , qui intervient lors de l'excitation des atomes.

Dans le traitement que nous venons d'exposer brièvement, nous avons implicitement supposé que la structure hyperfine du niveau fondamental n'intervenait pas. Cette hypothèse est parfaitement justifiée si la largeur spectrale du laser excitateur est plus grande que les écarts hyperfins du niveau fondamental  $5s\ ^2S_{1/2}$  pour les deux isotopes du rubidium. C'est bien le cas dans nos expériences, puisqu'elle est de l'ordre de 9 GHz. Cependant la stabilité en fréquence du laser qui produit nos impulsions excitatrices n'est pas meilleure que 20 GHz. Dans ces conditions l'un ou l'autre des niveaux hyperfins du fondamental peut être favorisé au cours de l'excitation, et ceci d'une manière imprévisible et variable d'une impulsion à l'autre. Nous n'avons pas essayé de décrire réellement une telle excitation, nous avons simplement envisagé les deux cas extrêmes où l'excitation a lieu seulement à partir de l'un des niveaux hyperfins du fondamental. Dans ces deux cas, nous avons calculé pour

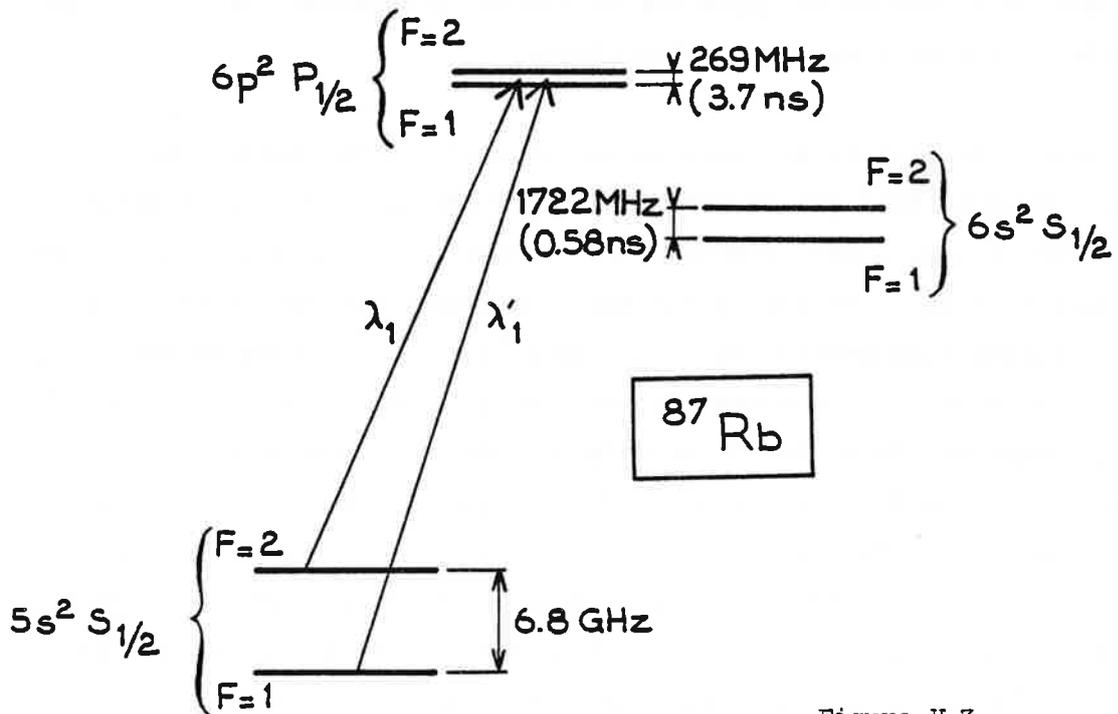
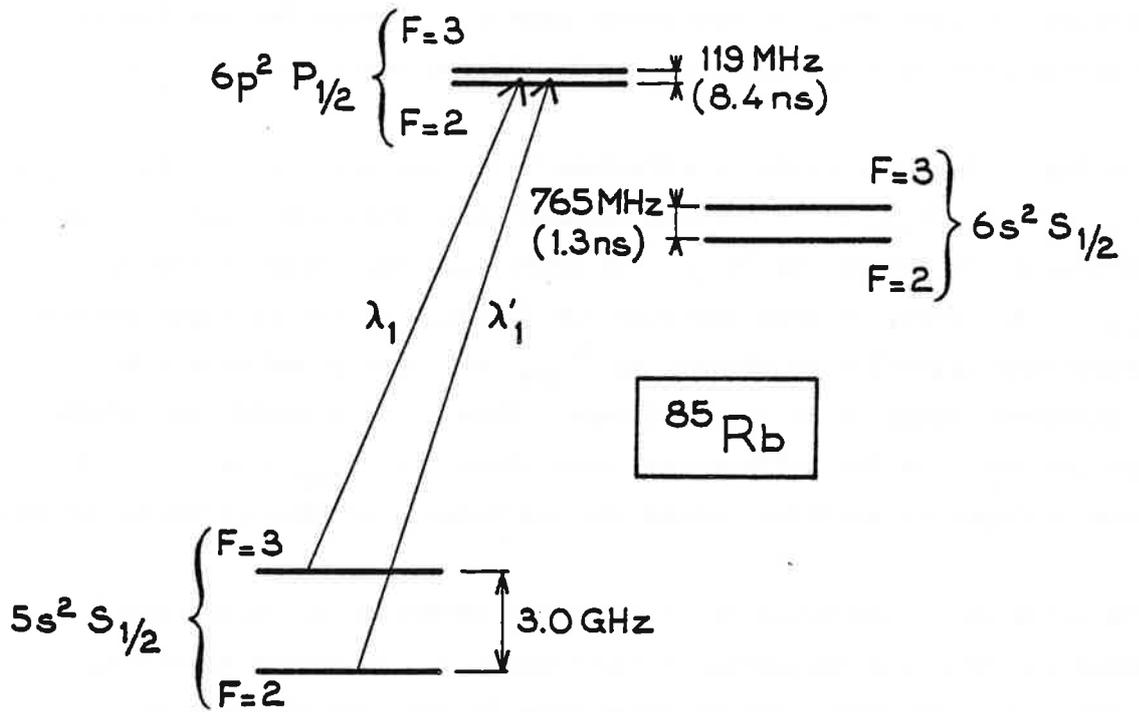


Figure V-3

Ecarts hyperfins des niveaux du rubidium pour les isotopes  $^{85}\text{Rb}$  (72%) et  $^{87}\text{Rb}$  (28%). Les constantes de temps correspondantes sont indiquées entre parenthèses.

chaque isotope les polarisations propres et les valeurs propres associées pour les différentes transitions  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2} \text{ IF}$ . Les polarisations propres sont dans tous les cas la polarisation du laser et la polarisation orthogonale. On montre, en comparant les valeurs propres obtenues dans chaque cas, que, lorsque l'excitation a lieu à partir du niveau hyperfin  $F=3$  pour l'isotope 85 et  $F=2$  pour l'isotope 87, la polarisation identique à celle du faisceau laser est favorisée ; au contraire, lorsque l'excitation a lieu à partir du niveau  $F=2$  pour l'isotope 85 et  $F=1$  pour l'isotope 87, la polarisation orthogonale à celle du faisceau laser l'emporte. Au hasard des fluctuations en fréquence du laser, l'une ou l'autre des polarisations propres va donc être privilégiée. Ceci explique en particulier l'existence de pics sur les histogrammes expérimentaux de la Figure V-2 correspondant à la direction de la polarisation du laser et à la direction perpendiculaire. On explique également ainsi le caractère non reproductible des histogrammes d'un enregistrement à l'autre. En effet le réglage de la fréquence du laser joue un rôle important. Nous avons pu réaliser des histogrammes en favorisant l'excitation à partir d'un niveau hyperfin du fondamental. Signalons par exemple que l'histogramme b (resp. c) de la Figure V-2 correspond à un déplacement très léger vers le rouge (resp. vers le bleu) de la longueur d'onde excitatrice par rapport à la résonance, c'est-à-dire que l'on favorise l'excitation à partir du niveau hyperfin  $F=3$  pour l'isotope 85 (resp.  $F=2$ ) et  $F=2$  pour l'isotope 87 (resp.  $F=1$ ).

La prise en compte de la structure hyperfine n'a pas d'influence sur l'interprétation de l'histogramme expérimental de la Figure V-1. En effet dans notre traitement théorique nous ne prévoyons pas de modifications dues à la structure hyperfine pour l'intensité du champ rayonné suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , nous nous attendons seulement à des modifications de la phase entre ces deux composantes du champ. Dans ces conditions, l'histogramme théorique de la Figure V-1 ne doit pas être modifié quand on prend en compte la structure hyperfine. Nous pouvons noter que l'histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$  caractérise l'ellipticité de la polarisation des impulsions. Cette ellipticité fait apparaître, sur

l'histogramme de distribution  $\mathcal{P}(\theta')$ , un pic pour la valeur  $\theta' = \frac{\pi}{4}$  (voir l'histogramme théorique de la Figure V-2). Cet effet explique en particulier le caractère peu étalé de l'histogramme V-2-e. En effet, pour cet histogramme, les pics dus aux directions de polarisation privilégiées et à l'ellipticité de la polarisation se produisent tous pour la valeur  $\theta' = \frac{\pi}{4}$ .

Pour tous les histogrammes de la Figure V-2, le caractère aléatoire de la polarisation est grossièrement conservé, bien que la structure hyperfine modifie quelque peu leur forme en faisant apparaître deux directions plus ou moins privilégiées. Dans l'interprétation de nos expériences, la structure hyperfine n'a d'influence que pour les polarisations de la superradiance présentant un caractère aléatoire et ne joue pas de rôle pour les polarisations bien déterminées.

II - Fluctuations de l'émission superradiante  
d'un système à deux niveaux.

La transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  est une transition  $j=1/2 \rightarrow j'=1/2$  du type de celle que nous avons décrite théoriquement au Chapitre III. Lorsque le niveau  $6p \ ^2P_{1/2}$  est excité à partir du niveau fondamental  $5s \ ^2S_{1/2}$  par une impulsion laser polarisée linéairement, le système atomique associé à la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  est équivalent à la superposition de deux sous-systèmes identiques associés aux composantes du champ de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , qui évoluent de manière complètement indépendante. Après chaque excitation, si l'on détecte séparément les composantes du champ polarisées  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , on enregistre deux impulsions superradiantes correspondant respectivement aux transitions :

$$6p \ ^2P_{1/2}, m_j = -1/2 \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}, m_j = +1/2$$

et  $6p \ ^2P_{1/2}, m_j = +1/2 \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}, m_j = -1/2$  .

Les populations des sous-niveaux Zeeman de  $6p \ ^2P_{1/2}$  sont égales et les impulsions superradiantes émises suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  correspondent à des impulsions émises par deux systèmes à deux niveaux semblables et excités de manière identique. Après chaque excitation du niveau  $6p \ ^2P_{1/2}$ , on peut donc détecter deux impulsions de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  dont on peut affirmer qu'elles correspondent à des conditions d'excitation rigoureusement identiques. L'étude de la polarisation de la lumière superradiante émise sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  permet donc d'étudier les fluctuations macroscopiques de la superradiance d'un système à deux niveaux en s'affranchissant des fluctuations expérimentales.

Remarque : Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la structure hyperfine n'est pas complètement négligeable. Cependant on a vu également que, si la structure hyperfine peut modifier le caractère aléatoire de la

phase relative entre les composantes du champ de polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , elle ne joue pas de rôle quant à leur intensité. La structure hyperfine ne modifie pas l'analyse que l'on peut faire des impulsions superradiantes suivant la polarisation  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  et donc elle ne modifie pas les résultats que nous avons obtenus et que nous exposons concernant les fluctuations macroscopiques d'un système superradiant à deux niveaux.

Les fluctuations de la superradiance sont une des manifestations du caractère quantique de l'émission. On a vu en effet que l'émission superradiante démarre sur l'émission spontanée. On conçoit dans ces conditions que la superradiance présente certaines caractéristiques de l'émission spontanée. En particulier, les fluctuations quantiques de l'émission spontanée du début de l'évolution se retrouvent amplifiées et se manifestent sous la forme de fluctuations macroscopiques du retard, de l'intensité et de la forme des impulsions.

Sur le plan théorique, plusieurs groupes ont étudié le problème des fluctuations de superradiance et proposé divers traitements donnant un ordre de grandeur de ces fluctuations pour un système à deux niveaux [1,5,6,7,8,9]. Sur le plan expérimental, une étude des fluctuations du retard des impulsions superradiantes a été réalisée en utilisant deux échantillons atomiques différents [10].

Nous exposons ici une étude expérimentale des fluctuations d'intensité et de retard [1] en n'utilisant qu'un seul échantillon atomique et nous comparons les résultats expérimentaux avec ceux que nous avons obtenus théoriquement.

## 1. FLUCTUATIONS D'INTENSITE.

Pour caractériser les fluctuations des maximums d'intensité d'un système à deux niveaux, nous avons utilisé la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$ . On rappelle que  $\varphi'$  est défini par :

$$\varphi' = \text{Arctg} \sqrt{\rho_y} \quad (\text{V-II-1})$$

où  $\rho_y$  est le rapport :

$$\rho_y = \frac{J_{\sigma_+}^{\text{Max}}}{J_{\sigma_-}^{\text{Max}}} \quad (\text{V-II-2})$$

Le rapport  $\rho_y$  dépend peu en première approximation du nombre  $N$  d'atomes excités et permet d'étudier les fluctuations d'intensité, sans avoir à se préoccuper des fluctuations d'ordre expérimental qui, d'une excitation à l'autre, peuvent changer plus ou moins les conditions de l'expérience. L'histogramme expérimental ou théorique de la Figure V-1 caractérise les fluctuations d'intensité d'un système à deux niveaux, dont on peut chiffrer l'importance par l'écart quadratique  $\Delta\varphi'$ .

On a vu que dans la Figure V-1 :

$$\Delta\varphi'_{\text{exp}} = 6,95^\circ \quad (\text{V-II-3})$$

et  $\Delta\varphi'_{\text{th}} = 4,17^\circ \quad (\text{V-II-4})$

On déduit de ces valeurs des valeurs de la variance de  $\rho_y$

$$\sigma^{\text{exp}}(\rho_y) = \left( \frac{\langle \rho_y^2 \rangle - \langle \rho_y \rangle^2}{\langle \rho_y \rangle^2} \right)^{1/2} \approx 50\% \quad (\text{V-II-5})$$

( $\langle \rho_y \rangle$  signifie que l'on a pris la moyenne de  $\rho_y$  pour toutes les impulsions) et :

$$\sigma^{\text{th}}(\rho_y) = 30\% \quad (\text{V-II-6})$$

Pour obtenir un ordre de grandeur de fluctuations des maximums d'intensité d'un système à deux niveaux, nous avons établi une relation approchée qui relie l'écart quadratique  $\Delta\varphi'$  à la variance du maximum d'intensité. A cette fin nous avons supposé que la distribution des maximums de l'amplitude du champ émis est gaussienne (hypothèse qui est à peu près justifiée si on considère la forme des histogrammes donnés dans la référence [6]). Cette hypothèse nous a permis de montrer que la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$  est alors également gaussienne (ce qui est en accord

avec les formes des histogrammes tant théorique qu'expérimental de la Figure V-1). On en déduit la relation :

$$\sigma(\gamma^{\text{Max}}) = \left( \frac{\langle \gamma^{\text{Max} 2} \rangle - \langle \gamma^{\text{Max}} \rangle^2}{\langle \gamma^{\text{Max}} \rangle^2} \right)^{1/2} = \sqrt{8} \Delta\varphi' \quad (\text{V-II-7})$$

où  $\Delta\varphi'$  est exprimé en radians. L'histogramme expérimental de la Figure V-1 permet de donner la variance du maximum de l'intensité du champ :

$$\sigma^{\text{exp}}(\gamma^{\text{Max}}) \simeq 35\% \quad , \quad (\text{V-II-8})$$

valeur que l'on doit comparer à la valeur déduite de l'histogramme théorique de la Figure V-1 :

$$\sigma^{\text{th}}(\gamma^{\text{Max}}) = 20,5\% \quad . \quad (\text{V-II-9})$$

Cette dernière valeur est en bon accord avec la valeur théorique donnée dans la référence [6] qui prévoit une valeur de 18%. La valeur expérimentale est passablement plus élevée que les valeurs théoriques. On a vu que l'erreur sur la mesure de  $\Delta\varphi'$  est de l'ordre de  $3^\circ$ , ce qui nous conduit à une estimation de la variance du maximum d'intensité de la superradiance d'un système à deux niveaux :

$$\sigma(\gamma^{\text{Max}}) = 35 \pm 15\% \quad . \quad (\text{V-II-10})$$

Les valeurs expérimentales et théoriques sont alors compatibles.

Remarque : Pour bien se persuader de l'importance de disposer de deux systèmes identiques pour étudier les fluctuations macroscopiques de la superradiance, nous comparons la valeur de la variance du maximum d'intensité d'un système à deux niveaux déduite des expériences, qui est de 35%, à celle que l'on aurait obtenue expérimentalement si l'on ne disposait que d'un seul système à deux niveaux après chaque excitation - par exemple le système à deux niveaux associé au champ  $\sigma_+$  ou  $\sigma_-$ . On aurait trouvé :

$$\sigma^{\text{exp}}(\gamma_{\sigma_+}^{\text{Max}}) = \sigma^{\text{exp}}(\gamma_{\sigma_-}^{\text{Max}}) = 45\% \quad . \quad (\text{V-II-11})$$

Les fluctuations expérimentales augmenteraient de manière importante la valeur trouvée pour la variance.

2. FLUCTUATIONS DE RETARD.

Pour caractériser les fluctuations de retard des impulsions superradiantes émises par un système à deux niveaux, nous avons utilisé la distribution  $\mathcal{P}(X)$  où  $X$  est défini par :

$$X = \text{Arctg } \rho_T \quad (\text{V-II-12})$$

où :

$$\rho_T = \frac{T_{D\sigma_+}}{T_{D\sigma_-}} \quad (\text{V-II-13})$$

où  $T_{D\sigma_+}$  et  $T_{D\sigma_-}$  sont respectivement les retards des impulsions superradiantes émises suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . Le choix de ce rapport est justifié dans la mesure où, en première approximation, il dépend, comme le rapport  $\rho_J$  (V-II-2), peu du nombre d'atomes excités.

Les impulsions analysées pour l'histogramme expérimental de la Figure V-1 permettent également d'obtenir un histogramme de distribution  $\mathcal{P}(X)$ , représenté sur la Figure V-4. Sur cette même figure il est comparé à un histogramme théorique calculé pour les mêmes conditions que l'histogramme expérimental. En première approximation, les signaux obtenus sur les deux détecteurs de la Figure IV-3 présentent le même retard et l'histogramme est centré autour de la valeur  $45^\circ$  ( $42,8^\circ$  pour l'histogramme expérimental de la Figure V-4). Comme pour l'histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$ , l'écart de la valeur moyenne de l'angle  $X$  à la valeur  $45^\circ$  n'est pas reproductible ; il est essentiellement dû à la difficulté de déterminer avec précision l'origine des temps sur les deux voies d'analyse. Cet histogramme présente une certaine largeur et l'écart quadratique de  $X$  est donné par :

$$\Delta X_{\text{exp}} = 8,40^\circ \quad (\text{V-II-14})$$

valeur qui doit être comparée à celle qui correspond à l'histogramme théorique, qui est :

$$\Delta X_{\text{th}} = 7,84^\circ \quad (\text{V-II-15})$$

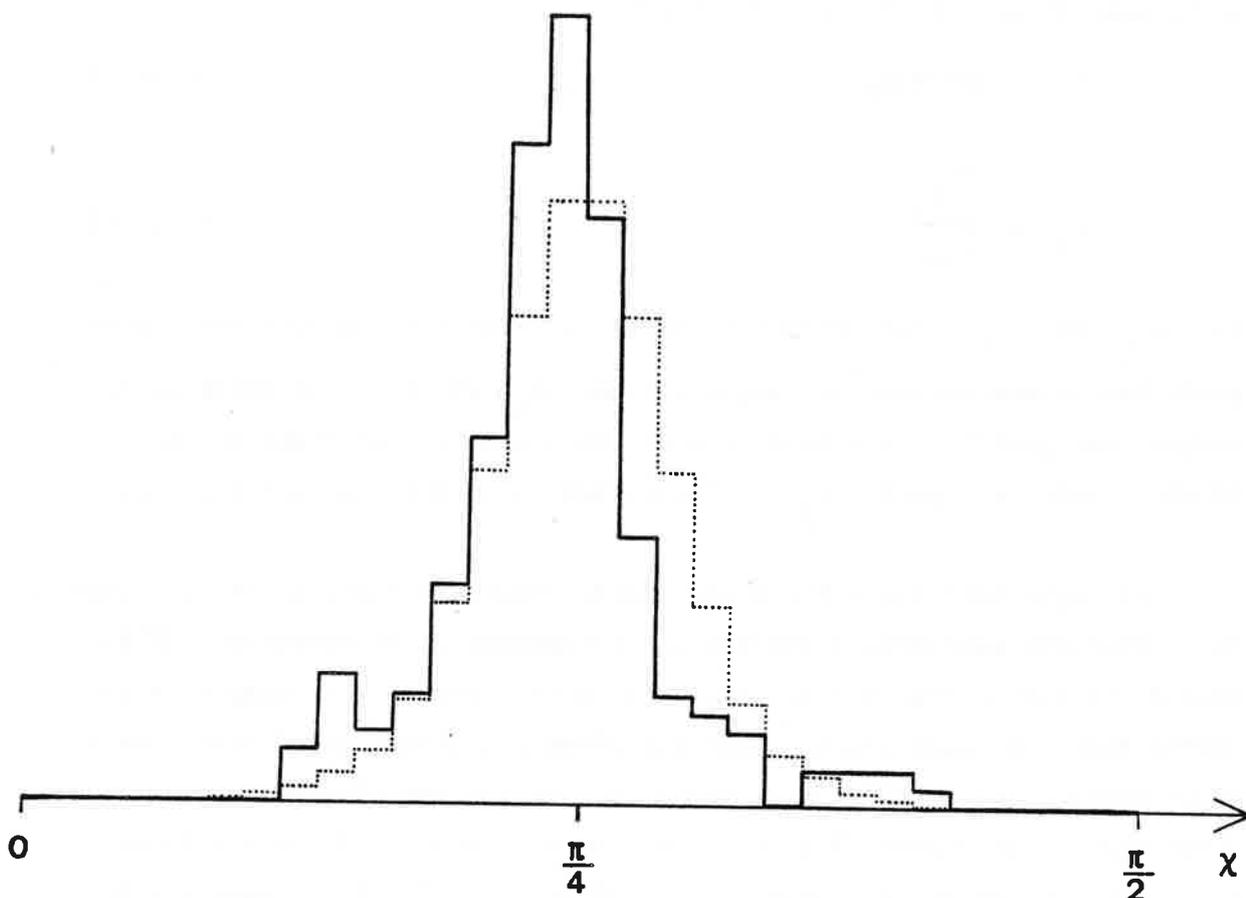


Figure V-4

En trait plein est représenté l'histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(X)$ , obtenu en analysant 200 impulsions pour des conditions expérimentales correspondant à une température de la cellule de  $80^{\circ}\text{C}$  et à une section du faisceau laser de l'ordre du  $\text{mm}^2$ . L'écart de la valeur moyenne de l'histogramme par rapport à la valeur  $\frac{\pi}{4}$  correspond à une incertitude d'une demi nanoseconde sur l'origine des temps. Superposé à cet histogramme, en pointillés, est représenté l'histogramme théorique correspondant.

Pour estimer les limites des possibilités d'analyse de notre montage expérimental ainsi que pour estimer l'erreur commise sur la valeur de  $\Delta X_{\text{exp}}$ , nous avons, comme dans le cas de l'histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\varphi')$ , analysé des impulsions polarisées circulairement, obtenues par émission superradiante sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  lorsque le niveau  $6p \ ^2P_{1/2}$  est excité à partir du fondamental par une impulsion laser polarisée circulairement. Si on analyse ces impulsions superradiantes suivant deux polarisations linéaires orthogonales, on obtient des signaux présentant en principe exactement le même retard. En traçant, pour 200 de ces impulsions, un histogramme de la distribution  $\mathcal{P}(\Psi)$  où  $\Psi$  est défini par :

$$\Psi = \text{Arctg} \frac{T_{Dx}}{T_{Dy}} \quad (\text{V-II-16})$$

( $T_{Dx}$  et  $T_{Dy}$  étant le retard obtenu sur chacune des voies d'analyse), nous avons obtenu un écart quadratique :

$$\Delta \Psi_{\text{exp}} = 2,08^\circ \quad (\text{V-II-17})$$

Nous estimons ainsi que l'erreur sur la valeur  $\Delta X_{\text{exp}}$  est au moins de  $2^\circ$ . Il y a un bon accord entre la valeur expérimentale (V-II-14) de l'écart quadratique  $\Delta X$  et sa valeur théorique (V-II-15). On obtient, pour la variance de  $\rho_T$ , dans les deux cas :

$$\sigma(\rho_T) \simeq 35\% \quad (\text{V-II-18})$$

On peut déduire de nos expériences une valeur de la variance du retard des impulsions superradiantes émis par un système à deux niveaux. Cette variance est donnée par :

$$\sigma(T_D) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta (T_{D\sigma_+} - T_{D\sigma_-})}{\frac{1}{2} \langle T_{D\sigma_+} + T_{D\sigma_-} \rangle} \quad (\text{V-II-19})$$

Dans le cas de l'histogramme expérimental de la Figure V-4 on obtient :

$$\sigma(T_D) = 28\% \quad (\text{V-II-20})$$

Cette valeur est évidemment entachée des erreurs dues aux fluctuations

d'ordre expérimental. On sait estimer une partie de l'erreur due au dispositif expérimental à partir de l'histogramme de la distribution  $\mathcal{F}(X)$  précédemment défini. En retranchant cette contribution à l'erreur, on obtient :

$$\sigma(T_D) \approx 20\% \quad . \quad (V-II-21)$$

D'autres sources d'erreurs devraient encore être prises en compte, en particulier les fluctuations du retard dû aux variations du nombre d'atomes excités d'un coup à l'autre, fluctuations dont il est difficile d'estimer les effets exacts.

Il ne nous est pas possible de déduire directement de l'histogramme théorique de la distribution de  $\mathcal{P}(X)$  une valeur théorique de la variance. Il est nécessaire pour cela de faire une hypothèse supplémentaire sur la distribution initiale du champ initial ; on a choisi :

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mathcal{E}_0 \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}\right)^2} \quad (V-II-22)$$

où  $\mathcal{E}_0$  est donné par l'expression (I-I-82). On obtient par cette méthode pour la variance du retard 18% , valeur en bon accord avec la valeur expérimentale (V-II-21). Ces deux valeurs sont plus importantes que celles obtenues par d'autres auteurs [6,7,9,10] qui sont comprises entre 10% et 15%. Compte tenu cependant de l'incertitude expérimentale sur (V-II-21) et du choix de la valeur théorique de  $\mathcal{E}_0$  il n'y a pas incompatibilité entre les différentes valeurs.

Il est finalement intéressant de remarquer que les histogrammes expérimentaux des distributions  $\mathcal{F}(\varphi')$  et  $\mathcal{F}(X)$  sont beaucoup moins entachés d'erreurs d'ordre expérimental puisque, comme nous l'avons dit,  $\varphi'$  et  $X$  dépendent peu du nombre  $N$  d'atomes excités et que, de plus, le calcul des distributions  $\mathcal{F}(\varphi')$  et  $\mathcal{F}(X)$  ne nécessite pas d'hypothèse sur le démarrage du système autre que le fait que toutes les polarisations sont équiprobables (la valeur du module du champ  $\mathcal{E}_0$  n'intervient pratiquement pas dans le résultat). La comparaison entre théorie et expérience est dans ce cas beaucoup plus fiable.

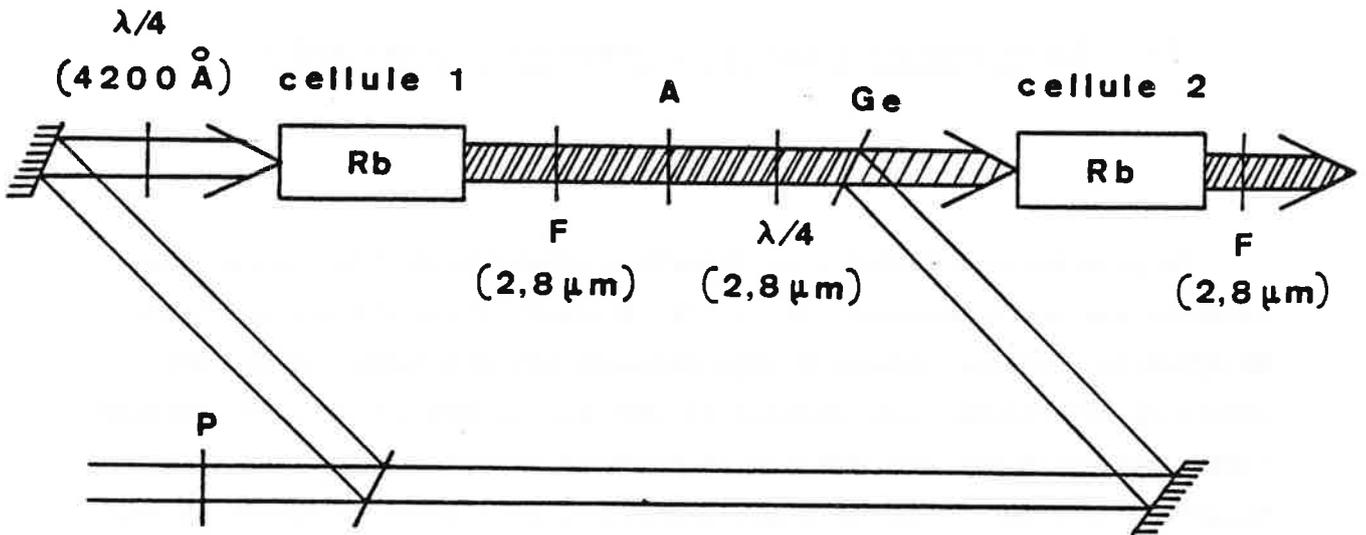
### III - Etude expérimentale du pilotage de la polarisation.

La polarisation linéaire de direction aléatoire de l'émission superradiante sur une transition  $1/2 \rightarrow 1/2$  provient d'une brisure spontanée de symétrie : chaque impulsion superradiante est polarisée suivant une direction déterminée (mais aléatoire) bien que la matrice densité atomique après excitation ait une symétrie de rotation autour de l'axe Oz . Malgré la présence de la structure hyperfine, nous avons pu mettre en évidence ce caractère aléatoire dans le cas de la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  du rubidium. Pour étudier comment se détermine la direction de la polarisation de la superradiance pour chaque impulsion ou, en d'autres termes, comment s'établit une relation de phase entre les composantes de champ  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , nous avons perturbé l'émission en injectant dans le milieu émetteur un champ résonnant avec la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  et de polarisation bien déterminée. Nous montrons ainsi qu'au-dessus d'un certain seuil d'intensité du champ injecté, la polarisation de l'impulsion superradiante "s'accroche" sur celle de ce champ. Nous avons déterminé ce seuil, ce qui nous a permis de déduire un ordre de grandeur des fluctuations quantiques de l'émission spontanée responsables du démarrage de la superradiance qui est comparable à ceux obtenus par d'autres auteurs [11,12].

#### 1. ETUDE QUALITATIVE.

Pour obtenir un champ électromagnétique polarisé linéairement suivant une direction bien définie et résonnant avec la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$ , nous avons utilisé une autre cellule d'atomes de rubidium émettant des impulsions superradiantes sur la même transition. La Figure V-5-a montre une partie du montage expérimental. Le faisceau

(a)



(b)

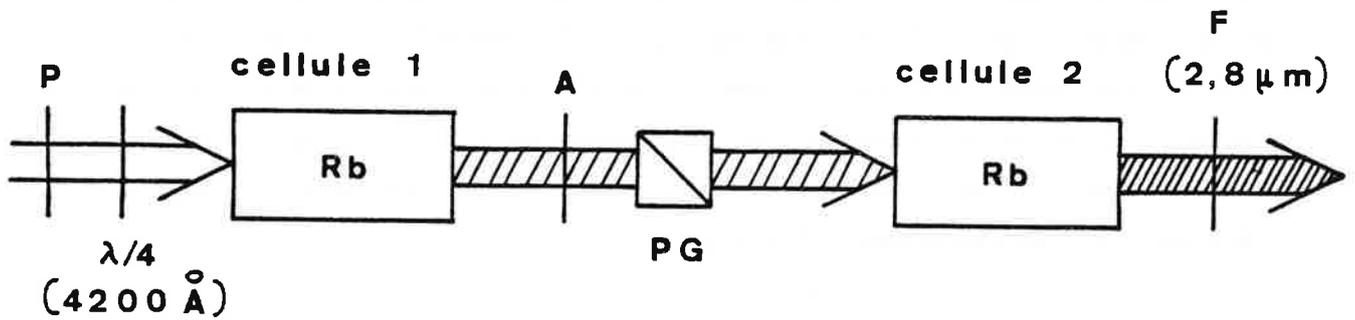


Figure V-5

Eléments du montage expérimental. La distance entre les cellules est de 50 cm environ dans le cas (a) et de 15 cm dans le cas (b).

laser résonnant avec la transition  $5s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 6p \ ^2P_{1/2}$  ( $4215 \text{ \AA}$ ) est séparé en deux parties d'à peu près égale intensité. Une première partie de ce faisceau, polarisée circulairement, se propage à travers la cellule 1 de la Figure V-5-a. Les atomes de cette cellule émettent donc une impulsion superradiante polarisée circulairement sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  ( $2,8 \mu$ ). Cette impulsion traverse successivement un filtre F qui absorbe le faisceau laser ainsi que la superradiance émise sur les autres transitions, un atténuateur A en verre anticalorique et, finalement, une lame quart d'onde à  $2,8 \mu$  qui polarise linéairement l'impulsion dans une direction qui varie lorsque l'on fait tourner les axes de la lame quart d'onde. A l'aide d'une lame de germanium, on superpose à cette impulsion superradiante infrarouge la deuxième partie du faisceau laser que l'on a préalablement polarisé linéairement. L'ensemble se propage à travers la deuxième cellule de rubidium de la Figure V-5-a. Pour une intensité suffisante du faisceau infrarouge, la superradiance émise par les atomes de rubidium de la cellule 2 sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  est polarisée linéairement avec une direction déterminée par l'orientation de la lame quart d'onde à  $2,8 \mu$ . La polarisation de la superradiance est donc "accrochée" sur celle du champ injecté. Cet effet a également été mis en évidence dans le domaine microonde [9].

Lorsque l'on atténue très fortement l'intensité du champ électromagnétique injecté, la polarisation de la superradiance retrouve son caractère aléatoire. Nous avons déterminé l'intensité minimale nécessaire pour fixer la direction de la polarisation de la superradiance. Le montage de la Figure V-5-a se prêtait mal à une évaluation précise de ce seuil d'intensité. La stabilité mécanique du montage, les fluctuations géométriques du faisceau laser et du faisceau infrarouge ne permettaient pas de superposer suffisamment correctement les deux faisceaux. Nous avons donc utilisé un montage un peu différent.

## 2. DETERMINATION DU SEUIL.

### a) Montage expérimental.

Le montage utilisé est représenté sur la Figure V-5-b. Il ne nécessite pas de séparer le faisceau laser en deux parties, et donc pas de superposer le faisceau laser avec celui du champ infrarouge à injecter. Le faisceau laser est polarisé circulairement et se propage tout d'abord à travers la cellule 1. Les atomes de la cellule 1 émettent, suivant la même direction que le faisceau excitateur, une impulsion superradiante à  $2,8 \mu$  polarisée circulairement comme l'impulsion laser. L'ensemble (faisceau laser + superradiance) traverse un atténuateur en verre anticalorique (Schott) qui transmet quasi-totalement la lumière laser ( $T \sim 90\%$ ) mais atténue fortement les impulsions superradiantes émises dans le proche infrarouge. Le faisceau laser et le faisceau superradiant traversent ensuite un prisme de Glan transparent aux deux longueurs d'onde et qui ne transmet, pour chacun des faisceaux, qu'une des deux composantes de polarisation linéaire. Les lumières excitatrice et infrarouge sont alors polarisées linéairement dans la même direction. L'ensemble des deux faisceaux se propage à travers la deuxième cellule.

### b) Conditions expérimentales.

La cellule 1 est maintenue à une température de  $80^\circ\text{C}$  et la section moyenne du faisceau laser à l'intérieur de cette cellule est d'environ  $7 \text{ mm}^2$ . A l'entrée de la cellule, l'énergie d'une impulsion laser est environ  $100 \mu\text{J}$ . On estime dans ces conditions le nombre total d'atomes excités à  $5 \cdot 10^{11}$ . L'impulsion superradiante émise sur la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  présente un retard moyen par rapport à l'impulsion laser de l'ordre de  $1 \text{ ns}$ .

La température de la cellule 2 est maintenue à  $65^\circ\text{C}$ . A travers la cellule la section du faisceau laser est d'environ  $2 \text{ mm}^2$ . L'énergie d'une impulsion laser à l'entrée de la cellule est d'environ  $45 \mu\text{J}$ . On estime

dans ces conditions le nombre d'atomes excités à  $7.10^9$ . En l'absence de champ perturbatif à  $2,8 \mu$ , les impulsions émises par les atomes de la deuxième cellule présentent des retards de l'ordre de 8 ns et sont polarisées linéairement avec une direction aléatoire.

Nous avons étudié la variation du caractère aléatoire de la polarisation en fonction de l'intensité injectée d'un champ électromagnétique résonnant à  $2,8 \mu$ . Il est important de noter que, dans cette expérience, en même temps que nous injectons dans la cellule 2 une impulsion lumineuse à  $2,8 \mu$ , nous injectons d'autres impulsions infrarouges émises par les atomes de la cellule 1 sur d'autres transitions (cf. Chapitre IV). Ces impulsions ne perturbent pas notre expérience. L'émission superradiante des atomes de la cellule 1 est en effet beaucoup plus importante sur les transitions de la cascade  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 5p \ ^2P_{3/2}$  que sur les autres transitions. De plus, toutes ces impulsions sont atténuées dans des proportions comparables par le filtre anticalorique. Finalement l'émission par les atomes de la cellule 2 se produit exclusivement sur la cascade  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2} \rightarrow 5p \ ^2P_{1/2}$ .

### 3. RESULTATS DE L'EXPERIENCE.

Nous avons tracé des histogrammes de la distribution  $\mathcal{P}(\theta')$  pour différentes valeurs de la transmission  $T$  de l'atténuateur  $A$ . La Figure V-6 montre la variation de l'écart quadratique  $\Delta\theta'$  en fonction du logarithme de la transmission  $T$  de  $A$  à  $2,8 \mu$ . Chaque point de la Figure V-6 correspond à 100 impulsions analysées. La courbe V-6 montre que le caractère aléatoire de la polarisation commence à disparaître pour un facteur de transmission  $T$  de l'ordre de  $10^{-8}$  à  $10^{-9}$ .

La structure hyperfine limite beaucoup les possibilités de cette expérience car la forme des histogrammes obtenus pour une valeur de la transmission  $T$  donnée et l'écart quadratique de  $\theta'$  qui leur est associé ne sont pas exactement reproductibles. La précision de la mesure du

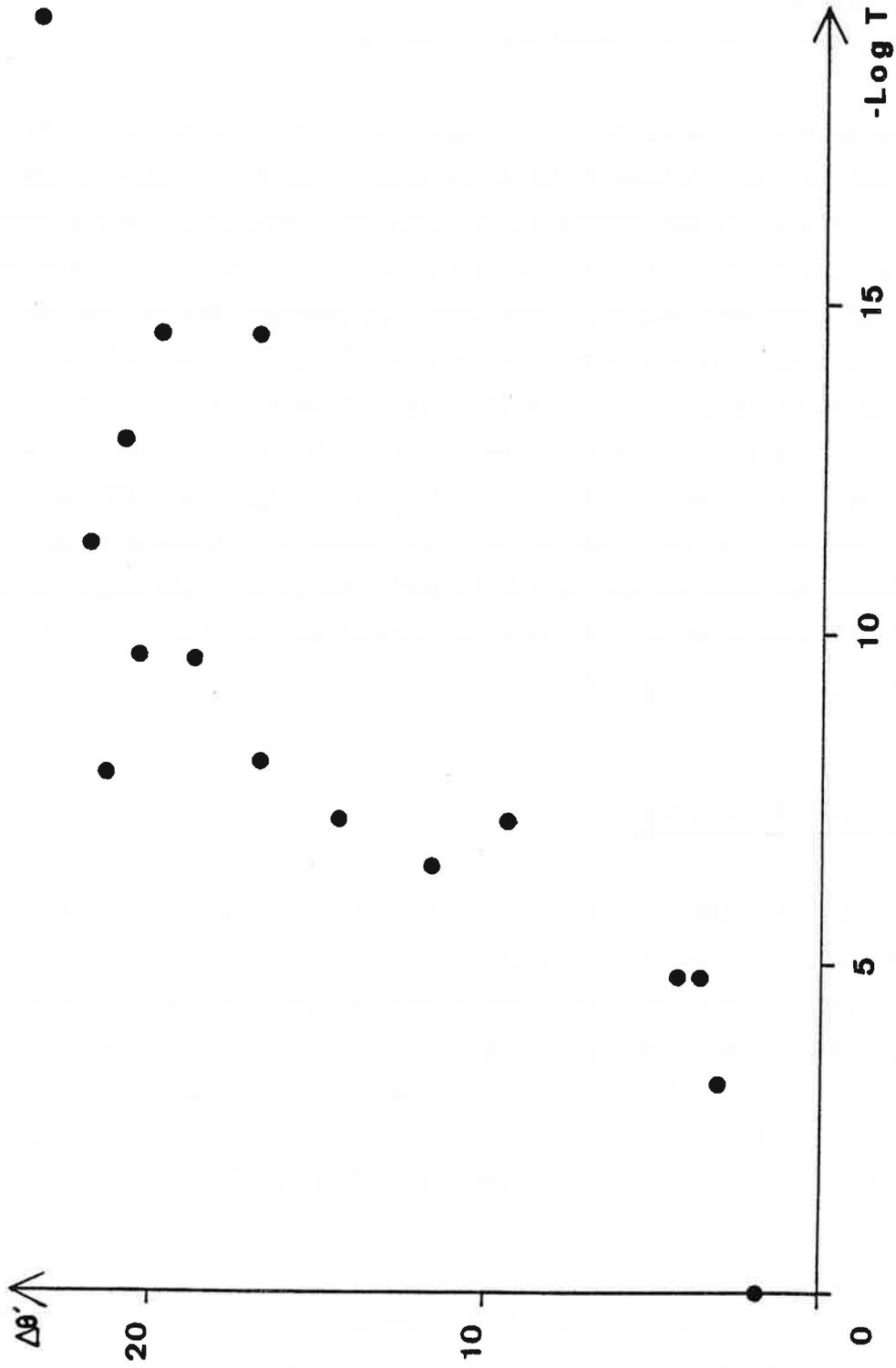


Figure V-6 : Variation de l'écart quadratique  $\Delta\theta'$  exprimé en degrés en fonction de la transmission  $T$ .  
 Pour un histogramme où toutes les directions seraient équiprobables ( $\mathcal{P}(\theta') = \frac{2}{\pi}$ ) on obtiendrait  $\Delta\theta' \approx 26^\circ$ .

seuil "d'accrochage" de la polarisation dépend finalement des fluctuations de la fréquence du laser tout au long de l'expérience.

#### 4. ANALYSE DES RESULTATS.

Cette expérience est très analogue à celle réalisée dans la référence [11], où la variation du retard des impulsions superradiantes était étudiée en fonction du signal injecté. Nous avons également dans notre expérience étudié les variations du retard des impulsions ainsi que celles des fluctuations du retard en fonction de la transmission de l'atténuateur A. Nous observons également un seuil d'intensité du champ injecté au-delà duquel le retard et ses fluctuations commencent à diminuer. Ces différents seuils sont compatibles avec celui obtenu avec la polarisation.

On peut donner une interprétation de ces expériences. Lorsque l'on injecte dans la cellule 2 un champ  $\vec{E}_1$  avec un retard de 1 ns par rapport à l'excitation, soit trois fois le temps caractéristique  $T_{SR}$  de l'émission superradiante des atomes de la cellule 2, on peut considérer que le champ superradiant  $\vec{E}_2$  a déjà un comportement classique. Au moment de l'injection, le champ  $\vec{E}$  résonnant avec la transition  $6p \ ^2P_{1/2} \rightarrow 6s \ ^2S_{1/2}$  est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad . \quad (V-III-1)$$

L'intensité de  $\vec{E}_2$  est de l'ordre de grandeur des fluctuations du champ du vide et sa polarisation est déterminée mais aléatoire ; la distribution statistique est alors telle que toutes les polarisations sont équiprobables. A l'instant de l'injection du champ extérieur  $\vec{E}_1$ , cette distribution est modifiée. On peut calculer à cet instant la nouvelle distribution des polarisations. Cette distribution perd son caractère équiprobable de manière sensible dès que :

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2| \quad . \quad (V-III-2)$$

La distribution  $\mathcal{P}(\theta')$  va alors s'en trouver modifiée et commencer à perdre son caractère aléatoire. La condition (V-III-2) fournit donc le

seuil au-dessus duquel les histogrammes commencent à se modifier. La mesure de ce seuil permet de donner un ordre de grandeur des fluctuations quantiques de l'émission spontanée responsables du démarrage.

Pour interpréter plus quantitativement cette expérience [9], on utilise le résultat qu'une impulsion superradiante est grossièrement une impulsion  $\Pi$  [13,14], c'est-à-dire que l'aire  $\mathcal{A}$  de l'impulsion émise par la cellule :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\infty} \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{E}_1}{4\pi} dt \quad (\text{V-III-3})$$

est égale à  $\Pi$ .

En se propageant à travers un milieu résonnant d'atomes à deux niveaux, une telle impulsion fait effectuer aux vecteurs de Bloch atomiques une rotation d'un angle  $\Pi$ . Dans notre expérience, après passage à travers l'atténuateur A et le prisme de Glan, l'aire des impulsions polarisées  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  est

$$\mathcal{A} = \Pi \frac{\sqrt{T}}{2} = \theta \quad (\text{V-III-4})$$

( T est le coefficient de transmission de l'atténuateur A ).

Une impulsion d'aire  $\theta$  fait effectuer au vecteur de Bloch atomique d'un système à deux niveaux une rotation d'angle  $\theta$  [13,15]. Dans le cas de notre système, chaque sous-système à deux niveaux correspondant aux polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  interagit avec une impulsion d'aire  $\theta$  qui fait effectuer aux vecteurs de Bloch atomiques une rotation d'angle  $\theta$ .

Ainsi l'injection d'un champ extérieur va précipiter la désexcitation des atomes faisant basculer les vecteurs de Bloch. Son effet s'ajoute à celui des fluctuations quantiques de l'émission spontanée qui déstabilisent le vecteur de Bloch initialement dans l'état complètement excité et métastable. On montre [11] que, si les fluctuations du vide sont caractérisées par l'angle  $\theta_0$ , l'impulsion injectée perturbe la suite de l'évolution dès que :

$$\theta > \theta_0 \quad . \quad (\text{V-III-5})$$

On peut donc déduire de notre expérience une valeur de  $\theta_0$  exprimée en radians :

$$5.10^{-5} < \theta_0 < 2.10^{-4} \quad . \quad (V-III-6)$$

On peut comparer cette valeur à la valeur théorique de la référence [11] (qui donne ici  $\theta_0 = 5,8.10^{-5}$ ) ou à celle de la référence [16] ( $\theta_0 = 3,3.10^{-5}$ ) ou encore à celle déduite de la condition initiale de champ donné par (I-I-82) :

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2T_{SR} C}{LN}} = 2,4.10^{-5} \quad . \quad (V-III-7)$$

Compte tenu des incertitudes de l'expérience, il y a compatibilité de nos expériences avec toutes ces valeurs théoriques. Notons finalement que la valeur de  $\theta_0$  correspond à un très petit flux moyen de photons injectés dans la cellule 2 . Dans le cas de nos expériences, où l'on évalue la longueur de l'impulsion émise par la première cellule à 2 ou 3 ns , la valeur de  $\theta_0$  correspond à un flux à travers la section du milieu de 1 à 10 photons par  $T_{SR}$  .



### Conclusion

Les expériences réalisées dans ce chapitre ont montré un accord satisfaisant entre la théorie et l'expérience. L'ensemble de l'étude réalisée sur la polarisation et de celle des fluctuations macroscopiques de la superradiance confirme la nature de la superradiance, phénomène à la fois quantique - dans la mesure où la mise en phase des dipôles émetteurs s'effectue sous l'action de l'émission spontanée ordinaire - et classique - dans la mesure où, lorsque les dipôles atomiques sont en phase, ils se comportent comme des émetteurs classiques.



Bibliographie du Chapitre V

- [1] A. Crubellier, S. Liberman, P. Pillet and M.-G. Schweighofer,  
J. Phys. B 14, L 177 (1981).
- [2] Q. H. F. Vreken, H. M. J. Hiksboers and H. M. Gibbs, Phys. Rev.  
Letters 38, 764 (1977).
- [3] M. Gross, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Letters 40, 1711  
(1978) ;  
voir également :  
J. M. Raimond, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1979)  
(non publiée).
- [4] J. Marek, J. Phys. B 12, L 229 (1979).
- [5] V. Degiorgio, Opt. Commun. 2, 262 (1971).
- [6] F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus and R. Glauber, Phys. Rev.  
A 20, 2047 (1979) ;  
voir également :  
F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus, R. Glauber and F. Hopf,  
Phys. Rev. Letters 42, 1740 (1979) ;  
F. Haake, J. Haus, H. King, G. Schröder and R. Glauber, Phys. Rev.  
Letters 45, 558 (1980) ;  
F. Haake, Proceedings of the Fourth International Conference on  
Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979) ;  
F. Haake, R. Glauber, Phys. Rev. A 5, 1457 (1972) ;  
R. Glauber, F. Haake, Phys. Rev. A 13, 357 (1976).
- [7] D. Polder, M. F. H. Schuurmans, Q. H. F. Vreken, Phys. Rev. A 19,  
1192 (1979) ;  
voir également :  
M. F. H. Schuurmans and D. Polder, Proceedings of the Fourth Inter-  
national Conference on Laser Spectroscopy, Rottach-Egern, Springer-  
Verlag (1979).

- [8] F. A. Hopf, Phys. Rev. A 20, 2064 (1979).
- [9] M. Gross, Thèse d'Etat, Université Paris VI (1980) (non publiée).
- [10] Q. H. F. Vrehen and J. J. der Weduwe, Phys. Rev. A 24, 2857 (1981) ;  
voir également :  
Q. H. F. Vrehen, Proceedings of the Fourth International Conference,  
Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979) ;  
M. F. H. Schuurmans, Q. H. F. Vrehen, D. Polder and H. M. Gibbs,  
Advances in Atomic and Molecular Physics, vol. 17, p. 167 (1981).
- [11] Q. H. F. Vrehen, M. F. H. Schuurmans, Phys. Rev. Letters 42, 224  
(1979).
- [12] N. W. Carlson, D. J. Jackson, A. L. Schalow , M. Gross, S. Haroche,  
Opt. Commun. 32, 350 (1980).
- [13] J. C. McGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. A 14, 1169 (1976) ;  
voir également :  
I. P. Herman, J. C. McGillivray, N. Skribanowitz and M. S. Feld,  
Laser Spectroscopy (p. 379), Ed. R. G. Brewer and A. Mooradian ;  
N. Skribanowitz, Thèse, Institut de Technologie du Massachusetts  
(1972) : "Coherent effects in optically pumped HF gas" ;  
J. C. McGillivray, "Superradiance in an extended, optically thick  
medium" (degree of Bachelor of Science).
- [14] L. Allen and J. H. Eberly, "Optical Resonance and Two Level Atoms",  
Ed. Wiley (1975) ;  
voir également :  
N. E. Rehler and J. H. Eberly, Phys. Rev. A 3, 1735 (1971).
- [15] D. C. Burnham and R. Y. Chiao, Phys. Rev. 188, 667 (1969).
- [16] R. Bonifacio and L. A. Lugiato, Phys. Rev. A 11, 1507 (1975) ;  
Phys. Rev. A 12, 587 (1975).

Chapitre VI

QUELQUES ASPECTS DES EFFETS DUS AU POMPAGE  
EN SUPERRADIANCE.



Lorsque l'on étudie la superradiance, on suppose en général que les atomes sont portés tous au même instant dans leur état excité. Cette situation est réalisée expérimentalement si la durée du processus de pompage  $T_p$  est très nettement inférieur au temps caractéristique de l'émission superradiante  $T_{SR}$ . En fait, une telle condition n'est jamais vérifiée dans les expériences de superradiance réalisées jusqu'à maintenant. Les propriétés de l'émission sont cependant très peu modifiées tant que la durée de l'excitation reste très inférieure au temps  $T_D$  d'apparition de l'impulsion superradiante. Dans le cas où  $T_p$  devient du même ordre que  $T_D$ , des "effets de pompage" peuvent être observés.

Des propriétés remarquables dues au processus de pompage peuvent se manifester pour un système à deux niveaux. Sous l'effet du pompage il s'établit un régime d'oscillations de relaxation et la lumière superradiante émise présente plusieurs pics que l'on peut appeler "oscillations de pompage". Ce phénomène a été observé et interprété pour des expériences réalisées sur l'atome de barium.

D'autres effets sont également attendus dans le cas d'atomes à plusieurs niveaux. Nous verrons, par exemple, que l'émission superradiante peut se produire sur des transitions sur lesquelles elle devrait être inhibée. Une autre conséquence plus surprenante des effets de pompage est la possibilité de créer une inversion de population entre un niveau excité et le niveau fondamental. Une telle inversion de population se manifeste par l'émission d'une impulsion superradiante sur cette transition.



I - Superradiance en régime d'oscillations de pompage.



# Oscillations in superradiance with long-duration pumping pulses

A. Crubellier, S. Liberman, D. Mayou, P. Pillet, and M. G. Schweighofer

Laboratoire Aimé Cotton, Centre National de la Recherche Scientifique II, Bâtiment 505, 91405 Orsay Cedex, France

Received August 2, 1981

We describe an experimental study of a new regime of superradiance characterized by relaxation oscillations, which is obtained in the case of long-duration pumping pulses. A qualitative interpretation of our results is given using the mean-field approximation in conjunction with broadband excitation. A more quantitative interpretation is also given, in which propagation effects are explicitly taken into account and the excitation is purely monochromatic.

When studying superradiance with two-level atoms, one generally assumes that all the atoms are initially in the excited state. Experimentally this situation is realized if the pumping pulse duration  $T_P$  is much shorter than the superradiant characteristic time  $T_{SR}$ .<sup>1</sup> As a matter of fact, such a condition is actually not fulfilled in the experiments that have been performed until now. Nevertheless, no important modifications of the superradiant emission have been observed so long as  $T_P < T_D$  (time delay). However, when  $T_P$  becomes of the same order as or larger than  $T_D$ , specific pumping effects are expected to occur. Such effects have already been mentioned, for instance in the case of two transitions sharing a common upper level: these effects can be used to explain the superradiant emission on the less-probable transition that appears after the emission on the most-probable one.<sup>2,3</sup> The same kind of effect has allowed us to interpret a cascading superradiant emission ending on the ground level of the atom.<sup>4,5</sup> We describe here the experimental study of a new regime of superradiance, obtained when pumping the atoms with laser pulses much longer than the buildup time of superradiance. This regime is characterized by oscillations of the superradiant signal that can be thought of as relaxation oscillations. This phenomenon is similar to that which occurs in the transient regime of laser or maser emission. However, it is different from the maser transient regime,<sup>6,7</sup> mainly because of the presence of quantum fluctuations and also because of the propagation effects, which are known to be responsible for the so-called ringing oscillations in superradiance.

The experiment has been performed with barium atoms. The relevant energy levels are shown in Fig. 1. The atoms are evaporated in a heat-pipe cell of 10-cm effective length at various pressures between 0.25 and 1 Torr. The excitation of the atoms is provided by laser pulses at 553.5 nm. These pulses are delivered by a laser system in which a dye laser (rhodamine 110) is pumped by a frequency-doubled Nd:YAG laser and, in addition, driven by a cw single-mode laser signal obtained by pumping with an Ar<sup>+</sup> laser.<sup>8</sup> The linewidth

of the pumping light is 30 MHz, the peak power is about 3 W, and the duration of the pulses is 50 nsec. The cross-section area of the laser beam inside the heat-pipe cell is 0.5 mm<sup>2</sup>. The superradiant signal corresponding to 1.5- $\mu$ m wavelength is detected by a fast InAs infrared detector. Typical signals are shown in Fig. 2. Each of the traces exhibits several peaks. One can observe by comparing traces b, c, and d with traces e and f that the first superradiant peak appears earlier for the larger pumping rate; in addition, the number of peaks increases with increasing pumping rate. It is to be noticed that we never observed any reproducible shape of the signal (see traces b, c, and d). These fluctuations cannot be explained only by the laser instabilities, and they provide another evidence of the well-known quantum fluctuations of superradiance.<sup>9-12</sup> As the exciting laser has a rather narrow band, the tuning of the laser is important to our observations. During the tuning process, new phenomena were observed. Namely, the relaxation oscillations progressively disappear while the laser is detuned; a superradiant signal still occurs, which we have been able to identify as a collision-induced superradiant emission.

In order to interpret the observed features theoretically, at least qualitatively, we first used a simple model in which the pumping process is done by broadband excitation<sup>13,14</sup> with such an intensity that the populations vary linearly in time. The mean-field approxi-

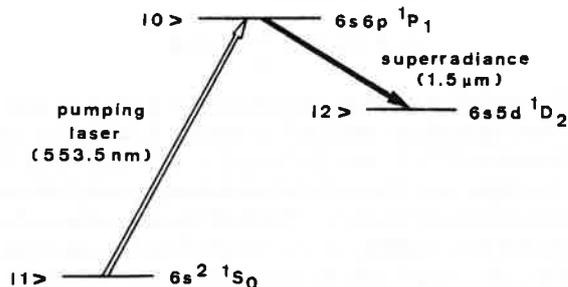


Fig. 1. Level scheme of barium atom.

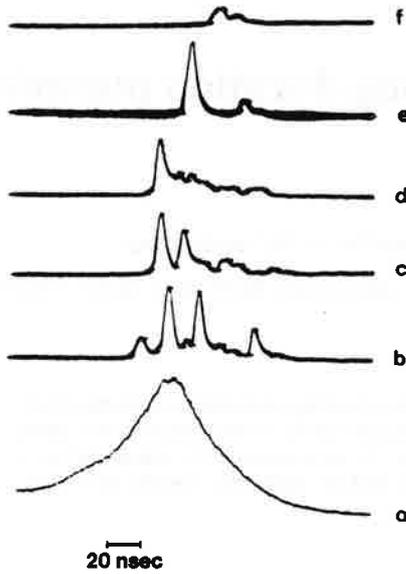


Fig. 2. Trace a represents the shape of the pumping laser pulse. The other traces correspond to the infrared superradiant signal. Traces b, c, and d have been obtained in exactly the same experimental conditions, whereas traces e and f have been obtained by interposing optical densities of respective values 1 and 2 in the pumping beam.

tion,<sup>15</sup> which ignores the propagation effects, is then applied to the semiclassical equations, leading to an explicit analytical solution. One has to deal with the following equations:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= -2\Gamma\mu P^2 + \Lambda, \\ \frac{dP}{dt} &= 2\Gamma\mu PN,\end{aligned}$$

in which  $N$  and  $P$  represent, respectively, the population inversion and the optical coherence of the atomic medium,  $\Gamma$  is the transition probability per unit time,  $\mu$  is the form factor<sup>16</sup> associated with the superradiant transition, and  $\Lambda$  is the number of atoms excited per unit time. It is possible to find an approximate solution of the above equations in which  $N$  has the following form:

$$N = \Lambda t - \sum_{i=1, \infty} B_i [1 + t h \alpha_i (t - t_i)],$$

with

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \Gamma\mu B_i/2, \\ t_i &= (B_i + 2 \sum_{j < i} B_j)/\Lambda.\end{aligned}$$

The variation of  $N$  as a function of  $t$  as well as that of the corresponding emitted intensity  $I$ , which is proportional to  $P^2$ , i.e., to  $-(dN/dt) - \Lambda$ , is shown in Fig. 3. As expected, the calculated intensity exhibits successive peaks at times  $t_i$ . Each of these peaks is characterized by a parameter  $B_i$ , which determines, in particular, the amplitude of variation of  $N$ . In order to introduce the quantum fluctuations, one has to choose different values of  $B_i$ , changing randomly from peak to

peak. Physically, this procedure is based on the fact that each time the calculated value of  $P^2$  is small, the influence of ordinary spontaneous emission, which is ignored in the semiclassical treatment, must be taken into account. The actual value of  $P^2$  must then be taken as fluctuating near a value that is proportional to the number of excited atoms.<sup>17</sup> This procedure allows us to find that the averaged value of the parameters  $B_i$  is approximately equal to

$$B = \left[ \frac{\Lambda}{2\Gamma\mu} \ln \left( 4 \frac{\Lambda}{\Gamma\mu} \right) \right]^{1/2},$$

provided that  $\Lambda$  is much larger than  $\Gamma\mu$ . In spite of its simplicity this model accounts for the existence of a transient regime of relaxation oscillations in cooperative emission and enables one to understand the specific influence of the quantum fluctuations. If one wishes to come closer to the actual experiment, it is necessary to take propagation effects into account and to describe the pumping process by using a monochromatic laser field instead of a broadband excitation.

In this more realistic treatment we have used the Bloch-Maxwell equations,<sup>1</sup> the solutions of which have been numerically computed. As usual, the system is started with an initial value of the polarization whose phase varies randomly over the active volume.<sup>9,17,18</sup> Figures 4 and 5 give a comparison of the behavior of our three-level system in the case of a relatively short-duration pumping pulse ( $T_P = T_D$ ; Fig. 4) and in the case of a long-duration pumping pulse (Fig. 5). Figure 4 corresponds to an ordinary case of superradiant emission in which the oscillations of the intensity, often referred to as ringing oscillations, are due only to propagation effects.<sup>1,3</sup> One can note the smooth decrease of intensity maxima [Fig. 4(b)], the  $\pi$  jumping of the field phase between two following maxima [Fig. 4(a)], and the monotonic decrease of the population inversion between the two levels of the superradiant transition [Fig. 4(c)]. Figure 5 exhibits rather chaotic intensity oscillations without any actual period [Fig. 5(b)]. Field phase jumps are irregular [Fig. 5(a)] (the one that occurs just before the last peak of the figure is quite different from  $k\pi$ ). Contrary to the ordinary case of superradiant

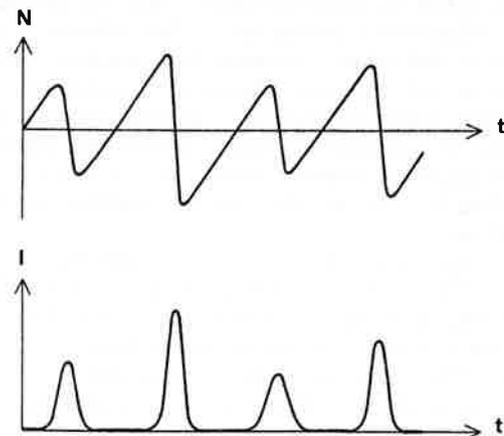


Fig. 3. Variations in time of the population inversion  $N$  and of the emitted light intensity  $I$  calculated using the mean-field approximation and weak, broadband excitation.

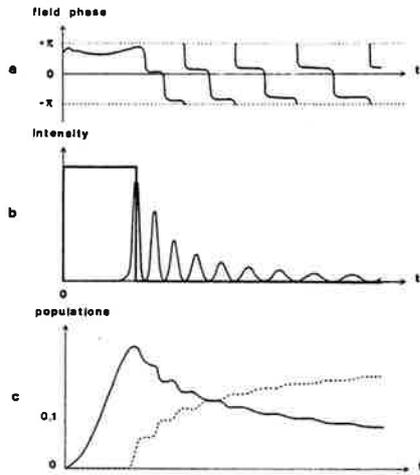


Fig. 4. Theoretical results obtained for a short-duration pumping pulse. Curve a represents the variations in time of the phase  $\varphi$  of the emitted field ( $-\pi < \varphi < \pi$ ); curve b represents the variations in time of the emitted intensity (thin line) and the shape of the pumping pulse (thick line), and curve c represents the evolution of the population of level  $|0\rangle$  (full line) and  $|2\rangle$  (broken line).

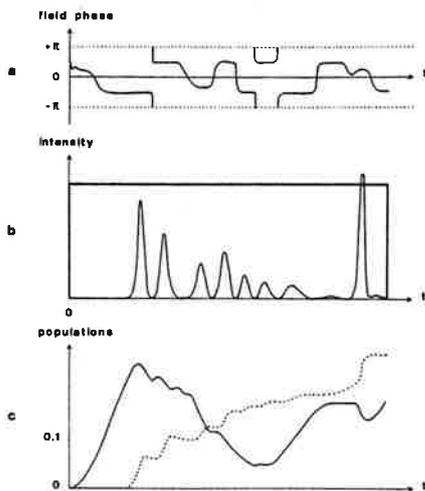


Fig. 5. Same as Fig. 4 in the case of a long-duration pumping pulse.

emission, the population inversion increases again after the first few superradiant peaks [Fig. 5(c)]. The latter peaks may be attributed to ringing oscillations, which are, however, strongly modified by the long-duration pumping process, whereas the last peak shown in Fig. 5(b) is a manifestation of the relaxation oscillations. In all calculations that we performed, the same kind of results has been obtained. In addition, it is to be emphasized that both the intensity and the period of these pumping oscillations are sensitive to the initial random phases of the macroscopic polarization, which allows us to simulate the superradiance fluctuations. Taking into

account the order of magnitude of the different parameters, it appears that the intensity oscillations that we recorded (see Fig. 2) correspond to relaxation oscillations and not to ringing oscillations, whose pseudo-periods would be much smaller in our experimental conditions. The appearance of the ringing oscillations in our calculated results comes from the fact that the amplitude of ringing oscillations is exaggerated by the use of the plane-wave approximation.<sup>19</sup> In addition, we have performed another experiment under the same conditions except that the pumping pulse was a short-duration one, provided by a nitrogen-pumped dye laser (linewidth 9 GHz, peak power 6 kW, pulse duration 6 nsec). No oscillations of the superradiant light at  $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$  were ever observed in these conditions. This fact strengthens our interpretation of the observed oscillations as relaxation oscillations.

The Laboratoire Aimé Cotton is affiliated with the Université Paris-Sud.

## References

1. J. C. McGillivray and M. S. Feld, *Phys. Rev. A* **14**, 1169 (1976).
2. M. Gross, C. Fabre, P. Pillet, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1035 (1976).
3. P. Pillet, Thèse de troisième cycle (Université Paris 6, 1977).
4. A. Crubellier, C. Bréchnignac, P. Cahuzac, and P. Pillet, in *Laser Spectroscopy*, Vol. 4, H. Walther and K. W. Rothe, eds. (Springer-Verlag, Berlin, 1979), p. 480.
5. C. Bréchnignac and P. Cahuzac, *J. Phys. B* **14**, 221 (1981).
6. H. Stutz and G. de Mars, *Quantum Electronics* (Columbia U. Press, New York, 1960), p. 531.
7. C. L. Tang, *J. Appl. Phys.* **34**, 2935 (1963).
8. J. Pinard and S. Liberman, *Opt. Commun.* **20**, 344 (1977).
9. F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus, and R. Glauber, *Phys. Rev. A* **20**, 2047 (1979).
10. F. Haake, J. Haus, H. King, G. Schröder, and R. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 558 (1980).
11. Q. H. F. Vrethen, in *Laser Spectroscopy*, Vol. 4, H. Walther and K. W. Rothe, eds. (Springer-Verlag, Berlin, 1979), p. 471.
12. A. Crubellier, S. Liberman, P. Pillet, and M. G. Schweighofer, *J. Phys. B* **14**, L177 (1981).
13. I. P. Herman, J. C. Mac Gillivray, N. Skribanowitz, and M. S. Feld, in *Laser Spectroscopy*, R. G. Brewer and A. Mooradian, eds. (Plenum, New York, 1974).
14. C. Cohen-Tannoudji, in *Frontiers in Laser Spectroscopy*, R. Balian, S. Haroche, and S. Liberman, eds. (North-Holland, Amsterdam, 1977).
15. R. Bonifacio and L. A. Lugatio, *Phys. Rev. A* **11**, 1507 (1975); **12**, 587 (1975).
16. N. E. Rehler and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **3**, 1735 (1971).
17. D. Polder, M. F. H. Schuurmans, and Q. H. F. Vrethen, *Phys. Rev. A* **19**, 1192 (1979).
18. M. Gross, Thèse d'état (Université Paris 6, 1980).
19. F. P. Mattar, H. M. Gibbs, S. McCall, and M. S. Feld, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1123 (1981).



## II - Influence de la durée du pompage sur des systèmes à plusieurs niveaux.

### 1. CAS D'UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX EN $\Lambda$ . EFFET DE DEPOLARISATION.

Nous avons traité en détail, dans le Chapitre I, l'émission superradiante d'un système à trois niveaux en  $\Lambda$  . Nous rappelons que la superradiance se produit pour un tel système presque exclusivement sur la transition la plus favorable. Ce résultat suppose que l'excitation des atomes dans le niveau supérieur est réalisée de façon instantanée à  $t=0$  . Il peut être mis en défaut lorsqu'une impulsion superradiante est émise sur la transition la plus favorable avant la fin du processus d'excitation. On a pu dans ces conditions observer [1] et interpréter [2] l'émission d'une seconde impulsion superradiante émise sur la transition la moins favorable. Les populations des différents niveaux évoluent alors sous l'effet conjoint du pompage et de la superradiance sur les deux transitions. On montre que le niveau supérieur se vide d'abord brutalement sur le niveau inférieur correspondant à la transition la plus favorable. Le pompage continuant, le niveau supérieur voit sa population augmenter à nouveau et émet une impulsion superradiante sur la deuxième transition qui est alors la seule à présenter une inversion totale de population.

Cet effet a été mis en évidence lors de l'étude de la polarisation de la superradiance sur la transition  $6p_{1/2} \rightarrow 4d_{3/2}$  , lorsque la polarisation de l'excitation est circulaire  $\sigma_+$  . La Figure VI-1 représente les différentes transitions et différents niveaux qui interviennent au cours de l'émission.

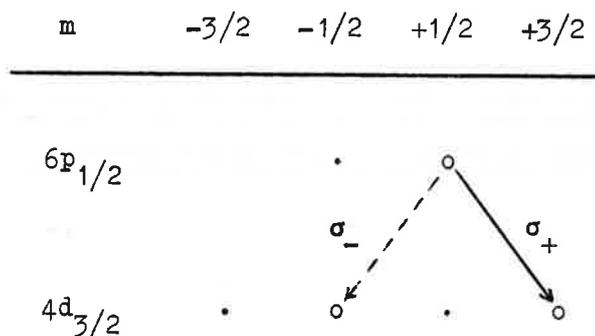


Figure VI-1

Le système est équivalent à un système à trois niveaux en  $\Lambda$ . L'émission sur la transition entre sous-niveaux Zeeman

$6p_{1/2} (m_j = +1/2) \rightarrow 4d_{3/2} (m_j = -1/2)$  est inhibée au profit de la transition  $6p_{1/2} (m_j = +1/2) \rightarrow 4d_{3/2} (m_j = +3/2)$ , et les impulsions émises sont polarisées  $\sigma_+$  (cf. Chapitre IV). Nous avons analysé chaque impulsion suivant les polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  en utilisant le montage de la Figure IV-3. Tant que les impulsions présentent un retard par rapport à l'impulsion d'excitation on ne détecte jamais de signal pour la partie du faisceau superradiant analysée selon  $\sigma_-$ . En revanche on peut détecter un tel signal lorsque le retard devient plus court que la durée du pompage.

## 2. SUPERRADIANCE ENTRE UN NIVEAU EXCITE ET LE NIVEAU FONDAMENTAL D'UN ATOME.

La Figure IV-5 montre les différentes transitions du rubidium sur lesquelles des impulsions superradiantes ont pu être observées. A part les impulsions qui correspondent aux cascades  $6p_{1/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$  et  $6p_{3/2} \rightarrow 6s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$ , il est nécessaire pour interpréter les résultats de prendre en compte le processus de pompage. Parmi toutes ces transitions l'observation de la superradiance entre un niveau excité du rubidium ( $5p_{1/2}$  ou  $5p_{3/2}$ ) et son niveau fondamental est le résultat

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. It appears to contain a list or series of notes, but the characters are too faint to transcribe accurately.

Handwritten text, possibly a title or a specific heading for a section of the document. The text is illegible due to fading.



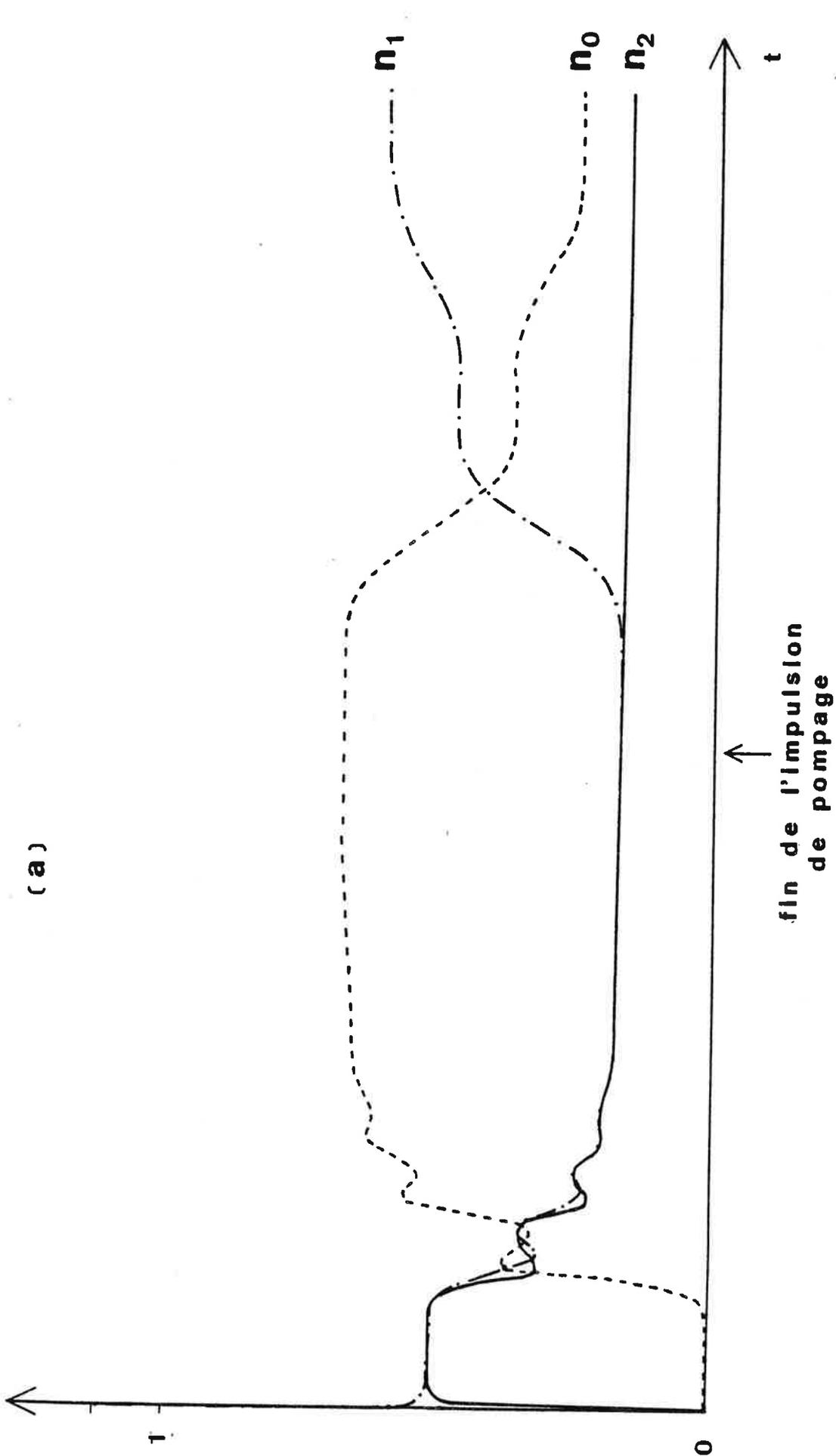
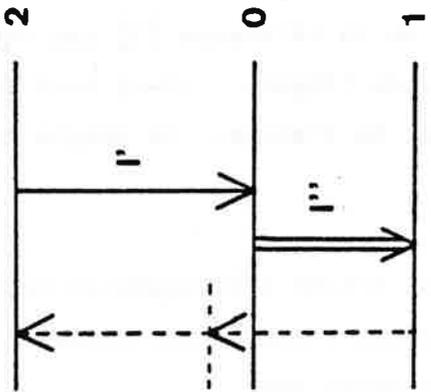


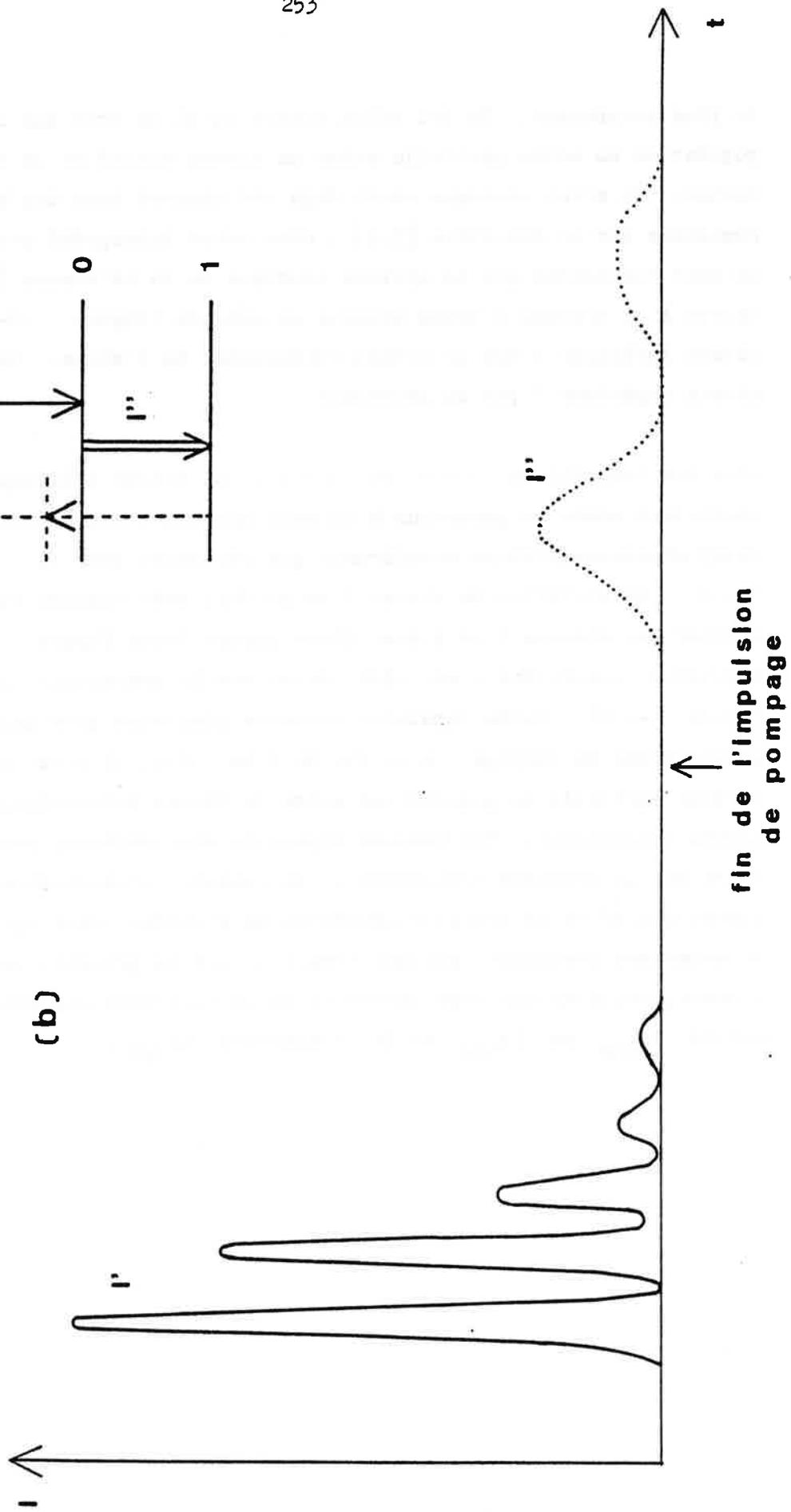
Figure VI-2

- a) Evolution des populations totales  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  des niveaux 0, 1 et 2.  
 b) Evolution de l'intensité des champs émis sur les transitions  $2 \rightarrow 0$  (I') et  $0 \rightarrow 1$  (I'').  
 c) Schéma de niveaux.

(c)



(b)



le plus surprenant. Un tel effet montre qu'il se crée une inversion de population au moins partielle entre un niveau excité et le niveau fondamental. Un effet analogue avait déjà été observé dans des expériences réalisées sur le strontium [3,4] ; nous avons interprété cette expérience. On peut considérer que le système atomique de la référence [3] est équivalent à un système à trois niveaux en cascade (Figure -2-c) dont le niveau inférieur 1 est le niveau fondamental de l'atome. On peuple le niveau supérieur 2 par un processus

avec les transitions  $1 \rightarrow 0$  ou  $0 \rightarrow 2$ . On traite théoriquement cette excitation comme un processus à un seul photon, c'est-à-dire comme un champ électromagnétique monochromatique résonnant pour la  $1 \rightarrow 2$ . L'excitation du niveau 2 se produit très rapidement et les populations des niveaux 1 et 2 sont alors égales (voir Figure -2-a). Une impulsion superradiante est alors émise sur la transition  $2 \rightarrow 0$  (voir Figure -2-b). Cette impulsion présente plusieurs pics qui sont des oscillations de pompage. A la fin de l'émission, il s'est créé une inversion partielle de populations entre le niveau intermédiaire et le niveau fondamental. Une seconde impulsion superradiante peut alors être émise sur la deuxième transition de la cascade, c'est-à-dire entre un niveau excité et le niveau fondamental de l'atome. Dans nos expériences, un mécanisme identique, quoique compliqué par la présence de nombreux niveaux, explique que nous observons de la superradiance entre le niveau excité  $5p_{1/2}$  ou  $5p_{3/2}$  et le fondamental  $5s_{1/2}$ .

Bibliographie du Chapitre VI

- [1] M. Gross, C. Fabre, P. Pillet and S. Haroche, Phys. Rev. Letters 36, 1035 (1976) ;  
voir également :  
S. Haroche, C. Fabre, M. Gross and P. Pillet, in Atomic Physics 5,  
Ed. R. Marrus, P. Prior et H. Shugart (Plenum, N. Y., 1977).
- [2] P. Pillet, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1977)(non publiée).
- [3] C. Bréchnac and Ph. Cahuzac, J. Phys. B 14, 221 (1981).
- [4] A. Crubellier, C. Bréchnac, Ph. Cahuzac and P. Pillet, Proceedings  
of the Fourth International Conference on Laser Spectroscopy,  
Rottach-Egern, Springer-Verlag (1979).



Chapitre VII

MISE EN EVIDENCE DE LA  
SUPERRADIANCE INDUITE PAR COLLISIONS.



## EXPERIMENTAL EVIDENCE FOR COLLISION-INDUCED SUPERRADIANCE

A. CRUBELLIER, S. LIBERMAN, D. MAYOU and P. PILLET

Laboratoire Aimé Cotton\*, C.N.R.S. II, Bâtiment 505

91405 Orsay Cedex, France.

An experiment performed on barium atoms has permitted us to observe an infrared emission whose spectral and temporal analysis has led us to identify it with collision-induced superradiance. Theoretical interpretation is given in the dressed atom formalism using the monochromatic approximation.

\*Laboratoire associé à l'Université Paris-Sud.

Experimental observations of superradiant emission follow from the total population inversion obtained by means of pumping with a resonant, short and intense laser pulse [1]. It is possible to look for the observation of superradiant emission when the pumping laser pulse is no longer in resonance with an atomic transition. In this case, considering only linear effects with respect to the pumping power, two emission processes are expected to occur : Raman emission and collision-induced fluorescence [2]. A so-called stimulated emission has already been observed on both processes [3]. However, no temporal analysis, enabling one to decide whether or not it is superradiance, has ever been realized. Raman emission and collision-induced emission can both occur in the cooperative regime, but it is expected that competition effects will lead to the quenching of the less probable process. We describe here the results of an experiment which has permitted us to observe collision-induced superradiant emission with barium atoms.

Figure 1 gives a simple scheme levels of Ba I we are dealing with. Barium atoms are evaporated in a heat-pipe cell of 10 cm effective length, inside which a buffer gas is used at various pressures between .1 and 1 Torr. The atomic vapor is excited by the pulses provided by a dye laser pumped by a frequency doubled Nd-Yag laser ; the dye laser is, in addition, driven by a cw single-mode laser signal obtained by pumping with an Ar<sup>+</sup>-laser [4]. The pulses delivered by such a laser system are actually single mode pulses (30 MHz width) of peak power of the order of 1 W and 50 ns duration . The laser beam is focused in a small volume of section area of about .5 mm<sup>2</sup> . The fluorescent light pulses are detected by a fast semiconductor InAs

infrared detector. The pulses correspond to the atomic transition  $6s6p \ ^1P_1 \rightarrow 6s5d \ ^1D_2$  ( $\sim 1.5 \mu\text{m}$ ) and they are observed for pumping laser detunings of more than  $1 \text{ cm}^{-1}$  on both sides of the resonance wavenumber ; these detunings are therefore much larger than the Doppler width ( $.035 \text{ cm}^{-1}$ ). The shape in time of typical signals is given in Figure 2. The pulses are emitted with delay times with respect to the maximum of the pumping pulse, which are increasing as the atomic density decreases or as the pumping power decreases. They exhibit also important macroscopic fluctuations. All these properties are characteristic of cooperative spontaneous emission. In particular no other process than the superradiance emission can account for the existence of 30 ns or greater delay times ; as it will be shown in the following, the collisional transfer time is of the order of 8 ns and cannot explain those delays. The pulses have been spectrally analyzed for different detunings of the pumping laser. Figure 3 shows that the wavenumber of the superradiant light is quite independent of that of the laser light.

The theoretical interpretation of these results has been performed in the dressed atom formalism and the monochromatic approximation [5]. This formalism, in which the different atoms are separately dressed by the whole set of photons, requires an atomic density,  $\rho_A$ , much smaller than the photon density,  $\rho_F$ . This is not the case in our experiment ( $\rho_A \sim 10^{15}$  or  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\rho_F \sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ). This explains that the calculated characteristic times for collision-induced superradiance are several orders of magnitude too small for explaining the observed delay times. In effect, one can consider, in a simplified approach, that a small part only of the atoms are dressed by the laser field and that the other ones do not play

any role in the two emission processes. In any case, the following treatment could be applied to similar experiments in which higher pumping powers are used. In our experiment it is expected to describe at least qualitatively the competition between the two types of emission. The eigenstates of the Hamiltonian for the system atom + laser are given by :

$$|1, n\rangle = \cos \varphi |a, n+1\rangle + \sin \varphi |b, n\rangle$$

$$|2, n\rangle = -\sin \varphi |a, n+1\rangle + \cos \varphi |b, n\rangle$$

$$|3, n\rangle = |c, n\rangle ,$$

where  $|a, n\rangle$  ,  $|b, n\rangle$  ,  $|c, n\rangle$  are the eigenstates of the total system in the absence of coupling ; a, b and c denote the relevant levels of Ba I (see Fig. 1), n is the number of photons in the laser mode,  $\varphi$  is defined by  $\text{tg } 2\varphi = \frac{\omega_1}{\delta}$  , where  $\omega_1$  is the Rabi frequency and  $\delta$  the detuning of the pumping laser ( $\delta = \omega_{ab} - \omega_L$ ) . If  $\tau_c$  is the characteristic time of a collision, typically of the order of  $10^{-12}$  s, the impact approximation requires

$$\omega_1 , |\delta| \ll 1/\tau_c .$$

This condition is fulfilled in our experiment. Thus making the impact approximation, neglecting level-degeneracy and considering dephasing collisions only, it is possible to evaluate the collisional transfer  $\chi$  from  $|1, n\rangle$  to  $|2, n\rangle$  [6]. In order to make the formulas simpler, it is assumed in the following that  $\omega_1 \ll |\delta|$  (perturbative limit). One finds then :

$$\chi = 2\gamma_c \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2 ,$$

in which  $\gamma_c$  is the relaxation rate associated with Ba-Ba dephasing

collisions for the transition  $b \rightarrow a$  (in our experiment  $2\gamma_c = 6.8 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  for 1 Torr pressure [7]). In the absence of an emission towards level  $|3, n\rangle$ , an equilibrium would be reached in a time interval of the order of  $\tau$ ; the corresponding equilibrium ratio of the populations  $N_1$  and  $N_2$  of states  $|1, n\rangle$  and  $|2, n\rangle$  respectively, would be [8]:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\gamma(\omega_1/2\delta)^4 + 2\gamma_c(\omega_1/2\delta)^2}{\gamma + 2\gamma_c(\omega_1/2\delta)^2}$$

and  $\tau$  is given by:

$$\tau = \frac{1}{\gamma[1 + (\omega_1/2\delta)^4] + 4\gamma_c(\omega_1/2\delta)^2}$$

where  $\gamma$  is the spontaneous emission probability per unit time for the transition  $b \rightarrow a$  (in our experiment  $\gamma = 1.2 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$  [9]). In our experimental conditions and for detunings of the order of  $1 \text{ cm}^{-1}$ , the equilibrium ratio can be simply written:

$$N_2/N_1 = 2\gamma_c(\omega_1/2\delta)^2 / \gamma$$

It corresponds to a population ratio of 0.1 for 1 Torr pressure and for  $1 \text{ cm}^{-1}$  detuning, reached within a time  $\tau \approx 1/\gamma = 8.4 \text{ ns}$ . This time is to be compared to the time delay for the superradiant pulses, which is generally larger than 10 ns. This justifies the neglect of superradiant processes in the equilibrium calculation. The time  $\tau$  should also be compared to the rise time of the laser pulse, which is not shorter than  $\tau$ , so that pumping effects are expected [10]. One then has a three-level system with two competing superradiant transitions:

$|1, n\rangle \rightarrow |3, n\rangle$  and  $|2, n\rangle \rightarrow |3, n\rangle$ . The last one corresponds to the

collision-induced fluorescence (whose transition probability  $\gamma_{CI}$  is equal to the probability  $\gamma'$  of the transition  $b \rightarrow c$  which is of the order of  $.5 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$  [11]), whereas the first one corresponds to Raman emission (whose transition probability of  $\gamma_R = \gamma' \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2$ ). It is clear that no coherence between the perturbed states of the dressed atom  $|1, n\rangle$  and  $|2, n\rangle$  may appear during the process which leads to the equilibrium. In these conditions one of the two superradiant emissions is totally inhibited [12] by the one which presents the smallest characteristic time [13].

The ratio of the two characteristic times is :

$$\frac{T_R}{T_{CI}} = \frac{N_2 \gamma_{CI} \mu}{N_1 \gamma_R \mu} = \frac{2\gamma_c}{\gamma}$$

(where  $\mu$  is the form factor [14] associated to the transition  $b \rightarrow c$ ), and corresponds in our experiment to about 57 for 1 Torr pressure. One must point out that it depends upon neither the detuning  $\delta$  nor the Rabi frequency  $\omega_1$ . In our experiment and in the pressure interval we were able to work, Raman superradiance was totally inhibited to the benefit of collision-induced superradiance. As Raman emission may only occur during the laser pulse, the absence of Raman emission in some conditions can be explained by the too short duration of the laser pulse but this argument fails when the observed delay times become much smaller than the laser pulse duration. Concerning the gain of Raman emission (or the threshold condition for Raman superradiance), a direct evaluation would be meaningless because of the condition  $\rho_A \gg \rho_F$ . However, knowing the experimental conditions in which superradiant pulses are observed, i.e. in which the gain of collision-induced emission is larger than one (e.g.

$|\delta| < 450$  mK for .25 Torr pressure) and noticing that the dephasing times for the two types of emission are of the order of 1 ns, it is possible to show that the gain of Raman emission was often larger than one in our experiment (e.g. for  $|\delta| < 100$  mK for .25 Torr pressure). The inhibition phenomenon must then be taken into account. Of course one could think of other experimental conditions which would permit observation of Raman superradiance. As dephasing processes, collisions are usually considered to be an obstacle to superradiant emission. We have shown here both theoretically and experimentally that they can give rise to superradiant emission.

The authors would like to gratefully acknowledge Prof. C. Cohen-Tannoudji and Dr. S. Reynaud for many valuable discussions.

References.

- <sup>1</sup> N. Skribanowitz, S. P. Herman, J. C. Mac Gillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. Lett. 30, 309 (1973) ; M. Gross, C. Fabre, P. Pillet, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 36, 1035 (1976) ; A. Flusberg, T. Mossberg, and S. R. Hartmann, Phys. Lett. 58A, 373 (1976) ; H. M. Gibbs, Q. M. F. Vreken, and H. M. J. Hixspoors, Phys. Rev. Lett. 39, 547 (1977).
- <sup>2</sup> D. L. Rousseau, G. D. Patterson, and P. F. Williams, Phys. Rev. Lett. 34, 1306 (1975) ; M. G. Raymer, J. L. Carlsten, and G. Pichler, J. Phys. B 12, L119 (1979).
- <sup>3</sup> J. J. Wynne and P. P. Sorokin, J. Phys. B 8, L37 (1975) ; M. G. Raymer and J. L. Carlsten, Phys. Rev. Lett. 39, 1326 (1977) ; see also : J. L. Carlsten, A. Szöke, and M. G. Raymer, Phys. Rev. A 15, 1029 (1977) ; J. Mostowski and M. G. Raymer, Opt. Commun. 36, 237 (1981).
- <sup>4</sup> J. Pinard and S. Liberman, Opt. Commun. 20, 344 (1977).
- <sup>5</sup> C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, J. Phys. B 10, 345 (1977).
- <sup>6</sup> C. Cohen-Tannoudji, Cours du Collège de France, Paris, 1976-77 (unpublished) ; F. Hoffbeck, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris, 1978 (unpublished) ; S. Reynaud, Thèse d'Etat, Université de Paris, 1981 (unpublished) ; see also : B. R. Mollow, Phys. Rev. A 15, 1023 (1977) ; B. S. Lisita and S. S. Yakovlenko, JETP 41, 233 (1975) ; E. Courtens and A. Szöke, Phys. Rev. A 15, 1588 (1977) ; S. Yeh and P. Berman, Phys. Rev. A 19, 1106 (1979).

- <sup>7</sup> N. P. Penkin and L. N. Shabanova, *Opt. Spectr.* 26, 191 (1969).
- <sup>8</sup> The formulas are written for large positive  $\delta$ . For large negative  $\delta$ , levels  $|1n\rangle$  and  $|2n\rangle$  must be interchanged; Raman emission (resp. collision-induced emission) occurs then on transition  $|2n\rangle \rightarrow |3n\rangle$  (resp.  $|1n\rangle \rightarrow |3n\rangle$ ) and the final result is the same as for positive  $\delta$ .
- <sup>9</sup> A. Lurio, *Phys. Rev. A* 136, 376 (1964); L. O. Dickie and F. M. Kelly, *Can. J. Phys.* 48, 879 (1970); W. Rasmussen, R. Schieder, and H. Walther, *Opt. Commun.* 12, 315 (1974).
- <sup>10</sup> At resonance, these pumping effects give rise to relaxation oscillations (A. Crubellier, S. Liberman, D. Mayou, P. Pillet and M. G. Schweighofer, to be published in *Optics Letters*, January issue). They are here responsible for the broadening of those pulses whose delay times are of the same order as the laser pulse duration (see Figure 2).
- <sup>11</sup> B. M. Miles and W. L. Wiese, *Atomic Data* 1, 1 (1969).
- <sup>12</sup> A. Crubellier, S. Liberman, and P. Pillet, *Opt. Commun.* 33, 143 (1980).
- <sup>13</sup> I. P. Herman, J. C. Mac Gillivray, N. Skribanowitz, and M. S. Feld in "Laser Spectroscopy", eds. R. G. Brewer and A. Mooradian (Plenum Press, New York, 1974).
- <sup>14</sup> N. E. Rehler and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* 3, 1735 (1971).

Figure captions.

Figure 1 : Diagram of the relevant energy levels of Ba I , with schematic representation of Raman and collision-induced processes.  $\omega_L$  corresponds to the laser frequency which is tuned near the resonance frequency  $\omega_{ab}$  .

Figure 2 : Trace (a) shows the laser pulse whereas traces (b), (c) and (d) show superradiant pulses. For trace (b), Ba pressure was 12 Torr and the detuning,  $\delta = \omega_{ab} - \omega_L$  , was about -100 mK. For traces (c) and (d), Ba pressure was .65 Torr and  $\delta$  was about +100 mK ; for trace (d), an optical density ( $d=2$ ) was interposed in the laser beam.

Figure 3 : Detuning  $\delta' = \omega - \omega_{bc}$  of the superradiant light versus detuning  $\delta = \omega_L - \omega_{ab}$  of the laser light.

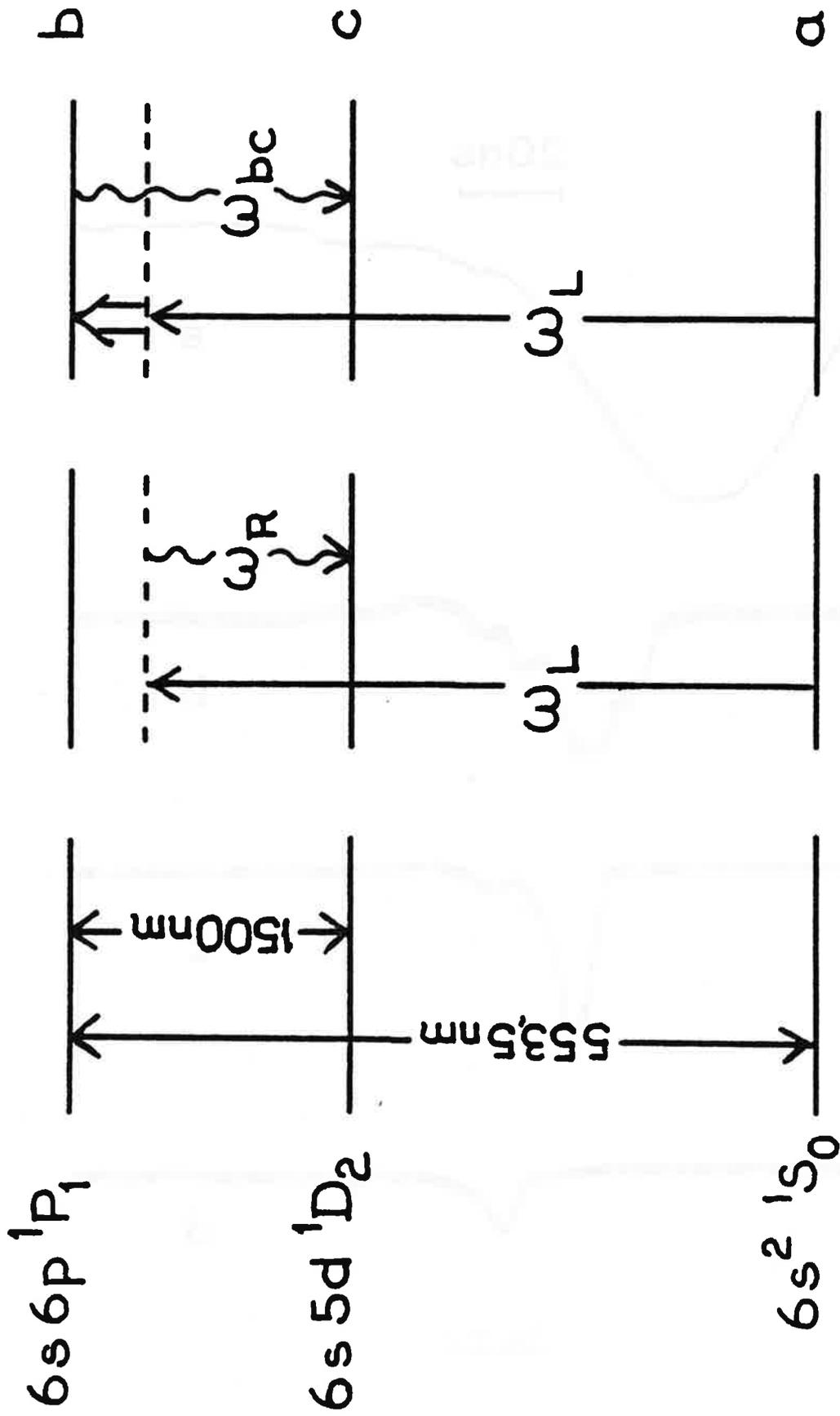


Figure 1

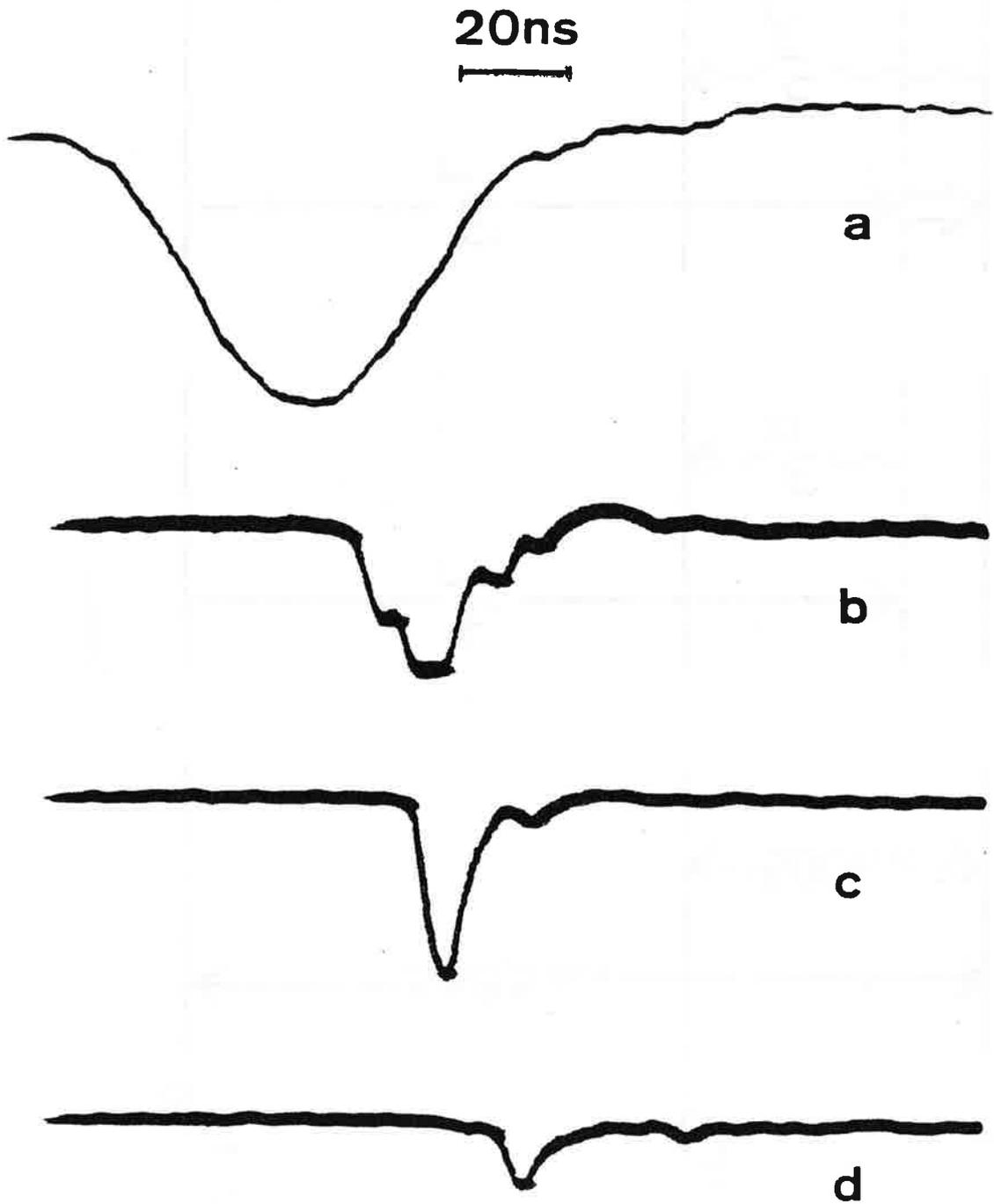


Figure 2

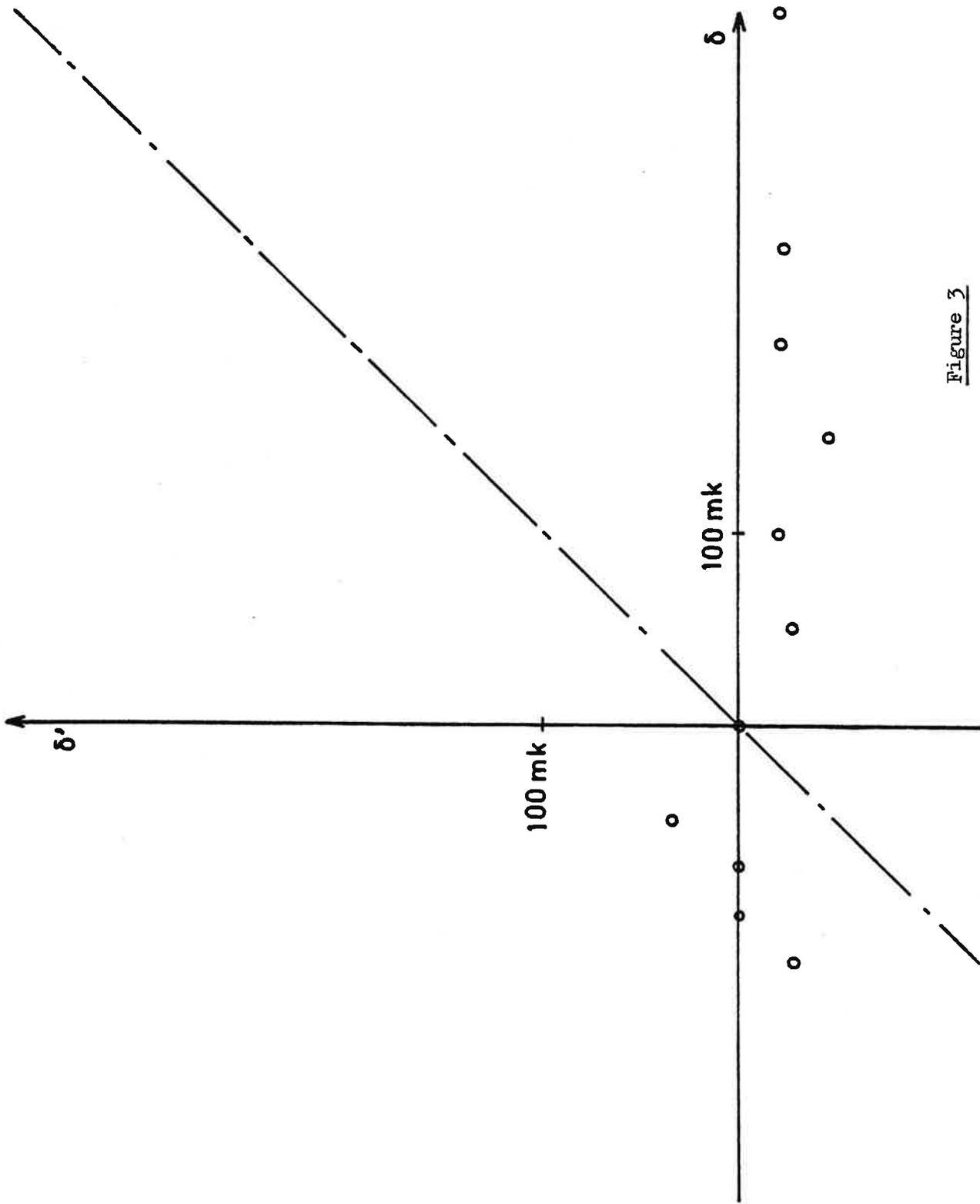


Figure 3



## CONCLUSION



Nous avons au cours de ce travail étudié et présenté un ensemble de résultats théoriques et expérimentaux concernant l'émission spontanée coopérative. Le rôle des interférences interatomiques dans les processus d'interaction matière-rayonnement a été au centre de notre préoccupation. Nous rappelons brièvement les principaux points abordés :

(i) L'étude de l'apparition d'interférences de nature destructive a permis de bien dégager les conditions de l'observation d'un état subradiant et devrait donner lieu à des expériences. Parmi les divers aspects envisagés de la subradiance, la propriété de conservation du type de symétrie nous semble être le résultat le plus remarquable pour le traitement de systèmes à plusieurs niveaux.

(ii) Les résultats concernant la polarisation, les fluctuations et le pilotage de la superradiance ont montré un bon accord entre théorie et expérience. Ils confirment le double aspect de la superradiance, phénomène à la fois quantique - dans la mesure où la mise en phase des différents dipôles émetteurs s'effectue sous l'effet de l'émission spontanée ordinaire - et classique - dans la mesure où, lorsqu'ils sont en phase, ces dipôles se comportent comme des émetteurs classiques.

(iii) La mise en évidence d'un régime d'oscillations de pompage en superradiance et la superradiance induite par collisions ont montré la diversité des processus coopératifs d'interaction matière-rayonnement. D'autres systèmes peuvent être imaginés : l'émission Raman peut avoir également un comportement coopératif, des interférences interatomiques doivent aussi se manifester lors de la propagation d'une impulsion lumineuse dans un milieu optiquement épais,...

L'étude de l'émission spontanée coopérative offre encore un champ d'investigations vaste et intéressant. Certes les propriétés fondamentales de la superradiance sont bien établies expérimentalement et l'on dispose pour leur interprétation de modèles théoriques satisfaisants. Des problèmes restent cependant posés. En particulier l'étude de la statistique des photons émis au cours d'une impulsion superradiante est un problème non résolu. Il est clair que la distribution des photons émis doit subir une profonde modification lors du passage de la période "quantique" à la période "semi-classique", qu'il serait intéressant de comprendre théoriquement et, éventuellement, de mettre en évidence expérimentalement.

Appendix A

SOLUTION DE L'EQUATION D'EVOLUTION DE LA  
SUPERRADIANCE DANS LA PHASE LINEAIRE



Nous exposons dans cet appendice le traitement de l'évolution d'un système à deux niveaux pendant la phase linéaire, c'est-à-dire tant que le nombre de photons émis reste faible devant le nombre de photons émis reste faible devant le nombre d'atomes excités. Il est clair que plus le nombre d'atomes désexcités augmente, plus l'importance des effets non linéaires devient prépondérante et la poursuite d'un tel traitement est sans objet. Il a été cependant montré qu'un tel traitement était suffisant pour donner un ordre de grandeur du délai [1] ou des fluctuations de celui-ci [2].

Le traitement de la phase linéaire de l'évolution se ramène à résoudre des équations différentielles du second ordre du type :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}(z,t)}{\partial z \partial t} = \frac{\mathcal{C}(z,t)}{T_{SR} L} \quad (A-1)$$

On prend comme condition initiale de la fonction  $\mathcal{C}(z,t)$  à l'instant  $t=0$ ,  $\mathcal{C}(z,0)$ .

Soit  $\mathcal{U}$  la transformée de Laplace de  $\mathcal{C}(z,t)$

$$\mathcal{U}(z,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathcal{C}(z,t) dt \quad (A-2)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \mathcal{C}(z,t) dt &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}(z,t) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\mathcal{C}(z,0) + s \int_0^{\infty} \mathcal{C}(z,t) e^{-st} dt \right\} = -\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{C}(z,0) + s \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{U}(z,s) . \end{aligned} \quad (A-3)$$

A l'aide de la transformée de Laplace, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{U}(z,s) - \frac{1}{T_{SR} L s} \mathcal{U}(z,s) = + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{C}(z,0) . \quad (A-4)$$

En posant :  $\mathcal{U}(z,s) = \mathcal{V}(z,s) e^{z/T_{SR} L s}$  (A-5)

l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{V}(z,s) = \frac{1}{s} \left( \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{C}(z,0) \right) e^{-z/T_{SR} L s} \quad (A-6)$$

$$\mathcal{V}(z,s) - \mathcal{V}(0,s) = \int_0^z dz' \frac{1}{s} e^{-z'/T_{SR} L s} \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{C}(z',0) \quad (A-7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(z,s) - \mathcal{U}(0,s) e^{z/T_{SR} L s} \\ = \int_0^z dz' \frac{1}{s} e^{-z'/T_{SR} L s} \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{C}(z',0) \end{aligned} \quad (A-8)$$

avec :

$$\mathcal{U}(0,s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathcal{C}(0,t) dt \quad (A-9)$$

$\mathcal{C}(0,t)$  n'évolue pas au cours du temps, d'où :

$$\mathcal{U}(0,s) = \frac{\mathcal{C}(0,0)}{s} \quad (A-10)$$

Il faut prendre maintenant la transformation inverse de :

$$\frac{1}{s} e^{(z-z')/T_{SR} L s} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(z-z')^n}{(T_{SR} L s)^n} \quad (A-11)$$

La transformée de Laplace inverse de  $\frac{1}{s^{n+1}}$  est  $\frac{t^n}{n!}$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(z,t) = \mathcal{C}(0,0) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n t^n}{(n!)^2 (T_{SR} L)^n} \right) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z dz' \frac{((z-z')t)^n}{(n!)^2 (T_{SR} L)^n} \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{C}(z',0) \end{aligned} \quad (A-12)$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(z,t) = \mathcal{C}(0,0) I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{zt}{L T_{SR}}} \right) \\ + \int_0^z dz' I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{(z-z')t}{T_{SR} L}} \right) \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{C}(z',0) \quad (A-13) \end{aligned}$$

Si l'on se donne comme condition initiale  $\xi(z,0)$ , on a :

$$\xi(z,t) = \xi(z,0) + \int_0^z dz' \xi(z',0) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(z-z')^2_{SR} L}} I_1 \left( 2 \sqrt{\frac{(z-z')t}{L T_{SR}}} \right) \quad (A-14)$$

qui, si  $\xi(z,0)$  est constant en  $z$ , s'écrit :

$$\xi(z,t) = \xi(z,0) I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{(z-z')t}{L T_{SR}}} \right) \quad (A-15)$$

Si, au contraire, on se donne comme condition initiale  $\frac{\partial}{\partial z} \xi(z,0)$ , alors l'équation s'écrit :

$$\xi(z,t) = \int_0^z dz' I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{(z-z')t}{T_{SR} L}} \right) \frac{\partial}{\partial z'} \xi(z',0) \quad (A-16)$$

qui, si  $\frac{\partial}{\partial z} \xi(z,0)$  est constant en  $z$ , devient :

$$\xi(z,t) = \frac{\partial \xi(z,0)}{\partial z} \sqrt{\frac{z L T_{SR}}{t}} I_1 \left( 2 \sqrt{\frac{zt}{T_{SR} L}} \right) \quad (A-17)$$

$I_0$  et  $I_1$  sont les fonctions de Bessel modifiées :

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \quad (A-18)$$

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \quad (A-19)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. C. McGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. A 14, 1169 (1976) ;  
voir également :  
I. P. Herman, J. C. McGILLIVRAY, N. Skribanowitz and M. S. Feld,  
Laser Spectroscopy (p. 379), ed. R. G. Brewer and A. Mooradian ;  
N. Skribanowitz, Thèse, Institut de Technologie du Massachusetts  
(1972) : "Coherent effects in optically pumped HF gas" ;  
J. C. McGillivray, "Superradiance in an extended, optically thick  
medium" (degree of Bachelor of Science).
- [2] F. Haake, J. W. Haus, H. King, G. Schröder and R. Glauber, Phys.  
Rev. A 23, 1322 (1981).

## Appendice B

PROBABILITE POUR UN SYSTEME à TROIS NIVEAUX EN "V"  
DECrit PAR UNE MATRICE DENSITE FACTORISABLE ET  
HOMOGENE DE POSSEDER UN TYPE DE SYMETRIE DONNE.



On cherche à établir le lien entre type de symétrie et mélange statistique d'états dans le cas où le système est décrit par une matrice densité factorisable et homogène.

On définit pour une tranche  $\mathcal{J}_k$  une base d'états collectifs correspondant à une inversion totale de population (tous les  $N'$  atomes à trois niveaux en "V" sont dans les états excités 1 et 2), à l'aide des états caractérisés par un type de symétrie  $x$ , un tableau standard  $\eta$  et des populations  $n_1$  et  $n_2$  des niveaux 1 et 2 :

$$n_1 + n_2 = N' \quad . \quad (B-1)$$

Soient  $|x, \eta, n_1, n_2\rangle$  les états considérés. On peut remarquer que ces états correspondent aux états de Dicke pour un système à deux niveaux. On caractérise ainsi le type de symétrie  $x$  par un nombre de coopération  $r$  (on pose  $x = \frac{N}{2} - r$ ). La base formée par ces états n'est pas ortho-normée :

$$\langle x, \eta, n_1, n_2 | x, \eta', n_1, n_2 \rangle \neq 0 \quad (B-2)$$

et la probabilité pour un système initialement excité décrit par une matrice densité  $\rho(0)$  d'être dans un type de symétrie  $x$  est donnée par :

$$f_k(x) = \sum_{\eta, \eta', n_1, n_2} \langle x, \eta, n_1, n_2 | \rho(0) | x, \eta', n_1, n_2 \rangle \times g_{x \eta n_1 n_2, x \eta' n_1 n_2} \quad (B-3)$$

où  $g$  est le tenseur métrique :

$$g_{x \eta n_1 n_2, x \eta' n_1 n_2} = \langle x, \eta, n_1, n_2 | x, \eta', n_1, n_2 \rangle \quad (B-4)$$

$\rho(0)$  est un opérateur symétrique par rapport à l'échange des atomes.

On montre, pour un opérateur symétrique quelconque  $X$ , que les termes diagonaux par rapport à  $\eta$  ne dépendent pas du tableau standard  $\eta$  :

$$\begin{aligned} \langle x, \eta, n_1, n_2 | X | x, \eta, n_1, n_2 \rangle &= \langle x, \eta', n_1, n_2 | X | x, \eta', n_1, n_2 \rangle \\ &= \langle x, \eta_0, n_1, n_2 | X | x, \eta_0, n_1, n_2 \rangle \end{aligned} \quad (B-5)$$

et que les termes non diagonaux en  $\eta$  sont factorisables en une partie indépendante des tableaux standards et une autre dépendant seulement des tableaux standards et égale au tenseur métrique  $\varepsilon_{x\eta, x\eta'}$ . Ainsi l'équation B-3 s'écrit :

$$f_k(x) = \sum_{\eta, \eta', n_1, n_2} \langle x, \eta_0, n_1, n_2 | \rho(0) | x, \eta_0, n_1, n_2 \rangle \times \varepsilon_{x\eta, x\eta'} \varepsilon^{x\eta, x\eta'} ; \quad (B-6)$$

la somme sur les  $\eta$  est facilement évaluable puisque :

$$\sum_{\eta, \eta'} \varepsilon_{x\eta, x\eta'} \varepsilon^{x\eta, x\eta'} = y(x) \quad (B-7)$$

où  $y(x)$  est le nombre de tableaux standards d'Young correspondant au type de symétrie envisagé :

$$y(x) = \frac{(N' - 2x + 1) N'!}{x! (N' - x + 1)!} \quad (B-8)$$

En tenant compte du fait que  $\rho(0)$  est factorisable et homogène :

$$\rho(0) = \prod_{\alpha \in \mathcal{J}_k} \rho^\alpha(0) \quad (B-9)$$

$$\text{et } \text{Tr } \rho^{\alpha^2}(0) = \sigma^2 \quad (B-10)$$

et en utilisant l'expression générale d'un état associé à un tableau d'Young, on montre que :

$$\begin{aligned} &\langle x, \eta_0, n_1, n_2 | \rho(0) | x, \eta_0, n_1, n_2 \rangle \quad (B-11) \\ &= \sum_{p, s} (-1)^s \frac{x! (n_1 - x)! (n_2 - x)!}{s! (x - s)! (p!)^2 (n_1 - x - p)! (n_2 - x - p)!} \times \rho_{11}^{n_1 - p - s} \rho_{22}^{n_2 - p - s} |\rho_{12}|^{2(p+s)} \end{aligned}$$

On montre que  $f_k(x)$  peut s'écrire :

$$f_k(x) = \frac{(N' - 2x + 1) N'!}{x! (N' - x + 1)!} \frac{(\sqrt{1 - \omega^2})^{N'+1}}{2^N \omega} \times \text{sh} \left[ \frac{N' - 2x + 1}{2} \text{Log} \frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right] \quad (\text{B-12})$$

avec  $\omega = \sqrt{2\sigma^2 - 1}$  .

Si  $N'$  est beaucoup plus grand que 1, on montre que  $f_k(x)$  (considérée comme fonction continue de  $x$ ) a un maximum pour :

$$x = \frac{N}{2} (1 - \omega) \quad (\text{B-13})$$

dont la largeur  $\Delta x$  est de l'ordre de  $1/\sqrt{N}$ , de telle sorte que l'on peut écrire :

$$f_k(x) \approx \delta \left( x - \frac{N}{2} (1 - \omega) \right) \quad (\text{B-14})$$

Le type de symétrie le plus probable est donc :

$$\left\{ \frac{N}{2} (1 + \omega), \frac{N}{2} (1 - \omega), 0 \right\} .$$

