

UNIVERSITÉ DE PARIS

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE



T H E S E présentée
pour l'obtention
du
DIPLOME DE DOCTEUR DE 3e CYCLE
à
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris VI -

Spécialité : PHYSIQUE ATOMIQUE ET STATISTIQUE

par Monsieur Pierre PILLET

Sujet de la thèse : "ANALYSE DE DIVERS REGIMES DE SUPERRADIANCE : ETUDE
THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA SUPERRADIANCE EN
CASCADE ENTRE NIVEAUX EXCITES DU SODIUM"

Soutenu le 21 MARS 1977 devant la Commission composée de :

MM. J. BROSSEL, Président
S. HAROCHE
C. COHEN-TANNOUJJI
S. LIBERMAN

} Examineurs

T H E S E présentée
pour l'obtention
du
DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE
à
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris VI -

Spécialité : PHYSIQUE ATOMIQUE ET STATISTIQUE

par Monsieur Pierre P I L L E T

Sujet de la thèse : "ANALYSE DE DIVERS REGIMES DE SUPERRADIANCE :
ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA SUPER-
RADIANCE EN CASCADE ENTRE NIVEAUX EXCITES DU
SODIUM"

Soutenue le 21 MARS 1977 devant la Commission composée de :

MM. J. BROSSEL, Président

S. HAROCHE

C. COHEN-TANNOUJJI

S. LIBERMAN

)
Examineurs

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure au cours des années 1975-1976.

Je remercie vivement les Professeurs A. KASTLER et J. BROSSEL de m'avoir accueilli dans leur groupe de recherche, me permettant ainsi de bénéficier d'un environnement scientifique exceptionnel.

L'étude présentée ici a été réalisée au sein d'une équipe de recherche dirigée par Serge HAROCHE, à qui je suis très heureux d'exprimer toute ma reconnaissance pour avoir guidé mes premiers pas dans la recherche avec une gentillesse et une patience constantes; il n'a en effet ménagé ni son temps, ni sa peine, en dépit de ses nombreuses obligations, pour me communiquer son enthousiasme et me faire profiter de sa grande compréhension de la physique.

C'est avec plaisir que je remercie les autres membres de l'équipe, Claude FABRE et Michel GROSS, qui ont contribué à réaliser ce travail, pour leur collaboration amicale et l'aide qu'ils m'ont apportée.

Je tiens à remercier Claude COHEN-TANNOUJJI et Sylvain LIBERMAN pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant d'appartenir à mon jury de thèse.

Je remercie également tout le personnel du Laboratoire qui a collaboré avec nous à la mise au point du montage expérimental.

Je tiens enfin à remercier les personnes qui se sont chargées de la réalisation technique de ce mémoire : Madame MOISSENET qui a dessiné la plupart des figures, Monsieur AUQUIER, et tout spécialement Mademoiselle BRODSCHI qui s'est chargée avec gentillesse, compétence et rapidité de la frappe de ce texte, et Madame AUDOIN qui en a assumé, dans les plus brefs délais, le tirage.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

p. I

CHAPITRE I

EFFETS D'INTERFÉRENCE EN ÉMISSION SPONTANÉE : BATTEMENTS QUANTIQUES ET SUPERRADIANCE

p. 1

- Les battements quantiques : un phénomène d'interférence quantique intra-atomique p. 3
- La superradiance : un phénomène d'interférence inter-atomique p. 4
- Comparaison entre battements quantiques et superradiance p. 5
- Observation indirecte de la superradiance dans des expériences de battements quantiques p. 6

CHAPITRE II

DESCRIPTION QUALITATIVE SIMPLE DE LA SUPER- RADIANCE

p. 9

Introduction

p. 9

A. Position du problème. Notations. Rappels d'électro- dynamique quantique

p. 11

1. Description des dipôles atomiques p. 11
2. Description du champ de rayonnement p. 12
3. Evolution du système atomes + champs couplés p. 12
4. Relation entre le champ rayonné et les dipôles atomiques p. 13
5. Expression du signal mesuré par un détecteur p. 15
6. Evolution de l'énergie électromagnétique émise par le système atomique p. 16
7. Cas d'un atome isolé p. 17

B. Superradiance d'un système de deux atomes

p. 18

1. Condition pour que les dipôles supposés en phase rayonnent de façon coopérative p. 19
2. Condition pour que les dipôles se mettent en phase par émission spontanée p. 21
3. Calcul simple de l'émission superradiante de deux atomes p. 23

C. <u>Superradiance d'un système de N atomes dans un petit volume</u>	p. 26
D. <u>Superradiance d'un système de N atomes dans un grand volume</u>	p. 27
1. Condition pour qu'un ensemble de N dipôles corrélés, distribués dans un grand volume émettent en phase	p. 28
2. Condition pour qu'un ensemble de N atomes initialement excités et distribués dans un grand volume développe des corrélations inter-atomiques	p. 30

CHAPITRE III

RÉGIMES MARKOVIENS ET NON MARKOVIENS DE LA SUPERRADIANCE	p. 32
A. <u>Introduction</u>	p. 33
B. <u>Equations d'évolution exactes du système</u>	p. 40
1. Description du système. Notations	p. 40
2. Rappels sur la théorie de la relaxation dans le formalisme de LIOUVILLE (2 ⁸)	p. 41
C. <u>Approximation de BORN</u>	p. 45
D. <u>Approximation de MARKOV</u>	p. 47
E. <u>Approximation de DICKE</u>	p. 48
1. La base des états de DICKE	p. 49
a) Définition	p. 49
b) Description qualitative de ces états	p. 50
c) Eléments de matrice de $R_{\vec{k}}$ dans la base des états $ r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0}$	p. 51
2. L'hypothèse de DICKE	p. 52
3. Les équations d'évolution à l'approximation de DICKE	p. 53
4. Les solutions de l'équation de DICKE Pour les $\rho_{m,m}$	p. 54
F. <u>Conditions de validité des approximations</u>	p. 56
1. Approximation de BORN	p. 56
2. Approximation de MARKOV	p. 61
3. Approximation de DICKE	p. 63
a) Cas d'un petit volume	p. 63
b) Cas d'un grand volume	p. 64
G. <u>Conclusion</u>	p. 65

CHAPITRE IV

TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE DE LA SUPERRADIANCE NON MARKOVIENNE	p. 66
<u>Introduction. Position du problème</u>	p. 67
<u>A. Justification du traitement semi-classique de la superradiance non markovienne</u>	p. 70
1. Les équations semi-classiques de propagation	p. 70
a) Différentes formes des équations	p. 70
b) Solution des équations semi-classiques	p. 72
2. Les équations quantiques	p. 75
3. Etat du système à $t = 0$	p. 76
4. Le démarrage du système	p. 78
5. Calcul de la polarisation et de la population ato- mique pendant la phase initiale de la superradiance	p. 79
6. Corrélations entre \mathcal{E}_Q et \mathcal{D}_Q à la fin de la phase markovienne	p. 82
7. Passage aux équations classiques pour $t > T_{SR} \log q$	p. 83
8. Analyse des conditions de validité du traitement semi-classique	p. 85
a) Condition de seuil	p. 85
b) Condition de régime non markovien	p. 86
9. Différentes "simulations" possibles pour le démarrage de la superradiance	p. 87
<u>B. Traitement des équations semi-classiques de super- radiance dans le cas d'un système d'atomes à deux niveaux</u>	p. 88
1. Les équations semi-classiques complètes	p. 88
2. Résultats du traitement par ordinateur des équations semi-classiques	p. 90
a) Rappel des caractéristiques des pulses super- radiants	p. 91
α) Intensité et délai	p. 91
β) Oscillations	p. 92
b) Etude de l'évolution des atomes	p. 92
c) Influence de la longueur de la cellule sur les caractéristiques du pulse superradiant	p. 94
<u>C. Les équations semi-classiques pour un système atomique à plusieurs niveaux</u> (Traitement de la superradiance en cascade)	p. 95
Remarque concernant le nombre de FRESNEL	p. 98

CHAPITRE V

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA SUPERRADIANCE EN CASCADE DANS LE SODIUM	p. 100
A. <u>Montage expérimental</u>	p. 101
1. Description schématique de l'expérience	p. 101
2. L'excitation optique	p. 102
3. Cellule de résonance	p. 103
a) Forme et dimension de la cellule	p. 103
b) Température et pression du sodium	p. 103
4. La détection	p. 104
B. <u>Description et résultat des expériences</u>	p. 105
1. Procédure expérimentale	p. 105
2. Observation des signaux de superradiance du sodium	p. 106
3. Observation indirecte de la superradiance sur la transition 4P - 3D	p. 108
C. <u>Interprétation des résultats. Mécanisme de compétition entre deux transitions partageant le même niveau supérieur</u>	p. 109

CONCLUSION

RELATION ENTRE LA SUPERRADIANCE ET D'AUTRES EFFETS D'ÉMISSION COHÉRENTE	p. 113
--	--------

APPENDICE A

CALCUL DU NOYAU INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIEL $K(\tau)$ DE L'ÉQUATION (III.83) DANS LE CAS D'UN VOLUME ÉMETTEUR CYLINDRIQUE ALLONGÉ	p. 119
--	--------

APPENDICE B

ÉQUATIONS QUANTIQUES D'ÉVOLUTION DES OPÉRATEURS DE CHAMP, DE POLARISATION ET DE DIFFÉRENCE DE POPULATION	p. 123
--	--------

RÉFÉRENCES

p. 127

INTRODUCTION

La superradiance est un phénomène d'émission spontanée coopératif : dans certaines conditions, une assemblée d'atomes ou de molécules présentant initialement une inversion de population totale sur une transition donnée peut émettre du rayonnement électromagnétique de façon beaucoup plus intense et plus rapide qu'elle ne le ferait si les atomes évoluaient indépendamment les uns des autres. Depuis le papier original de DICKE (¹), un très grand nombre d'articles théoriques ont été consacrés à ce phénomène. Il s'agit, même si on se limite à des situations idéales simples (atomes identiques à deux niveaux, forme simple du volume émetteur, atomes immobiles, etc...), d'un problème à N corps très complexe qui ne peut être résolu que dans le cadre de certaines approximations. Ceci explique sans doute les différentes prédictions, voire les contradictions entre les diverses théories existant à ce jour.

Sur le plan expérimental, il n'y avait, au début de notre travail, qu'une seule étude effectuée par FELD et al. sur des transitions dans l'infrarouge lointain (²). Nous avons, au cours de ce travail, pu mettre en évidence, pour la première fois, le phénomène de superradiance dans le proche infrarouge en étudiant les cascades superradiantes émises par des atomes de sodium excités par des pulses de laser à colorant.

L'interprétation théorique des expériences (aussi bien celles de FELD et al. que la nôtre) pose des problèmes sérieux. Il existe en effet deux types de théories très différentes de la superradiance :

- a) une théorie semi classique (⁸) décrivant classiquement le champ électromagnétique par les équations de MAXWELL et dans laquelle les effets de l'émission spontanée sont simulés phénoménologiquement par un terme source dans les équations.

- b) une théorie décrivant de façon entièrement quantique (²⁴) le système global "atomes + champ électromagnétique" et rendant donc compte de façon plus précise de l'émission spontanée.

II.

Il se trouve que ces deux théories conduisent à des résultats très différents lorsqu'on les applique à la description des expériences et que seule la théorie semi-classique en rend compte correctement ⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾. Il s'agit là d'un résultat paradoxal puisque la théorie qui décrit le mieux la situation physique réelle est celle qui semble le moins apte à décrire l'émission spontanée qui joue un rôle fondamental dans le phénomène !

Il nous a donc semblé indispensable de reprendre l'étude quantique de la superradiance en essayant d'analyser en détail la nature des approximations faites dans les calculs antérieurs de façon à déterminer si ces approximations sont compatibles avec les conditions des expériences.

Dans le point de vue quantique, on peut analyser simplement la superradiance de la façon suivante : celle-ci provient de l'apparition spontanée sous l'effet du couplage avec le champ de rayonnement de corrélations entre les fonctions d'onde des différents atomes du milieu. Les probabilités de transition dipolaire électrique entre les états atomiques corrélés sont beaucoup plus grandes qu'elles ne le seraient en l'absence de ces corrélations : il s'ensuit que, par pure émission spontanée, le système atomique émet de façon beaucoup plus rapide que l'atome isolé.

Le modèle le plus simple pour analyser une telle émission a été établi par DICKE qui a introduit, pour décrire le système atomique, une base d'états collectifs dits "états de DICKE", l'évolution du système étant régie par un ensemble d'équations différentielles couplées reliant les populations de ces états (équations de DICKE). Ces équations montrent que le système superradiant doit évoluer avec une constante de temps caractéristique T_{SR} qui, dans le cas d'un volume émetteur de dimensions petites devant la longueur d'onde, est égale à $1/N\Gamma$ (où $1/\Gamma$ est la durée de vie d'émission spontanée de l'atome isolé et N le nombre des atomes). Il est clair cependant que les équations de DICKE ne peuvent au mieux décrire le phénomène réel d'émission superradiante que de façon approchée. Ces équations, qui décrivent un phénomène d'émission spontanée pure (couplage du système atomique avec le vide de photon) négligent en parti-

culier le fait que cette émission spontanée se trouve en compétition avec les phénomènes d'émission induite et de réabsorption de photons par les atomes du milieu : dans le cas d'un milieu atomique étendu, ces effets d'émission induite et de réabsorption représentent tout simplement les effets de propagation.

Un raisonnement qualitatif simple permet de comprendre pourquoi les équations de DICKE cessent nécessairement d'être valides pour un nombre très grand d'atomes émetteurs : lorsqu'on augmente N , la constante de temps de l'émission prévue par ces équations qui, dans le cas d'un volume émetteur petit devant λ_m est égale à $1/N\Gamma$, devient arbitrairement petite. En particulier, pour :

$$N > \frac{c}{\lambda\Gamma} \quad , \quad (1)$$

l'amortissement superradiant s'effectue suivant les équations de DICKE en un temps inférieur à une période optique λ/c . Ce résultat n'est évidemment pas physique. Il provient de ce que les équations de DICKE, qui supposent que le système d'atomes est couplé au vide de photons, négligent implicitement les effets produits par la modification du champ de rayonnement. Si l'on tient compte de ces effets, on conçoit que la constante de temps de l'émission superradiante doit s'allonger, ce qui permet d'éviter le paradoxe d'une émission plus rapide que la période du rayonnement.

En s'appuyant sur un raisonnement qualitatif de ce genre, plusieurs auteurs ⁽²⁴⁾⁽³⁶⁾ ont été conduits à admettre que les équations de DICKE n'étaient valables que pour N inférieur à la valeur limite donnée par l'équation (1) et à distinguer deux régimes de superradiance :

i) pour $N \ll \frac{c}{\lambda\Gamma}$, les équations de DICKE devraient être valables et le phénomène d'émission spontanée collective pure ("Superradiance Markovienne" ⁽²⁴⁾) observable).

ii) pour $N \gg \frac{c}{\lambda\Gamma}$, les équations de DICKE ne seraient plus valables et devraient être remplacées par des équations plus compliquées incluant l'absorption et l'émission induite : le phénomène observé, appelé "Superradiance Non Markovienne" ⁽²⁴⁾ est un effet mixte où émission spontanée collective, absorption et émission induite se combinent.

Nous avons limité, pour simplifier, la discussion précédente au cas d'un petit volume émetteur (de dimension petite devant λ). Les conclusions restent cependant valables dans le cas d'un volume de grande dimension devant λ ; la limite entre les régimes "Markovien" et "Non Markovien" de superradiance serait alors, toujours suivant le raisonnement des auteurs cités plus haut :

$$N = \frac{8\pi}{3} \frac{c}{\lambda\Gamma} \mathcal{F} \quad (2)$$

où \mathcal{F} est le "nombre de FRESNEL" du volume émetteur, que nous supposerons toujours de l'ordre de l'unité.

Pour des transitions du proche infrarouge correspondant à notre expérience ($\Gamma \sim 10^6 \text{ sec}^{-1}$, $\frac{\lambda}{c} \sim 10^{14} \text{ sec}^{-1}$), on trouve que la limite entre les deux régimes correspondrait à des nombres d'atomes de l'ordre de 10^9 . Pour des transitions très faiblement permises dans l'infrarouge lointain correspondant aux expériences de FELD et al. ($\Gamma \sim 1 \text{ sec}^{-1}$, $\frac{\lambda}{c} \sim 10^{12} \text{ sec}^{-1}$), on trouve une limite de l'ordre de 10^{13} atomes.

Il se trouve précisément que dans ces expériences, le nombre d'atomes initialement excités correspond aux ordres de grandeur indiqués ci-dessus, si bien qu'avec la terminologie que nous venons d'introduire, elles correspondent à la limite entre les régimes "Markovien" et "Non Markovien" de superradiance. Cependant, les équations de DICKE, même corrigées pour tenir compte de l'apparition des premiers effets "Non Markoviens", restent incapables de décrire correctement la forme et le délai des pulses superradiants observés (26).

Nous montrons dans ce travail que cette contradiction provient d'une erreur dans l'estimation de la limite entre les régimes "Markovien" et "Non Markovien" : en fait, lorsque la valeur limite (1) ou (2) est atteinte, le régime est déjà fortement "Non Markovien", la limite correcte entre les deux régimes s'écrivant :

$$N = \sqrt{\frac{c}{\Gamma\lambda}} \quad (3)$$

pour un petit volume émetteur

et

$$N = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{c}{\Gamma\lambda} \mathcal{F}} \quad (4)$$

pour un grand volume émetteur de nombre de FRESNEL \mathcal{F} .

L'équation (4) donne une valeur limite de l'ordre de 10^4 à 10^6 pour les exemples choisis plus haut. Les expériences sont donc en fait réalisées dans des conditions où les effets "Non Markoviens" sont déjà très importants et ne peuvent être décrits comme des corrections à apporter aux équations de DICKE. Nous montrons de plus que dans le régime "Non Markovien" où N est très largement supérieur à la valeur donnée par (4), les équations semi-classiques de FELD et al. constituent une bonne approximation des équations quantiques, ce qui explique qu'elles rendent correctement compte des résultats expérimentaux : appliquant ces équations semi-classiques à nos expériences, nous avons pu retrouver toutes les caractéristiques essentielles du phénomène de superradiance en cascade que nous avons observé (intensité, délai, compétition entre les diverses transitions, etc...).

Le plan de notre exposé sera le suivant :

Les deux premiers chapitres constituent une approche théorique qualitative de la superradiance, dans lesquels nous essayons de dégager les idées physiques du phénomène :

Le chapitre I décrit la superradiance comme un effet d'interférence quantique, ce qui permet de le comparer aux battements quantiques et de faire ainsi le lien avec un autre phénomène de fluorescence atomique dont l'étude a précisément servi de point de départ à ce travail.

Le chapitre II tente, de façon simple, de dégager les aspects complémentaires "quantiques" et "classiques" du phénomène de superradiance.

Les chapitres III et IV constituent la partie théorique originale de ce travail.

Nous avons essayé, au chapitre III, d'analyser en détail les diverses approximations que l'on fait pour réduire les équations de la superradiance à un système d'équations pilotes simples (équations de Dicke). L'étude de ces approximations permet clairement de distinguer les régimes "markovien" et "non markovien" déjà cités et de préciser leurs limites.

Le chapitre IV est consacré à l'étude du régime "non markovien" qui est celui des expériences. Nous y montrons qu'après une phase initiale quantique, le système se comporte bien d'une façon semi-classique et nous justifions, en raccordant ces deux phases, la théorie semi-classique introduite par FELD.

Enfin, dans le chapitre V, nous donnons une description détaillée de nos expériences et leur interprétation par le calcul.

CHAPITRE I

EFFETS D' INTERFÉRENCE EN ÉMISSION SPONTANÉE
BATTEMENTS QUANTIQUES ET SUPERRADIANCE

Le phénomène de fluorescence atomique est bien connu depuis le début du siècle. De nombreuses méthodes spectroscopiques utilisant la détection de signaux de fluorescence ont été mises au point et ont permis d'étudier et de mesurer un très grand nombre de probabilités de transitions, de structures et de durées de vie de niveaux atomiques ou moléculaires excités.

L'expérience de fluorescence atomique la plus simple que l'on puisse imaginer est symbolisée sur la figure I-1. Un atome (niveaux sur la figure I-1-a) est excité par un pulse lumineux très court sur la transition $g - e$.

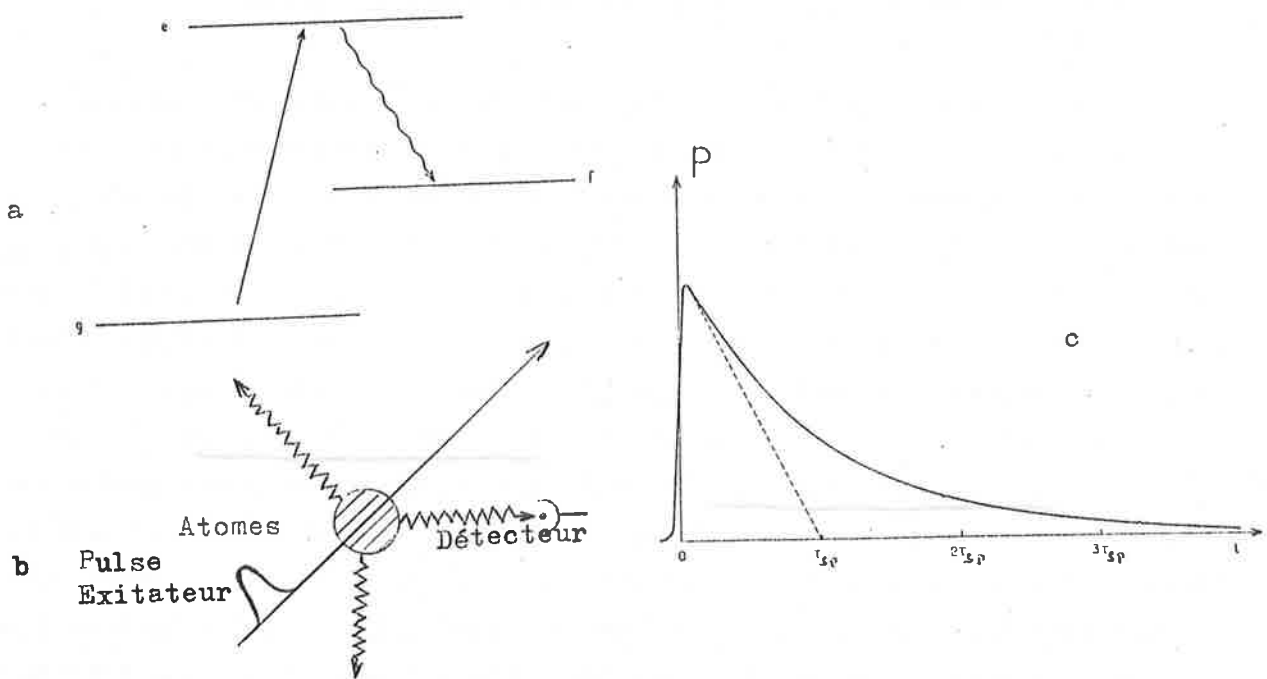


FIGURE I-1

Un photomultiplicateur est placé dans une direction faisant un certain angle avec le faisceau excitateur (fig. I-1-b). Le photomultiplicateur détecte le photon émis à la fréquence ω_{ef} avec une probabilité totale dépendant de l'angle et de la polarisation de détection. De plus, la probabilité P de détecter une impulsion à l'instant t après l'excitation décroît exponentiellement avec un temps caractéristique $\tau_{sp} = 1/\gamma_{sp}$, où γ_{sp} est la probabilité d'émission spontanée (fig. I-1-c) :

$$\gamma_{sp} = \sum_f \gamma_{ef} \quad (I.1)$$

avec

$$\gamma_{ef} = \frac{\omega_{ef}^3}{c^3} \frac{1}{3\pi\epsilon_0 \hbar} |\langle e|D|f \rangle|^2 .$$

En fait, une telle expérience est difficile à réaliser avec un seul atome. Si l'échantillon illuminé est constitué d'un ensemble de N atomes identiques et supposés indépendants, le signal détecté sera la somme des signaux individuels émis par chaque atome, c'est-à-dire un signal continu de décroissance exponentielle de durée de vie τ_{sp} , d'intensité proportionnelle à N . Une telle expérience très simple dans son principe a permis la mesure d'un très grand nombre de durées de vie atomique et s'est en particulier beaucoup développée depuis l'avènement des lasers accordables en impulsion brève.

Cependant, il peut arriver que le signal de fluorescence détecté dans une expérience du type de celle que nous venons de décrire ne soit pas exponentiel et présente des caractéristiques nettement différentes de celles représentées sur la figure I-1. Cela peut se produire, soit lorsque dans chaque atome ou molécule, à l'instant initial, plusieurs niveaux sont excités simultanément et susceptibles d'émettre ensemble, soit lorsque différents atomes du milieu se mettent à émettre de façon collective et non plus indépendante. Dans le premier cas, on observe le phénomène de battements quantiques ⁽³⁾, dans le second, celui de superradiance ⁽¹⁾. Bien que ces deux phénomènes conduisent à des signaux de propriétés très différentes, ils sont, comme nous le verrons, observés dans le même type d'expérience et présentent un certain nombre de caractéristiques analogues. Ils peuvent, en particulier, être tous deux interprétés en termes de phénomène d'interférence quantique. Dans cette introduction, nous les décrivons très qualitativement et les comparons rapidement.

Les battements quantiques : un phénomène d'interférence quantique intra-atomique

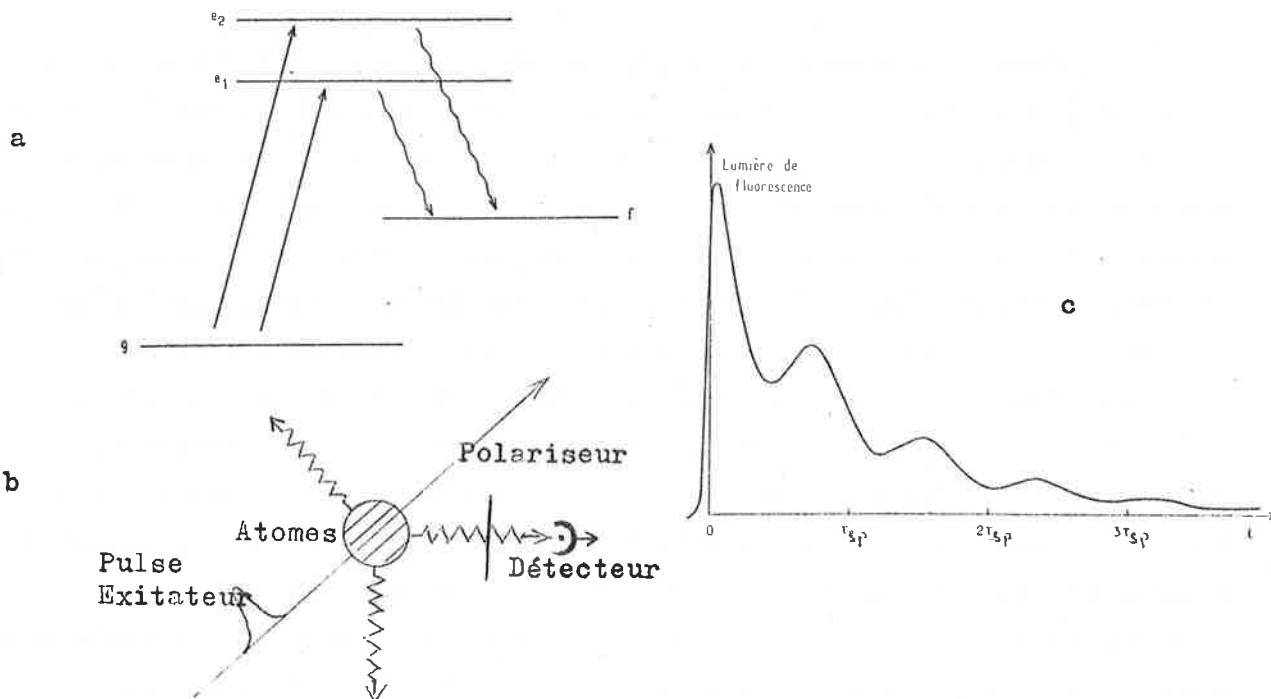


FIGURE I-2

Supposons (figure I-2) que l'état excité se trouve décomposé en sous-niveaux e_1 et e_2 d'énergies voisines et qu'une impulsion suffisamment large permette l'excitation simultanée de e_1 et e_2 à partir de g . La lumière de fluorescence réémise vers le niveau f et détectée avec une polarisation donnée ne décroît plus de façon simplement exponentielle mais présente une modulation à la fréquence de Bohr associée à l'intervalle d'énergie $e_1 - e_2$: c'est le phénomène de battement quantique.

On peut l'interpréter très simplement comme un phénomène d'interférence quantique entre amplitudes de transition différentes : au cours d'une telle expérience, chaque atome subit, de l'état initial g à l'état final f , un processus de diffusion qui le conduit à passer par l'un des états excités intermédiaires e_1 ou e_2 . Comme la lumière n'est pas analysée en énergie, il est impossible de déterminer par lequel des états e_1 et e_2 l'atome a transité au cours de ce processus. En conséquence, il faut ajouter les amplitudes correspondant aux deux chemins possibles de diffusion. Il apparaît ainsi, dans la probabilité

d'émission d'un photon de polarisation donnée, un terme croisé d'interférence qui est responsable de la modulation observée sur la lumière de fluorescence.

La superradiance : un phénomène d'interférence inter-atomique

Considérons à nouveau le système atomique de la figure I-1-a (un seul niveau atomique excité e) et augmentons progressivement la densité de l'échantillon. Au-delà d'un certain seuil critique, les caractéristiques de la fluorescence sur la transition $e - f$ changent de façon qualitativement très importante : le signal détecté dans une direction différente de celle du pulse exciteur disparaît. Il apparaît dans la direction de l'excitation un pulse lumineux à la fréquence ω_{ef} , très directif et très bref, dont l'intensité n'est plus proportionnelle à N , mais à N^2 . Le temps caractéristique d'émission de ce pulse n'est plus τ_{sp} , mais $1/N\gamma_{ef}$. C'est le phénomène de superradiance; on peut l'expliquer qualitativement de la façon suivante : à l'instant initial, tous les atomes sont inversés sur la transition $e - f$. Lorsque l'émission spontanée commence, les atomes se désexcitent de façon uniforme à travers le milieu, l'excitation se répartissant à chaque instant symétriquement sur l'ensemble des atomes. En termes de fonction d'onde, cela signifie que l'état atomique du système est une superposition symétrique d'états multiatomiques différant les uns des autres par la numérotation des atomes désexcités. L'existence d'une telle symétrie implique une forte corrélation entre les dipôles atomiques individuels. L'intensité lumineuse émise est proportionnelle au carré du dipôle atomique global dans lequel apparaissent des termes croisés "d'interférence" produits de dipôles atomiques individuels fortement corrélés entre eux. Il en résulte que l'intensité globale cesse d'être égale à la somme des intensités qui seraient émises indépendamment par chaque atome. La corrélation devient maximum après un certain délai et l'émission en N^2 en résulte. La conservation de l'énergie implique que la durée d'émission doit être caractérisée par un temps en $1/N$. La superradiance ne peut apparaître que lorsque le temps caractéristique de l'émission est plus court que le temps d'émission spontanée sur la transition de pompage $e - g$ et les différents temps de déphasage inhomogène des dipôles atomiques, d'où la condition de seuil. D'autre part, la directivité de l'émission est liée aux caractéristiques géométriques du pompage qui

conditionne le diagramme de rayonnement des dipôles atomiques. Nous avons supposé ici une excitation "cylindrique" définie par le pulse excitateur traversant l'échantillon.

On peut dire que la superradiance implique un phénomène d'interférence quantique dans la mesure où elle est liée à la création spontanée dans le milieu d'une superposition symétrique d'états, liée à l'"indiscernabilité" des atomes vis-à-vis de l'émission des photons par le milieu : les amplitudes d'émission d'un photon par des atomes différents interfèrent et contribuent à créer les corrélations entre les dipôles atomiques.

Comparaison entre battements quantiques et superradiance

Superradiance et battements quantiques apparaissent ainsi comme deux cas de fluorescence atomique "anormale" résultant de phénomènes d'interférence de nature différente. Dans le cas des battements quantiques, des interférences intra-atomiques conduisent à une redistribution dépendant du temps de la lumière émise suivant les différents états de polarisation sans changement du temps caractéristique de l'émission. Dans le cas de la superradiance, des interférences inter-atomiques conduisent au contraire à une modification importante de l'échelle de temps de l'émission.

Ces deux phénomènes ont été en fait prévus de longue date par les théories de l'interaction matière-rayonnement. Sans remonter jusqu'aux équations de MAXWELL, on peut dire que les battements quantiques sont contenus dans les papiers de BREIT ⁽⁴⁾ sur la fluorescence atomique, alors que la superradiance a été décrite pour la première fois par DICKE ⁽¹⁾.

1953
1954

L'observation expérimentale de ces phénomènes est cependant beaucoup plus récente. La nécessité d'opérer avec des pulses très brefs, plus courts que la période de Bohr de l'état excité pour les battements quantiques, que les temps caractéristiques d'émission pour la superradiance, ainsi que la nécessité de disposer de détection électronique rapide n'ont permis ces expériences que depuis quelques années ⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽²⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾.

Les montages permettant d'observer les deux phénomènes devant satisfaire aux mêmes exigences peuvent être très semblables. Dans notre travail, partant d'une étude de battements quantiques dans des états excités du sodium ⁽⁹⁾, nous avons été naturellement amenés à observer d'abord indirectement, puis directement des manifestations du phénomène de superradiance.

Observation indirecte de la superradiance dans les expériences de battements quantiques

Nous rappelons, sur la figure I-3, le principe des expériences de battements quantiques décrites dans la thèse de 3ème cycle de Michel GROSS ⁽¹⁰⁾. Les niveaux nD du sodium sont excités en échelon à l'aide de deux lasers accordés sur les transitions $3s_{1/2} - 3p_{3/2}$ et $3p_{3/2} - nD$. La structure fine du niveau nD conduit à l'apparition de battements quantiques sur la fluorescence réémise dans le bleu par le niveau nD vers 3p.

Pour améliorer le rapport signal/bruit des battements quantiques, on est tenté d'augmenter le nombre d'atomes excités, soit en augmentant la densité globale des atomes dans la cellule (en augmentant sa température), soit en excitant les atomes à densité globale constante avec un pulse lumineux plus intense. Dans les deux cas, on constate qu'au-dessus d'une densité d'atomes excités de l'ordre de 10^9 par cm^3 , le contraste des battements quantiques non seulement ne s'améliore pas, mais diminue et disparaît. En même temps, la forme exponentielle du signal s'altère et des formes non exponentielles, avec des remontées du signal, sont observées. L'interprétation la plus simple est qu'un processus de transfert, du niveau de Rydberg nD initialement excité, à d'autres niveaux, se produit. Ces autres niveaux étant énergétiquement très proches émettent des longueurs d'onde voisines que le détecteur ne peut séparer de celle de la transition nD-3P. Sur ces nouvelles longueurs d'onde, il n'y a évidemment pas de battements quantiques, la cohérence atomique ne se conservant pas au cours du transfert. Le caractère non exponentiel des signaux s'explique d'ailleurs par la repopulation, après l'instant $t = 0$, de nouveaux niveaux excités. Ces transferts de population peuvent avoir une origine soit collisionnelle, soit radiative. S'il s'agissait de collisions seules, les battements ne

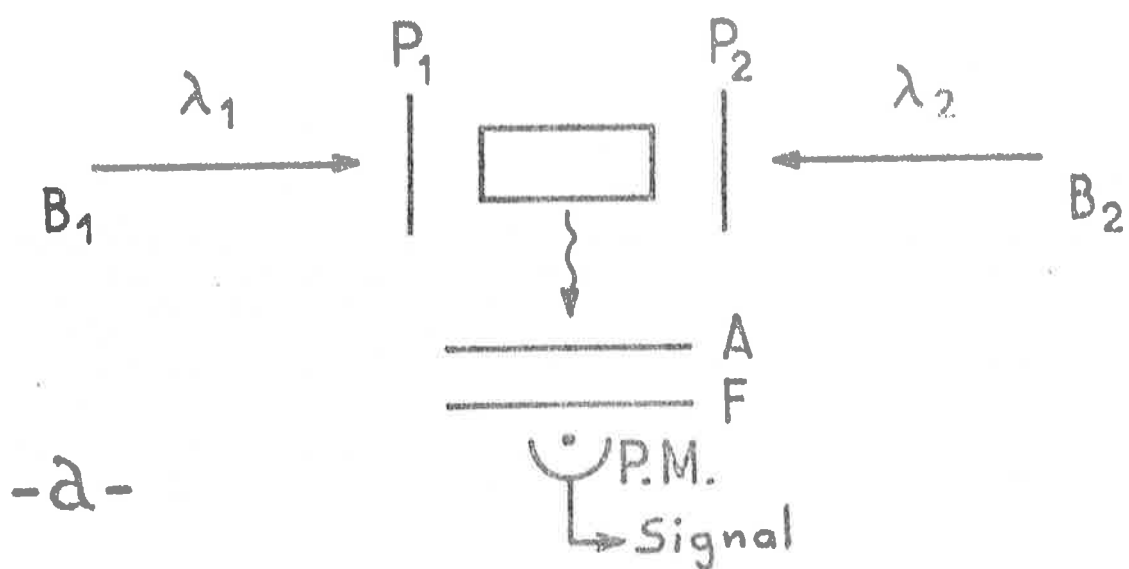
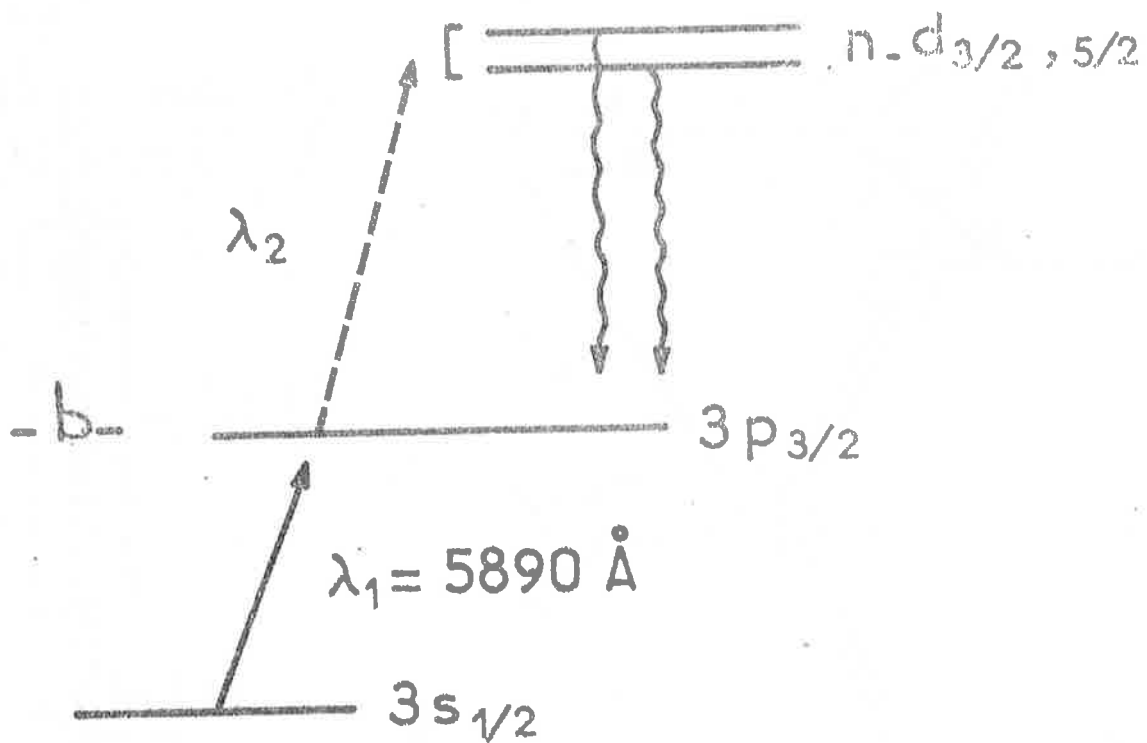


FIGURE I-3

- a) Schéma de l'expérience : P_1 et P_2 sont les polariseurs des pulses lasers B_1 et B_2 ; A et F l'analyseur et le filtre devant le photomultiplicateur P.M.
- b) Diagramme partiel des niveaux du sodium en rapport avec l'expérience.

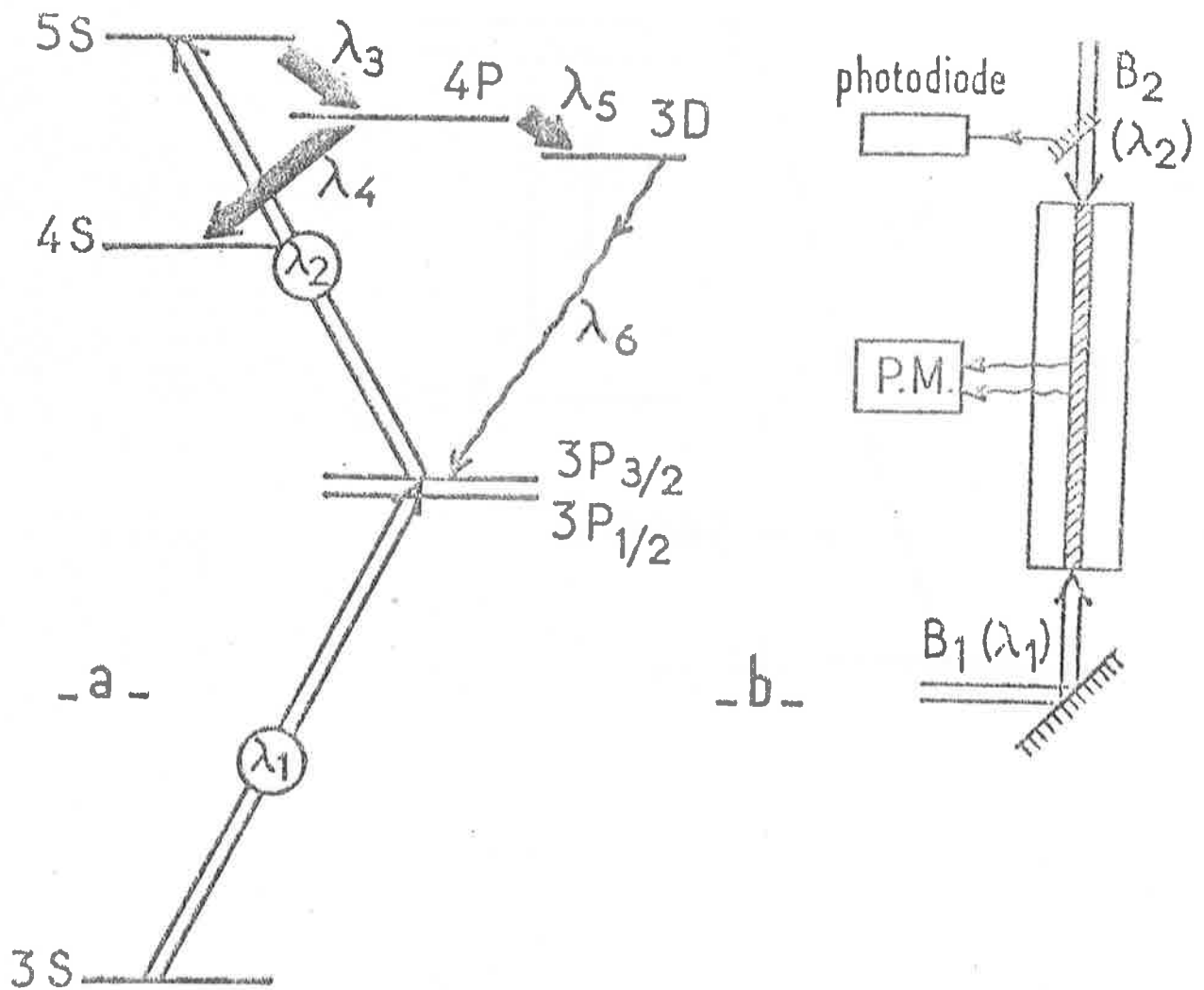


FIGURE I-4

- a) Diagramme des niveaux d'énergie du sodium pour l'expérience envisagée. Flèches en trait double : transition de pompage $\lambda_1 = 0,5890 \mu$ et $\lambda_2 = 0,8160 \mu$, flèches en trait épais : transitions superradiantes possibles : $\lambda_3 = 3,41 \mu$, $\lambda_4 = 2,21 \mu$ et $\lambda_5 = 9,10 \mu$, flèche ondulée : transition à $\lambda_6 = 0,8191 \mu$ détectée perpendiculairement par un photomultiplicateur
- b) Schéma du montage expérimental. B_1 et B_2 sont les pulses lasers excitateurs et colinéaires.

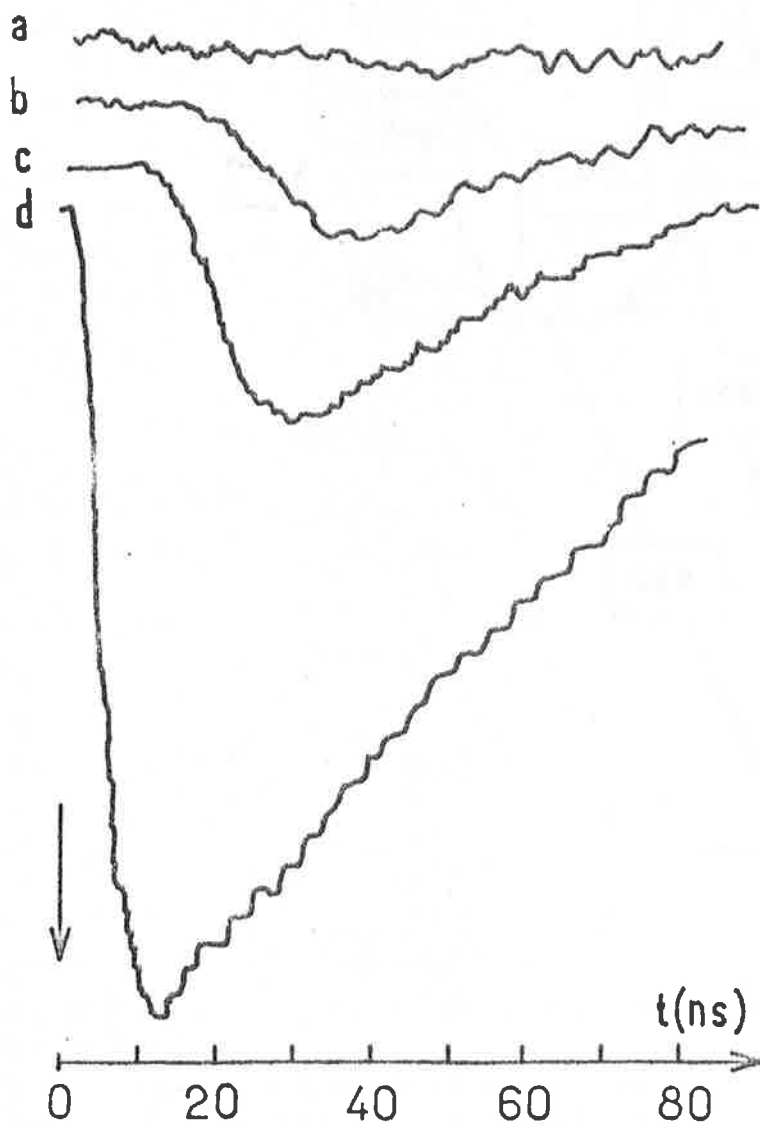
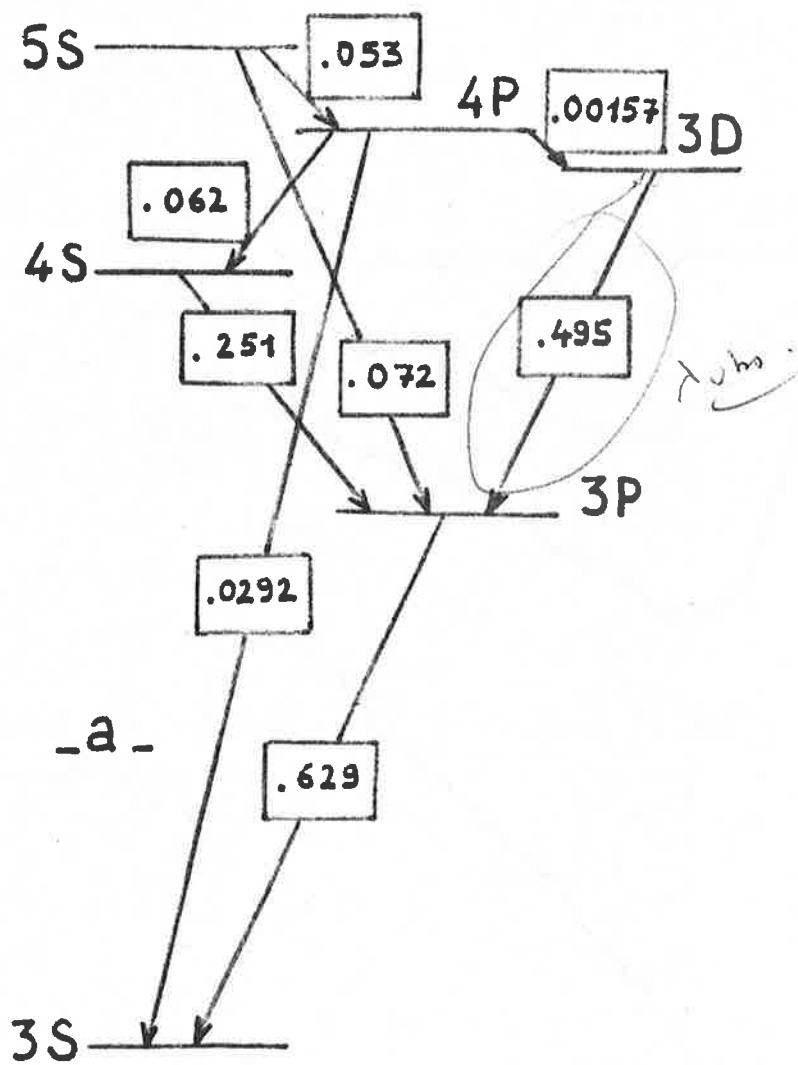


FIGURE I-5

Variation en fonction du temps du signal de fluorescence à $0,82 \mu$. Les courbes de a à d correspondent à un accroissement de l'intensité du pompage pour une densité de sodium donnée. La flèche indique l'instant du pompage et l'origine des temps.



- a -

- b -

Transition	Pourcentage d'atomes émettant sur cette transition
5S - 4P	42.4
5S - 3P	57.6
4P - 4S	28.35
4P - 3S	13.35
4P - 3D	0.7

FIGURE I-6

a) Différentes valeurs des A_{ki} pour chaque transition $k \rightarrow i$
(unité : 10^8 sec^{-1})

b) Rapports de branchement

disparaîtraient que dans le cas d'une augmentation globale de pression et subsisteraient dans le cas d'une augmentation du taux de pompage à pression globale constante. Seuls des processus collectifs radiatifs expliquent la disparition des battements dans ce deuxième cas. Le phénomène est cependant difficile à étudier dans les niveaux de Rydberg car les transitions super-radiantes correspondantes tombent dans le domaine microonde où les détecteurs sont peu sensibles et, d'autre part, les diverses transitions optiques issues des niveaux de Rydberg voisins sont trop proches pour être aisément distinguées.

Afin de vérifier l'hypothèse d'émission superradiante, nous avons repris la même expérience sur des niveaux beaucoup moins excités pour lesquels les difficultés précédentes disparaissent. La figure I-4 donne le principe de l'expérience réalisée : on excite en échelon, suivant le procédé décrit plus haut, le niveau 5S du sodium et on cherche à mettre en évidence le transfert radiatif des atomes vers le niveau 3D en étudiant la fluorescence du niveau 3D vers le niveau 3P à l'aide d'un photomultiplicateur placé à angle droit du faisceau excitateur. Le signal de fluorescence observé permet de mesurer en fonction du temps la population du niveau 3D. La figure I-5 montre le signal observé en fonction du décali après l'excitation pour des densités croissantes d'atomes excités à pression globale de sodium constante. La figure I-5-a montre qu'au-dessous de $N_0 = 10^{10}$ atomes/cm³, le taux d'atomes transférés au niveau 3d est négligeable. Ceci se comprend si l'on consulte la figure I-6 donnant le rapport de branchement des différentes transitions issues du niveau 5S. Par émission spontanée normale, moins de un pour cent des atomes transite par le niveau 3D. Lorsque N_0 augmente au-dessus de 10^{10} atomes/cm³, on observe (voir figure I-5 - b, c, d) un signal de fluorescence très important qui commence par croître en fonction du temps, passe par un maximum et diminue. Le décali du maximum de l'émission diminue lorsque N_0 augmente. Ainsi, au-dessus d'un certain seuil critique, on observe un transfert très important et de plus en plus rapide des atomes du niveau 5S vers le niveau 3D. Ce transfert semble être une manifestation indirecte de l'émission superradiante en cascade sur les transitions 5S-4P et 4P-3D. Pour en être sûr, il nous a fallu observer directement, dans l'axe de l'excitation, l'émission infrarouge correspondante.

Cette observation fait l'objet de la partie expérimentale de ce travail et sera décrite au chapitre V.

CHAPITRE II

DESCRIPTION QUALITATIVE SIMPLE DE LA SUPERRADIANCE

INTRODUCTION

Dans la plupart des expériences de fluorescence atomique, il est implicitement assumé que les différents atomes ou molécules excités dans l'échantillon étudié émettent spontanément de la lumière indépendamment les uns des autres. Ceci résulte de ce que l'on néglige les corrélations existant entre les dipôles associés aux différents atomes du milieu. Ces corrélations sont effectivement négligeables, tant que le nombre N d'atomes excités est faible. Lorsque N augmente, l'hypothèse de non corrélation des dipôles atomiques cesse, à partir d'un certain seuil, d'être valable et les caractéristiques de l'émission spontanée du système changent. On observe alors le phénomène de superradiance, qui se caractérise en particulier par le fait que l'intensité I émise par l'ensemble atomique n'est plus égale à la somme des intensités I_i qui seraient émises par les différents atomes du milieu supposés indépendants :

$$I \neq \sum_i I_i \quad (\text{II.1})$$

L'étude détaillée du phénomène de superradiance est complexe dans la mesure où il s'agit d'un "problème à N corps" consistant à étudier l'évolution d'un grand ensemble d'atomes couplés à un nombre infini de modes du champ électromagnétique. Cependant, le phénomène peut se comprendre qualitativement de façon assez simple à partir de considérations élémentaires de la théorie des antennes classiques et de l'émission spontanée.

Avant d'aborder, dans les chapitres suivants, une étude plus quantitative de la superradiance, où nous effectuerons en particulier une critique de certains résultats obtenus par d'autres auteurs, il nous a semblé utile de présenter dans ce chapitre, en nous limitant à des calculs très simples, les idées physiques essentielles de la superradiance.

Le phénomène de superradiance découle de deux effets physiques très simples :

i) Un ensemble de dipôles atomiques, préparés en phase les uns par rapport aux autres, peut rayonner de façon beaucoup plus intense et s'amortit sous l'effet de son rayonnement de façon beaucoup plus rapide que si les dipôles sont aléatoirement déphasés les uns par rapport aux autres. Il suffit pour cela que certaines conditions sur la géométrie du réseau des dipôles soient remplies. Cette propriété découle simplement des équations de MAXWELL et constitue un résultat bien connu de la théorie des antennes : l'émission d'un réseau d'antennes peut en effet se renforcer par interférence constructive dans certaines directions et ce renforcement conduit à une réaction de rayonnement "coopérative" plus efficace que celles des antennes indépendantes.

ii) Sous l'effet de l'émission spontanée les dipôles d'atomes initialement, tous préparés dans l'état excité d'une transition donnée, peuvent se verrouiller en phase les uns par rapport aux autres et conduire à l'apparition dans l'échantillon d'un réseau de dipôles en phase. Il suffit encore pour cela que certaines conditions sur la géométrie de l'échantillon atomique et le nombre N d'atomes initialement excités soient remplies. Cette propriété a été démontrée par DICKE et découle de simples considérations d'électrodynamique quantique. Le fait remarquable est que les conditions pour que l'effet ii) se produise entraîne l'effet i), c'est-à-dire que la mise en phase des dipôles atomiques sous l'effet de l'émission spontanée est automatiquement accompagnée de l'émission coopérative de l'ensemble des dipôles "corrélés" ainsi constitués.

Le phénomène de superradiance est la combinaison des deux effets que nous venons de décrire. Il est "classique" dans la mesure où il implique le rayonnement d'antennes oscillant en phase, mais il est "quantique" dans la mesure où la mise en phase de ces antennes élémentaires ne peut être comprise qu'à l'aide de l'électrodynamique quantique. Nous nous proposons d'approfondir dans la suite de ce chapitre ces deux aspects de la superradiance.

Nous commençons (§ A) par rappeler brièvement le formalisme nécessaire à l'étude du rayonnement d'un ensemble de dipôles classiques ou quantiques. Puis nous commencerons par étudier le cas d'un ensemble de deux atomes (§ B) ce qui nous permettra de nous familiariser avec la superradiance dans le cas le plus simple. Nous généraliserons ensuite la discussion au cas d'un ensemble de N atomes placés dans un volume de dimensions linéaires petites devant la longueur d'onde du rayonnement (§ C), puis au cas d'un ensemble de N atomes dans un grand volume (§ D).

A. - POSITION DU PROBLEME. NOTATIONS. RAPPELS D'ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

1) Description des dipôles atomiques

On considère un ensemble de N atomes situés aux points $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_N$ et interagissant avec le champ électromagnétique. Chaque atome possède deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ (voir figure II-1) séparés par l'intervalle d'énergie $\hbar\omega_0$ et couplés entre eux par l'opérateur dipôle électrique \vec{D} :

$$\langle e | \vec{D} | g \rangle = \vec{D}_{eg} \neq \vec{0} \quad (\text{II.2})$$

(on supposera dans la suite, sans perte de généralité, que \vec{D}_{eg} est réel).

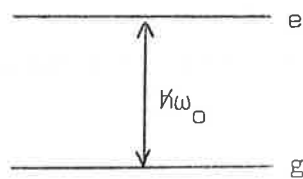


FIGURE II-1

Il est commode, pour définir l'opérateur dipolaire associé à chaque atome i , d'introduire les matrices r_i^+ et r_i^- qui, respectivement, excitent ou désexcitent l'atome i :

$$r_i^+ |g\rangle_i = |e\rangle_i ; \quad r_i^- |e\rangle_i = |g\rangle_i \quad (\text{II.3})$$

On a alors :

$$\vec{D}_i = [r_i^+ + r_i^-] \cdot \vec{D}_{eg} \quad (\text{II.4})$$

le dipôle de l'ensemble des atomes s'écrit :

$$\vec{D}(\vec{x}) = \sum_i \vec{D}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (\text{II.5})$$

2) Description du champ de rayonnement

Il est décrit à l'aide des opérations de création ou d'annihilation de photons $a_{k\epsilon}^+$, $a_{k\epsilon}$ dans les différents modes du champ.

Le champ électrique est lui-même représenté par un opérateur $\vec{E}(\vec{x}, t)$, combinaison linéaire d'opérateurs $a_{k\epsilon}$ et $a_{k\epsilon}^+$ qu'il est commode, comme l'opérateur dipôle atomique, de séparer en deux parties \vec{E}^+ et \vec{E}^- dites de fréquence positive et négative, ne contenant respectivement que des opérateurs de création et d'annihilation :

$$\vec{E}^+(\vec{x}, t) = -\sum_{\vec{k}\epsilon} \vec{\mathcal{E}}_{k\epsilon} a_{k\epsilon} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (\text{II.6-a})$$

$$\vec{E}^-(\vec{x}, t) = -\sum_{\vec{k}\epsilon} \vec{\mathcal{E}}_{k\epsilon} a_{k\epsilon}^+ e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (\text{II.6-b})$$

($\vec{\mathcal{E}}_{k\epsilon} = \vec{\epsilon}_k \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}}$ est le champ électrique par photon)

(v: volume de la "cavité" dans laquelle le champ est quantifié).

3) Evolution du système atomes + champs couplés

Elle est régie par le hamiltonien du système qui s'écrit :

$$H = H_{at} + H_{Ray} + V \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } H_{\text{at}} &= \mathcal{H}\omega_0 \sum_i r_i^3 \quad (r_i^3 : \text{matrice de Pauli } \sigma_z \text{ relative au } i^{\text{ème}} \text{ atome}) \\ H_{\text{Ray}} &= \sum_{\vec{k}\epsilon} \mathcal{H}\omega_k a_{\vec{k}\epsilon}^+ a_{\vec{k}\epsilon} \\ V &= -\vec{D} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Soit encore en remplaçant \vec{D} et \vec{E} par leurs expressions (II.5) et (II.6) et en négligeant la partie antirésonnante du couplage :

$$H = \mathcal{H}\omega_0 \sum_i r_i^3 + \sum_{\vec{k}\epsilon} \mathcal{H}\omega_k a_{\vec{k}\epsilon}^+ a_{\vec{k}\epsilon} + \sum_{\vec{k}\epsilon i} \left(\vec{D} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\epsilon} \right) \left\{ a_{\vec{k}\epsilon}^+ r_i^- e^{-i\vec{k}\vec{x}_i} + a_{\vec{k}\epsilon} r_i^+ e^{+i\vec{k}\vec{x}_i} \right\} \quad (\text{II.8})$$

Connaissant le hamiltonien H , les évolutions des opérateurs dipôles atomiques $\vec{D}(\vec{x})$ et champ électrique $\vec{E}(\vec{x})$ sont données par les équations de HEISENBERG :

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{1}{i\mathcal{H}} [\vec{D}, H] ; \quad \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{1}{i\mathcal{H}} [\vec{E}, H] \quad (\text{II.9})$$

qui sont les équivalents quantiques des équations de MAXWELL classiques.

4) Relation entre le champ rayonné et les dipôles atomiques

De la même manière que les équations de MAXWELL classiques permettent de calculer le champ électrique rayonné par un dipôle oscillant, les équations (II.9) permettent d'exprimer les opérateurs quantiques $\vec{E}_{\vec{k}}^{\pm}(\vec{x}, t)$ en fonction des opérateurs dipôles r_i^{\pm} .

Soit $\vec{k} = \frac{\omega_0}{c} \vec{e}_{\Omega}$ le vecteur de l'onde à la fréquence ω_0 se propageant dans la direction \vec{e}_{Ω} . Appelons $\vec{E}_{\vec{k}}^{\pm}(\vec{x}, t)$ le champ électrique émis dans cette direction à la distance x de l'ensemble des atomes émetteurs. On peut montrer la relation suivante entre cette composante du champ et les dipôles atomiques :

$$\vec{E}_{\vec{k}}^{\pm}(\vec{x}, t) = \frac{\omega_0^2}{4\pi\epsilon_0 x c^2} \sum_i \tilde{r}_i^{\pm} \left(t - \frac{x}{c}\right) e^{\pm i[\omega_0 t - \vec{k}(\vec{x} - \vec{x}_i)]} \times [\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}] \cdot \vec{\epsilon}_k \theta\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (\text{II.10})$$

Dans cette formule, \tilde{r}_i^{\pm} représente le dipôle de l'atome i en représentation d'interaction :

$$\tilde{r}_i^{\pm} = r_i^{\pm} e^{\pm i\omega_0 t} \quad (\text{II.11})$$

dont l'équivalent classique serait "l'enveloppe lentement variable" du dipôle oscillant à la fréquence ω_0 . $\vec{\epsilon}_k$ est le vecteur de polarisation du champ électrique perpendiculaire à la direction de propagation \vec{k} du champ et contenu dans le plan défini par \vec{k} et \vec{D}_{eg} (voir figure II-2) et $\theta\left(t - \frac{x}{c}\right)$ la fonction de HEAVISIDE

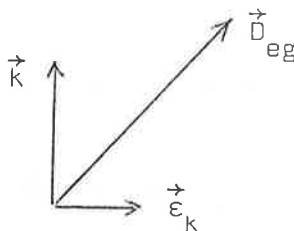


FIGURE II-2

La formule (II.10) est le simple équivalent quantique de la formule classique donnant le rayonnement d'un ensemble d'antennes. Elle exprime simplement que le champ rayonné par chaque antenne est émis dans le plan défini par \vec{k} et la direction de l'antenne, le champ étant retardé de x/c par rapport aux dipôles émetteurs.

Les conditions de validité de l'équation (II.10) sont les suivantes :

i) On peut définir une enveloppe de mouvement lent par rapport à la période optique $2\pi/\omega_0$. Si l'on appelle T_{SR} le temps caractéristique d'évolution des dipôles dans la représentation d'interaction (nous verrons qu'il s'agit du temps caractéristique de superradiance), cette condition s'exprime par l'inégalité :

$$T_{SR} \gg 2\pi/\omega_0 \quad (\text{II.12})$$

ii) On suppose que l'on peut définir une distance moyenne x du point d'observation à l'ensemble des atomes, c'est-à-dire que l'on se place à un point x tel que :

$$|x| \gg |x_{ij}| \quad (\text{II.13})$$

x_{ij} : distance de deux atomes émetteurs quelconques.

iii) On suppose que l'on peut négliger dans l'expression de $\tilde{r}_i(t - \frac{x}{c})$ le retard dû à la propagation le long de l'échantillon, c'est-à-dire que l'on peut définir un temps retardé unique $t - \frac{x}{c}$ pour tous les \tilde{r}_i quel que soit i . Cette condition est remplie tant que T_{SR} est plus grand que $|x_{ij}|/c$:

$$T_{SR} \gg |x_{ij}|/c \sim \frac{L}{c} \quad (L : \text{dimensions de l'échantillon}) \quad (\text{II.14})$$

Remarque :

Cette dernière condition ne signifie pas qu'on néglige tous les effets de propagation : si la propagation le long de l'échantillon est très rapide devant T_{SR} , elle ne l'est pas nécessairement devant $2\pi/\omega_0$ si bien que l'on conserve en tout état de cause les facteurs de propagations $e^{i\vec{k}\vec{x}_i}$ distincts qui affectent la phase optique du champ produit par chacun des dipôles.

5) Expression du signal mesuré par un détecteur

Un photomultiplicateur placé dans la direction \vec{k} à la distance x des atomes détecte un signal proportionnel à la valeur moyenne du produit $\vec{E}_k^- \vec{E}_k^+$ des parties de fréquences négative et positive du champ :

$$S_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \langle \vec{E}_k^-(\vec{x}, t) \vec{E}_k^+(\vec{x}, t) \rangle = \frac{\omega_0^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 x^2 c^4} \sum_{ij} \langle \tilde{r}_i^+(t - \frac{x}{c}) \tilde{r}_j^-(t - \frac{x}{c}) \rangle e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} |\vec{E}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2 \theta(t - \frac{x}{c}) \quad (\text{II.15})$$

On voit apparaître dans S des termes d'interférence proportionnels aux corrélations entre les dipôles atomiques différents. Ce sont ces interférences qui font que les signaux détectés peuvent ne pas être égaux à ceux qu'émettraient des atomes indépendants et que l'inégalité (II.1) peut se trouver vérifiée.

6) Evolution de l'énergie électromagnétique émise par le système atomique

L'énergie électromagnétique $W(t)$ présente dans le champ à l'instant t s'écrit comme l'intégrale de la valeur moyenne du carré du champ électrique sur l'espace :

$$W(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty \langle \vec{E}_k^2 \rangle d\Omega_k x^2 dx \quad (\text{II.16})$$

L'amortissement de l'ensemble des dipôles va être conditionné, en raison de la conservation de l'énergie, par la variation $dW(t) / dt$ de l'énergie émise en fonction du temps. Or l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_0^\infty \langle \vec{E}_k^2 \rangle d\Omega_k x^2 dx = \\ &= 2\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_0^\infty \langle \vec{E}_k^- \vec{E}_k^+ \rangle d\Omega_k x^2 dx \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

(Pour passer de la première ligne à la deuxième, il suffit de noter que seuls $\vec{E}_k^+ \vec{E}_k^-$ et $\vec{E}_k^- \vec{E}_k^+$ conduisent à l'intégrale de $\langle \vec{E}_k^2 \rangle$ et que $\vec{E}_k^+ \vec{E}_k^-$ ne diffère de $\vec{E}_k^- \vec{E}_k^+$ que par un terme provenant de la commutation de a_k^- et a_k^+ qui décrit l'énergie du vide et qui ne dépend pas de t).

Remplaçant $\langle \vec{E}_k^- \vec{E}_k^+ \rangle$ dans (II.17) par son expression (II.15), on trouve immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \frac{\omega_0^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{2\epsilon_0}{c^4} \frac{d}{dt} \int_0^{ct} \sum_{ij} \langle \tilde{r}_i^+ (t - \frac{x}{c}) \tilde{r}_j^- (t - \frac{x}{c}) \rangle \\ &\quad e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} |\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2 d\Omega_k dx \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Remarquant que l'intégrale sur x dans (II.18) s'écrit, après un changement de variable évident :

$$\int_0^{ct} \langle \tilde{r}_i^+ (t - \frac{x}{c}) \tilde{r}_j^- (t - \frac{x}{c}) \rangle dx = c \int_0^t \langle \tilde{r}_i^+ (t') \tilde{r}_j^- (t') \rangle dt' \quad (\text{II.19})$$

on obtient immédiatement :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0^4}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_{i,j} \int d\Omega_k e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} |\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2 \langle \tilde{r}_i^+(t) \tilde{r}_j^-(t) \rangle \quad (\text{II.20})$$

soit en introduisant la largeur naturelle Γ des atomes :

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{c^3} \frac{1}{3\pi\epsilon_0 \hbar} |\vec{D}_{eg}|^2 \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{3\Gamma}{8\pi} \hbar\omega_0 \sum_{i,j} \int d\Omega_k e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \frac{|\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2}{|\vec{D}_{eg}|^2} \langle \tilde{r}_i^+(t) \tilde{r}_j^-(t) \rangle \quad (\text{II.22})$$

La formule (II.22) montre que le taux global d'émission de lumière par le système atomique dépend lui aussi des corrélations $\langle \tilde{r}_i^+ \tilde{r}_j^- \rangle$ entre les différents dipôles atomiques. C'est une formule fondamentale qui va nous permettre, aux paragraphes suivants, d'analyser qualitativement le phénomène de superradiance. Avant cela, concluons ce paragraphe de rappels en appliquant les formules obtenues au cas de l'émission d'un atome unique.

7) Cas d'un atome isolé

- La formule (II.15) montre que le signal $S_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ détecté est proportionnel à $\langle \tilde{r}^+(t - \frac{x}{c}) \tilde{r}^-(t - \frac{x}{c}) \rangle |\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2$, c'est-à-dire à la valeur moyenne d'un opérateur de l'état atomique excité obtenu en multipliant entre elles les parties positives et négatives de l'opérateur dipolaire électrique de l'atome projeté sur la direction de polarisation du détecteur. C'est là un résultat bien connu des théories de la fluorescence atomique et du pompage optique.

- La formule (II.22) se simplifie pour donner :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{3\Gamma}{8\pi} \hbar\omega_0 \int d\Omega_k \frac{|\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2}{|\vec{D}_{eg}|^2} \langle \tilde{r}^+(t) \tilde{r}^-(t) \rangle \quad (\text{II.23})$$

L'intégrale angulaire dans (II.23) est égale à $8\pi/3$ si bien que l'on a :

$$\frac{dW}{dt} = \hbar\omega_0 \Gamma \langle \tilde{r}^+ \tilde{r}^- \rangle \quad (\text{II.24})$$

$\langle \tilde{r}^+ \tilde{r}^- \rangle$ n'est autre que la population de l'état atomique excité, égale à $e^{-\Gamma t}$.

On en déduit :

$$\frac{dW}{dt} = N \omega_0 \Gamma e^{-\Gamma t} \quad (\text{II.25})$$

qui s'intègre pour donner :

$$W = N \omega_0 [1 - e^{-\Gamma t}] \quad (\text{II.26})$$

L'énergie électromagnétique est émise en un temps caractéristique $1/\Gamma$ et est égale à $N\omega_0$: c'est le résultat bien connu de l'émission spontanée ordinaire.

Nous nous proposons, dans la suite de ce chapitre, d'étudier comment ce résultat se trouve modifié lorsque plusieurs atomes émettent à la fois.

Remarque :

Nous avons systématiquement dans ce paragraphe adopté le point de vue de HEISENBERG et non celui de SCHRÖDINGER, plus favorable à l'introduction de la notion de photon. L'avantage du point de vue présenté ici est d'être plus parallèle au point de vue classique et de conduire à des formules qui sont des transcriptions évidentes des formules d'électromagnétisme classique. Les expressions (II.15) et (II.22) en particulier sont en fait des formules de la théorie classique des antennes qui feront apparaître clairement ce qu'il y a de "classique" dans la superradiance.

B. SUPERRADIANCE D'UN SYSTEME DE DEUX ATOMES

Considérons à présent un système constitué de deux atomes identiques à ceux décrits au paragraphe précédent, situés aux points \vec{x}_1 et \vec{x}_2 , à la distance x_{12} l'un de l'autre. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ les atomes sont préparés dans l'état excité $|e\rangle$. Nous nous proposons d'étudier le rayonnement pour $t > 0$ de cet ensemble d'atomes et de voir dans quelles conditions il diffère de celui de deux atomes isolés émettant indépendamment.

Le taux d'émission d'énergie électromagnétique à l'instant t est donné par la formule (II.22) restreinte à 2 atomes qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar\omega_0} \frac{dW}{dt} = & \Gamma \left[\langle \tilde{r}_1^+ \tilde{r}_1^- \rangle + \langle \tilde{r}_2^+ \tilde{r}_2^- \rangle + \right. \\ & + \frac{3}{8\pi} \int d\Omega_k \frac{|\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2}{|\vec{D}_{eg}|^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_{12}} \langle \tilde{r}_2^+ \tilde{r}_1^- \rangle + \\ & \left. + \frac{3}{8\pi} \int d\Omega_k \frac{|\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2}{|\vec{D}_{eg}|^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_{12}} \langle \tilde{r}_1^+ \tilde{r}_2^- \rangle \right] \quad (\text{II.27}) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de (II.27) sont ceux qu'on obtiendrait si les deux atomes émettaient indépendamment. Les deux derniers représentent l'effet sur l'émission des interférences entre les dipôles des deux atomes. Pour que les effets d'interférences soient importants, il faut que deux conditions complémentaires soient remplies :

- i) il faut que les intégrales angulaires de (II.27) soient de l'ordre de l'unité;
- ii) il faut que les corrélations entre les dipôles $\langle \tilde{r}_1^+ \tilde{r}_2^- \rangle$ et $\langle \tilde{r}_2^+ \tilde{r}_1^- \rangle$ soient de l'ordre de $\langle \tilde{r}_1^+ \tilde{r}_1^- \rangle$ et $\langle \tilde{r}_2^+ \tilde{r}_2^- \rangle$.

Nous retrouverons ainsi les deux effets décrits en début de ce chapitre. La superradiance résulte de la combinaison d'un effet classique sur la géométrie des "antennes" rayonnantes que constituent les dipôles atomiques (condition i)) et d'un effet "quantique" par lequel ces "antennes" se trouvent mises en phase sous l'effet de l'émission spontanée (condition ii)).

Nous allons à présent étudier de plus près ces deux conditions.

1) Condition pour que les dipôles supposés en phase rayonnent de façon coopérative

Supposons, pour fixer les idées, que la polarisation du dipôle \vec{D}_{eg} est perpendiculaire à la distance \vec{x}_{12} des deux atomes (voir figure II-3).



FIGURE II-3

L'intégrale angulaire de (II.27) est alors immédiate à calculer. Appelant θ et ϕ les angles polaires de la direction Ω , on trouve :

$$\begin{aligned}
 I &= \int d\Omega_k \frac{|\epsilon_k \cdot D_{eg}|^2}{|D_{eg}|^2} e^{i\vec{k}\vec{x}_{12}} = \int \sin \theta d\theta d\phi (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) e^{ikx_{12} \cos \theta} \\
 &= 4\pi \frac{\sin kx_{12}}{kx_{12}} + 4\pi \frac{\cos kx_{12}}{(kx_{12})^2} - 4\pi \frac{\sin kx_{12}}{(kx_{12})^3} \quad (II.28)
 \end{aligned}$$

L'intégrale I n'est importante que si la condition :

$$kx_{12} < 1 \quad (II.29)$$

est satisfaite.

Pour que les deux dipôles, supposés corrélés, rayonnent de façon coopérative, il faut donc qu'ils soient situés à une distance inférieure à la longueur d'onde émise λ .

Lorsque (II.29) est vérifiée, on a $I \sim \frac{8\pi}{3}$ et (II.27) devient :

$$\frac{1}{N\omega_0} \frac{dW}{dt} = \Gamma \left[\langle r_1^+ r_1^- \rangle + \langle r_2^+ r_2^- \rangle + \langle r_1^+ r_2^- \rangle + \langle r_2^+ r_1^- \rangle \right] \quad (II.30)$$

L'effet des termes d'interférence entre les dipôles est alors aussi important que celui des termes "carrés" décrivant le rayonnement des dipôles séparés. Rappelons une fois de plus que ce résultat est purement classique : pour que deux antennes en phase rayonnent de façon coopérative, il faut qu'elles soient situées à une distance petite devant λ . Elles ajoutent alors leurs amplitudes de vibration et l'intensité rayonnée devient quatre fois plus grande que celle de deux antennes à grande distance.

2) Condition pour que les dipôles se mettent en phase par émission spontanée

Il nous reste maintenant à montrer que si les deux atomes sont suffisamment proches, leurs dipôles vont, sous l'effet de l'émission spontanée, se trouver effectivement corrélés entre eux. Ce résultat est très facile à montrer dans le cas où les deux atomes se trouvent très proches l'un de l'autre ($|x_{12}| \ll \lambda$). Revenons pour cela au point de vue de SCHRÖDINGER.

A l'instant $t = 0$, le système se trouve dans l'état excité $|e, e\rangle$. Après l'émission d'un photon, il est impossible de dire quel atome a émis, puisque l'état initial et le hamiltonien sont symétriques par échange des atomes lorsque $|\vec{k}x_{12}| \ll 1$. Le système atomique doit donc se trouver dans l'état symétrique :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|eg\rangle + |ge\rangle \right] \quad (\text{II.31})$$

résultant de la superposition des deux états correspondant à l'émission par l'atome 1 ou l'atome 2. Dans cet état, on a évidemment :

$$\langle + | r_1^+ r_1^- | + \rangle = \langle + | r_2^+ r_2^- | + \rangle = 1/2 \quad (\text{II.32-a})$$

$$\langle + | r_1^+ r_2^- | + \rangle = \langle + | r_1^- r_2^+ | + \rangle = 1/2 \quad (\text{II.32-b})$$

et la corrélation entre les dipôles des deux atomes est maximale.

Ainsi l'apparition d'une corrélation entre les deux dipôles peut être attribuée à un effet d'interférence quantique, les deux atomes étant indiscernables vis-à-vis de l'émission du premier photon d'émission spontanée.

Voyons maintenant de façon qualitative comment cette corrélation va évoluer lorsque la distance entre atomes 1 et 2 augmente. Dès que $|\vec{k}\vec{x}_{12}|$ n'est plus négligeable, le hamiltonien d'interaction avec le champ cesse d'être symétrique par échange d'atomes et, après émission d'un photon, le système peut se retrouver non seulement dans l'état $|+ \rangle$, mais aussi dans la superposition antisymétrique :

$$|- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|eg \rangle - |ge \rangle \right] \quad (\text{II.33})$$

On a évidemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle - | r_1^+ r_2^- | - \rangle = \langle - | r_2^+ r_1^- | - \rangle = -1/2 \\ \langle - | r_1^+ r_2^- | + \rangle = \frac{1}{2}; \langle - | r_2^+ r_1^- | + \rangle = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (\text{II.34-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle - | r_1^+ r_2^- | + \rangle = \frac{1}{2}; \langle - | r_2^+ r_1^- | + \rangle = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (\text{II.34-b})$$

si bien que la corrélation entre les deux dipôles sera :

$$\langle r_1^+ r_2^- \rangle + \langle r_1^- r_2^+ \rangle = (P_+ - P_-) \quad (\text{II.35})$$

différence des probabilités relatives de trouver, après émission d'un photon, le système atomique dans la configuration symétrique ou antisymétrique.

Les probabilités P_+ et P_- peuvent s'évaluer par la règle d'or de FERMI. Appelant $|+; 1\vec{k}\epsilon \rangle$ et $|-; 1\vec{k}\epsilon \rangle$ les états $|+ \rangle$ et $|- \rangle$ en présence d'un photon d'énergie $\hbar\omega_0$ et de direction \vec{k} , on a :

$$P_+ \propto \int | \langle +; 1\vec{k}\epsilon | \vec{E}_{\vec{k}\epsilon} \cdot \vec{D}_{eg} (r_1^- a_k^+ + r_2^- a_k^+ e^{i\vec{k}\vec{x}_{12}}) | e e \rangle |^2 d\Omega \quad (\text{II.36})$$

$$P_- \propto \int | \langle -; 1\vec{k}\epsilon | \vec{E}_{\vec{k}\epsilon} \cdot \vec{D}_{eg} (r_1^- a_k^+ + r_2^- a_k^+ e^{i\vec{k}\vec{x}_{12}}) | e e \rangle |^2 d\Omega \quad (\text{II.37})$$

Les intégrales angulaires intervenant dans les expressions sont identiques à celles que l'on a évaluées au paragraphe précédent, si bien qu'après un calcul très simple, on trouve :

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{3}{2} \left(\frac{\sin kx_{12}}{kx_{12}} + \frac{\cos kx_{12}}{(kx_{12})^2} - \frac{\sin kx_{12}}{(kx_{12})^3} \right) \right] \quad (\text{II.38})$$

et $\langle r_1^+ r_2^- \rangle +$

$$\langle r_2^+ r_1^- \rangle = \frac{3}{2} \left(\frac{\sin kx_{12}}{kx_{12}} + \frac{\cos kx_{12}}{(kx_{12})^2} - \frac{\sin kx_{12}}{(kx_{12})^3} \right) \quad (\text{II.39})$$

La corrélation entre les deux dipôles varie ainsi avec la distance de la même façon que l'effet de cette corrélation sur l'émission du système.

Pour que la corrélation soit importante, il suffit que $k\vec{x}_{12} \lesssim 1$. Alors, d'après les résultats du paragraphe précédent, les dipôles ainsi mis en phase vont pouvoir rayonner de façon coopérative et la superradiance se produire.

3) Calcul simple de l'émission superradiante de deux atomes

Il est possible, grâce à un raisonnement semi-classique très simple, d'achever le calcul de la superradiance du système de deux atomes situés à une distance petite devant λ .

Appelons :

$$|\psi\rangle = \alpha |e e\rangle + \beta |+\rangle + \gamma |g g\rangle \quad (\text{II.40})$$

l'état du système atomique à l'instant t . Les quantités $\langle r_1^+ r_1^- \rangle$, $\langle r_2^+ r_2^- \rangle$, $\langle r_1^+ r_2^- \rangle$ et $\langle r_2^+ r_1^- \rangle$ se calculent très aisément en fonction des coefficients α , β et γ .

$$\langle r_1^+ r_1^- \rangle = |\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2} = \langle r_2^+ r_2^- \rangle \quad (\text{II.41})$$

$$\langle r_1^+ r_2^- \rangle = \langle r_2^+ r_1^- \rangle = \frac{|\beta|^2}{2} \quad (\text{II.42})$$

On en tire :

$$\frac{dW}{dt} = 2\hbar\omega_0 \Gamma (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \quad (\text{II.43})$$

Mais d'après la conservation de l'énergie du système atome + champ, la variation d'énergie du champ électromagnétique est égale à celle du milieu atomique changée de signe :

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{dW_{at}}{dt} = -\hbar\omega_0 \frac{d}{dt} \left[2 |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right] \quad (\text{II.44})$$

On en déduit la relation :

$$\frac{d}{dt} \left(|\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2} \right) = -\Gamma (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \quad (\text{II.45})$$

Remarque :

Si l'on avait négligé les corrélations entre les deux dipôles atomiques, on aurait dû remplacer (II.43) par :

$$\frac{dW}{dt} = 2\hbar\omega_0 \Gamma (|\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2}) \quad (\text{II.46})$$

et l'équation (II.45) serait simplement devenue :

$$\frac{d}{dt} \left(|\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2} \right) = -\Gamma (|\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2}) \quad (\text{II.47})$$

qui s'intègre immédiatement pour donner :

$$|\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2} = A e^{-\Gamma t} \quad (\text{II.48})$$

L'énergie du système atomique est alors dissipée suivant la loi exponentielle de durée $1/\Gamma$: on retrouve le résultat bien connu de l'émission d'atomes indépendants : les effets nouveaux de superradiance sont donc bien dus aux corrélations entre dipôles.

Afin de trouver l'évolution du système, il nous faut une équation supplémentaire, que l'on obtient en écrivant que l'état initial $|e, e\rangle$ a une durée de vie $1/2\Gamma$: la probabilité d'émission du premier photon par le système de deux atomes est en effet deux fois celle d'émission d'un photon par un seul atome :

$$\frac{d|\alpha|^2}{dt} = -2\Gamma |\alpha|^2 \quad (\text{II.49})$$

soit :

$$|\alpha|^2 = e^{-2\Gamma t} \quad (\text{II.50})$$

On tire alors de (II.45) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\beta|^2 = \Gamma e^{-2\Gamma t} - \Gamma |\beta|^2 \quad (\text{II.51})$$

qui s'intègre pour donner :

$$|\beta|^2 = 2\Gamma t e^{-2\Gamma t} \quad (\text{II.52})$$

On en déduit l'expression de l'intensité lumineuse totale émise en fonction du temps :

$$\frac{dW}{dt} = 2N\omega_0 \Gamma e^{-2\Gamma t} [1 + 2\Gamma t] \quad (\text{II.53})$$

Les variations de $\frac{dW}{dt}$ sont représentées sur la figure (II-4) en traits pleins et sont comparées au signal attendu de deux atomes émettant indépendamment (traits tirés).

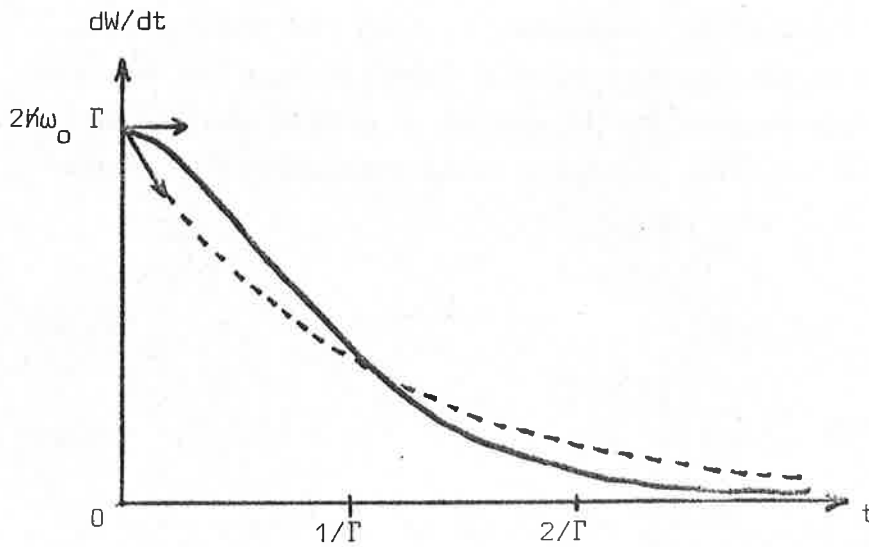


FIGURE II-4

On constate que l'émission commence par être plus forte que celle de deux atomes indépendants, en raison de la corrélation apparaissant entre les dipôles atomiques. Du fait de cette plus forte émission, l'amortissement du système s'effectue plus rapidement aux temps longs.

C. SUPERRADIANCE D'UN SYSTEME DE N ATOMES DANS UN PETIT VOLUME

La généralisation des résultats précédents au cas d'un ensemble de N atomes est un problème difficile, qu'on ne peut résoudre par de simples considérations de bilan d'énergie analogues à celles développées plus haut. Raisonant sur un modèle très simple de N atomes contenus dans un volume petit devant λ , DICKE ⁽¹⁾ a, dans son article original, montré qu'il devait apparaître, sous l'effet de l'émission spontanée des $N/2$ premiers photons, de fortes corrélations entre dipôles atomiques. Ces corrélations induisent une émission proportionnelle à N^2 qui amortit le système en un temps de l'ordre de $1/N\Gamma$. La figure (II-5) donne l'allure de dW/dt en fonction de t . Notons que les échelles verticale et horizontale sont très différentes de celles de la figure II-4.

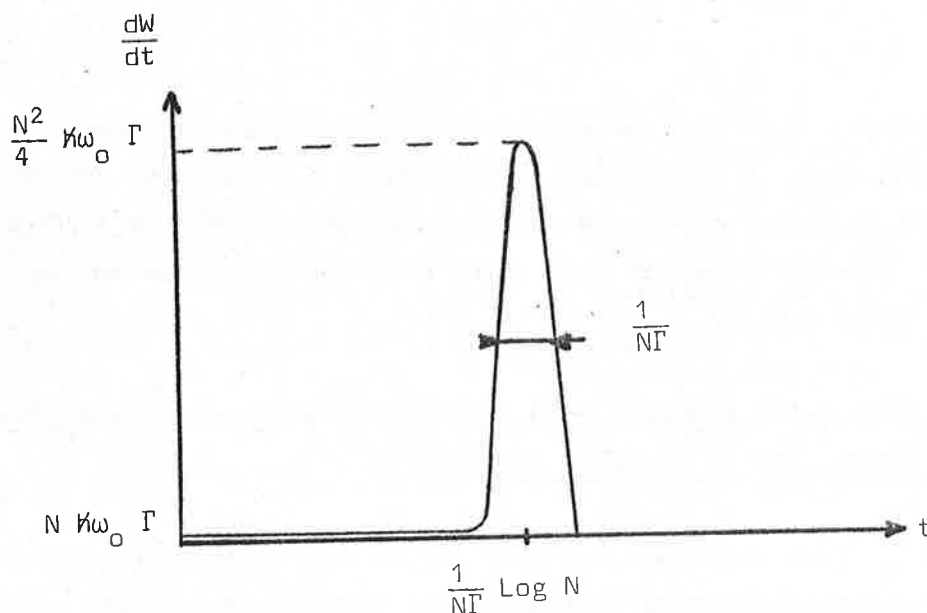


FIGURE II-5

Cependant, DICKE néglige dans son calcul des effets physiques importants : effet de réabsorption et d'émission induite de photons émis par les atomes qui se produisent si N est très élevé, effets d'interaction dipôle-dipôle ⁽¹¹⁾ dont la conséquence va être de "brouiller" les fréquences des dipôles atomiques et empêcher les corrélations de se bâtir dans le milieu. Nous reviendrons sur ces effets dans les deux chapitres suivants. Indiquons simplement ici qu'en général un volume de petites dimensions contenant un grand nombre d'atomes ne pourra pas se désexciter suivant la loi simple de la superradiance prévue par DICKE, car les dipôles atomiques sont déphasés par l'interaction dipôle-dipôle. Cependant, l'effet de déplacement des fréquences dû à l'interaction dipôle-dipôle devient négligeable lorsque la distance entre atomes devient grande devant la longueur d'onde λ ⁽¹²⁾.

D. SUPERRADIANCE D'UN SYSTEME DE N ATOMES DANS UN GRAND VOLUME

Le fait que l'on puisse observer la superradiance dans un système grand devant λ peut sembler paradoxal à la lumière des résultats du § B : les corrélations entre deux atomes tels que $|r_{ij}| > \lambda$ et leur effet sur l'amortissement du système sont en effet très petits. Cependant, lorsque N augmente, le nombre de telles corrélations croît comme N^2 . Ainsi, bien que chaque corrélation ait un effet très faible, leur nombre devient tellement important comparé au nombre

d'atomes N que leur effet cumulé peut ne pas être négligeable et la superradiance observable même dans un grand volume. On conçoit que la condition de superradiance va alors dépendre de N et de la taille et de la forme de l'échantillon atomique. Nous allons essayer de le montrer à présent en procédant suivant la même méthode qu'au § B.

1) Condition pour qu'un ensemble de N dipôles corrélés, distribués dans un grand volume, émette de façon coopérative

Supposons, pour fixer les idées, que les atomes sont distribués uniformément dans un parallélépipède allongé de longueur L et de section carrée de côté a (voir figure II-6)

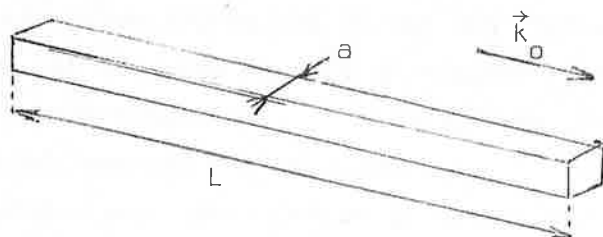


FIGURE II-6

$$\left(\begin{array}{l} L, a \gg \lambda \\ \text{et} \quad L \gg a \end{array} \right.$$

De plus, nous prendrons le vecteur de polarisation atomique \vec{D}_{eg} parallèle à un des petits côtés du volume. Nous supposons également que les dipôles sont totalement corrélés entre eux avec une différence de phase $e^{-i\vec{k}_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}$ entre les dipôles i et j situés aux points \vec{x}_i et \vec{x}_j , \vec{k}_0 étant un vecteur d'onde de longueur ω_0/c orienté le long du grand axe du parallélépipède (voir figure II-6)

$$\langle \tilde{r}_i^+(t) \tilde{r}_j^-(t) \rangle = r^2 e^{-i\vec{k}_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \quad (\text{II.54})$$

Moyennant ces conditions, l'équation (II.22) donnant l'intensité émise s'écrit :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{3\Gamma}{8\pi} \hbar\omega_0 r^2 \int d\Omega_k \frac{|\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2}{|\vec{D}_{eg}|^2} \left| \sum_i e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \right|^2 \quad (\text{II.55})$$

dans laquelle apparaît le carré de la transformée de Fourier de la distribution des atomes dans le milieu. Utilisant le passage à la limite continue :

$$\sum_i = \frac{N}{La^2} \int d^3x \quad (\text{II.56})$$

On établit sans peine la relation :

$$\left| \sum_i e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \right|^2 = N^2 \frac{\sin^2(\vec{k}-\vec{k}_0)_z \frac{L}{2}}{[(\vec{k}-\vec{k}_0)_z \frac{L}{2}]^2} \frac{\sin^2(\vec{k}-\vec{k}_0)_x \frac{a}{2}}{[(\vec{k}-\vec{k}_0)_x \frac{a}{2}]^2} \frac{\sin^2(\vec{k}-\vec{k}_0)_y \frac{a}{2}}{[(\vec{k}-\vec{k}_0)_y \frac{a}{2}]^2} \quad (\text{II.57})$$

qui montre que l'émission a lieu principalement dans l'angle de diffraction associé au volume du parallélépipède allongé.

L'intégrale angulaire dans (II.55) est alors aisée à effectuer. Dans le cas d'un volume de grand nombre de FRESNEL \mathcal{F} , obéissant à la condition :

$$\mathcal{F} = \frac{a^2}{L\lambda} \gg 1 ,$$

on montre que l'on a ⁽¹³⁾ :

$$\int d\Omega_k \left| \sum_i e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \right|^2 \frac{|\vec{\epsilon}_k \cdot \vec{D}_{eg}|^2}{|\vec{D}_{eg}|^2} = \frac{8\pi}{3} N^2 \mu \quad (\text{II.58})$$

avec :

$$\mu = \frac{3\lambda^2}{8\pi a^2} \quad (\text{II.59})$$

μ étant le "facteur de forme" associé au volume émetteur, proportionnel à l'angle solide de diffraction ; on obtient donc finalement :

$$\frac{1}{\hbar\omega_0} \frac{dW}{dt} = \mu N^2 \Gamma r^2 \quad (\text{II.60})$$

expression qu'il faut comparer à celle que donnerait l'émission des mêmes atomes supposés non corrélés :

$$\frac{1}{N\omega_0} \left(\frac{dW}{dt} \right)_{\text{non corrélé}} = \Gamma N r^2 \quad (\text{II.61})$$

On en déduit immédiatement que l'effet de corrélation sur l'émission est important si :

$$N > \frac{1}{\mu} = \frac{8\pi}{3} \frac{a^2}{\lambda^2} \quad (\text{II.62})$$

Lorsque (II.62) est satisfaite, le nombre de corrélations dipôle-dipôle est assez grand pour que, malgré le faible effet de chacune de ces corrélations, leur effet global soit important et modifie l'émission du système.

2) Condition pour qu'un ensemble de N atomes initialement excités et distribués dans un grand volume développe des corrélations interatomiques

Il nous resterait à ce stade à montrer que les corrélations entre les atomes dont nous avons supposé l'existence au § 1) ci-dessus se développent bien à partir de l'état initial sous l'effet du couplage du système atomique avec le champ de rayonnement. La démonstration généralise au cas de N atomes et d'un grand volume celle que nous avons faites pour deux atomes au § précédent. Elle consiste à montrer que le système atomique commence par évoluer d'une façon symétrique sous l'effet de l'émission des photons et passe par une superposition d'états dans laquelle il apparaît de fortes corrélations entre les atomes. Nous laissons cette démonstration et la discussion complète de l'évolution du système pour les chapitres suivants. Indiquons simplement ici que l'on peut montrer que si la condition (II.62) est remplie, le système des N atomes développe effectivement des corrélations entre les différents dipôles. Ainsi, dans le cas de N atomes comme celui de deux, la même condition entraîne l'apparition, sous l'effet de l'émission spontanée, de corrélations interatomiques et fait que ces corrélations jouent un rôle important dans l'amortissement du système.

En conclusion de cette brève étude, nous pouvons dire que la superradiance est un effet mixte classique et quantique; l'électrodynamique quantique est nécessaire pour comprendre son "démarrage" à partir d'un état excité dans lequel les corrélations interatomiques sont nulles. L'électrodynamique classique est suffisante pour comprendre l'évolution ultérieure du système et, en particulier, son amortissement rapide une fois que le processus est amorcé. Il est important de noter que la condition (II.62) qui commande le seuil du phénomène est à la fois importante pour expliquer le démarrage "quantique" et l'évolution ultérieure "classique" du phénomène. Il est évident que l'approche qualitative de ce chapitre ne permet pas de décrire en détail la dynamique complète de l'évolution du système superradiant. Pour étudier l'évolution exacte du système atome + champ couplés, de simples considérations de rayonnement d'antenne ou de bilan énergétique ne sont pas suffisantes. On peut montrer en particulier qu'il existe en fait deux régimes de superradiance distincts. dépendant du nombre d'atomes initialement excités que l'on peut qualifier de régime "markovien" et "non-markovien". Nous étudierons ces deux régimes et leurs différences au chapitre suivant et essayerons de montrer que la "superradiance markovienne" ne peut apparaître en fait que dans des conditions beaucoup plus restrictives que ce qui est admis par certains auteurs.

CHAPITRE III

REGIMES MARKOVIENS ET NON MARKOVIENS
DE LA SUPERRADIANCE

A. INTRODUCTION

La plupart des théories quantiques traitant de la superradiance d'un système de N atomes ramènent de façon plus ou moins directe le calcul de l'évolution du système à celui de l'émission spontanée d'un moment cinétique $J = N/2$.

Le raisonnement permettant de faire cette analogie grandement simplificatrice peut être résumé de la façon suivante :

Supposons tout d'abord que le système des N atomes se trouve contenu dans un volume de dimension linéaire a petite devant la longueur d'onde ($a \ll \lambda$). Dans ce cas, on suppose que l'on peut négliger le faible déphasage du champ d'un atome à l'autre du milieu (approximation de "DICKE"). L'interaction entre le champ et le système atomique est alors invariante par permutation des atomes. Il en résulte que le système doit rester dans une superposition symétrique d'états. Or, il est bien connu, depuis MAJORANA (14), qu'une assemblée symétrique de N atomes à deux niveaux est l'exact analogue d'un système de N spins $1/2$ couplés pour former un moment cinétique maximum $J = N/2$. De façon plus précise, l'état symétrique dans lequel s atomes sont désexcités est l'équivalent de l'état $|J = N/2, m = N/2 - s\rangle$. Dans cette analogie, le dipôle électrique des atomes est équivalent au moment transversal J_{\pm} de l'ensemble des spins. Il en résulte que la probabilité de transition entre deux états s et $s+1$ est proportionnelle au carré de l'élément de matrice de J_{\pm} entre les états m et $m-1$. Appelant ρ_{mm} la population de l'état $|J, m\rangle$ (correspondant à $s = N/2 - m$ états désexcités), on obtient alors le système d'équations couplées, dites équations de DICKE (1)(15) :

$$\frac{d\rho_{mm}}{dt} = -\Gamma \left(\frac{N}{2} + m \right) \left(\frac{N}{2} - m + 1 \right) \rho_{mm} + \Gamma \left(\frac{N}{2} + m + 1 \right) \left(\frac{N}{2} - m \right) \rho_{m+1, m+1} \quad (\text{III.1})$$

dans lesquelles Γ est la probabilité d'émission spontanée ordinaire d'un atome isolé. La résolution exacte ou approchée de ces équations a fait l'objet d'un

grand nombre d'articles théoriques ⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾ depuis le papier original de DICKE. Si l'on s'intéresse à l'énergie rayonnée par unité de temps par le système des atomes, on doit calculer la quantité :

$$W = -\hbar\omega_0 \frac{d \langle J_z \rangle}{dt} = -\hbar\omega_0 \sum m \frac{dp_{mm}}{dt} \quad (\text{III.2})$$

dont l'évaluation peut s'effectuer à partir des équations (III.1). On trouve alors que le pulse d'énergie électromagnétique est rayonné suivant une loi dont une bonne approximation est la fonction sécante hyperbolique du temps représentée au chapitre II sur la figure II-5, de durée caractéristique $1/\Gamma N$ ⁽²⁰⁾.

Si l'ensemble des atomes est réparti dans un grand volume cylindrique, on peut encore se ramener aux équations de DICKE (III.1) à condition d'admettre (approximation de "DICKE généralisée") ⁽²¹⁾ que le système n'interagit qu'avec un seul mode du champ de rayonnement dont le vecteur d'onde \vec{k}_0 est parallèle à l'axe du cylindre. On peut montrer que le problème se ramène alors formellement à celui d'un petit volume à condition d'effectuer sur les états atomiques une transformation unitaire qui tient compte du déphasage du mode \vec{k}_0 le long de l'échantillon.

On obtient à nouveau, pour l'évolution du système, des équations de DICKE identiques aux équations (III.1) à condition d'y remplacer Γ par $\Gamma\mu$, μ étant le "facteur de forme" introduit au chapitre II : tout se passe comme si la probabilité d'émission spontanée était réduite par le facteur μ car on ne doit considérer que l'émission dans les modes de diffraction associés au volume émetteur : la durée caractéristique du pulse émis devient :

$$T_{SR} = \frac{1}{\Gamma N \mu} \quad (\text{III.3})$$

Tout le raisonnement précédent repose, en plus de l'approximation de DICKE mentionnée plus haut, sur deux approximations très importantes résultant d'hypothèses implicites sur le système et les propriétés de l'interaction matière-rayonnement, les approximations de BORN et de MARKOV ⁽²²⁾ que nous nous proposons de discuter en détail dans ce chapitre.

Afin de bien comprendre la nature de ces approximations, il nous faut revenir pour un moment au problème de l'émission spontanée d'un atome isolé. Lorsque l'on étudie l'émission spontanée d'un petit système (atome ou molécule isolé), on suppose que le champ électromagnétique du vide avec lequel ce système interagit constitue un "grand" réservoir qui se trouve modifié de façon négligeable par son interaction avec le petit système (²³). Cette hypothèse est capitale afin de pouvoir établir pour le petit système une équation pilote décrivant un amortissement exponentiel ayant pour temps caractéristique la durée de vie $1/\Gamma$ du niveau excité. En d'autres termes, l'hypothèse de réaction faible du petit système sur le réservoir est nécessaire pour pouvoir appliquer à l'émission spontanée la théorie de la relaxation. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par le fait que l'émission spontanée du petit système possède un temps de corrélation τ_c très court devant la durée de vie $1/\Gamma$ de l'état excité :

$$\tau_c < \frac{1}{\Gamma} \quad (\text{III.4})$$

Cette condition, appelée condition de MARKOV, se trouve toujours pratiquement réalisée car τ_c est un temps caractéristique de l'ordre de la période λ/c des oscillations optiques, c'est-à-dire 10^{-14} à 10^{-16} seconde, alors que $1/\Gamma$ est au moins de l'ordre de 10^{-9} seconde et l'on a toujours :

$$\frac{\lambda\Gamma}{c} \ll 1 \quad (\text{III.5})$$

Physiquement, on peut montrer que la condition (III.4) équivaut à assumer qu'à chaque instant, le petit système atomique interagit avec le "vide" de photons, c'est-à-dire que l'on peut négliger, pour l'évolution ultérieure du système, le fait que ce système peut réinteragir avec un photon qu'il a déjà émis. Supposer qu'à chaque instant le "réservoir" se trouve ramené à son état initial du "vide" revient à traiter l'interaction atome-réservoir au premier ordre, c'est-à-dire à faire ce qu'on appelle l'approximation de BORN.

En résumé, l'émission spontanée d'un petit système obéit toujours à la condition de MARKOV (III.4), ce qui justifie de la traiter dans l'approximation de BORN. Cette approximation permet d'obtenir pour l'évolution du système un comportement irréversible, avec une décroissance exponentielle de l'état excité de durée $1/\Gamma$.

Lorsque l'on traite l'émission spontanée d'un grand système constitué d'un grand nombre N d'atomes ou de molécules initialement excités, rien n'indique que la condition de MARKOV reste satisfaite et que l'approximation de BORN s'applique toujours. En termes plus physiques, il n'est plus du tout évident que le système ne pourra pas interagir à nouveau avec les photons qu'il a déjà émis, les réabsorber ou voir son émission ultérieure stimulée par eux. En d'autres termes, la question qui se pose est de savoir jusqu'à quel nombre N_M d'atomes excités, le système émetteur pourra être considéré comme "petit" vis-à-vis du réservoir constitué par les modes du champ électromagnétique du vide et sa réaction sur ce réservoir négligeable.

Tant que $N < N_M$, on pourra supposer que le système atomique interagit à chaque instant avec "le vide de photons", c'est-à-dire qu'il est soumis au phénomène d'émission spontanée pure. Pour $N > N_M$, le système interagit avec un champ électromagnétique qu'il contribue à modifier, c'est-à-dire que l'émission spontanée s'accompagne nécessairement d'émission stimulée et d'absorption. Dans le premier cas ($N < N_M$) comme pour l'émission spontanée d'un petit système, l'évolution du système atomique couplé au "réservoir" sera irréversible et pourra être décrite par un système d'équations pilote du type des équations (III.1). Dans le second cas ($N > N_M$), l'évolution des deux "gros" systèmes atomes et champ couplés présentera des oscillations du type "oscillations de RABI" résultant d'un échange alterné d'énergie entre les atomes et le champ et décrivant les effets combinés de l'émission spontanée, de l'émission stimulée et de l'absorption. Dans ce régime, les équations pilote du type (III.1) ne sont certainement pas valables.

Dans leur théorie de la superradiance, BONIFACIO et al. (16)(24)(25) décrivent ces deux régimes limites et établissent la condition d'émission spontanée pure en écrivant que le temps de propagation de la lumière le long de l'échantillon supposé de longueur L est inférieur au temps caractéristique d'évolution du système superradiant $T_{SR} = \frac{1}{\Gamma N \mu}$

$$\frac{L}{c} < T_{SR} \quad (\text{III.6})$$

soit :

$$N < N_{M,B} = \frac{c}{\Gamma \mu L} \quad (\text{III.7})$$

Cette condition est justifiée par BONIFACIO et al. en remarquant que lorsqu'elle est réalisée, les photons "s'échappent" du milieu en un temps plus rapide que le temps de "couplage" des atomes et du champ, de l'ordre de $\frac{1}{\Gamma N \mu}$ et qu'en conséquence la réaction des atomes sur le champ doit être alors négligeable.

Il s'agit en fait d'une généralisation de la condition de MARKOV (III.4) établie pour un petit système dans laquelle la longueur L de l'échantillon remplace la longueur d'onde λ de la transition pour définir un temps de corrélation de l'interaction matière-rayonnement et le temps de superradiance $\frac{1}{\Gamma N \mu}$ remplace le temps d'émission spontanée ordinaire $1/\Gamma$. BONIFACIO et al. appellent donc markovien le régime de superradiance obtenu pour $N < N_{M,B}$ et "non markovien" le régime obtenu pour $N > N_{M,B}$ et supposent que tant que $N < N_{M,B}$, les équations différentielles pilote du type de l'équation (III.1) décrivent correctement l'évolution du système.

La condition de MARKOV-BONIFACIO (III.7) peut, dans le cas d'un volume émetteur cylindrique allongé ($\mu = \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{a^2}$), se mettre sous la forme :

$$N < \frac{8\pi}{3} \frac{1}{\Gamma \frac{\lambda}{c}} \times \frac{a^2}{L\lambda} = \frac{8\pi}{3} \frac{a^2}{\Gamma L \frac{\lambda}{c}} \quad (\text{III.8})$$

qui fait apparaître le rapport $\frac{\Gamma\lambda}{c} = \tau_c/T_{SP} \ll 1$ mesurant la "faiblesse" de l'interaction responsable de l'émission spontanée et la quantité $\mathcal{F} = \frac{a^2}{L\lambda}$ qui n'est autre que le nombre de FRESNEL associé au volume émetteur. Pour le cas généralement étudié des nombres de FRESNEL de l'ordre de l'unité, la condition de BONIFACIO-MARKOV revient à dire que le nombre d'atomes émetteurs doit rester inférieur au rapport de la durée de vie à la période optique de la transition. Ce nombre, proportionnel à $1/\alpha^3$, est généralement de l'ordre de 10^6 pour une transition ordinaire. Il peut atteindre des valeurs plus grandes de l'ordre de 10^9 à 10^{13} pour des transitions peu permises. Ces ordres de grandeur montrent que la condition (III.7) de MARKOV-BONIFACIO doit être réalisée pour des systèmes macroscopiques contenant un très grand nombre d'atomes et qu'en particulier, elle doit être satisfaite ou pratiquement satisfaite dans toutes les expériences de superradiance effectuées récemment, y compris la nôtre. Dans toutes ces expériences, on a en effet $N \sim 10^9$ à 10^{11} atomes et $T_{SR} \sim \frac{L}{c}$. Cependant, les équations pilotes de la "superradiance markovienne" sont inadéquates pour décrire les résultats de ces expériences, qui présentent au contraire des caractéristiques (longueur des délais, présence d'oscillations) qui les apparentent à la "superradiance non-markovienne". Pour rendre compte des résultats des expériences dans leur théorie, BONIFACIO et al. sont obligés de modifier arbitrairement les paramètres expérimentaux dans des proportions considérables ⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾, de façon à violer "artificiellement" la condition (III.7) et à imposer au système un comportement "non markovien".

En analysant de façon détaillée la nature des approximations de BORN et de MARKOV, nous sommes arrivés à la conclusion que le désaccord entre la théorie et les résultats expérimentaux provient de ce que la condition (III.7), admise plus ou moins intuitivement dans les articles précédents, n'est pas assez restrictive et qu'elle doit en fait être remplacée par la nouvelle condition (que nous appellerons simplement dans la suite "condition de MARKOV") :

$$N < \sqrt{\frac{8\pi c}{3} \frac{c}{\Gamma\lambda} \mathcal{F}} \quad (\text{III.9})$$

ou encore par la condition équivalente :

$$\frac{NL}{c} < T_{SR} \quad (\text{III.10})$$

Cette condition -beaucoup plus sévère que celle de BONIFACIO- limite à présent le régime markovien à environ 10^3 à 10^4 atomes et assigne sans discussion possible une caractéristique non-markovienne aux expériences réalisées à ce jour, ce qui supprime le désaccord mentionné plus haut.

La discussion précédente montre qu'une analyse détaillée de la validité des différentes approximations faites lorsqu'on traite l'émission spontanée d'un ensemble de N atomes, est capitale pour comprendre les expériences réalisées à ce jour et déterminer le "régime de superradiance" auquel elles correspondent. Le but de ce chapitre est de présenter cette analyse et de justifier la condition (III.10).

Nous commencerons (§ B) par écrire les équations exactes, décrivant l'évolution du système. Nous définirons ensuite les trois types d'approximation que l'on doit faire successivement pour simplifier ce système et le ramener à un système d'équations de DICKE du type (III.1) : approximation de BORN ou du premier ordre (§ C), approximation de MARKOV (§ D) et enfin approximation de DICKE (§ E). Nous discuterons ensuite la validité de ces approximations (§ F) et montrerons que l'approximation de BORN et de MARKOV sont simultanément légitimées par la condition (III.10) qui doit donc être nécessairement remplie pour que l'on puisse décrire la superradiance par des équations différentielles pilotes. Nous montrerons par contre que cette condition n'est certainement pas suffisante pour valider l'approximation de DICKE : nous rappellerons qu'il existe des régimes markoviens où cette approximation n'est pas valable et où les équations pilotes d'évolution du système ne peuvent se réduire aux équations (III.1) de DICKE. C'est en particulier le cas d'un petit volume ($a \ll \lambda$), pour lequel le régime de DICKE ne s'applique pas, bien que ce soit celui pour lequel la superradiance ait été décrite pour la première fois ! Nous terminerons ce chapitre (§ G) en précisant les conditions -finalement très restrictives- où les équations de DICKE pourraient être susceptibles de décrire correctement la superradiance. Quant aux régimes non-markoviens pour lesquels $\frac{NL}{c} > T_{SR}$, nous en laissons la description pour le chapitre IV.

B. EQUATIONS D'EVOLUTION EXACTES DU SYSTEME

1) Description du système. Notations

Rappelons rapidement les notations : le hamiltonien du système atomes + champ s'écrit (cf. chapitre II) :

$$H = H_{\text{at}} + H_{\text{Ray}} + V \quad (\text{III.11})$$

où :

$$H_{\text{at}} = \sum_i \hbar \omega_0 R_3$$

$$H_{\text{Ray}} = \sum_{\vec{k}\epsilon} \hbar c k a_{\vec{k}\epsilon}^+ a_{\vec{k}\epsilon}$$

et
$$V = \sum_{\vec{k}\epsilon} \vec{g}_{\vec{k}\epsilon} \left\{ a_{\vec{k}\epsilon} R_{\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}\epsilon}^+ R_{\vec{k}}^- \right\}$$

sont respectivement les hamiltoniens du système atomique, du champ électromagnétique et d'interaction. La définition des quantités apparaissant dans cet hamiltonien est la suivante :

■ $R_{\vec{k}}^{\pm}$ et R_3 sont des pseudo-moments cinétiques collectifs :

$$R_3 = \sum_i r_i^3 \quad (\text{III.12})$$

$$R_{\vec{k}}^{\pm} = \sum_i e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{x}_i} r_i^{\pm} \quad (\text{III.13})$$

r_i^3 et r_i^{\pm} étant les composantes du moment cinétique de spin 1/2 auquel l'atome i peut être associé, définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i^3 |\pm\rangle_i = \pm \frac{1}{2} |\pm\rangle_i \\ r_i^+ |-\rangle_i = |+\rangle_i \\ r_i^- |+\rangle_i = |-\rangle_i \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

■ $\vec{g}_{\vec{k}\epsilon}$ est la constante de couplage entre les atomes et le mode $(\vec{k}, \vec{\epsilon}_{\vec{k}})$:

$$g_{\vec{k}\epsilon} = + \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}} \langle g | \vec{\epsilon}_{\vec{k}} \cdot \vec{D} | e \rangle \quad (\text{III.15})$$

où v est le volume de quantification du champ, \vec{D} l'opérateur dipôle électrique et $|e\rangle$ et $|g\rangle$ les états atomiques fondamental et excité.

- $\hbar\omega_0 = \hbar c k_0$ est l'énergie de la transition $|e\rangle$, $|g\rangle$
- $a_{\vec{k}\epsilon}^-$ et $a_{\vec{k}\epsilon}^+$ sont les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon dans le mode $(\vec{k}, \vec{\epsilon}_{\vec{k}})$.

Le hamiltonien (III.11) est exact et ne suppose aucune hypothèse restrictive quant à la taille ou à la forme de l'échantillon, le nombre d'atomes, etc...

Le système atomes + champ est décrit par sa matrice densité $W(t)$ qui obéit à l'équation d'évolution :

$$i\hbar \frac{dW}{dt} = [H, W] \quad (\text{III.16})$$

On s'intéressera en fait à l'évolution du système atomique, décrit par la matrice densité partielle :

$$\rho(t) = \text{Tr}_R W(t) \quad (\text{III.17})$$

où Tr_R représente l'opération de trace par rapport au champ de rayonnement.

Il est commode de passer en représentation d'interaction par rapport au hamiltonien "non perturbé" $H_0 = H_{\text{at}} + H_{\text{Ray}}$

$$\tilde{W}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} W e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (\text{III.18})$$

$$\tilde{V}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$$

2) Rappels sur la théorie de la relaxation dans le formalisme de LIOUVILLE (28)

La forme de l'équation d'évolution (III.16) de $W(t)$ est simple, mais la quantité $W(t)$ est beaucoup trop compliquée pour pouvoir être étudiée et

contient trop d'informations (toutes les corrélations entre les atomes et le champ). Par contre, $\rho(t)$ est simple et ne contient que l'information utile, mais son évolution ne peut être décrite par un simple commutateur.

L'obtention des équations d'évolution de $\rho(t)$ est un problème général de la théorie quantique de la relaxation. Le principe consiste à calculer l'évolution non pas de $W(t)$ mais d'une restriction de la matrice densité, convenablement choisie pour simplifier la forme des équations tout en gardant toute l'information utile. Rappelons les principales étapes de la théorie que l'on peut trouver dans différentes références (20)(23)(24)(29).

Il est commode de se placer dans le point de vue de LIOUVILLE, qui consiste à considérer $W(t)$ comme un super-état $|W \gg$ dans l'espace de HILBERT des opérateurs. Dans ce point de vue, l'équation d'évolution (III.16) peut s'écrire :

$$i\hbar \frac{d |W \gg}{dt} = L |W \gg \quad (\text{III.20})$$

où $L = L_A + L_R + L_{AR}$ est le Liouvillien du problème défini par la relation :

$$L |W \gg = | [H, W] \gg \quad (\text{III.21})$$

Au lieu d'étudier l'évolution de $|W \gg$, nous étudierons celle de la projection de $|W \gg$ sur un sous-espace de l'espace de LIOUVILLE défini par un projecteur P et le projecteur complémentaire $Q = 1 - P$.

Nous poserons :

$$|\Phi(t) \gg = P |W(t) \gg \quad (\text{III.22})$$

et nous supposons que P possède les propriétés :

$$P L_0 Q = Q L_0 P = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$(\text{avec } L_0 = L_A + L_R)$$

On montrera alors que l'évolution de $|\Phi\rangle\rangle$ peut se mettre sous la forme intégral-différentielle :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Phi}\rangle\rangle = \int_0^\infty d\tau P \tilde{R}(t,\tau) P |\tilde{\Phi}(t-\tau)\rangle\rangle \quad (\text{III.24})$$

le noyau $\tilde{R}(t,\tau)$ étant donné par :

$$P \tilde{R}(t,\tau) P = P e^{iL_0 t/\hbar} R(\tau) e^{-iL_0(t-\tau)/\hbar} P \quad (\text{III.25})$$

avec :

$$P R(\tau) P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P R(\omega+i\epsilon) P e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (\text{III.26})$$

et :

$$P R(\omega+i\epsilon) P = P L_{AR} P + P L_{AR} \frac{Q}{\hbar\omega + i\epsilon - Q L_0 Q} L_{AR} P \\ + P L_{AR} \frac{Q}{\hbar\omega + i\epsilon - Q L_0 Q} L_{AR} \frac{Q}{\hbar\omega + i\epsilon - Q L_0 Q} L_{AR} P + \dots \quad (\text{III.27})$$

Ainsi le noyau de l'équation (III.24) se calcule aisément par l'intermédiaire du développement en série de sa transformée de FOURIER : chaque terme du développement (III.27) va correspondre dans le développement du noyau à un produit de convolution d'ordre de plus en plus élevé faisant correspondre au terme du 1er ordre un commutateur simple, au terme du 2e ordre un commutateur double, etc..

Comme BONIFACIO et al. (24) l'ont montré, il est possible, par un choix convenable de P , de limiter de façon exacte le développement au deuxième ordre dans (III.27). Il suffit pour cela de prendre P tel que :

$$P L_{AR} P = Q L_{AR} Q = 0 \quad (\text{III.28})$$

(III.27) se réduit alors à :

$$P R(\omega + i\epsilon) P = P L_{AR} \frac{Q}{\hbar\omega + i\epsilon - Q L_0 Q} L_{AR} P \quad (\text{III.29})$$

En repassant dans l'espace des états, (III.24) devient sans aucune approximation :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \left[\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\Phi}(t-\tau)] \right] \quad (\text{III.30})$$

Il existe un choix très naturel de sous-espace de l'espace des opérateurs tel que (III.28) est satisfaite : il suffit de projeter $W(t)$ sur le sous-espace des opérateurs n'ayant d'éléments de matrice non nuls qu'entre états différents d'un nombre pair de photons :

$$P_W = \sum_{\vec{k}\epsilon} \sum_{\vec{n}_{\vec{k}\epsilon}} \sum_{\alpha\beta} |n_{\vec{k}\epsilon} \alpha\rangle \langle n_{\vec{k}\epsilon} \alpha| W |n'_{\vec{k}\epsilon} \beta\rangle \langle n'_{\vec{k}\epsilon} \beta| \quad (\text{III.31})$$

$$\text{avec } \sum_{\vec{k}\epsilon} (n_{\vec{k}\epsilon} - n'_{\vec{k}\epsilon}) = 2q$$

($|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ représentent une base d'états atomiques quelconques ...).

(Q est alors le projecteur sur l'espace des opérateurs n'ayant d'éléments de matrice non nuls qu'entre états différents d'un nombre impair de photons).

$V(t)$ ne changeant que d'une unité le nombre de photons, il est clair que L_{AR} ne peut que connecter ces deux espaces et ne peut relier deux super-états à l'intérieur de l'un d'entre eux : les conditions (III.28) sont donc alors réalisées et l'évolution de $\tilde{\Phi}(t) = P \tilde{W}(t)$ est bien décrite exactement par (III.30). La connaissance de $\tilde{\Phi}(t)$ est d'ailleurs suffisante pour déterminer $\tilde{\rho}(t)$, car on a évidemment :

$$\rho(t) = \text{Tr}_R W(t) = \text{Tr}_R \Phi(t) \quad (\text{III.32})$$

puisque l'opérateur de trace ne concerne que les éléments de matrice tels que

$$\sum_{\vec{k}\epsilon} (n_{\vec{k}\epsilon} - n'_{\vec{k}\epsilon}) = 0.$$

L'évolution exacte du système atomique est donc déterminée si l'on sait résoudre les équations exactes (III.30) et (III.32) avec la condition initiale :

$$\tilde{\Phi}(0) = \tilde{\rho}_{at}(0) \otimes |0\rangle_R \langle 0| \quad (III.33)$$

où $\tilde{\rho}_{at}(0)$ est la matrice densité représentant le système atomique totalement inversé.

L'expression (III.30) possède encore une très grande richesse et décrit, malgré sa forme condensée, un nombre infini de processus à tous les ordres, ceci parce que $\tilde{\Phi}(t)$ reste une quantité très riche contenant un grand nombre de corrélations atomes-champ. Il est instructif de développer chacun des quatre termes du double commutateur de (III.30) en y remplaçant V par son expression.

Explicitons le pour le premier terme. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t) = \sum_{\substack{\vec{k}\epsilon \\ \vec{k}'\epsilon'}} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} g_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow}}{\mathcal{H}^2} \int_0^t d\tau \left\{ a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow}, R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}'}^{\dagger}, e^{-ic(k+k'-2k_0)(t-\tau)} e^{ic(k_0-k)\tau} \right. \\ + a_{\vec{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\dagger}, R_{\vec{k}}^{\rightarrow} R_{\vec{k}'}^{\rightarrow}, e^{ic(k+k'-2k_0)(t-\tau)} e^{-ic(k_0-k)\tau} \\ - a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\dagger}, R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}'}^{\rightarrow}, e^{ic(k'-k)(t-\tau)} e^{ic(k_0-k)\tau} \\ \left. - a_{\vec{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow}, R_{\vec{k}}^{\rightarrow} R_{\vec{k}'}^{\dagger}, e^{ic(k-k')(t-\tau)} e^{-ic(k_0-k)\tau} \right\} \tilde{\Phi}(t-\tau) \\ + 3 \text{ termes analogues} \end{aligned} \quad (III.34)$$

C. L'APPROXIMATION DE BORN

Le principe de l'approximation de BORN consiste à négliger l'apparition de corrélations ⁽¹⁵⁾ entre le système atomique et le champ dans le membre de droite des équations (III.30), c'est-à-dire à y remplacer $\tilde{\Phi}(t-\tau)$ par $\tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_R \langle 0|$ représentant le système atomique en présence du vide de photons : faire cette approximation revient à supposer que les atomes émettent à chaque instant dans le vide et donc à négliger la réaction du système émetteur sur le réservoir constitué par le champ électromagnétique quantifié. L'équation (III.30) devient alors simplement :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) \Big|_{\text{B}} = - \frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \int_0^t d\tau \left[\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau) | 0 \rangle \langle 0 |_R] \right] \quad (\text{III.35})$$

Explicitons cette expression en analysant ce que devient après cette approximation le premier terme du double commutateur donné dans le cas général par l'expression (III.34) : l'opérateur de trace par rapport au champ se réduit à prendre la valeur moyenne dans le vide de photon des produits d'opérateurs de création et d'annihilation. Le seul produit conduisant à un terme non nul est le produit $a_{\vec{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\vec{k}'\epsilon'}$, avec $\vec{k}\epsilon_k \equiv \vec{k}'\epsilon'_k$, dont la valeur moyenne dans le vide est 1. On obtient alors comme contribution de ce terme :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = - \sum_{\vec{k}\epsilon} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} \int_0^t d\tau e^{ic(k_0-k)\tau} R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-} \tilde{\rho}(t-\tau) + \dots \quad (\text{III.36})$$

On calcule de même les trois autres termes du commutateur. Regroupant tous les termes et séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient finalement le système d'équations integro-différentielles réduit aux seules variables atomiques :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = & - \sum_{\vec{k}\epsilon} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \cos c(k_0-k)\tau \left\{ [R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-}, \tilde{\rho}(t-\tau)]_+ \right. \\ & \left. + 2 R_{\vec{k}}^{-} \tilde{\rho}(t-\tau) R_{\vec{k}}^{\dagger} \right\} \\ & - i \sum_{\vec{k}\epsilon} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \sin c(k_0-k)\tau [R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-}, \tilde{\rho}(t-\tau)] \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

La partie réelle de ce système d'équations décrit l'amortissement collectif du système, la partie imaginaire, les déplacements des niveaux liés au couplage collectif des atomes avec le champ de rayonnement.

D. L'APPROXIMATION DE MARKOV

Les équations intégral-différentielles (III.37) décrivent un processus à mémoire car la dérivée à un instant de $\tilde{\rho}(t)$ dépend de l'état antérieur du système aux instants $(t-\tau)$. On peut évaluer la portée de cette mémoire de la façon suivante :

Projetons l'équation (III.36) sur des états de base α, β du système atomique (nous précisons ces états au paragraphe suivant) :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha}(t) = - \sum_{\vec{k}\epsilon} \sum_{\beta} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} \int_0^t d\tau e^{ic(k_0-k)\tau} \left(R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-} \right)_{\alpha\beta} \tilde{\rho}_{\beta\beta}(t-\tau) + \dots \quad (\text{III.38})$$

et effectuons tout d'abord la sommation sur k : celle-ci peut être décrite comme une intégration sur k d'une fonction égale au produit de l'exponentielle $e^{ic(k_0-k)\tau}$, de période $1/c\tau$, par la fonction $\frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} \left(R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-} \right)_{\alpha\beta}$. L'intégrale ne sera notablement différente de zéro que si :

$$\frac{1}{c\tau} \gtrsim \Delta k \quad (\text{III.39})$$

où Δk est la largeur en k de $\left(R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-} \right)_{\alpha\beta}$.

Or l'on a :

$$\left(R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-} \right)_{\alpha\beta} = \sum_{ij} e^{i\vec{k}\vec{x}_i} e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} \langle \alpha | r_i^{\dagger} r_j^{-} | \beta \rangle \quad (\text{III.40})$$

Si la transition $\alpha \rightarrow \beta$ correspond à l'émission collective d'un photon par l'ensemble du milieu, les contributions de tous les atomes i et j à l'expression (III.40) sont du même ordre de grandeur : les sommations sur i et sur j étendues à l'ensemble du milieu font que l'expression (III.40) ressemble au carré de la transformée de Fourier de la distribution atomique : $\left(R_{\vec{k}}^{\dagger} R_{\vec{k}}^{-} \right)_{\alpha\beta}$ a donc une extension de l'ordre de $1/L$, où L est la longueur du milieu. La condition (III.39) s'écrit :

$$\tau < \frac{L}{c} \quad (\text{III.41})$$

et l'on voit que la mémoire du processus est de l'ordre du temps de propagation de la lumière dans le milieu. Si cette mémoire est suffisamment courte devant les constantes de l'évolution du système (nous verrons plus loin ce que cette condition signifie), on peut remplacer dans (III.37) $\tilde{\rho}(t-\tau)$ par $\tilde{\rho}(t)$ et la borne supérieure de l'intégration t par $+\infty$.

L'intégration sur τ s'effectue alors immédiatement et l'on a :

$$\int_0^{\infty} d\tau \cos c(k_0 - k)\tau = \frac{\pi}{c} \delta(k - k_0) \quad (\text{III.42})$$

$$\int_0^{\infty} d\tau \sin c(k_0 - k)\tau = P P \frac{1}{k - k_0} \times \frac{1}{c} \quad (\text{III.43})$$

Le système (III.37) devient un système d'équations différentielles pilotes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = & - \sum_{\vec{k} \in} \frac{g_{\vec{k}}^2 \pi}{\hbar^2 c} \delta(k - k_0) \left\{ \left[R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^-, \tilde{\rho}(t) \right]_+ \right. \\ & \left. - 2 R_{\vec{k}}^- \tilde{\rho}(t) R_{\vec{k}}^+ \right\} \\ & - i \sum_{\vec{k} \in} \frac{g_{\vec{k}}^2}{\hbar^2 c} P P \frac{1}{k - k_0} \left[R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^-, \tilde{\rho}(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

dans lesquelles : $\sum_{\vec{k} \in}$ signifie $\frac{v}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega_k$.

E. L'APPROXIMATION DE DICKE

Les équations (III.44), bien que considérablement plus simples que (III.30), restent complexes dans la mesure où elles décrivent l'évolution d'un système à 2^N états : il y a donc 2^{2N} éléments de matrice de ρ à prendre théoriquement en compte !

L'approximation de DICKE revient à simplifier ces équations en considérant que l'évolution se réduit en fait à un très petit sous-espace de l'espace des états, celui où l'excitation reste uniformément répartie sur l'ensemble des atomes. Afin de préciser cette approximation, il nous faut choisir une base particulière de l'espace des états atomiques, la base des états de DICKE associée à un mode \vec{k} du champ.

1) La base des états de DICKE

a) Définition

Choisissons un vecteur \vec{k}_0 dont le module est égal à celui du vecteur d'onde de la transition atomique.

On peut définir, à partir de (III.14), un pseudo-moment cinétique :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\vec{k}_0}^{\pm} = \sum_i e^{\pm i \vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} r_i^{\pm} \\ R_{\vec{k}_0}^3 = \sum_i r_i^3 \end{array} \right. \quad (\text{III.45})$$

somme d'opérateurs atomiques individuels $e^{\pm i \vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} r_i^{\pm}$, r_i^3 .

L'action de ces opérateurs individuels sur les états atomiques s'écrit simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-i \vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} r_i^{-} |+\rangle_i = |-\rangle_i \\ e^{i \vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} r_i^{+} |-\rangle_i = |+\rangle_i \end{array} \right. \quad (\text{III.46})$$

A condition d'effectuer sur les états la transformation unitaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} |+\rangle_i = |+\rangle_i \\ |-\rangle_i = e^{-i \vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} |-\rangle_i \end{array} \right. \quad (\text{III.47})$$

Les relations (III.46) montrent que les opérateurs $e^{\pm i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} r_i^\pm, r_i^3$ satisfont aux relations d'opérateurs moment cinétique dans la base $|\overline{+}\rangle_1, |\overline{-}\rangle_1$. Leur somme, donnée par (III.45), est donc un moment cinétique satisfaisant notamment aux relations de commutation classiques :

$$\begin{cases} [R_{\vec{k}_0}^+, R_{\vec{k}_0}^-] = 2 R_{\vec{k}_0}^{(3)} \\ [R_{\vec{k}_0}^+, R_{\vec{k}_0}^{(3)}] = R_{\vec{k}_0}^+ \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Les états de DICKE sont les états propres communs à $R_{\vec{k}_0}^{(3)}$ et $R_{\vec{k}_0}^2 = R_{\vec{k}_0}^{(3)2} + \frac{1}{2} [R_{\vec{k}_0}^+ R_{\vec{k}_0}^- + R_{\vec{k}_0}^- R_{\vec{k}_0}^+]$ de valeurs propres m et $r(r+1)$ avec $-r < m < r$ et $r = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{1}{2}$ ou 0 , définis par :

$$\begin{cases} R_{\vec{k}_0}^2 |r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0} = r(r+1) |r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0} \\ R_{\vec{k}_0}^{(3)} |r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0} = m |r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0} \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Ces états s'obtiennent en combinant les pseudo-moments cinétiques des atomes individuels, pour fabriquer un moment cinétique $|r, m\rangle$. La dégénérescence α provient du fait que, dès que $r < \frac{N}{2}$, il existe plusieurs façons de combiner les pseudo spins $1/2$ (¹). L'ensemble des états $|r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0}$ décrit, pour un \vec{k}_0 donné, une base de l'espace des états atomiques.

b) Description qualitative de ces états

Les états de $r = N/2$ maximum sont les états obtenus en combinant de façon complètement symétrique les états $|\overline{+}\rangle_1$ et $|\overline{-}\rangle_1$, c'est-à-dire $|+\rangle_1$ et $|-\rangle_1 e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}_1}$. Ils décrivent les états où l'excitation est répartie uniformément dans le milieu, $(r+m)$ étant le nombre d'atomes excités. Il est facile de voir que dans un tel état la quantité $\langle r_i^+ r_j^- e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \rangle$ est indépendante de $i \neq j$: les dipôles individuels ont une différence de phase qui ne dépend que du facteur de propagation de l'onde \vec{k}_0 à travers le milieu.

Les états $|r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0}$ avec $r < \frac{N}{2}$ peuvent être construits de façon généalogique en combinant les spins associés aux atomes (31). Nous nous contenterons d'indiquer ici que tant que $\frac{2r}{N} \sim 1$, ces états décrivent des distributions pratiquement symétriques de l'excitation dans le milieu.

c) Eléments de matrice de $R_{\vec{k}}^{\pm}$ dans la base des états $|r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0}$

Pour développer l'équation (III.44) sur la base des états $|r, m, \alpha\rangle_{\vec{k}_0}$, il nous faut disposer des éléments de matrice de $R_{\vec{k}}^{\pm}$ dans cette base, \vec{k} pouvant être différent de \vec{k}_0 .

Ce calcul peut se faire à partir du théorème de WIGNER-ECKART. Les relations de commutation des opérateurs $r_i^{\pm} e^{\pm i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i}$ avec le pseudo-moment cinétique $R_{\vec{k}_0}$ sont celles d'un opérateur tensoriel d'ordre 1. On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle r, m, \alpha |_{\vec{k}_0} r_i^{\pm} e^{\pm i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} | r', m', \alpha' \rangle_{\vec{k}_0} \\ = (-1)^{r-m} A_{r, \alpha, r', \alpha', i} \begin{pmatrix} r & 1 & r' \\ -m & \pm 1 & m' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

où $A_{r, \alpha, r', \alpha', i}$ est une quantité indépendante de " \pm ", m et m' . Il existe une relation analogue pour r_i^3 . On déduit de (III.50) :

$$\begin{aligned} \langle r, m, \alpha |_{\vec{k}_0} R_{\vec{k}}^{\pm} | r', m', \alpha' \rangle_{\vec{k}_0} = \sum_i A_{r, \alpha, r', \alpha', i} e^{\pm i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \\ (-1)^{r-m} \begin{pmatrix} r & 1 & r' \\ -m & \pm 1 & m' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Les éléments de matrice de $R_{\vec{k}}^{\pm}$ sont proportionnels à la transformée de FOURIER de la distribution $A_{r, \alpha, r', \alpha', i}$ sur l'ensemble du milieu. Cette expression prend une forme simple, si on se limite aux éléments de matrice à l'intérieur des états de $r = \frac{N}{2}$ maximum ($r = r' = \frac{N}{2}$). Il est clair alors que la symétrie de ces états par rapport à l'échange des atomes entraîne que $A_{r, \alpha, r, \alpha, i}$ est indépendant de i . On a en fait, en faisant $\vec{k} = \vec{k}_0$:

$$A_{r\alpha, r\alpha, i} = \frac{1}{N} \quad (\text{III.52})$$

et

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{k}_0, r = \frac{N}{2}, m \left| R_{\vec{k}}^{\pm} \right| r = \frac{N}{2}, m' \right\rangle_{\vec{k}_0} &= \frac{1}{N} \sum_i e^{\pm i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \\ & \sqrt{(r \pm m)(r \mp m + 1)} \delta_{m', m \pm 1} \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

On peut montrer que cette expression reste valable pour les éléments de matrice diagonaux à l'intérieur d'un espace $r\alpha$ donné, même si $r < \frac{N}{2}$ à condition que $\frac{2r}{N} \approx 1$ (31).

On voit ainsi que l'élément de matrice $\left\langle \vec{k}_0, r, m, \alpha \left| R_{\vec{k}}^{\pm} \right| r, m', \alpha \right\rangle_{\vec{k}_0}$, à l'intérieur d'un état $r\alpha$ avec $\frac{2r}{N} \approx 1$, est proportionnel à la transformée de Fourier de la distribution atomique dans le milieu : il n'est donc important que pour les vecteurs d'onde \vec{k} contenus dans un angle solide de diffraction autour de \vec{k}_0 : les transitions à l'intérieur de la multiplicité $r\alpha$ correspondant donc à une émission collective du système dans les modes de diffraction. Quant aux éléments de matrice non diagonaux ($r\alpha \neq r'\alpha'$), ils font intervenir la transformée de FOURIER d'une quantité $A_{r\alpha, r'\alpha', i}$ inhomogène dans l'échantillon dont on peut montrer qu'elle n'est importante que pour des vecteurs d'onde \vec{k} hors de l'angle solide de diffraction défini précédemment (31). Les transitions $r\alpha \rightarrow r'\alpha' \neq r\alpha$ correspondent donc à tous les processus d'émission dans les directions $\vec{k} \neq \vec{k}_0$. On peut montrer que les éléments de matrice non diagonaux sont d'un ordre de grandeur $1/N$ ou $1/N^2$ inférieur à celui des éléments diagonaux.

2) L'hypothèse de DICKE

L'approximation de DICKE consiste à négliger le couplage des états $\left| \frac{N}{2}, m \right\rangle$ avec les multiplicités $r\alpha$ de $r < \frac{N}{2}$ et à considérer que le système évolue dans un état complètement symétrique. Elle se fait généralement dans le cas d'un milieu de forme simple, pour lequel on peut définir un mode d'émission privilégié. Par exemple, si le milieu est un cylindre allongé, \vec{k}_0 sera pris parallèle à l'axe du cylindre dans une direction donnée. On suppose que l'on peut négliger l'émission transversale (qui ne conserve pas $r\alpha$) devant l'émission longitudinale dans

les modes de diffraction autour de \vec{k}_0 (qui conserve $r\alpha$). Ceci suppose également que l'on peut découpler l'émission se produisant dans un sens, de celle qui a lieu dans le sens opposé. Un autre cas où l'approximation de DICKE est souvent faite est celle d'un petit volume ($a \ll \lambda$). Si on peut remplacer dans (III.51) les termes $e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{x}_1}$ par l'unité, on voit en effet que les éléments de matrice $\vec{k}_0 \langle r, m, \alpha | R_{\vec{k}}^{\pm} | r', m', \alpha' \rangle_{\vec{k}_0}$ ne dépendent plus de \vec{k} et sont donc identiques à $\vec{k}_0 \langle r, m, \alpha | R_{\vec{k}_0}^{\pm} | r', m', \alpha' \rangle_{\vec{k}_0}$: ils sont donc nuls pour $r\alpha \neq r'\alpha'$ et le système soumis aux équations (III.44) doit rester a priori symétrique. Nous nous contentons d'énoncer ici ces approximations et les idées sur lesquelles elles sont basées. Nous les discuterons plus loin.

3) Les équations d'évolution à l'approximation de DICKE

Réécrivons les équations (III.44) dans la base des états $|\frac{N}{2}, m\rangle$, ou tout simplement $|m\rangle$: compte tenu de (III.53), on obtient pour les populations :

$$\frac{d}{dt} \rho_{m,m} = -\Gamma\mu \left(\frac{N}{2} + m \right) \left(\frac{N}{2} - m + 1 \right) \rho_{m,m} + \Gamma\mu \left(\frac{N}{2} - m \right) \left(\frac{N}{2} + m + 1 \right) \rho_{m+1,m+1} \quad (\text{III.54})$$

avec :

$$\Gamma\mu = \sum_{\vec{k} \in \mathcal{K}} \frac{2\pi g_{\vec{k}}^2}{\hbar^2 c} \frac{\delta(k-k_0)}{N^2} \left| \sum_i e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \right|^2 \quad (\text{III.55})$$

L'intégrale (III.55) sur \vec{k} a été effectuée dans différents articles ⁽¹⁴⁾ ⁽²⁴⁾ ⁽³¹⁾ ⁽³²⁾. Dans le cas d'un cylindre de nombre de FRESNEL $\frac{a^2}{L\lambda}$ supérieur à 1, on trouve :

$$\mu \approx \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{a^2} \quad (\text{III.56})$$

μ représentant la valeur de l'angle solide de diffraction associé au volume cylindrique. Pour un petit volume, on trouve bien sûr $\mu = 1$.

On retrouve ainsi exactement les équations de DICKE (III.1). On voit que ces équations ne font pas intervenir la partie imaginaire de (III.44) :

en effet, à l'approximation de DICKE, le "shift" collectif est décrit par un opérateur Ω diagonal dans la base des états m :

$$\Omega_{mm} = \sum_{\vec{k}\epsilon} \frac{2g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2 c} P P \frac{1}{k-k_0} \frac{1}{N^2} \left| \sum_i e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \right|^2 \left(\frac{N}{2} + m \right) \left(\frac{N}{2} - m + 1 \right) \quad (\text{III.57})$$

Le déplacement peut donc être réintégré dans le hamiltonien H_0 et n'affecte pas les probabilités de transition entre niveaux m . Ceci n'empêche pas que chaque niveau peut être déplacé d'une grande quantité. On peut montrer ⁽⁸⁾ en effet que Ω/Γ est proportionnel à λ/a et le "shift" est beaucoup plus grand que la largeur des niveaux dans le cas d'un petit volume. Insensible sur le mouvement de $\langle J_z \rangle$, ce déplacement aura une grande importance dans l'évolution de $\langle J_{\pm} \rangle$: le moment cinétique équivalent qui bascule de π au cours de l'émission superradiante va subir, du fait de Ω , une précession azimuthale très rapide. L'essentiel pour le calcul de l'énergie échangée est que la projection du mouvement sur l'axe Oz ne soit pas altérée ⁽¹²⁾.

4) Les solutions de l'équation de DICKE pour les $\rho_{m,m}$

Le système d'équations différentielles couplées (III.54) peut se résoudre simplement par transformation de FOURIER. On passe alors à un système d'équations algébriques qui permet de calculer les $\rho_{m,m}(\omega)$ par récurrence ⁽¹⁵⁾. On obtient pour les $\rho_{mm}(t)$ des expressions analytiques sous forme de somme de fonctions exponentielles, ou polynômes multipliés par une exponentielle. Pour $m > 0$, on trouve :

$$\rho_{m,m}(t) = \sum_{m'=N/2}^m A_m^{m'} e^{-\nu_{m'} t} \quad (\text{III.58})$$

$$\text{avec :} \quad \nu_{m'} = \Gamma \mu \left(\frac{N}{2} + m' \right) \left(\frac{N}{2} - m' + 1 \right) \quad (\text{III.59})$$

$$A_m^{m'} = \prod_{\substack{n=N/2 \\ n \neq m'}}^m \left(\frac{\left(\frac{N}{2} + n + 1 \right) \left(\frac{N}{2} - n \right) + \delta \frac{N}{2}, n}{(m' - n) (m' + n - 1)} \right) \quad (\text{III.60})$$

Pour $m < 0$, l'expression de ρ_{mm} est plus compliquée car elle fait intervenir des produits d'exponentielles et de polynômes en t .

On peut donner une expression analytique approchée très simple des probabilités $\rho_{m,m}$ avec m voisin de $N/2$ (début de l'émission). Posant en effet $s = \frac{N}{2} - m$ (s est le nombre d'atomes désexcités, ou de photons émis), (III.54) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \rho_{s,s} = -\Gamma\mu [N-s] [s+1] \rho_{s,s} + \Gamma\mu [N-s+1] s \rho_{s-1,s-1} \quad (\text{III.61})$$

qui, pour $s \ll N$, s'approxime par :

$$\frac{d}{dt} \rho_{s,s} = -\Gamma\mu N(s+1) \rho_{s,s} + \Gamma\mu Ns \rho_{s-1,s-1} \quad (\text{III.62})$$

dont la solution évidente est :

$$\rho_{s,s} = e^{-\Gamma\mu Nt} [1 - e^{-\Gamma\mu Nt}]^s \quad (\text{III.63})$$

L'allure de $\rho_{ss}(t)$ est représentée sur la figure III-1 pour des valeurs croissantes de s . Son maximum est atteint pour :

$$t_s = \frac{1}{N\Gamma\mu} \text{Log}(s+1) \quad (\text{III.64})$$

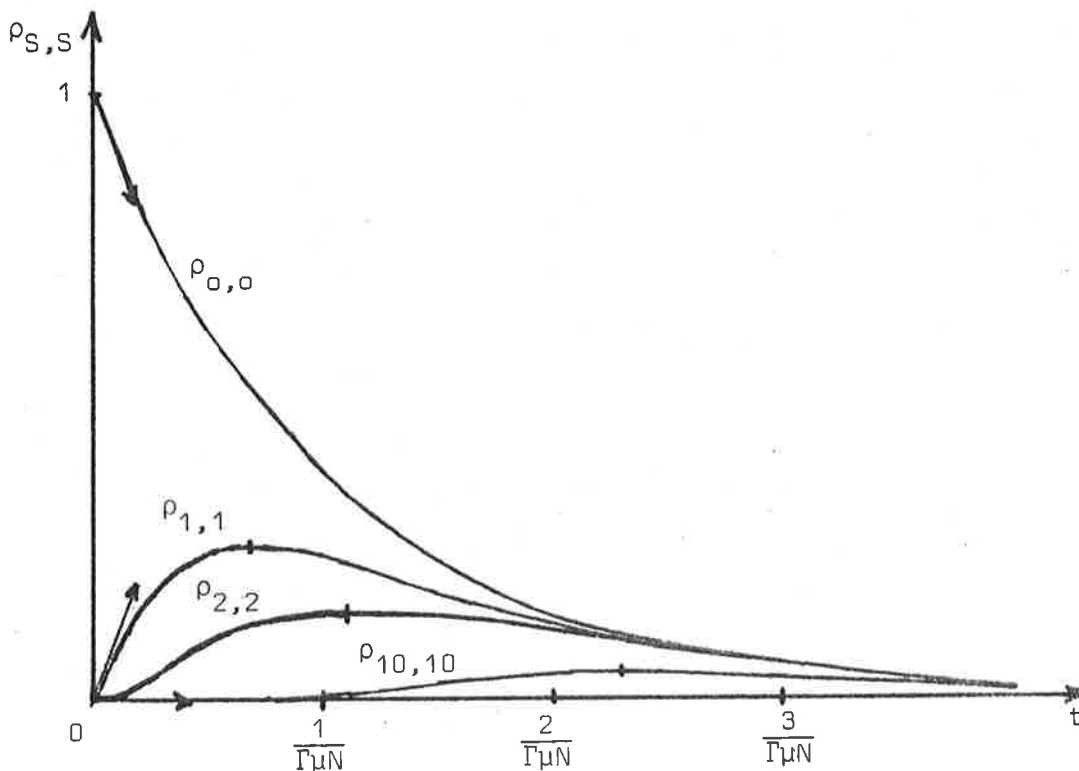


FIGURE III-1

On peut montrer de même que $\rho_{m=0, m=0}$ est maximum pour un temps :

$$t = \frac{1}{N\Gamma\mu} \text{Log } N \quad (\text{III.65})$$

qui correspond au maximum de l'émission superradiante.

Notons que, bien que les $\rho_{m,m}(t)$ évoluent avec une constante de temps de l'ordre de $\frac{1}{\Gamma\mu N}$ (temps de superradiance T_{SR}), ils contiennent dans leur développement de LAPLACE (III.58) ou (III.63) une série d'exponentielles ayant des constantes de temps beaucoup plus rapides allant jusqu'à $\frac{4}{N^2\Gamma\mu} \sim \frac{T_{SR}}{N}$.

F. CONDITIONS DE VALIDITE DES APPROXIMATIONS

1) Approximation de BORN

Les termes négligés à l'approximation de BORN s'obtiennent en remplaçant dans (III.30) $\tilde{\Phi}(t-\tau)$ par $\left| \tilde{\Phi}(t-\tau) - \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes \left| 0 \right\rangle_{RR} \left\langle 0 \right| \right|$: la variation négligée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \Big|_{N.B.} = & -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \int_0^t dt \left[\tilde{V}(t), \left[\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\Phi}(t-\tau) \right. \right. \\ & \left. \left. - \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes \left| 0 \right\rangle_{RR} \left\langle 0 \right| \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

L'approximation de BORN sera valable si :

$$\left| \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \Big|_{N.B.} \right| \ll \left| \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \Big|_B \right| \quad (\text{III.67})$$

Les termes négligés sont constitués par tous les termes en $a_{\vec{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\vec{k}'\epsilon'}$, $a_{\vec{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\vec{k}'\epsilon'}$, $a_{\vec{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\vec{k}'\epsilon}$, et tous les termes en $a_{\vec{k}\epsilon}^{\dagger} a_{\vec{k}'\epsilon'}$, avec $\vec{k} \neq \vec{k}'$ dans l'expression de l'équation (III.34) et dans les trois quantités analogues non écrites.

Il nous faut tout d'abord dénombrer ces termes : la densité des modes du champ électromagnétique est égale à $\frac{v}{(2\pi)^3}$ (v : volume de quantification). Les modes \vec{k} , \vec{k}' importants pour la superradiance appartiennent à un volume $1/V$ (volume de diffraction associé au volume V de l'échantillon atomique). Le nombre de modes à considérer dans les sommations (III.34) est donc :

$$\eta = \frac{v}{V} \quad (\text{III.68})$$

Ce nombre tend vers l'infini lorsque v est augmenté indéfiniment. Il est cependant commode de raisonner sur un nombre fini de modes à condition de vérifier à la fin des calculs que les résultats physiques obtenus sont indépendants de η .

Le nombre de termes contenus dans $\frac{d}{dt} \rho \Big|_{\text{N.B.}}$ est donc de l'ordre de η^2 .

Ceux qui sont en $a_{\vec{k}\epsilon}^+ a_{\vec{k}'\epsilon'}$, s'écrivent, d'après (III.34) :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) \Big|_{\text{N.B.}} = \sum_{\substack{\vec{k}\epsilon \\ \vec{k}'\epsilon'}} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^+ g_{\vec{k}'\epsilon'}}{k^2} R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}'}^+ \int_0^t d\tau \tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}(t-\tau) e^{ic(k_0-k)\tau} + \text{etc} \dots \quad (\text{III.69})$$

avec :

$$\tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}(t) = \text{Tr}_R \left\{ a_{\vec{k}\epsilon}^+ a_{\vec{k}'\epsilon'} e^{-ic(k+k'-2k_0)t} \tilde{\Phi}(t) \right\} \quad (\text{III.70})$$

Les η^2 quantités $\tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}$, qui correspondent à des éléments de matrice non diagonaux en nombre de photons de la matrice densité du système global sont des opérateurs atomiques qui décrivent les corrélations entre le système atomique et le champ électromagnétique.

Pour évaluer leur ordre de grandeur, écrivons l'équation d'évolution à laquelle ces corrélations obéissent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{G}_{kk'}(t) = & -ic(k+k'-2k_0) \tilde{G}_{kk'} \\ & + \text{Tr}_R \left\{ a_{k\varepsilon}^{\rightarrow} a_{k'\varepsilon'}^{\rightarrow} e^{-ic(k+k'-2k_0)t} \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

$\frac{d}{dt} \tilde{G}_{kk'}$, évolue ainsi sous l'effet de deux causes :

i) Le terme d'évolution "propre" $-ic(k+k'-2k_0) \tilde{G}_{kk'}$, de l'ordre de $\frac{ic}{L} \tilde{G}_{kk'}$, qui provient des effets de propagation du champ électromagnétique, dont le temps caractéristique est L/c .

ii) Le terme $\text{Tr}_R \left\{ a_{k\varepsilon}^{\rightarrow} a_{k'\varepsilon'}^{\rightarrow} e^{-ic(k+k'-2k_0)t} \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t) \right\}$ qui décrit le couplage de $\tilde{G}_{kk'}$, à une infinité d'autres opérateurs de corrélation.

En remplaçant dans (III.71) $\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t)$ par son expression (III.34), on voit en effet que $\tilde{G}_{kk'}$, est couplé à son tour à des fonctions de corrélation faisant intervenir des produits de quatre opérateurs de création et d'annihilation : dès que l'on sort de l'approximation de BORN apparaît ainsi une suite infinie d'équations couplées faisant intervenir des fonctions de corrélation d'ordre de plus en plus élevé entre l'atome et le champ.

De façon plus précise, on a dans le membre de droite de l'équation (III.71) des termes de la forme :

$$\begin{aligned} A = \int_0^t d\tau \text{Tr}_R a_{k\varepsilon}^{\rightarrow} a_{k'\varepsilon'}^{\rightarrow} e^{-ic(k+k'-2k_0)t} a_{k''\varepsilon''}^{\dagger} a_{k'''\varepsilon'''}^{\dagger} R_{k''}^{-} R_{k'''}^{-} \\ e^{ic(k''+k'''-2k_0)(t-\tau)} e^{-ic(k_0-k)\tau} \tilde{\Phi}(t-\tau) \end{aligned} \quad (\text{III.72-a})$$

Parmi ces termes, ceux pour lesquels $\vec{k} = \vec{k}''$ et $\vec{k}' = \vec{k}'''$ sont particuliers car ils permettent de recoupler la corrélation $G_{kk'}$, aux populations du système atomique : les opérateurs $a_{k''}^{\dagger}$ et $a_{k'''}^{\dagger}$, recréent en effet les photons annihilés par $a_{\vec{k}}^{\rightarrow}$ et $a_{\vec{k}'}^{\rightarrow}$, et recouplent les éléments non diagonaux de la matrice globale aux éléments diagonaux. De façon plus précise, on peut réécrire en commutant les opérateurs :

$$a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow} a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow} = a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow} + a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} a_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} + a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow} a_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow} + 1 \quad (\text{III.72-b})$$

et le facteur 1 dans (III.72-b) fait apparaître dans A la quantité $\text{Tr}_R \tilde{\Phi}(t-\tau) = \tilde{\rho}(t-\tau)$. Il apparaît donc dans (III.71) un terme de la forme :

$$\frac{g_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} g_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow}}{\hbar^2} |R_{\vec{k}}^{\rightarrow} R_{\vec{k}'}^{\rightarrow}| \int_0^t d\tau e^{ic(k_0 - k')\tau} \tilde{\rho}(t-\tau)$$

recouplant $\tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}$, à $\tilde{\rho}$.

Si le système atomique n'est pas trop grand, on peut admettre que ce terme l'emporte sur tous les autres couplages de $\tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}$, avec des fonctions de corrélation d'ordre supérieur, qui doivent rester très petites. D'après l'équation (III.71), les éléments de matrice de $\tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}$, apparaissent donc comme des "oscillateurs" de fréquence propre c/L , "forcés" par un terme source $\tilde{\rho}(t)$ évoluant avec un temps caractéristique de l'ordre de $T_{SR} = \frac{1}{N\Gamma\mu}$. Si $\Gamma\mu^{NL}/c \ll 1$, on peut négliger dans (III.71) le terme en d/dt de l'ordre de $1/T_{SR}$ et écrire donc, en ordre de grandeur :

$$|\tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}| \sim \frac{L}{c} \times \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^{\rightarrow} g_{\vec{k}'\epsilon'}^{\rightarrow}}{\hbar^2} |R_{\vec{k}}^{\rightarrow} R_{\vec{k}'}^{\rightarrow}| \int_0^t d\tau e^{ic(k_0 - k')\tau} |\tilde{\rho}(t-\tau)| \quad (\text{III.73})$$

où les $||$ signifient qu'on considère des éléments de matrice typiques des différents opérateurs.

Evaluons l'ordre de grandeur de $|\tilde{G}_{\vec{k}\vec{k}'}|$: au paragraphe C nous avons été amenés à évaluer une quantité de la forme :

$$\sum_{\vec{k}\epsilon} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} |R_{\vec{k}}^{\rightarrow} R_{\vec{k}}^{\rightarrow}| \int_0^t d\tau e^{ic(k_0 - k)\tau} \quad (\text{III.74})$$

et l'avons trouvée au plus de l'ordre de $\Gamma\mu N^2$.

Chacun des η termes qui constituent cette somme est donc de l'ordre de $\Gamma\mu N^2/\eta$ et il en est de même de :

$$\frac{\vec{g}_{k\epsilon} \vec{g}_{k'\epsilon'}}{N^2} |R_{\vec{k}}^- R_{\vec{k}'}^-| \int_0^t d\tau e^{ic(k_0 - k')\tau} \quad (\text{III.75})$$

On a donc finalement :

$$|\tilde{G}_{kk'}| \sim \frac{L}{c} \frac{\Gamma\mu N^2}{\eta} |\tilde{\rho}| \quad (\text{III.76})$$

Remplaçant $\tilde{G}_{kk'}$, par son ordre de grandeur dans (III.69), on trouve :

$$\left| \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \Big|_{N.B.} \right| \sim \sum_{\substack{\vec{k}\epsilon \\ \vec{k}'\epsilon'}} \frac{\vec{g}_{k\epsilon} \vec{g}_{k'\epsilon'}}{N^2} R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}'}^+ \\ \times \int_0^t d\tau e^{ic(k_0 - k)\tau} \frac{L}{c} \frac{\Gamma\mu N^2}{\eta} |\tilde{\rho}| \quad (\text{III.77})$$

Chacun des η^2 coefficients multipliant $|G_{kk'}|$ dans (III.77) est également de l'ordre de $\frac{\Gamma\mu N^2}{\eta}$ et l'on a donc finalement :

$$\left| \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \Big|_{N.B.} \right| \sim \eta^2 \times \left(\frac{\Gamma\mu N^2}{\eta} \right)^2 \frac{L}{c} |\tilde{\rho}| \sim \frac{L}{c} (\Gamma\mu N^2)^2 |\tilde{\rho}| \quad (\text{III.78})$$

qui est bien indépendant de η .

Comparant à :

$$\left| \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \Big|_B \right| \sim \Gamma\mu N^2 |\tilde{\rho}| \quad (\text{III.79})$$

on trouve que l'approximation de BORN est justifiée à la condition :

$$\Gamma\mu N^2 \frac{L}{c} \ll 1 \quad (\text{III.80})$$

qui est en fait beaucoup plus restrictive que la condition (III.7) :

$$\Gamma\mu N \frac{L}{c} < 1$$

admise par BONIFACIO et al.

Montrons que cette condition (III.80), que l'on peut encore écrire :

$$N < \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{c}{\Gamma\lambda}} \quad (III.81)$$

est bien celle qui justifie également l'approximation de MARKOV.

2) Approximation de MARKOV

Elle a consisté à remplacer un système intégro-différentiel ayant une mémoire de durée $\tau_c = L/c$ par un système d'équations différentielles sans mémoire dont la constante de temps d'évolution est de l'ordre $T_{SR} = 1/N\Gamma\mu$. Le raisonnement simple de BONIFACIO et al. consiste à dire que cette approximation est valable dès que T_{SR} est grand devant L/c , le système pouvant être considéré comme "figé" pendant le temps de corrélation du processus d'émission. Si un tel raisonnement est inattaquable lorsqu'on étudie l'évolution d'un petit système n'ayant que quelques niveaux d'énergie, il peut devenir faux pour un grand système : le système superradiant descend en effet en cascade le long d'une échelle de N niveaux : si à chaque étape, il prend un retard L/c , le retard accumulé à l'issue de l'émission sera de l'ordre de NL/c et c'est ce retard qu'il faut comparer au temps d'émission superradiante. La vraie condition de MARKOV devient alors :

$$\frac{NL}{c} < T_{SR} \quad (III.82)$$

et l'on retrouve la condition (III.80).

Pour préciser ce raisonnement et fixer les idées, plaçons-nous dans l'approximation de DICKE et écrivons les équations d'évolution que l'on obtient sans faire l'approximation de MARKOV. Celles-ci s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{m,m}(t) = & -\Gamma\mu \left(\frac{N}{2} + m \right) \left(\frac{N}{2} - m + 1 \right) \int_0^t k(\tau) \rho_{m,m}(t-\tau) d\tau \\ & + \Gamma\mu \left(\frac{N}{2} + m + 1 \right) \left(\frac{N}{2} - m \right) \int_0^t k(\tau) \rho_{m+1,m+1}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (III.83)$$

où $k(\tau)$ est une fonction de largeur L/c normée à l'unité. Dans le cas d'un cylindre allongé, nous montrons en Appendice A que l'on a :

$$k(\tau) = \frac{2}{\tau_c} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right) \quad , \text{ pour } 0 < \tau < \tau_c$$

$$k(\tau) = 0 \quad , \text{ pour } \tau > \tau_c$$

avec $\tau_c = \frac{L}{c}$. (III.84)

Pour résoudre commodément les équations (III.83), il nous faut choisir une forme analytique simple pour le noyau $k(\tau)$ se prêtant plus aisément au calcul que la forme (III.84). L'idée la plus simple consiste à remplacer $k(\tau)$ par une fonction $\delta(\tau - \tau_c)$. Il est alors évident que la solution des équations intégral-différentielles (III.83) est telle que $\rho_{m,m}(t)$ est nul pour t inférieur à $(\frac{N}{2} - m) \tau_c$. Ceci suffit à changer la forme de la solution dès lors que $N\tau_c > \tau_{SR}$. Nous avons également cherché à résoudre le système intégral-différentiel avec un noyau $(\frac{1}{\tau_c} e^{-|t|/\tau_c})$ se rapprochant davantage de la forme réelle. On montre alors que la solution se met sous la forme générale pour $m > 0$:

$$\sigma_m(t) = \sum_{m'=N/2}^m A_m^{m'} e^{-\nu'_{m'} t} \quad (III.85)$$

où les $A_m^{m'}$ sont toujours donnés par l'expression (III.60) et les fréquences $\nu'_{m'}$, sont différentes de ν_m , et données par :

$$\nu'_{m'} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\Gamma\tau_c(r+m)(r-m+1)}}{2\tau_c} \quad (III.86)$$

En comparant de façon détaillée les deux séries exponentielles (III.58) et (III.85), on peut montrer qu'elles diffèrent notablement si la condition (III.82) n'est pas vérifiée : alors que les premiers termes des séries exponentielles, correspondant aux constantes de temps longues sont très voisins, les termes correspondant aux constantes de temps rapide de l'ordre de τ_{SR}/N sont fortement modifiés à un instant donné et leur modification entraîne un changement appréciable de la forme des solutions. Ainsi, pour faire l'approximation de MARKOV,

il ne suffit pas de comparer le temps de corrélation à la constante d'évolution lente du système, il faut que le temps de corrélation soit plus court que la plus courte des constantes de temps, ce qui est beaucoup plus restrictif.

3) Approximation de DICKE

L'approximation de DICKE est la plus difficile à justifier et ses conditions exactes de validité ne sont pas aisées à définir. Nous nous contenterons d'analyser ici les problèmes qu'elle soulève. Deux cas sont à distinguer : celui d'un petit et d'un grand volume par rapport à la longueur d'onde.

a) Cas d'un petit volume

Dans ce cas, le couplage entre les états symétriques et les états de r inférieur à $N/2$ peut, a priori, apparaître négligeable car il tend vers zéro avec a/λ et l'approximation de DICKE semble inattaquable. Ce raisonnement est malheureusement faux car il ne tient pas compte de l'existence de l'opérateur "shift" Ω . Or la validité des équations de DICKE repose sur le caractère diagonal de cet opérateur. Lorsque λ est plus grand que a , cet opérateur est très grand et l'existence d'une composante non diagonale de Ω , même toute petite en valeur relative, entre états de r différents est suffisante pour perturber complètement l'évolution du système. En d'autres termes, il n'est pas possible de remplacer brutalement $\vec{k} \cdot \vec{x}_i$ par zéro dans le hamiltonien car l'opérateur Ω devient infini lorsque a tend vers zéro. FRIEDBERG et al. (12) ont analysé l'implication de ces "shifts" collectifs dans la superradiance d'un petit volume et montré qu'en général les équations de DICKE n'étaient pas valables dans ce cas. Les "shifts" jouent le rôle d'un déplacement inhomogène qui déphase le dipôle atomique au moment où la superradiance devrait se produire.

Comme nous l'avons déjà signalé, les éléments de matrice de Ω deviennent inférieurs à $\Gamma\mu N^2$ lorsque L est grand devant λ . Les effets des "shifts" s'atténuent alors et l'approximation de DICKE a donc plus de chances d'être valable dans un grand volume.

b) Cas d'un grand volume

Dans un grand volume, l'approximation de DICKE consiste à négliger les processus d'émission "transversaux", qui ne conservent pas le nombre de coopération r par rapport à l'émission dans les modes de diffraction autour de \vec{k}_0 qui conservent la valeur maximum de r . Une condition nécessaire pour que cette approximation soit valable se traduit évidemment par le fait que la constante de temps d'évolution des équations de DICKE, $1/\Gamma N \mu$, doit être très courte devant la constante de temps $1/\Gamma$ qui correspond à l'émission dans l'ensemble de tous les modes; on doit avoir :

$$N > \frac{1}{\mu} \quad (\text{III.87})$$

et l'on retrouve la condition d'amortissement coopératif des dipôles classiques établie au chapitre II.

La condition (III.87) n'est cependant pas suffisante pour que l'on puisse affirmer que les équations de DICKE décrivent de façon quantitativement exacte l'émission superradiante dans un grand volume. La justification exacte de ces équations est un problème compliqué dont la résolution nécessite une comparaison détaillée de l'ordre de grandeur des processus qui conservent r et de ceux qui ne le conservent pas. Cette étude doit prendre en compte la forme de l'échantillon (son nombre de FRESNEL \mathcal{F}) (30).

Une approche séduisante du problème a été suggérée par LEE dans une série d'articles (33)(34). Ses conclusions (validité du modèle de DICKE dans un grand volume après émission de $1/\mu$ photons) ne peuvent cependant être admises sans discussion car il néglige complètement le couplage séculaire des populations avec des cohérences de la forme $\langle r', \alpha', m | \rho | r, \alpha, m \rangle$.

Nous n'approfondirons pas le problème ici et nous nous contenterons de considérer les équations de DICKE comme constituant un modèle simple et approché, décrivant de façon qualitativement correcte la superradiance "markovienne" dans un grand volume.

G) CONCLUSION

Nous avons montré dans ce chapitre que les limites entre les régimes "markoviens" (émission spontanée coopérative pure) et "non markoviens" (émission spontanée coopérative accompagnée d'émission stimulée et d'absorption) étaient atteintes pour un nombre d'atomes :

$$N = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{c}{\Gamma\lambda}}$$

beaucoup plus faible que celui prédit par les théories antérieures ⁽¹⁶⁾(24). Cette limite peut encore s'écrire :

$$\frac{NL}{c} < T_{SR}$$

ou
$$\frac{L}{c} < \frac{T_{SR}}{N}$$

et sous cette forme elle exprime que le régime ne peut être "markovien" que si le "temps de fuite" de chaque photon est inférieur au "temps moyen d'émission par photon T_{SR}/N ".

L'observation d'un régime "markovien" est finalement soumise à des conditions très restrictives :

- i) il faut que l'échantillon ait des dimensions grandes devant la longueur d'onde pour éviter des effets de déphasage de l'interaction dipôle-dipôle;
- ii) il faut que la condition de seuil (III.87) soit satisfaite, ce qui pratiquement suppose des nombres N supérieurs à $10^2 - 10^3$;
- iii) il faut que la condition de MARKOV (III.82) soit satisfaite, ce qui pour des transitions ordinaires impose que N soit inférieur à $10^3 - 10^4$.

Ces conditions n'ont été réalisées dans aucune expérience à ce jour. Toutes les expériences de superradiance rapportées ⁽⁸⁾(35) décrivent donc des régimes "non-markoviens". Nous avons montré dans ce chapitre que l'évolution du système dans ce cas est régie par une suite infinie d'équations couplées décri-

vant le couplage du système atomique avec des fonctions de corrélation de l'atome et du champ d'ordre de plus en plus élevé. Plutôt que de chercher à résoudre ces équations, nous montrons au chapitre suivant qu'on peut, dans le cas non-markovien, décrire l'évolution du système par des équations semi-classiques.

CHAPITRE IV

TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE
DE LA SUPERRADIANCE NON MARKOVienne

INTRODUCTION. POSITION DU PROBLEME

Nous avons vu au chapitre précédent que lorsque la condition :

$$N > N_M = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{c}{\Gamma\lambda} \mathcal{F}} \quad (\text{IV.1})$$

est remplie, il n'est plus possible, comme c'est le cas dans l'approximation markovienne, de décrire la superradiance par une équation pilote où seuls apparaissent les variables du système atomique. Or, la condition (IV.1) se trouve généralement réalisée dans toutes les expériences de superradiance réalisées jusqu'à ce jour : dans ces expériences en effet, N est typiquement de l'ordre de 10^9 atomes ou davantage, alors que N_M correspond à une limite d'environ 10^3 atomes. Il est donc nécessaire, pour décrire ces expériences, de disposer d'une théorie "non-markovienne" rendant compte du couplage entre le système atomique et le champ aux ordres plus élevés que l'approximation de BORN. En d'autres termes, lorsque la condition (IV.1) est satisfaite, la propagation du champ électromagnétique, c'est-à-dire le phénomène d'absorption, d'amplification induite par certains atomes du champ émis par d'autres atomes du milieu devient un effet important. Rendre compte de ces effets de propagation par un traitement entièrement quantique revient, comme nous l'avons montré au chapitre III, à tenir compte de fonctions de corrélation entre le système atomique et le champ d'ordre de plus en plus élevé ⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾. Ce point de vue conduirait très vite à des calculs inextricables ⁽³⁸⁾. On sait par contre tenir compte des effets de propagation très simplement dans le point de vue semi-classique qui consiste à étudier l'évolution d'un champ électromagnétique couplé à une distribution de polarisation classique obéissant aux équations de SCHRÖDINGER et de MAXWELL. Un tel modèle est bien adapté au traitement de l'aspect "classique" du phénomène superradiant, c'est-à-dire de l'émission coopérative des dipôles atomiques mis en phase à travers le milieu. Ce modèle semble cependant a priori incapable de rendre compte de l'aspect "quantique" du phénomène, c'est-à-dire de la mise en phase, à partir de l'inversion totale initiale des dipôles atomiques de l'échantillon.

Si l'on envisage en effet à $t = 0$ un milieu atomique totalement inversé pour lequel la polarisation atomique est nulle, en l'absence de tout champ électrique imposé, les équations classiques prévoient que le système n'évolue pas (état initial métastable).

Pour décrire néanmoins la superradiance à l'aide de ces équations, FELD et al. ⁽⁸⁾⁽³⁹⁾ ont "simulé" l'émission spontanée en ajoutant phénoménologiquement un terme de polarisation atomique aléatoire, ou un champ électrique initial aléatoire, "imitant" respectivement les fluctuations de polarisation ou les fluctuations du champ électromagnétique du vide responsables de l'émission spontanée. Les équations classiques ainsi complétées par cette condition montrent alors que l'état initial est bien instable et admettent pour solution des régimes de pulse transitoires dont les caractéristiques présentent un certain nombre de points communs avec la solution des équations markoviennes de DICKE, mais qui s'en distinguent par d'autres aspects (ordre de grandeur des délais et des durées de pulse, présence d'oscillations, etc...).

Les équations semi-classiques ainsi complétées par FELD et al. présentent l'avantage de se prêter aisément à des simulations de cas réels sur ordinateur en incluant facilement un grand nombre d'effets physiques dont la prise en compte est importante pour décrire une expérience et dont il serait très difficile de tenir compte dans un point de vue entièrement quantique : effet Doppler donnant une largeur inhomogène à la transition superradiante, dégénérescence des niveaux bordant la transition, compétition entre diverses transitions issues du même niveau, superradiance cascade, etc...

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'analyser les principaux résultats de ce modèle semi-classique appliqué au cas expérimental que nous avons étudié de la superradiance en cascade dans les atomes alcalins (chapitre IV.B, C). Mais il nous a semblé utile, et c'est l'aspect le plus original de ce chapitre, de justifier tout d'abord le point de vue semi-classique en montrant que les équations classiques de MAXWELL et de SCHRÖDINGER, associées à une condition

initiale de polarisation atomique non nulle et de grandeur convenablement choisie, permettent effectivement de décrire de façon quantitativement correcte la superradiance non markovienne : nous montrons au paragraphe IV.A que dans le cas non markovien satisfaisant à la condition (IV.1), on peut en fait décrire l'évolution du système superradiant en deux temps à partir de l'inversion totale initiale ($t = 0$) :

i) une phase initiale "quantique", qui dure un temps de l'ordre de quelques T_{SR} (temps caractéristique de superradiance défini au chapitre II), durant laquelle le nombre de photons émis reste suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la réaction du système sur le champ. Pendant cette phase, l'évolution est encore "markovienne" et il est possible, en résolvant les équations quantiques simples de DICKE, d'évaluer la polarisation atomique bâtie dans le milieu à la fin de cette phase.

ii) une phase ultérieure "classique", commençant à t de l'ordre de quelques T_{SR} durant laquelle le champ et la polarisation sont bien corrélés entre eux et qui peut être décrite par les équations semi-classiques.

Pour étudier l'évolution sur des temps $t > T_{SR}$, il suffit de résoudre les équations classiques en adoptant comme condition initiale la valeur de la polarisation à la fin de la phase "quantique". On raccorde ainsi les solutions quantiques et classiques de façon à obtenir une solution quantitativement correcte pour l'ensemble de l'évolution du système.

Remarquons que cette division en deux phases correspond bien à l'analyse qualitative de la superradiance faite au chapitre II. Il se trouve que dans le cas markovien, les deux aspects classique et quantique du phénomène restent indissociables pendant toute l'évolution du système, d'où la complexité du phénomène entrevue au chapitre III. Dans le cas non-markovien au contraire, les aspects quantique et classique de la superradiance correspondent à deux phases qu'il est possible de séparer dans le temps, ce qui permet finalement, et de façon paradoxale, une plus simple analyse du phénomène.

A. JUSTIFICATION DU TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE DE LA SUPERRADIANCE NON MARKOVIENNE

Nous commençons par rappeler la forme des équations semi-classiques de la superradiance et nous montrons qu'elles ne peuvent décrire un régime de transition instable qu'à condition de partir d'un état initial où le champ ou la polarisation sont non nuls à $t = 0$ (§ 1). Pour décrire plus correctement l'instabilité initiale du système, nous établissons (§ 2) les équations quantiques qui, en toute rigueur, doivent remplacer les équations semi-classiques introduites au paragraphe 1. Afin d'analyser le démarrage du système, nous décrivons alors de façon détaillée l'état du système quantique à $t = 0$ (§ 3), puis nous montrons comment le système commence à évoluer irréversiblement à partir de cet état (§ 4). Nous évaluons enfin l'évolution quantique de grandeurs physiques associées au système sur un intervalle de temps très court, durant lequel se bâtit la corrélation de phase entre le champ et la polarisation atomique (§ 5). Nous montrons qu'au bout de cet intervalle le champ et la polarisation possèdent une corrélation suffisante pour qu'on puisse les décrire classiquement (§ 6) et qu'à partir de là, les équations quantiques se ramènent aux équations classiques (§ 7). Nous précisons les conditions de validité de cette analyse et montrons que la séparation entre phase quantique initiale et classique n'est possible que si la condition (IV.1) est remplie (§ 8). Nous comparons enfin les différentes simulations possibles du démarrage des équations semi-classiques (§ 9).

1) Les équations semi-classiques de propagation

a) Différentes formes des équations

Considérons un milieu superradiant constitué d'un gaz d'atomes à deux niveaux occupant un volume cylindrique allongé. Ce volume possède un nombre de FRESNEL $\mathcal{F} = \frac{a^2}{\lambda L}$ de l'ordre de quelques unités. Un tel système va émettre deux paquets d'onde électromagnétique ⁽²¹⁾ se propageant dans les deux directions opposées, parallèles à l'axe du volume cylindrique (voir figure IV-1).

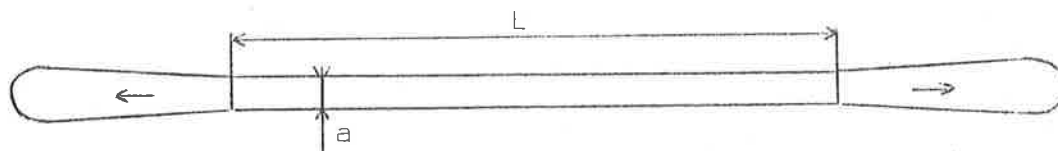


FIGURE IV-1

Chacun de ces deux paquets peut être approximé par une superposition d'ondes planes de vecteurs d'onde tous parallèles (ceci parce que le nombre de FRESNEL est de l'ordre de l'unité). Considérons pour l'instant la propagation dans une seule direction et négligeons l'effet sur l'émission dans une direction de la présence du champ de direction opposé (cet effet, comme nous le verrons plus loin, ne joue pas un rôle important).

Appelons $\mathcal{E}_{cl}(z,t)$ et $\mathcal{P}_{cl}(z,t)$ les enveloppes supposées "lentement variables" du champ électrique et de la polarisation et $\mathcal{N}_{cl}(z,t)$ la différence de densités de population respectives du niveau excité et fondamental (z est l'abscisse suivant l'axe du cylindre et t le temps). Les équations semi-classiques de MAXWELL-BLOCH s'écrivent ⁽⁴⁰⁾⁽⁴¹⁾ pour ces quantités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{P}_{cl}}{\partial t} = \frac{ip^2}{\hbar} \mathcal{E}_{cl} \mathcal{N}_{cl} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_{cl}}{\partial t} = \frac{i}{2\hbar} [\mathcal{E}_{cl}^* \mathcal{P}_{cl} - \mathcal{E}_{cl} \mathcal{P}_{cl}^*] \end{array} \right. \quad \text{(IV.2)}$$

(IV.3)

(équations de BLOCH)

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_{cl} = -i \frac{k_0}{2\epsilon_0} \mathcal{P}_{cl} \quad \text{(IV.4)}$$

(équation de MAXWELL)

où p est le moment dipolaire et $k_0 = \omega_0/c$ le vecteur d'onde de la transition. (Nous négligeons pour l'instant l'effet Doppler (atomes immobiles) et tous les termes de perte et de relaxation du système atomique et du champ.).

On voit tout de suite que le champ \mathcal{E}_{cl} et la polarisation \mathcal{P}_{cl} vont évoluer en quadrature dans ces équations.

On peut réécrire d'une autre façon les équations classiques en décrivant le système par les quantités \mathcal{E}_{cl}^* , \mathcal{E}_{cl} , \mathcal{P}_{cl}^* , \mathcal{P}_{cl} et \mathcal{N}_{cl} .

Les équations (IV.2) et (IV.3) donnent :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}_{cl}^* \mathcal{P}_{cl} + p^2 \mathcal{N}_{cl}^2) = 0 \quad (\text{IV.5})$$

(IV.4) peut aussi s'écrire, en se servant du fait que \mathcal{E}_{cl} et \mathcal{P}_{cl} sont en quadrature :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}_{cl} = -\frac{1}{\hbar} \sqrt{\mathcal{E}_{cl}^* \mathcal{E}_{cl}} \times \sqrt{\mathcal{P}_{cl}^* \mathcal{P}_{cl}} \quad (\text{IV.6})$$

et enfin (IV.3) et (IV.4) donnent :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_{cl}^* \mathcal{E}_{cl} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{cl}^* \mathcal{E}_{cl} + \frac{\hbar k_0}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}_{cl} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Physiquement on peut interpréter très simplement les équations (IV.5, 6, 7) :

- l'équation (IV.5) indique la conservation de la norme du vecteur de BLOCH de composante "longitudinale" \mathcal{N}_{cl} et "transversale" \mathcal{P}_{cl} ;
- l'équation (IV.6) décrit l'échange local d'énergie entre les atomes et le champ au point z ;
- l'équation (IV.7) décrit la conservation globale de l'énergie du système atomes + champ : la variation dans un petit volume d'énergie du système atomes + champ (termes en $\partial/\partial t$) se retrouve sous forme du flux d'énergie électromagnétique qui traverse la surface de cet élément de volume (terme en $\partial/\partial z$).

b) Solution des équations semi-classiques

Si on part d'un état tel que $\mathcal{E}_{cl} = 0$, $\mathcal{P}_{cl} = 0$ et $\mathcal{N}_{cl} = N_0/V$ à $t = 0$, on aura d'après les équations (IV.2, 3, 4) à chaque instant $\mathcal{E}_{cl} = \mathcal{P}_{cl} = 0$, $\mathcal{N}_{cl} = N_0/V$. Le système est dans un état métastable et n'évolue pas.

Si on part au contraire d'un état tel que \mathcal{E}_{cl} ou \mathcal{P}_{cl} est à l'instant initial différent de zéro (même en étant très petit), le système se trouve déstabilisé et va évoluer.

On peut déterminer la constante de temps caractéristique qui conditionne l'évolution du système au départ.

Si on se place dans un cas où à $t = 0$ $\mathcal{P}_{cl} \neq 0$, l'équation (IV.4) permet d'écrire :

$$\mathcal{E}_{cl} \approx - \frac{i k_0 L}{2\epsilon_0 \hbar} \mathcal{P}_{cl} \quad (\text{IV.8})$$

En portant ce résultat dans (IV.2), on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{cl}}{\partial t} \approx \frac{p^2}{2\epsilon_0 \hbar} k_0 L \mathcal{N}_{cl} \mathcal{P}_{cl} \quad (\text{IV.9})$$

\mathcal{N}_{cl} étant au départ de l'ordre de N_0/V , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{cl}}{\partial t} \approx \frac{p^2}{2\epsilon_0 \hbar} k_0 L \frac{N_0}{V} \mathcal{P}_{cl} \quad (\text{IV.10})$$

Si on introduit la largeur naturelle des atomes :

$$\Gamma = \frac{\omega^3}{c^3} \frac{1}{3\pi\epsilon_0 \hbar} (p^2) \quad (\text{IV.11})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{cl}}{\partial t} \approx \Gamma N_0 \frac{\pi\lambda^2}{2(2\pi)^2 a^2} \mathcal{P}_{cl} \quad (\text{IV.12})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{cl}}{\partial t} \approx \frac{\mathcal{P}_{cl}}{T_{SR}} \quad (\text{IV.13})$$

avec :

$$T_{SR} = \frac{8\pi a^2}{3\Gamma N_0 \lambda^2} \quad (\text{IV.14})$$

Ainsi au démarrage, la polarisation du système va évoluer de façon exponentielle avec la constante de temps de superradiance T_{SR} introduite au chapitre II. On peut en fait étudier l'évolution de ce système sur des temps

longs devant T_{SR} et montrer que l'échelle d'évolution du système est beaucoup plus longue que T_{SR} ⁽⁸⁾⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾ et est de l'ordre de $\tau_D = \frac{3T_{SR}}{4} |\text{Log } \beta T_{SR}|^2$ où β est une constante qui dépend des conditions initiales ($\beta = p \frac{\mathcal{E}_0}{N}$ où \mathcal{E}_0 est soit le champ entrant si le système démarre avec $\mathcal{E}_{cl}(t=0) = \mathcal{E}_0$, soit $\mathcal{E}_0 = \frac{k_0 L \mathcal{P}_0}{2\epsilon_0}$ si le système démarre sur une polarisation \mathcal{P}_0 non nulle à $t = 0$). Une étude complète de l'évolution ⁽⁸⁾ nous montre que le pulse émis présente une série d'oscillations dont le premier lobe est émis après un temps :

$$\tau_D = \frac{3T_{SR}}{4} |\text{Log } \beta T_{SR}|^2 \quad (\text{IV.15})$$

et dont la largeur est :

$$\tau_W = 3T_{SR} |\text{Log } \beta T_{SR}| \quad (\text{IV.16})$$

(voir figure IV-2).

(pour comparer les équations (IV.15) et (IV.16) aux formules données dans ⁽⁸⁾, il faut tenir compte d'une différence d'un facteur 3 dans les définitions de T_{SR}).

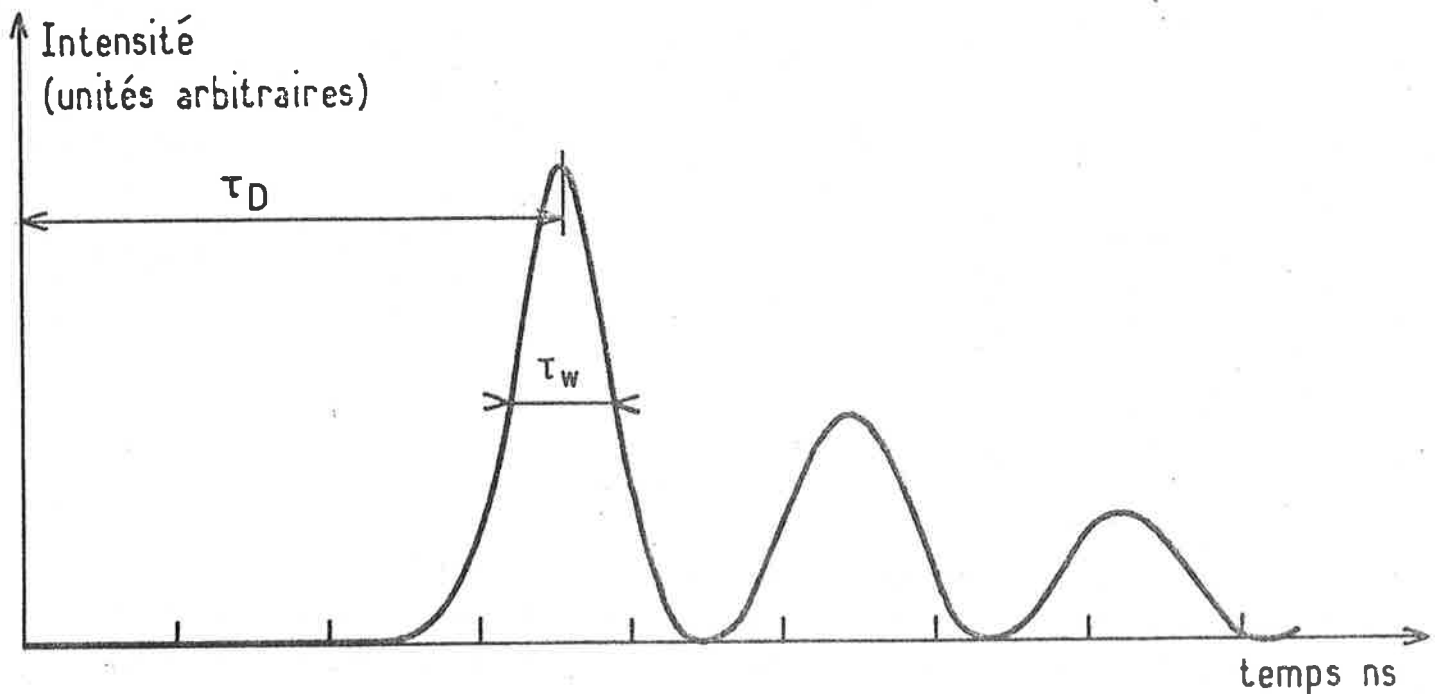


FIGURE IV-2

Il est important de noter que l'échelle de temps d'évolution du pulse est entièrement déterminée par T_{SR} d'une part (c'est-à-dire par le nombre N d'atomes excités) et par la donnée du champ initial \mathcal{E}_0 (ou de la polarisation atomique initiale \mathcal{P}_0) par l'intermédiaire de la "fréquence de nutation" β . τ_D et τ_W sont cependant très peu sensibles à des variations même importantes de \mathcal{E}_0 (ou \mathcal{P}_0) puisque la dépendance de ces quantités est logarithmique en β . En d'autres termes, le système classique est finalement très peu sensible à l'amplitude de la perturbation initiale qui le "déstabilise". Cette propriété explique, comme nous le verrons plus loin, qu'il est possible de décrire de façon assez libre la phase de démarrage quantique de la superradiance non-markovienne.

2) Les équations quantiques

En se plaçant dans le point de vue de HEISENBERG, on peut établir les équations quantiques pour les opérateurs décrivant les enveloppes "lentement variables" du champ \mathcal{E}_Q , et de polarisation \mathcal{P}_Q et l'opérateur décrivant la différence de populations du système \mathcal{N}_Q .

De tels opérateurs sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_Q(z,t) = -2 \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v} a_{\vec{k}}^+ e^{-ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \end{array} \right. \quad (\text{IV.17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_Q(z,t) = 2 \sum_i p r_i^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \end{array} \right. \quad (\text{IV.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_Q(z,t) = 2 \sum_i r_{zi} \delta(z-z_i) \end{array} \right. \quad (\text{IV.19})$$

Leur évolution est donnée par l'équation d'HEISENBERG :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [X, H] \quad (\text{IV.20})$$

où X est un opérateur quelconque et H le hamiltonien du système défini au chapitre III.

On établit ainsi (voir appendice B) les équations quantiques du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial t} = - \frac{ik_0}{2\epsilon_0} \mathcal{P}_Q \end{array} \right. \quad (\text{IV.21})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{P}_Q}{\partial t} = \frac{ip^2}{\hbar} \mathcal{E}_Q - \mathcal{V}_Q \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{N}_Q}{\partial t} = \frac{i}{2\hbar} [\mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+] \end{array} \right. \quad (\text{IV.23})$$

très analogues aux équations classiques.

Ces équations peuvent se réécrire en introduisant les opérateurs :

$$E^2_Q = \frac{1}{2} [\mathcal{E}_Q^+ \mathcal{E}_Q + \mathcal{E}_Q \mathcal{E}_Q^+] \quad (\text{IV.24})$$

$$P^2_Q = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_Q^+ \mathcal{P}_Q + \mathcal{P}_Q \mathcal{P}_Q^+] \quad (\text{IV.25})$$

et on obtient alors les équations suivantes analogues aux équations classiques (IV.5) (IV.6) (IV.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} [P^2_Q + p^2 \mathcal{N}_Q^2] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.26})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}_Q = \frac{i}{2\hbar} [\mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+] \end{array} \right. \quad (\text{IV.27})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} E^2_Q + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^2_Q + \frac{\hbar k_0}{2\epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{N}_Q}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.28})$$

3) Etat du système quantique à t = 0

A l'instant initial t = 0, on est dans un état de vide de photons, en présence de N atomes excités. On peut montrer que l'on a :

$$\langle \mathcal{E}_Q \rangle_{t=0} = \langle \mathcal{P}_Q \rangle_{t=0} = 0 \quad (\text{IV.29})$$

$$\langle \mathcal{E}_Q \mathcal{N}_Q \rangle_{t=0} = \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q \rangle_{t=0} = 0 \quad (\text{IV.30})$$

$$\langle \mathcal{N}_Q \rangle_{t=0} = N_0/V \quad (\text{IV.31})$$

De plus, on a, d'après (IV.17) :

$$\langle E_Q \rangle_{t=0} = 2 \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v} \right) \quad (\text{IV.32})$$

La sommation de (IV.32) s'obtient en ajoutant les contributions de tous les modes contenus dans le volume Ω de l'espace des phases associé au cylindre actif. On a :

$$\langle E_Q^2 \rangle_{t=0} = \frac{\hbar c}{\epsilon_0 v} \frac{v}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} k^3 dk d\Omega_k \quad (\text{IV.33})$$

Le volume de diffraction Ω est une section conique d'angle solide λ^2/a^2 et de longueur $2\pi/L$. On en déduit :

$$\langle E_Q^2 \rangle_{t=0} = \frac{\hbar c}{\epsilon_0} \frac{k_0}{V} \quad (\text{IV.34})$$

(où $V = La^2$ est le volume du cylindre actif).

On trouve enfin d'après (IV.18) :

$$\langle P_Q^2 \rangle_{t=0} = 2p^2 \frac{N}{V^2} \quad (\text{IV.35})$$

Les équations (IV.29), (IV.34) et (IV.35) montrent qu'à $t = 0$, il existe dans le milieu un champ et une polarisation "du vide" de phases aléatoires. La relation (IV.30) montre de plus qu'il n'y a pas, à l'origine, de relation de phase entre le champ et la polarisation.

4) Le démarrage du système

On peut montrer aisément d'après (IV.21) et (IV.23) que toutes les dérivées de $\langle \mathcal{E}_Q \mathcal{N}_Q \rangle$ à l'origine sont nulles. Il en résulte, d'après l'équation (IV.22), que $\langle \mathcal{P}_Q \rangle$ reste identiquement nul quel que soit t et que, d'après (IV.21), il en est de même de $\langle \mathcal{E}_Q \rangle$:

$$\langle \mathcal{P}_Q \rangle = \langle \mathcal{E}_Q \rangle = 0 \quad \forall t \quad (\text{IV.36})$$

Ceci signifie simplement que les phases du champ et de la polarisation du système superradiant restent indéterminées au cours du temps, mais n'implique bien sûr pas que le système reste stable : il est facile de voir en effet que

$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q \rangle$ est différent de zéro. On a, après un calcul simple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+}{2} \rangle &= \frac{ick_0}{2\epsilon_0} \langle \frac{\mathcal{P}_Q^+ \mathcal{P}_Q + \mathcal{P}_Q \mathcal{P}_Q^+}{2} \rangle + \\ &\frac{ip^2}{\hbar} \langle \frac{\mathcal{E}_Q^+ \mathcal{E}_Q \mathcal{N}_Q + \mathcal{E}_Q \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{N}_Q}{2} \rangle - c \langle \frac{\partial \mathcal{E}_Q^+}{\partial z} \mathcal{P}_Q - \frac{\partial \mathcal{E}_Q}{\partial z} \mathcal{P}_Q^+ \rangle \quad (\text{IV.37}) \end{aligned}$$

ce qui, à $t = 0$, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+}{2} \rangle_{t=0} &= \frac{ick_0}{2\epsilon_0} \langle P_Q^2 \rangle_{t=0} + \\ &\frac{ip^2}{\hbar} \langle E_Q^2 \rangle_{t=0} \langle \mathcal{N}_Q \rangle_{t=0} \neq 0 \quad (\text{IV.38}) \end{aligned}$$

Ce résultat signifie que le champ et la polarisation qui, à $t = 0$, n'ont pas de relation de phase, vont se corrélérer pour $t > 0$. Cette corrélation entraîne, d'après (IV.27), une décroissance de $\langle \mathcal{N}_Q \rangle$ qui exprime l'amortissement du système atomique. Cette décroissance est, d'après (IV.26) et (IV.28), liée à l'augmentation des quantités $\langle P_Q^2 \rangle$ et $\langle E_Q^2 \rangle$: la polarisation et le champ se bâtissent spontanément dans le milieu, tout en gardant une phase aléatoire d'après (IV.36).

D'après l'équation (IV.38), on voit que l'origine physique de l'instabilité du système apparaît comme double : elle est due à la fois aux fluctuations initiales de la polarisation (terme $\langle P_Q^2 \rangle_{t=0}$) et du champ électromagnétique "du vide" (terme $\langle E_Q^2 \rangle_{t=0}$). En fait, il est artificiel, comme cela a été montré par ailleurs (43), d'effectuer la séparation entre ces deux types de fluctuations qui ne sont pas indépendantes : on peut au choix décrire l'émission spontanée comme un effet de réaction de rayonnement (qui serait dû au terme en $\langle P_Q^2 \rangle$), ou comme un effet de fluctuation du vide (dû au terme en $\langle E_Q^2 \rangle$), ou comme un effet combiné de ces deux causes.

5) Calcul de la polarisation et de la population atomique pendant la phase initiale de la superradiance

Deux temps caractéristiques jouent un rôle essentiel pour l'analyse de la phase initiale de l'évolution du système :

■ $T_{SR} = \frac{8\pi a^2}{3N_0 \Gamma \lambda^2}$ qui représente le temps moyen au bout duquel se produit l'émission du premier photon dans l'angle de diffraction associé au volume émetteur.

■ $\tau_c = \frac{L}{c}$ qui représente le temps de propagation de la lumière le long du volume émetteur.

Il est important de comparer ces deux temps pour comprendre l'évolution du système au voisinage de $t = 0$. Nous avons déjà vu, au chapitre III, qu'il faut distinguer deux cas opposés :

$$a) T_{SR} > \frac{NL}{c} \quad (\text{régime markovien})$$

$$b) T_{SR} < \frac{NL}{c} \quad (\text{régime non markovien})$$

Nous envisageons ici le cas b. Deux situations restent encore possibles :

$$\alpha) T_{SR} \approx \frac{L}{c}$$

$$\text{ou } \beta) T_{SR} > \frac{L}{c}$$

Il faut remarquer que le cas ω) est en quelque sorte un cas limite et qu'il n'est pas possible de considérer des systèmes superradiants pour lesquels T_{SR} serait très court devant L/c . On serait alors en effet dans une situation où les différents atomes du milieu émettraient leurs photons avant que la lumière ait eu le temps de se propager d'un point à l'autre de l'échantillon et il ne pourrait y avoir d'émission coopérative d'ensemble du milieu. Comme nous le verrons plus loin, la superradiance ne peut se produire que si T_{SR} est supérieur à une quantité de l'ordre d'une fraction de L/c (typiquement $L/10c$).

Pour analyser l'évolution du système, nous envisagerons tout d'abord le cas général β) et nous dirons ensuite quelques mots du cas limite α) où T_{SR} est compris entre L/c et une fraction de L/c .

Nous nous proposons d'étudier l'évolution du système sur un intervalle de temps de l'ordre de quelques T_{SR} à partir de zéro, correspondant à l'émission des premiers photons de superradiance dans l'axe du cylindre. Il est clair que pour ces premiers photons, on peut négliger la réaction du système atomique sur le champ de rayonnement : tant que le système aura en effet émis moins de q photons avec :

$$q = \frac{T_{SR}}{L/c} , \quad (IV.39)$$

il est clair, d'après les résultats du chapitre III, que l'approximation markovienne est valable. On peut donc calculer, à l'aide des équations de DICKE, l'évolution de la polarisation et la densité de population du système tant que moins de q photons ont été émis, c'est-à-dire d'après (III.64) :

$$\text{pour } t \lesssim T_{SR} \text{ Log } q \quad (IV.40)$$

Reprenant les notations du chapitre III, on a à l'instant t :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | R_{k_0}^+ R_{k_0}^- | \psi(t) \rangle &= \sum_{ij} \langle \psi(t) | r_i^+ r_j^- e^{ik_0(z_i - z_j)} | \psi(t) \rangle \\ &= N^2 \langle \psi(t) | r_i^+ r_i^- | \psi(t) \rangle = \sum_s p_s(t) (N_0 - s)(s+1) \end{aligned} \quad (IV.41)$$

où $p_s(t)$ est la probabilité pour que le système ait émis s photons;
de même :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | R_{k_0}^- R_{k_0}^+ | \psi(t) \rangle &= \sum_{ij} \langle \psi(t) | r_i^- r_j^+ e^{ik_0(z_j - z_i)} | \psi(t) \rangle \\ &= N^2 \langle \psi(t) | r_1^- r_1^+ | \psi(t) \rangle = \sum_s p_s(t) s(N_0 - s + 1) \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Or les opérateurs $R_{k_0}^- R_{k_0}^+$ et $R_{k_0}^+ R_{k_0}^-$ sont très directement reliés à l'opérateur P_Q^2 . On a en effet :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | P_Q^2 | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \psi(t) | \mathcal{P}_Q^+ \mathcal{P}_Q | \psi(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi(t) | \mathcal{P}_Q \mathcal{P}_Q^+ | \psi(t) \rangle = \\ &= 2p^2 \sum_{ij} \langle \psi(t) | r_i^+ r_j^- e^{ik_0(z_i - z_j)} \delta(z - z_i) \delta(z - z_j) | \psi(t) \rangle \\ &+ 2p^2 \sum_{ij} \langle \psi(t) | r_i^- r_j^+ e^{ik_0(z_j - z_i)} \delta(z - z_i) \delta(z - z_j) | \psi(t) \rangle \\ &= 2p^2 \frac{N^2}{V^2} (\langle \psi(t) | r_1^- r_1^+ | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | r_1^+ r_1^- | \psi(t) \rangle) \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

soit d'après (IV.41) et (IV.42) :

$$\langle \psi(t) | P_Q^2 | \psi(t) \rangle = \frac{2p^2}{V^2} \sum_s [2(N-s)s + N] p_s(t) \quad (\text{IV.44})$$

qui, pour $s \ll N$, s'écrit :

$$\langle \psi(t) | P_Q^2 | \psi(t) \rangle = \frac{2p^2}{V^2} N + \frac{4p^2}{V^2} N \bar{s} \quad (\text{IV.45})$$

en posant : $\bar{s} = \sum_s s p_s(t)$.

A l'instant $t = T_{SR} \text{Log } q$, on a $\bar{s} \approx q > 1$ et donc :

$$\langle P_Q^2 \rangle_{t=T_{SR} \text{Log } k} \approx \frac{4p^2}{V^2} N q = \frac{4p^2}{V^2} N \frac{T_{SR} c}{L} \quad (\text{IV.46})$$

On obtient de même de façon évidente au même instant :

$$\langle \mathcal{N}_Q \rangle_{t=T_{SR} \text{ Log } q} = \frac{N - 2q}{V} \quad (\text{IV.47})$$

Il est enfin utile d'avoir la dérivée par rapport au temps de $\langle \mathcal{N}_Q \rangle$, à la fin de cette phase markovienne. On l'obtient aisément en constatant que $\langle \mathcal{N}_Q \rangle$ augmente de $2/V$ lorsque le nombre de photons émis passe de q à $q+1$, ce qui correspond à un intervalle de temps moyen :

$$\Delta t = T_{SR} [\text{Log}(q+1) - \text{Log } q] \approx \frac{T_{SR}}{q} \quad (\text{IV.48})$$

On a donc :

$$\left. \frac{\partial \langle \mathcal{N}_Q \rangle}{\partial t} \right|_{t=T_{SR} \text{ Log } q} = \frac{2q}{VT_{SR}} \quad (\text{IV.49})$$

6) Corrélations entre \mathcal{E}_Q et \mathcal{I}_Q à la fin de la phase markovienne

On peut caractériser l'importance des corrélations qui existent entre \mathcal{E}_Q et \mathcal{I}_Q par le rapport η :

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} | \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{I}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{I}_Q^+ \rangle |}{\sqrt{\langle P_Q^2 \rangle \langle E_Q^2 \rangle}} \quad (\text{IV.50})$$

Ce nombre η varie entre 0 et 1. A l'instant $t = 0$, il est nul, c'est-à-dire que \mathcal{E}_Q et \mathcal{I}_Q ne sont pas corrélés et ne peuvent donc être décrits classiquement. Nous nous proposons de montrer que ce rapport est de l'ordre de 1 à l'instant $t = T_{SR} \text{ Log } q$.

On a en effet, d'après (IV.23) :

$$\frac{1}{2} | \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{I}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{I}_Q^+ \rangle |_{t=T_{SR} \text{ Log } q} = \kappa \left. \frac{\partial \langle \mathcal{N}_Q \rangle}{\partial t} \right|_{t=T_{SR} \text{ Log } q} = \frac{2\kappa c}{VL} \quad (\text{IV.51})$$

En remplaçant dans (IV.50) $\langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{D}_Q \rangle$ et $\langle P_Q^2 \rangle$ par leur valeur donnée par (IV.51) et (IV.46) et $\langle E_Q^2 \rangle$ par sa valeur dans le vide donnée par (IV.34) (on peut en effet négliger les variations du champ dans la phase markovienne), on obtient :

$$\eta = 1 \quad (IV.52)$$

7) Passage aux équations classiques pour $t > T_{SR} \text{Log } q$

A partir du moment où la condition (IV.52) est remplie, le champ et la polarisation sont fortement corrélés et peuvent être décrits par des grandeurs classiques en quadrature. On peut en effet supposer que la corrélation se conserve durant le reste de l'évolution du système et écrire :

$$\frac{1}{2} \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{D}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{D}_Q^+ \rangle \approx \sqrt{\langle P_Q^2 \rangle \langle E_Q^2 \rangle} \quad (IV.53)$$

On voit alors qu'à condition de faire la correspondance :

$$\begin{aligned} \langle P_Q^2 \rangle &\leftrightarrow \mathcal{D}_{cl}^* \mathcal{D}_{cl} \\ \langle E_Q^2 \rangle &\leftrightarrow \mathcal{E}_{cl}^* \mathcal{E}_{cl} \\ \langle \mathcal{N}_Q \rangle &\leftrightarrow \mathcal{N}_{cl} \end{aligned}$$

les équations quantiques et classiques deviennent identiques (comparer (IV.26,27,28) à (IV.5,6,7) compte tenu de (IV.53)).

A partir de $t = T_{SR} \text{Log } \frac{cT_{SR}}{L}$, les équations semi-classiques sont donc valables à condition de prendre comme polarisation initiale la valeur tirée de l'équation (IV.46) :

$$\mathcal{D}_{cl}(t=T_{SR} \text{Log } q) = \sqrt{\langle P_Q^2 \rangle} \Big|_{t=T_{SR} \text{Log } q} = \sqrt{\frac{4p^2 N}{v^2} \frac{cT_{SR}}{L}} \quad (IV.54)$$

Remarque :

Le raisonnement précédent ne s'applique en toute rigueur que si $q = \frac{cT_{SR}}{L} \gg 1$. Il nous reste donc à justifier que le champ et la polarisation se corrélaient également très vite dans le cas α) tel que $T_{SR} \lesssim \frac{L}{c}$. Calculons pour cela le rapport de corrélation η "après émission" du premier photon ($t = T_{SR}$). $\langle E^2_Q \rangle$ et $\langle P^2_Q \rangle$ ont évidemment peu varié et on peut, pour ce calcul, prendre leur valeur à $t = 0$. Reste à évaluer $\frac{i}{2} \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle_{t=T_{SR}}$. On peut obtenir cette quantité en remarquant que la dérivée

$\frac{d}{dt} \left(\frac{i}{2} \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle \right)$ donnée par l'équation (IV.37) varie peu entre $t = 0$ et $t = T_{SR}$: les deux premiers termes du membre de droite proportionnels à $\langle P^2_Q \rangle$ et $\langle E^2_Q \rangle$ gardent leur valeur initiale; quant au terme

$c \langle \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_Q^+ \right) \mathcal{P}_Q - \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_Q \right) \mathcal{P}_Q^+ \rangle$, il ne devient important qu'au bout d'un temps $t \sim \frac{L}{c} > T_{SR}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle \Big|_{t=T_{SR}} &= \frac{d}{dt} \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle \Big|_{t=0} \times T_{SR} \\ &\sim \frac{4ck_0 p^2 N_0}{\epsilon_0 v^2} T_{SR} \end{aligned} \quad (IV.55)$$

Reportant les valeurs données par les équations (IV.34), (IV.35) et (IV.55) dans l'expression (IV.50) de η , on trouve :

$$\eta \sim \sqrt{\frac{cT_{SR}}{L}} \quad (IV.56)$$

T_{SR} ne pouvant, comme nous l'avons vu plus haut, être très inférieur à L/c , on voit que η est de l'ordre de l'unité : ainsi, dans le cas α) la corrélation entre \mathcal{E}_Q et \mathcal{P}_Q est atteinte au bout d'un temps de l'ordre de T_{SR} (et donc de L/c). Notons, pour finir, que le calcul direct de $\langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle$ que nous

venons de faire ici n'est pas possible dans le cas β) : en effet,

$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle$ varie alors au bout d'un temps $\frac{L}{c} \ll T_{SR}$ et la solution linéaire donnant $\langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle$ n'est plus valable pour $t \sim T_{SR}$; ceci explique que nous ayons d'abord calculé $\langle P_Q^2 \rangle$, $\langle \mathcal{N}_Q \rangle$ et $\langle \frac{d\mathcal{N}_Q}{dt} \rangle$ pour en déduire indirectement $\langle \mathcal{E}_Q^+ \mathcal{P}_Q - \mathcal{E}_Q \mathcal{P}_Q^+ \rangle$.

8) Analyse des conditions de validité du traitement semi-classique

L'analyse précédente montre que deux conditions distinctes doivent être remplies pour que le traitement semi-classique soit valable

a) Condition de seuil

Il faut que la superradiance démarre dans les modes axiaux du volume actif avant que les atomes ne se désexcitent par émission spontanée dans toutes les directions. De façon plus quantitative, ceci implique la condition :

$$T_{SR} \text{Log } q < \frac{1}{\Gamma} \quad (\text{IV.57})$$

Soit :

$$N > \frac{8\pi a^2}{3\lambda^2} \text{Log} \frac{cT_{SR}}{L} \sim \frac{8\pi a^2}{3\lambda^2} \quad (\text{IV.58})$$

On retrouve, au facteur $\text{Log } q$ près (de l'ordre de quelques unités), la même condition seuil que dans le cas markovien (voir (III.87)).

Remarque :

(IV.57) peut s'écrire $\frac{T_{SP}}{T_{SR}} \gg 1$. Lorsque nous tenons compte du mouvement des atomes, la condition de seuil sera donnée par une expression analogue obtenue en remplaçant T_{SP} par le temps de déphasage Doppler T_2^* :

$$\frac{T_2^*}{T_{SR}} > 1 \quad (\text{IV.57 bis})$$

b) Condition de régime non markovien

L'analyse de la dynamique du système en une phase initiale quantique et une phase subséquente classique décrivant l'essentiel de son évolution n'a de sens que si les valeurs du champ et de la polarisation, à la fin de la phase initiale, sont très inférieures à leur valeur maximum atteinte dans la phase classique. A la fin de la phase quantique, $q = \frac{cT_{SR}}{L}$ photons ont été émis et la polarisation vaut $\sqrt{\frac{4p^2N}{V^2} \frac{cT_{SR}}{L}}$; au maximum de l'émission, N photons ont été émis et la polarisation maximale est de l'ordre de $2pN/V$. Les conditions à remplir sont donc :

$$q = \frac{cT_{SR}}{L} \ll N$$

et

$$\sqrt{\frac{4p^2N}{V^2} \frac{cT_{SR}}{L}} \ll \frac{2pN}{V}$$

Ces deux inégalités sont équivalentes à :

$$T_{SR} < \frac{NL}{c} \quad (\text{IV.59})$$

On retrouve ainsi la condition de régime non markovien (IV.1).

En conclusion, les équations semi-classiques décrivent correctement l'évolution du système si celui-ci est à la fois superradiant (IV.57) et non markovien (IV.59).

9) Différentes "simulations" possibles pour le démarrage de la superradiance

Nous avons vu que la façon la plus simple de tenir compte de la phase initiale de la superradiance non markovienne est d'introduire dans les équations classiques une polarisation initiale uniforme donnée par l'équation (IV.54). Nous avons vu également que les équations classiques sont relativement insensibles à la condition initiale qui les déstabilise. Par exemple, si la polarisation initiale varie d'un ordre de grandeur (facteur 10), le délai du pulse superradiant ne variera en général que de quelques pourcents. Ceci explique que l'on peut indifféremment simuler de diverses façons la phase quantique de l'émission. FELD et al. ont montré que le système pouvait démarrer de façon équivalente soit sur un pulse de champ aléatoire, soit en introduisant dans les équations un terme source de polarisation aléatoire. Ce terme source a pour but de bâtir en un temps t de l'ordre de T_{SR} une polarisation dont l'ordre de grandeur est comparable à celui de l'expression (IV.54). Ce terme peut alors être "débranché". Il peut même être maintenu pour $t > T_{SR}$ sans modifier la solution. Une fois que les équations classiques ont démarré, "le bruit" qu'il introduit devient en effet négligeable. Nous ne décrirons pas ici en détail les différentes techniques de démarrage possibles qui, toutes, reposent sur une description phénoménologique plus ou moins convaincante de l'émission spontanée. Les calculs que nous décrivons plus loin pour décrire la superradiance dans nos expériences ont été effectués à partir de différents démarrages possibles et nous avons vérifié dans ces calculs que notre condition initiale (IV.54) donnait des résultats équivalents à ceux obtenus en simulant le démarrage par l'une des techniques introduites par FELD et al.

B. TRAITEMENT DES EQUATIONS SEMI-CLASSIQUES DE SUPERRADIANCE DANS LE CAS D'UN SYSTEME D'ATOMES A DEUX NIVEAUX

1) Les équations semi-classiques complètes

Nous n'avons pas tenu compte dans les équations semi-classiques (IV.2), (IV.3) et (IV.4) de l'effet Doppler, des termes de perte du champ et de relaxation des populations. Si l'on tient compte de tous ces effets, les équations s'écrivent alors pour des atomes à deux niveaux ⁽⁴⁰⁾(41) :

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{cl}(z,t,v)}{\partial t} = -(\gamma_{AB} - ik_0 v) \mathcal{P}_{cl}(z,t,v) + \frac{i p^2}{\hbar} \mathcal{E}_{cl}(z,t) \left[\rho_{Acl}(z,t,v) - \rho_{Bcl}(z,t,v) \right] \quad (IV.60)$$

$$\frac{\partial \rho_{Acl}(z,t,v)}{\partial t} = -\gamma_A \rho_{Acl}(z,t,v) - \frac{1}{2\hbar} \mathcal{I}_m \left(\mathcal{E}_{cl}^*(z,t) \mathcal{P}_{cl}(z,t,v) \right) \quad (IV.61)$$

$$\frac{\partial \rho_{Bcl}(z,t,v)}{\partial t} = -\gamma_B \rho_{Bcl}(z,t,v) + \frac{1}{2\hbar} \mathcal{I}_m \left(\mathcal{E}_{cl}^*(z,t) \mathcal{P}_{cl}(z,t,v) \right) \quad (IV.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{cl}(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_{cl}(z,t)}{\partial t} = -K \mathcal{E}_{cl}(z,t) - i \frac{k_0}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{P}_{cl}(z,t,v) \rangle_v \quad (IV.63)$$

où \mathcal{I}_m signifie "partie imaginaire".

$\rho_{Acl}(z,t,v)$, $\rho_{Bcl}(z,t,v)$ et $\mathcal{P}_{cl}(z,t,v)$ sont les densités de populations respectives du niveau excité A et du niveau fondamental B et la polarisation des atomes pour chaque classe de vitesse v .

$\langle \mathcal{P}_{cl}(z,t,v) \rangle_v = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \mathcal{P}_{cl}(z,t,v) dv$ ($f(v)$ étant la distribution des vitesses atomiques) est la valeur moyenne de la polarisation intégrée sur les vitesses.

γ_A , γ_B et γ_{AB} sont les coefficients de relaxation pour les populations et la cohérence atomique et K un coefficient de perte pour le champ (dû à la diffraction, etc...).

Enfin, pour tenir compte de la possibilité d'émission superradiante symétrique dans deux directions opposées, on peut modifier les équations (IV.60), (IV.61), (IV.62) et (IV.63) sous la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{1cl}}{\partial t} = -(\gamma_{AB} - ik_0 v) \mathcal{P}_{1cl} + i \frac{p^2}{\hbar} \mathcal{E}_{1cl} (\rho_{Acl} - \rho_{Bcl}) \quad (\text{IV.64})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{2cl}}{\partial t} = -(\gamma_{AB} + ik_0 v) \mathcal{P}_{2cl} + i \frac{p^2}{\hbar} \mathcal{E}_{2cl} (\rho_{Acl} - \rho_{Bcl}) \quad (\text{IV.65})$$

$$\frac{\partial \rho_{Acl}}{\partial t} = -\gamma_A \rho_{Acl} - \frac{1}{2\hbar} \mathcal{J}_m (\mathcal{E}_{1cl}^* \mathcal{P}_{1cl} + \mathcal{E}_{2cl}^* \mathcal{P}_{2cl}) \quad (\text{IV.66})$$

$$\frac{\partial \rho_{Bcl}}{\partial t} = -\gamma_B \rho_{Bcl} + \frac{1}{2\hbar} \mathcal{J}_m (\mathcal{E}_{1cl}^* \mathcal{P}_{1cl} + \mathcal{E}_{2cl}^* \mathcal{P}_{2cl}) \quad (\text{IV.67})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{1cl}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_{1cl}}{\partial t} = -K \mathcal{E}_{1cl} - i \frac{k_0}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{P}_{1cl} \rangle_v \quad (\text{IV.68})$$

$$- \frac{\partial \mathcal{E}_{2cl}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_{2cl}}{\partial t} = -K \mathcal{E}_{2cl} + i \frac{k_0}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{P}_{2cl} \rangle_v \quad (\text{IV.69})$$

où \mathcal{E}_{1cl} , \mathcal{P}_{1cl} (\mathcal{E}_{2cl} , \mathcal{P}_{2cl}) sont respectivement le champ qui se propage dans la direction 1 (2) et la polarisation qui l'induit.

Pour établir ces dernières équations, on a négligé toutes les corrélations directes entre les deux pulses de champ, c'est-à-dire des termes de la

forme $\left[\frac{1}{2\hbar} \mathcal{I}_m (\mathcal{E}_{1cl}^* \mathcal{F}_{2cl} e^{-i2k_0 z} + \mathcal{E}_{2cl}^* \mathcal{F}_{1cl} e^{i2k_0 z}) \right]$. Ceci est justifié car ces corrélations évoluent spatialement sur des distances caractéristiques de l'ordre de λ et se moyennent à zéro à l'échelle de l'évolution des enveloppes \mathcal{E}_{cl} et \mathcal{F}_{cl} qui est de l'ordre de $L \gg \lambda$.

Les équations (IV.64) à (IV.69) sont les équations les plus générales que nous ayons envisagées pour traiter la superradiance non markovienne dans le cas d'un volume cylindrique peuplé d'atomes à deux niveaux. Elles doivent être complétées par une double condition initiale :

- i) Il faut introduire une polarisation initiale donnée par (IV.54) et dépendant de la densité N_0/V d'atomes inversés.
- ii) Il reste à préciser comment cette densité d'inversion se trouve réalisée dans le milieu à $t = 0$. Deux cas limites peuvent être envisagés : celui, idéal, d'une excitation transversale instantanée préparant le milieu tout entier au même instant, celui d'une excitation balayée par un pulse infiniment court se propageant à la vitesse de la lumière dans le milieu. Tant que $\frac{L}{c} \lesssim T_{SR}$, ces deux modes d'excitation conduisent à des résultats évidemment identiques, ce que nous avons vérifié par le calcul numérique. Sauf indication contraire, nous nous limiterons dans la suite au cas d'une excitation instantanée, qui présente l'avantage de traiter de façon symétrique les deux pulses superradiants se propageant en sens opposé.

2) Résultats du traitement par ordinateur des équations semi-classiques

Nous n'allons pas exposer ici la méthode de résolution par ordinateur des équations classiques, méthode que l'on peut trouver en détail dans les papiers de LAMB et al. (⁴⁰) et dans la thèse de SKRIBANOWITZ (⁸). C'est un traitement analogue que nous avons employé ici pour l'appliquer au cas d'un système d'atomes de sodium à plusieurs niveaux. Nous nous sommes intéressés tout d'abord

au cas simplifié d'atomes à deux niveaux non dégénérés fictifs ayant une force d'oscillateur correspondant à celle de la transition 5s - 4p du sodium. Ce sont les résultats des calculs effectués dans ce cas qui vont faire l'objet de l'exposé de ce paragraphe.

Dans une première partie, nous rappelons et analysons rapidement les caractéristiques du signal superradiant (délai, intensité, oscillations) en fonction du taux d'excitation.

Dans un deuxième paragraphe, nous nous sommes occupés de l'évolution des atomes dans la cellule suivant leur position et leur vitesse.

Nous terminons enfin, dans un troisième paragraphe, par l'analyse de l'influence de la longueur de la cellule sur le signal superradiant et montrons qu'à excitation constante, les caractéristiques du pulse sont indépendantes de L tant que $\frac{L}{c} < \tau_D$. Lorsque $\frac{L}{c} \gtrsim \tau_D$, c'est-à-dire pour des valeurs de T_{SR} inférieures à une fraction de L/c , le pulse superradiant se "brise en morceaux", comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, et on ne peut plus parler d'une émission superradiante de l'ensemble du milieu.

a) Rappel des caractéristiques des pulses superradiants

α) Intensité et délai

Les deux caractéristiques capitales des pulses superradiants sont la loi de variation en $1/N_0$ et N_0^2 du délai et de l'intensité du pulse émis (N_0 est le nombre d'atomes excités).

Sur la figure IV-3, on a reporté la racine carrée de l'intensité \sqrt{I} du premier lobe de rayonnement en fonction du taux d'excitation. La loi de variation de l'intensité en N_0^2 est, comme le montre la figure, pratiquement vérifiée lorsque l'on se situe dans une zone bien au-dessus du seuil de super-

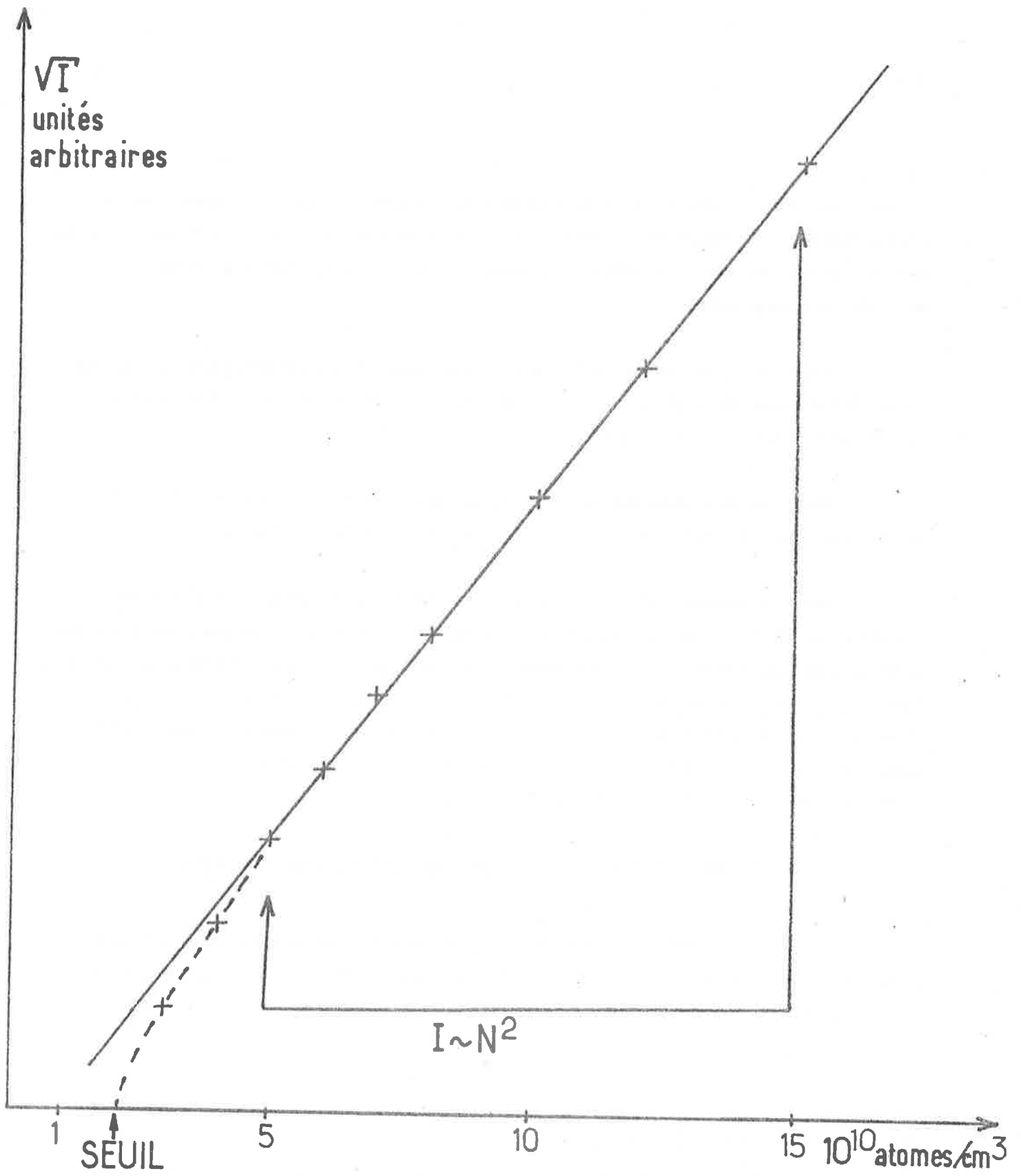


FIGURE IV-3

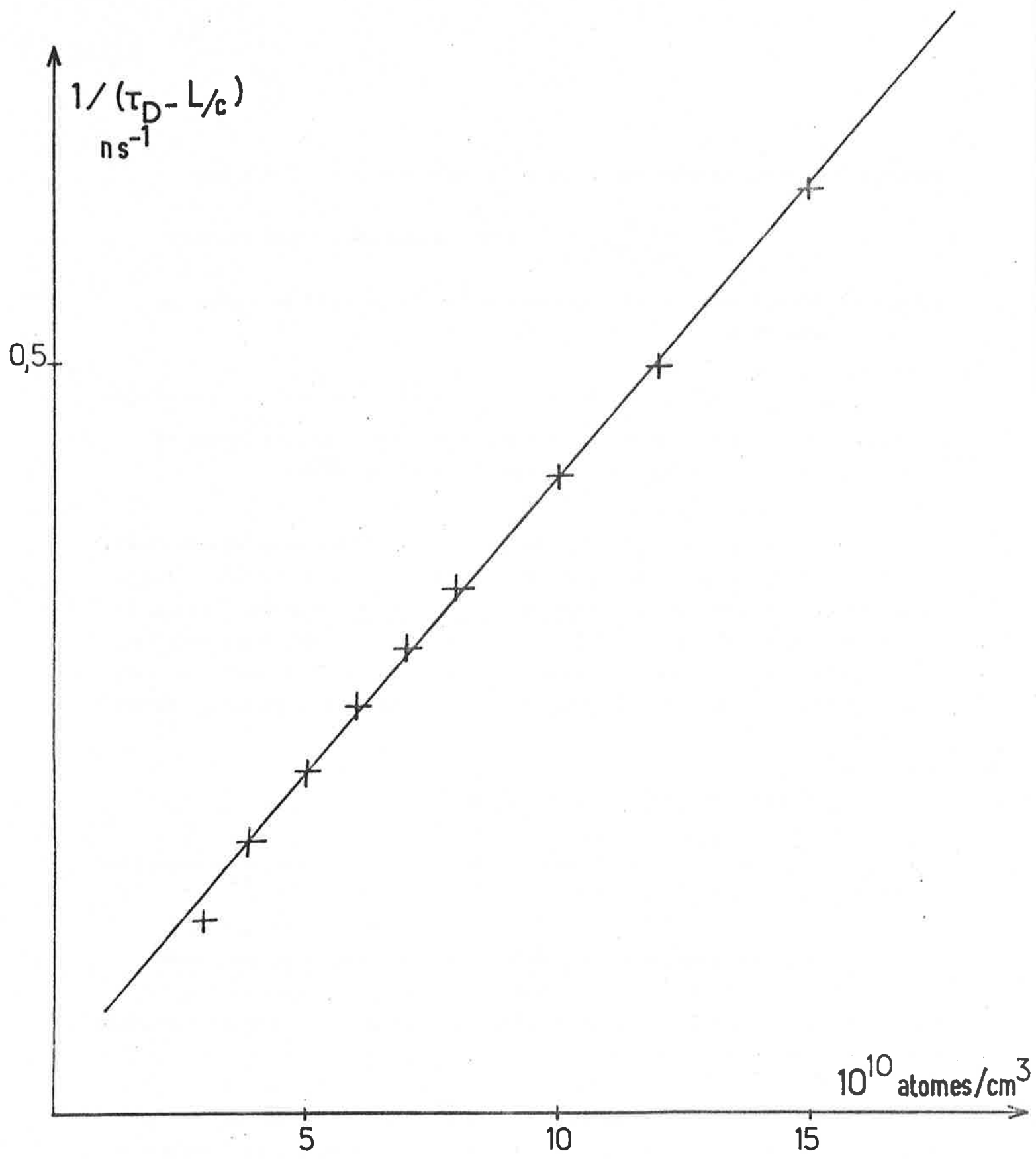


FIGURE IV-4

radiance. Le calcul vérifie que ce seuil est obtenu pour $\frac{T_2^*}{T_{SR}} \approx 5$ avec

$$T_2^* = \frac{\lambda}{4\pi v \sqrt{\text{Log } 2}} \quad (\text{temps de déphasage Doppler}). \quad (\text{Les}$$

paramètres de la transition 5s - 4p correspondent à un seuil de l'ordre de $2 \cdot 10^{10}$ atomes/cm³).

Sur la figure IV-4, on a tracé $\frac{1}{(\tau_D - L/c)}$ en fonction du taux d'excitation. On vérifie que le délai varie à peu près comme l'inverse du nombre d'atomes, lorsqu'on se situe dans une zone au-dessus du seuil.

β) Oscillations

Enfin les pulses de lumière émis présentent de nombreuses oscillations (de fréquence proportionnelle à N) comme le montre la figure IV-2. Ces oscillations correspondent à des changements de signe du champ qui s'annule donc entre chaque oscillation. Elles constituent une caractéristique de l'émission superradiante et nous en donnerons une interprétation qualitative au paragraphe suivant lorsque nous étudierons l'évolution de la population des atomes excités.

b) Etude de l'évolution des atomes

Nous nous sommes également intéressés à l'évolution des atomes dans la cellule.

Considérons d'abord la variation du nombre global d'atomes excités $N(t) = \int \int N(z,t,v) f(v) dv dz$. Cette quantité varie par paliers rapides (voir figure IV-5), tels que pour chaque "marche", il correspond un lobe d'oscillation pour le pulse de lumière émis.

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de l'inversion de population en fonction de la position des atomes dans la cellule. La figure IV-6 montre la répartition $N(z,t) = \int N(z,t,v) f(v) dv$ à différents instants de l'émission

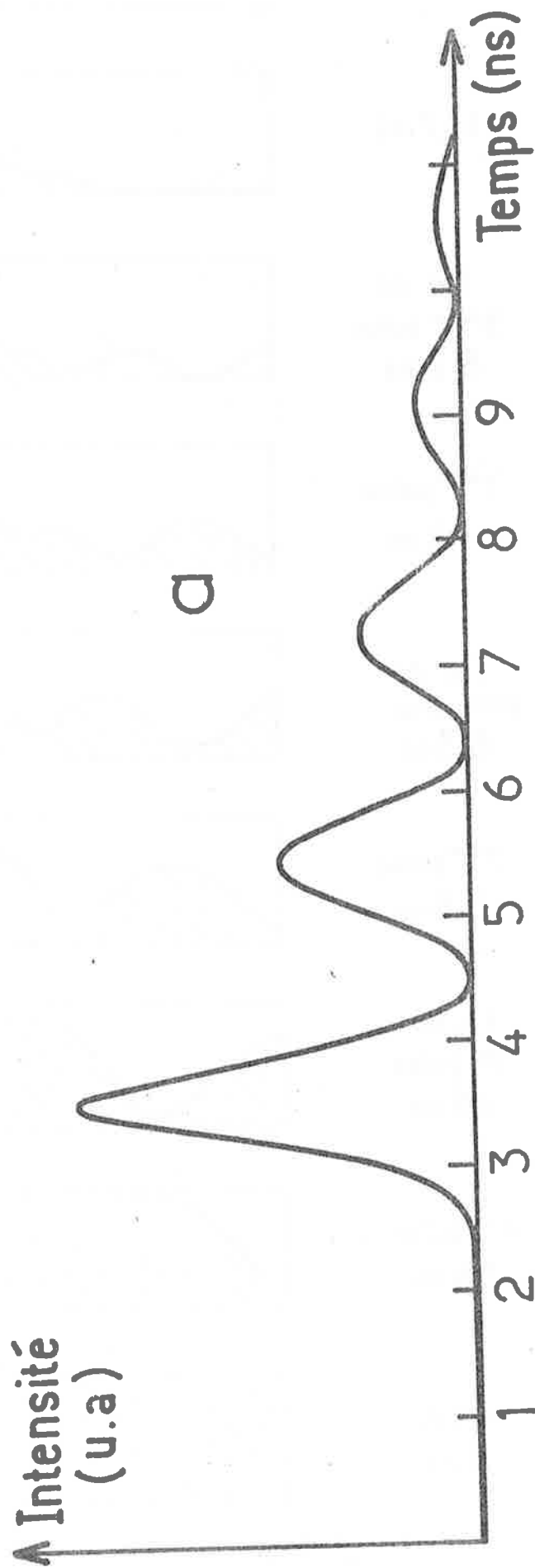
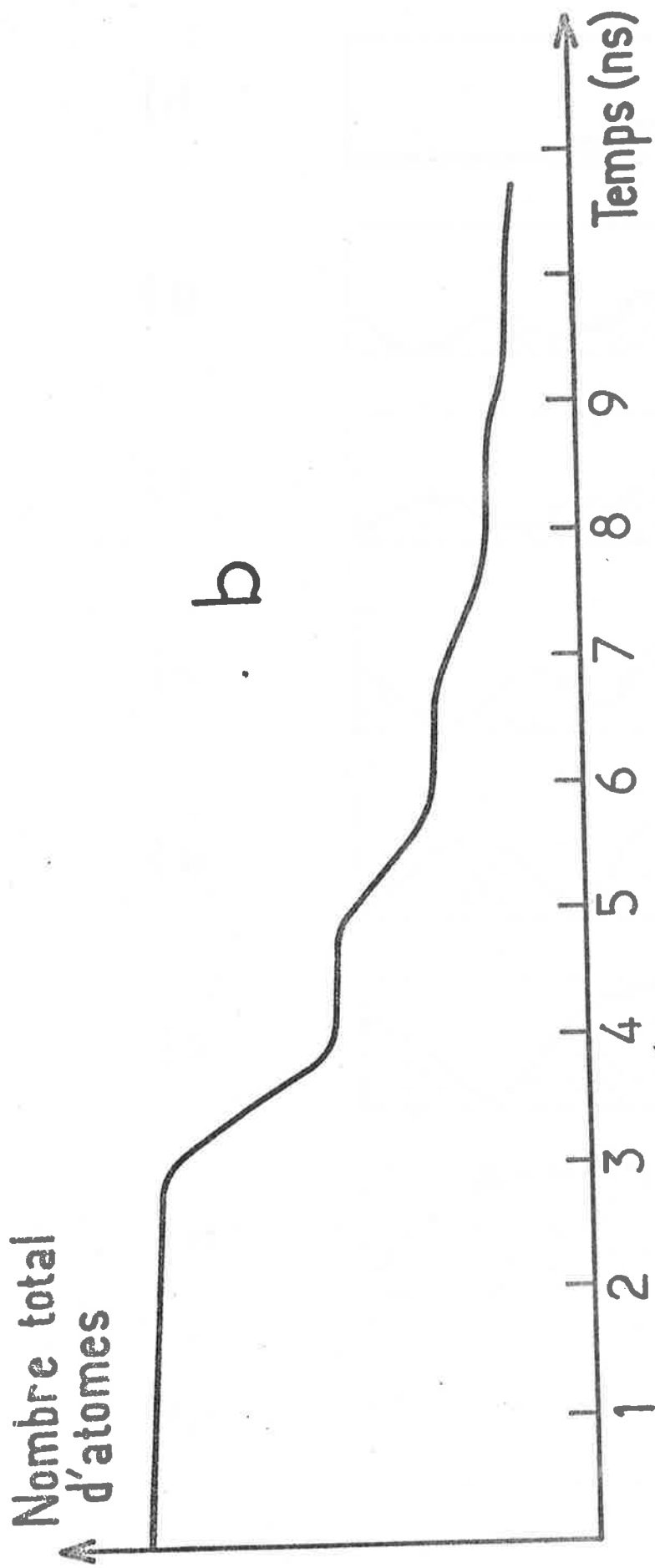


FIGURE IV-5

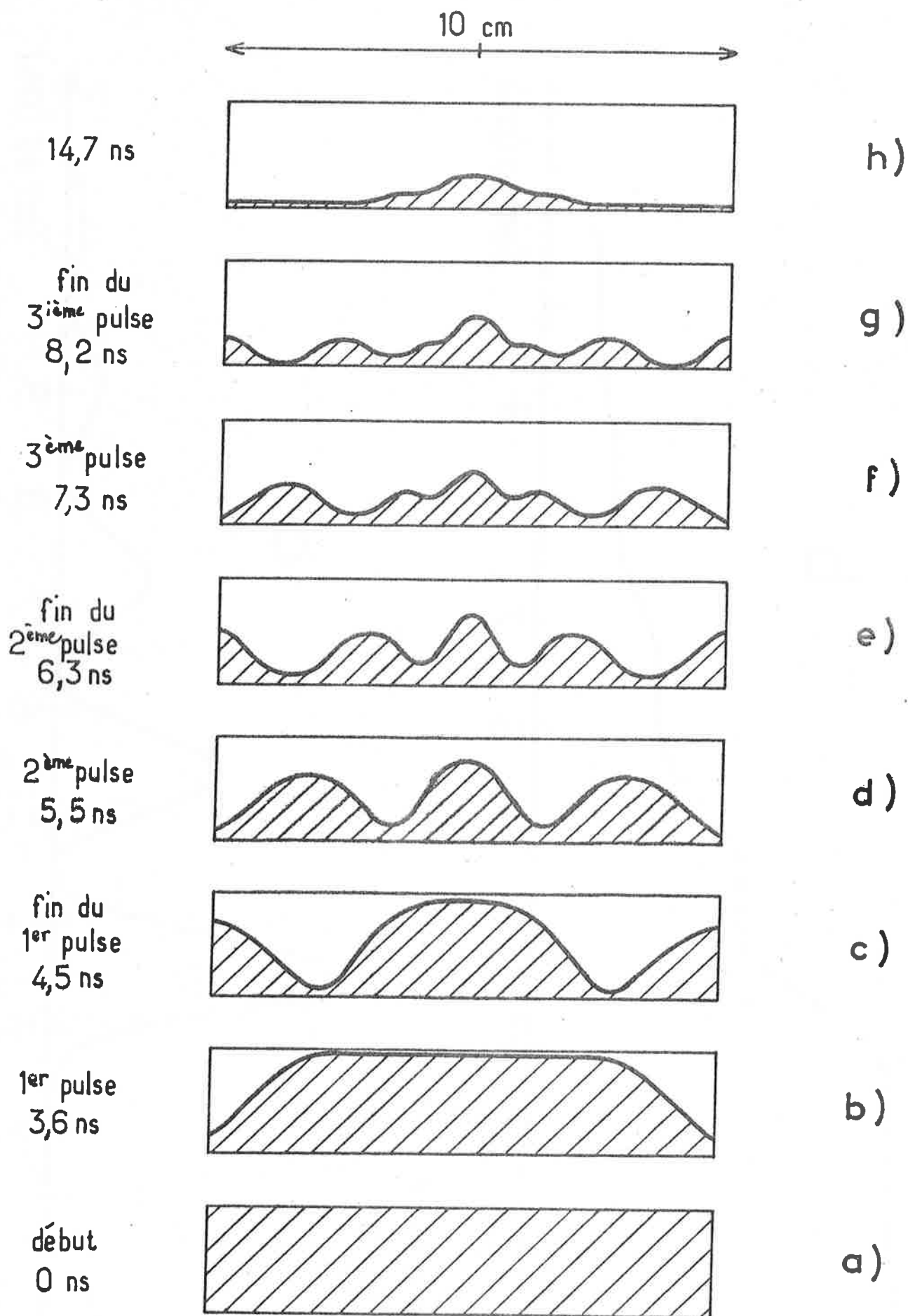


FIGURE IV-6

zone hachurée : atomes excités
 zone blanche : atomes désexcités

superradiante. On constate en premier lieu qu'en un point donné, la population oscille. On peut voir sur l'équation (IV.7) que la période de ces oscillations est la même que celle du carré du champ électrique en ce point, ce qu'on a vérifié par le calcul. Le premier lobe de rayonnement du pulse superradiant (figure IV-6-b) est émis par les atomes situés aux extrémités de la cellule. Le minimum d'émission qui lui succède (figure IV-6-c) est lié à une augmentation du nombre des atomes excités aux extrémités de la cellule, c'est-à-dire à une réabsorption à cet endroit du champ émis par les atomes situés plus au centre. Au moment de l'émission du deuxième lobe de rayonnement (figure IV-6-d), les atomes sont à nouveau désexcités sur les bords, c'est-à-dire qu'ils amplifient en fait à cet instant le champ émis par les atomes situés au voisinage du centre. Les oscillations du pulse de sortie sont ainsi directement liées aux absorption et réémission d'énergie électromagnétique par les atomes aux divers points de la cellule. Remarquons qu'au moment de l'émission du premier lobe de rayonnement (figure IV-6-b) les atomes qui contribuent aux deux pulses émis en sens inverse sont différents. Ceci justifie la faible influence d'un pulse sur l'autre constatée par FELD et al. Ce n'est qu'après l'émission des deuxième et troisième lobes de rayonnement que les inversions de densité, qui "reculent" à partir des deux extrémités de la cellule, commencent à se chevaucher au centre, entraînant une corrélation entre les deux pulses émis. A ce moment cependant, le nombre d'atomes restant excités est en général relativement faible et on se trouve déjà dans la "queue" du pulse superradiant.

Envisageons pour finir l'évolution des atomes en fonction de leur classe de vitesse en étudiant la quantité $N(v,t) = \int N(z,v,t) dz$. La figure IV-7-a montre la variation du profil $N(v,t)$ à différents instants pour un pulse superradiant correspondant à des conditions voisines du seuil de superradiance. On constate au bout d'un certain temps un renversement du profil Doppler qui correspond au fait que les atomes superradiant plus facilement au centre du profil que sur les ailes. Le seuil de superradiance est en effet, lorsqu'on augmente N_0 , atteint d'abord pour les classes de vitesse situées au voisinage de $v = 0$, et les atomes situés sur les ailes du profil Doppler sont, au voisinage du seuil, laissés pratiquement inaffectés par la superradiance.

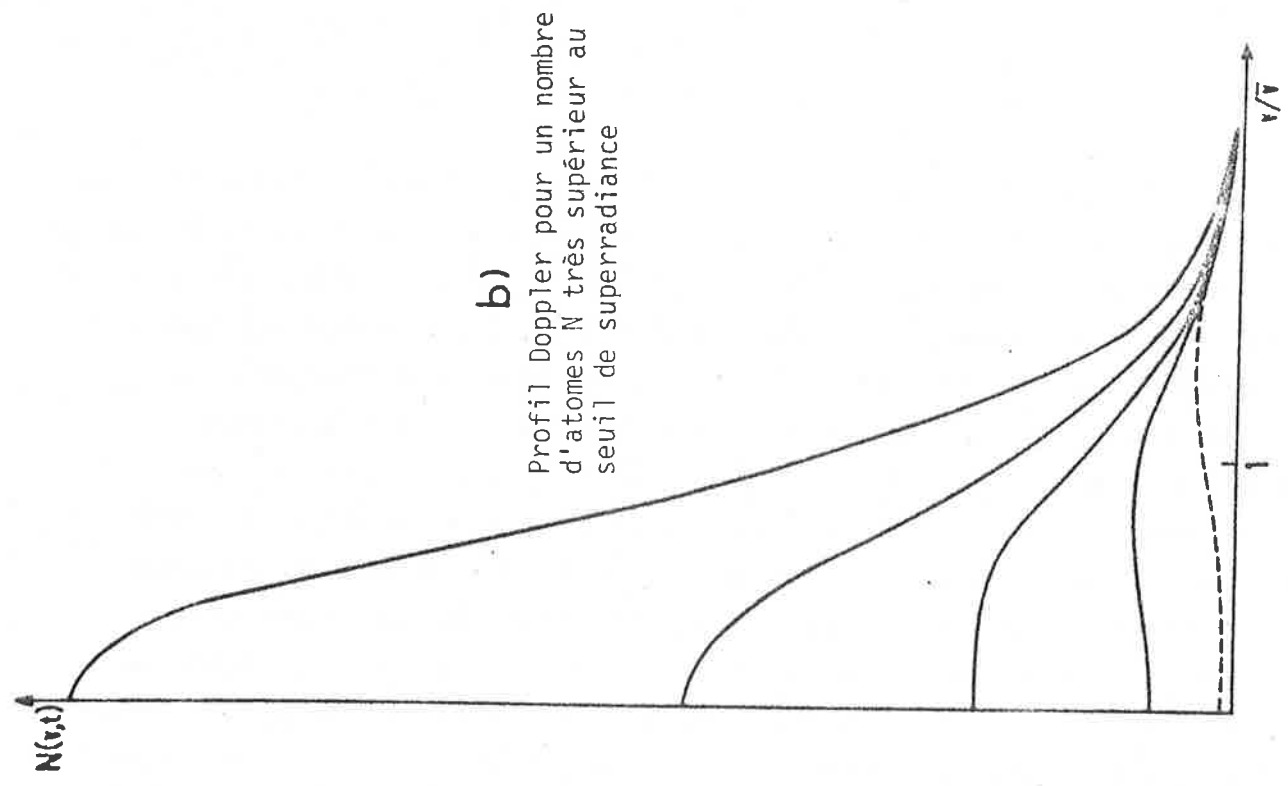
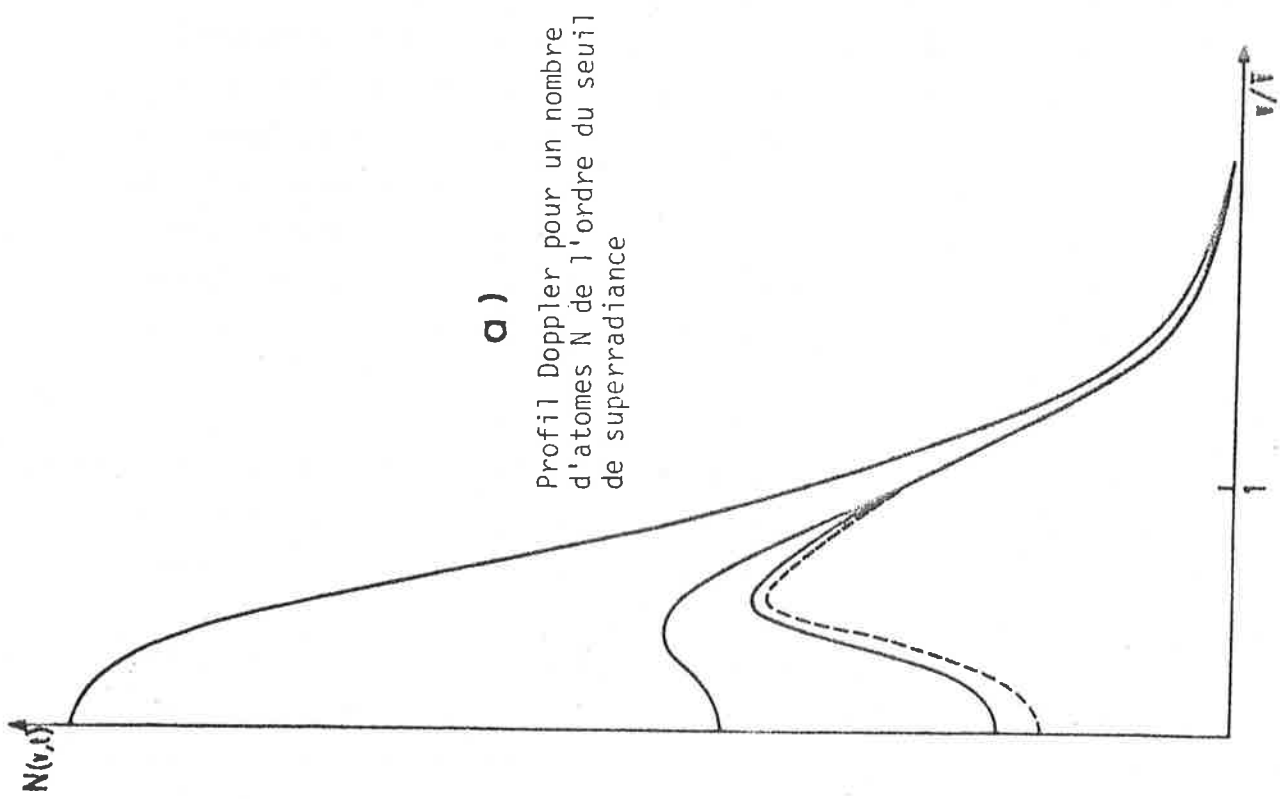


FIGURE IV-7

- Les courbes en trait plein représentent le profil Doppler à $t=0$ et à la fin de l'émission des premiers lobes d'oscillation du pulse superradiant
- Les courbes en trait tiré représentent le profil Doppler à la fin de l'émission

Si on augmente l'excitation (figure IV-7-b), on constate que le renversement est plus tardif, moins prononcé et qu'il reste en pourcentage, à la fin du pulse, beaucoup moins d'atomes que dans le cas a), dans les ailes du profil Doppler : si $T_{SR} \ll T_2^*$, le pulse superradiant a une largeur spectrale suffisante pour recouvrir toute la largeur Doppler et désexciter de façon pratiquement équivalente tous les atomes.

c) Influence de la longueur de la cellule sur les caractéristiques du pulse superradiant

Nous avons étudié l'influence de la longueur L de la cellule sur les pulses superradiants émis à nombre d'atomes N_0 initialement excités constant. Imposer N_0 indépendant de L revient à prendre des densités initiales d'atomes excités inversement proportionnelles à L . Sur la figure IV-8, on a reporté les pulses ainsi obtenus pour une excitation dont la densité correspond à $1,5 \cdot 10^{10}$ atomes/cm³ dans le cas $L = 1$ m, et à $1,5 \cdot 10^{13}$ atomes/cm³ dans le cas $L = 1$ mm, pour des valeurs de L variant de 1 mm à 1 m. T_{SR} vaut alors 0,01 nsec et τ_D 1,5 nsec.

On constate que tant que le temps de propagation L/c est court devant le délai caractéristique du pulse τ_D , lui-même égal à environ $150 T_{SR}$, les caractéristiques du pulse restent sensiblement indépendantes de L .

Ce n'est que pour :

$$\frac{L}{c} > 150 T_{SR} \quad (IV.70)$$

que l'on observe une modification du signal se traduisant essentiellement par une "rupture" du pulse en plusieurs morceaux : on ne peut plus dire alors que tous les atomes émettent de façon coopérative, mais on observe au contraire une superradiance "brisée", différentes parties de la cellule commençant à émettre de façon indépendante.

Remarque :

Si, au lieu d'envisager une excitation instantanée du milieu, on avait une excitation balayée, les résultats précédents seraient différents et le pulse émis dans la direction de l'excitation balayée resterait inchangé même pour $\frac{L}{c} \gg T_{SR}$: en effet, le retard dû à la propagation du pulse superradiant est compensé par celui de la propagation de l'excitation qui s'effectue à la même vitesse : tous les atomes peuvent alors contribuer de façon coopérative à la superradiance même si L est très grand (³⁹).

C. LES EQUATIONS SEMI-CLASSIQUES POUR UN SYSTEME ATOMIQUE A PLUSIEURS NIVEAUX (TRAITEMENT DE LA SUPERRADIANCE EN CASCADE)

Un système atomique réel (par exemple atomes alcalins) possède évidemment plus de deux niveaux ce qui est susceptible d'entraîner deux types d'effets nouveaux par rapport à l'analyse des paragraphes précédents.

i) Chacun des deux états bordant la transition superradiante peut être dégénéré ou quasi-dégénéré, ce qui peut entraîner des effets de polarisation du pulse superradiant (⁴⁴) ou des effets de battement quantique (modulations supplémentaires du pulse superradiant convenablement polarisé aux fréquences de BOHR associées au niveau supérieur ou inférieur). L'étude de ces effets récemment observés sur le césium (⁴⁵) sort du cadre de ce travail. Pour les niveaux du sodium concernés (5s, 4p, 4s), les structures susceptibles de donner lieu à des battements correspondent d'ailleurs à des fréquences soit trop petites (structure hyperfine du niveau s), soit trop grandes (structure fine du niveau p) pour être observées sur un pulse de quelques nanosecondes de large. (On négligera donc l'existence des structures fines et hyperfines des niveaux.).

ii) L'état final d'une transition superradiante donnée peut constituer l'état initial d'une nouvelle transition superradiante en cascade. Différentes transitions peuvent ainsi se trouver couplées entre elles du fait qu'elles partagent un niveau commun (⁴⁶). Nous avons étudié en détail ce couplage dans le cas des trois transitions 5s - 4p, 4p - 4s et 4p - 3d du sodium schématisées sur la figure IV-9. Affectons des indices 1, 2, 3 les champs et polarisations associés de ces trois transitions, de l'indice "prime" les champs et polarisations associés à l'émission superradiante se propageant en sens inverse et appelons $\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D$ les populations des niveaux 5s, 4p, 4s, 3d. On décrit la superradiance en cascade par l'ensemble des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} = -i \frac{k_1}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{G}_1 \rangle_v \\ \frac{\partial \mathcal{E}'_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}'_1}{\partial t} = i \frac{k_1}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{G}'_1 \rangle_v \end{array} \right. \quad \text{(IV.71)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} = -i \frac{k_1}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{G}_1 \rangle_v \\ \frac{\partial \mathcal{E}'_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}'_1}{\partial t} = i \frac{k_1}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{G}'_1 \rangle_v \end{array} \right. \quad \text{(IV.72)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} = -i \frac{k_2}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{P}_2 \rangle_v \\ \frac{\partial \mathcal{E}'_2}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}'_2}{\partial t} = i \frac{k_2}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{P}'_2 \rangle_v \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.73)} \\ \text{(IV.74)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial t} = -i \frac{k_3}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{P}_3 \rangle_v \\ -\frac{\partial \mathcal{E}'_3}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}'_3}{\partial t} = i \frac{k_3}{2\epsilon_0} \langle \mathcal{P}'_3 \rangle_v \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.75)} \\ \text{(IV.76)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} = ik_1 v \mathcal{P}_1 + \frac{ip_1^2}{2\epsilon_0} \mathcal{E}_1 (\rho_A - \rho_B) \\ \frac{\partial \mathcal{P}'_1}{\partial t} = -ik_1 v \mathcal{P}'_1 + \frac{ip_1^2}{2\epsilon_0} \mathcal{E}'_1 (\rho_A - \rho_B) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.77)} \\ \text{(IV.78)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = ik_2 v \mathcal{P}_2 + \frac{ip_2^2}{\hbar} \mathcal{E}_2 (\rho_B - \rho_C) \\ \frac{\partial \mathcal{P}'_2}{\partial t} = -ik_2 v \mathcal{P}'_2 + \frac{ip_2^2}{\hbar} \mathcal{E}'_2 (\rho_B - \rho_C) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.79)} \\ \text{(IV.80)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{P}_3}{\partial t} = ik_3 v \mathcal{P}_3 + \frac{ip_3^2}{\hbar} \mathcal{E}_3 (\rho_B - \rho_D) \\ \frac{\partial \mathcal{P}'_3}{\partial t} = -ik_3 v \mathcal{P}'_3 + \frac{ip_3^2}{\hbar} \mathcal{E}'_3 (\rho_B - \rho_D) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.81)} \\ \text{(IV.82)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\frac{1}{2\hbar} \mathcal{I}_m (\mathcal{E}_1^* \mathcal{P}_1 + \mathcal{E}'_1^* \mathcal{P}'_1) + \Lambda_A(t) \end{array} \right. \quad \text{(IV.83)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_B}{\partial t} = \frac{1}{2\hbar} \mathcal{I}_m (\mathcal{E}_1^* \mathcal{P}_1 + \mathcal{E}'_1^* \mathcal{P}'_1 - \mathcal{E}_2^* \mathcal{P}_2 - \mathcal{E}'_2^* \mathcal{P}'_2 - \mathcal{E}_3^* \mathcal{P}_3 - \mathcal{E}'_3^* \mathcal{P}'_3) \end{array} \right. \quad \text{(IV.84)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_C}{\partial t} = \frac{1}{2\hbar} \mathcal{I}_m (\mathcal{E}_2^* \mathcal{P}_2 + \mathcal{E}'_2^* \mathcal{P}'_2) \end{array} \right. \quad \text{(IV.85)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_D}{\partial t} = \frac{1}{2\hbar} \mathcal{I}_m (\mathcal{E}_3^* \mathcal{P}_3 + \mathcal{E}'_3^* \mathcal{P}'_3) \end{array} \right. \quad \text{(IV.86)}$$

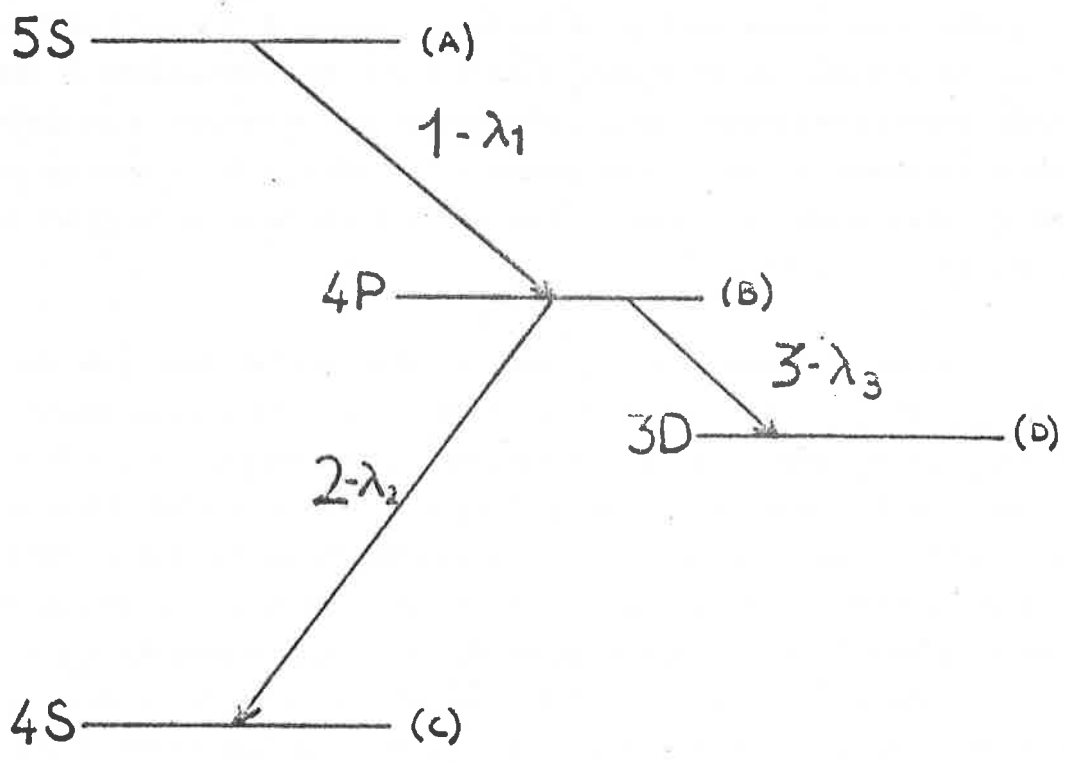


FIGURE IV-9

Dans ces équations, on a négligé les termes de corrélation entre les champs et les polarisations associés à deux transitions différentes. Il s'agit là d'une approximation justifiée comme celle faite en B.1) par le fait que ces corrélations ont une variation spatiale très rapide devant L .

Enfin, nous avons rajouté un terme de pompage $\Lambda_A(t)$ qui tient compte du fait que la préparation de l'état initial n'est pas instantanée et dure un temps fini (expérimentalement, de 2 nanosecondes correspondant à la durée du pulse laser excitateur). Nous avons résolu sur l'ordinateur ce système d'équations. Nous présenterons les résultats de ces calculs dans le chapitre suivant en les comparant à l'expérience.

Indiquons simplement ici de façon qualitative que les temps de superradiance T_{SR1} et T_{SR2} sont du même ordre de grandeur et courts devant T_{SR3} . On s'attend donc a priori à ce que le système superradie en cascade sur les transitions 1 et 2 et que la transition 3 soit "quenchée"; c'est bien ce que donne le calcul à moins que le délai de la superradiance sur les transitions 1 et 2 devienne très court (de l'ordre de la nanoseconde); dans ce cas les pulses superradiants 1 et 2 partent avant que le terme de pompage $\Lambda_A(t)$ soit nul et le système évolue sous les effets combinés de la superradiance en cascade et du pompage. Nous verrons alors que, bien que son temps de superradiance T_{SR} soit plus long, la transition 3 va apparaître et donner lieu à un peuplement rapide du niveau 3D.

Remarque concernant le nombre de FRESNEL du volume émetteur

On a fait intervenir plusieurs fois, au cours de l'exposé des chapitres II, III et IV, le nombre de FRESNEL \mathcal{F} défini pour un échantillon cylindrique de longueur L et de section carrée a^2 par le rapport de l'angle géométrique a/L sur l'angle de diffraction λ/a :

$$\mathcal{F} = \frac{a/L}{\lambda/a} = \frac{a^2}{L\lambda}$$

\mathcal{F} définit le nombre de modes de diffraction dans l'angle d'émission géométrique.

Pour des nombres de FRESNEL plus grands que l'unité ($\mathcal{F} > 1$), l'émission se fait dans plusieurs lobes de diffraction contenus dans l'angle géométrique (voir figure IV-10).

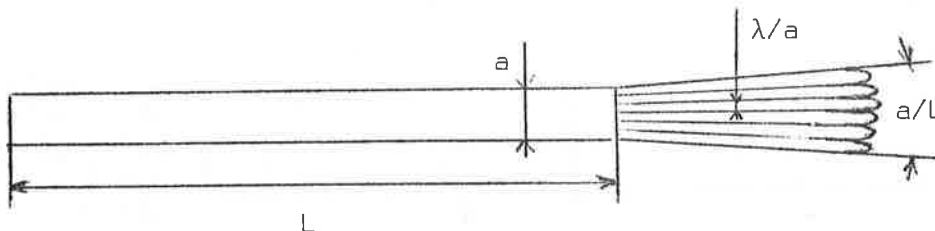


FIGURE IV-10

Pour des nombres de FRESNEL plus petits que l'unité ($\mathcal{F} < 1$), l'angle de diffraction devient plus grand que l'angle géométrique et l'on ne peut plus admettre que l'émission se fait suivant une onde quasi-plane, car les pertes par diffraction deviennent importantes (voir figure IV-11).

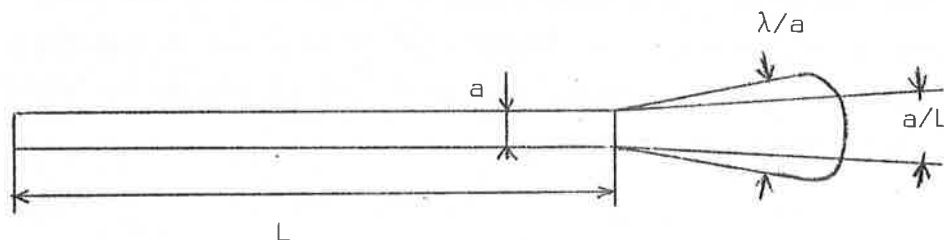


FIGURE IV-11

Pour le cas limite où le nombre de FRESNEL est de l'ordre de 1 ($\mathcal{F} \sim 1$), l'émission superradiante se fait dans un seul mode de diffraction et suivant une onde qui constitue la meilleure approximation d'une onde plane (voir figure IV-12).

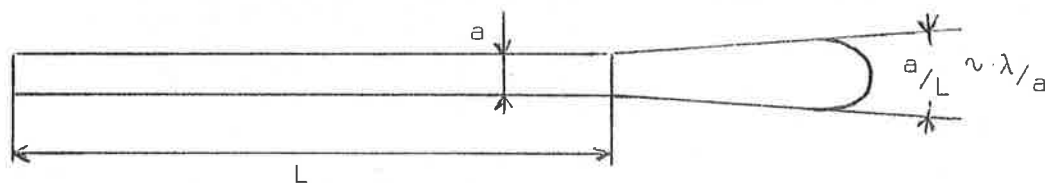


FIGURE IV-12

C'est donc le cas qui se rapproche le plus du modèle théorique simple que nous avons choisi dans ce chapitre, l'émission se faisant alors avec un minimum de perte par diffraction et dans un seul domaine de cohérence.

On peut cependant, en modifiant légèrement les équations semi-classiques, traiter les cas où \mathcal{F} est différent de 1.

Pour $\mathcal{F} < 1$, on doit rajouter un terme de perte de champ ($-k\mathcal{E}$) dans l'équation (IV.4). On supposera que ce terme tient compte correctement des pertes de diffraction.

Pour $\mathcal{F} > 1$, on doit considérer tous les modes de diffraction dans l'angle géométrique, définir une enveloppe \mathcal{E}_i et \mathcal{P}_i pour chacun de ces modes et écrire les équations d'évolution couplées de tous ces modes. En fait, si \mathcal{F} est grand, on peut supposer que les modes de diffraction différents ne sont corrélés entre eux que par l'intermédiaire de l'équation d'évolution des populations (IV.3) -une telle hypothèse se justifie de la même façon que lorsque l'on néglige les corrélations entre les modes axiaux se propageant en direction opposée (cf. les équations IV.64 à 69)-. Tous ces modes évoluent alors de façon identique : on peut se ramener à l'étude d'un seul et pour cela réécrire pour l'un des modes les équations semi-classiques (IV.2), (IV.3) et (IV.4) en remplaçant simplement dans l'équation d'évolution des populations (IV.3) $\mathcal{E}^* \mathcal{P}$ par $\mathcal{F} \times \mathcal{E}^* \mathcal{P}$. L'évolution du système décrite par ces nouvelles équations est très peu modifiée par rapport aux résultats établis dans le cas d'un seul mode (\mathcal{F} n'intervient en fait que dans le logarithme donnant le délai ou la largeur du pulse émis).

CHAPITRE V

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA SUPERRADIANCE EN
CASCADE DANS LE SODIUM

Nous abordons dans ce chapitre la partie expérimentale de ce travail avec la description des expériences d'émission superradiante que nous avons réalisées et leur interprétation. Ces expériences ont été rapportées dans une lettre à Physical Review Letters (³⁵) où est résumée l'information contenue dans ce chapitre.

Nous commencerons par un exposé détaillé des différentes parties du montage (§ A), puis par une description des expériences elles-mêmes (§ B) pour finir par donner l'interprétation des résultats obtenus (§ C).

A. LE MONTAGE EXPERIMENTAL

Comme nous l'avons déjà dit au chapitre I, cette série d'expériences a été entreprise à la suite d'une étude sur les battements quantiques dans les états excités du sodium (⁹). Une grande partie du montage étant décrit dans la thèse de Michel GROSS (¹⁰), nous insisterons surtout sur les éléments nouveaux et nous nous contenterons de rappeler brièvement les autres.

1) Description schématique de l'expérience

Le principe de l'expérience est schématisé sur la figure V-1. Les atomes de sodium sont excités en échelon du niveau $3S\frac{1}{2}$ à $3P\frac{3}{2}$ par une impulsion du laser B_1 , puis, avant qu'ils n'aient eu le temps de retourner au fondamental par émission spontanée, du niveau $3P\frac{3}{2}$ à $5S\frac{1}{2}$ par une impulsion du laser B_2 synchronisé par rapport à la première de même direction et de sens opposé. On détecte l'émission de lumière superradiante dans l'axe d'excitation. Pour cela, on envoie dans la cellule l'un des faisceaux laser à l'aide d'un miroir semi-transparent pour la longueur d'onde du pulse superradiant et non pour celles des lasers et

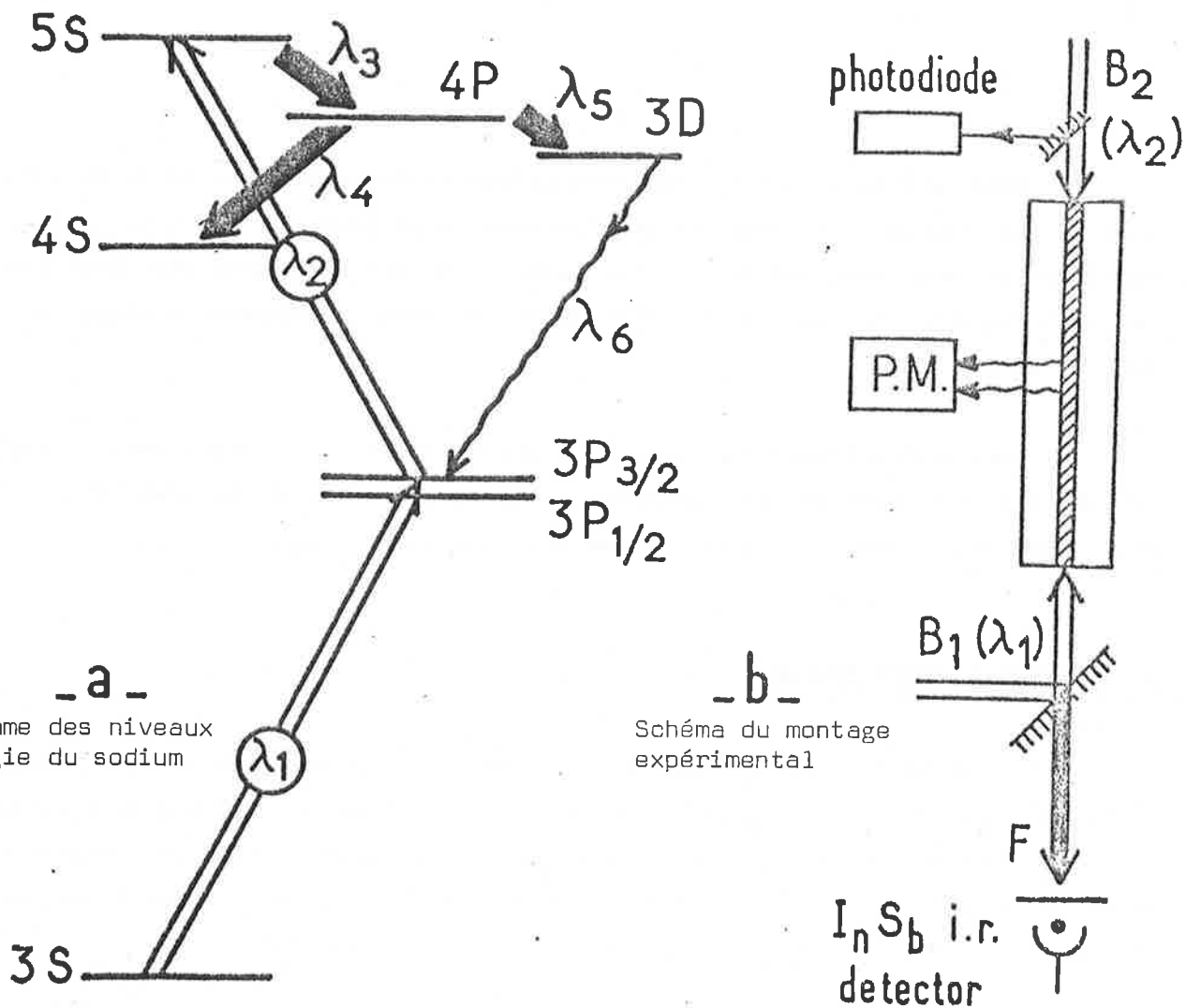


FIGURE V-1

- Flèches en trait double : transitions de pompage $\lambda_1 = 0,5890 \mu$ et $\lambda_2 = 0,6160 \mu$
- Flèches en trait épais : transitions superradiantes $\lambda_3 = 3,41 \mu$, $\lambda_4 = 2,21 \mu$ et $\lambda_5 = 9,10 \mu$ (les transitions 5S-4P et 4P-4S sont détectées dans l'axe de l'excitation par la cellule photovoltaïque InSb).
- Flèches en trait ondulé : transition à $\lambda_6 = 0,8191 \mu$ détectée perpendiculairement par un photomultiplicateur.

l'on place derrière ce miroir, dans l'axe de l'excitation, une cellule photovoltaïque infrarouge In-Sb. On intercale également entre le miroir et la cellule photovoltaïque un filtre qui permet d'isoler les différentes transitions superradiant en cascade. Le signal reçu par la cellule photovoltaïque est ensuite analysé par une chaîne de détection rapide.

2) L'excitation optique

La source optique est un élément important de l'expérience. Elle doit tout d'abord être assez intense pour exciter efficacement les atomes et surtout fournir des impulsions plus courtes que le temps de délai des pulses superradiants. Nous avons utilisé pour cela des lasers à colorants pulsés de grande largeur de bande. Ces lasers ont été décrits en détail dans la thèse de Michel GROSS ⁽¹⁰⁾. Ils sont pompés par un laser à azote modèle UV1000 de Molelectron, dont on a séparé en deux le faisceau UV. On utilise comme colorants de la rhodamine 6G à 10^{-3} mole/l pour exciter la transition $3S^{1/2}-3P^{3/2}$ à 5890 Å (jaune) et de la rhodamine B pour exciter la transition $3P^{3/2}-5S^{1/2}$ à 6160 Å (rouge orangé).

Caractéristiques des pulses lasers ainsi obtenus

La variation de l'intensité lumineuse émise en fonction du temps a été obtenue en détectant les impulsions lasers B_1 et B_2 à l'aide d'une cellule photodiode ultra-rapide (photodiode I.T.L. type HSD50, temps de montée : 100 ps) dont le signal est enregistré par l'analyseur de transitoire R7912 décrit plus loin. Nous obtenons des impulsions de 2 à 3 ns. La puissance crête émise est d'environ 10 Kwatts, ce qui est suffisant pour saturer les deux transitions aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . Ainsi environ un quart du nombre total des atomes du volume actif est préparé dans l'état $5S^{1/2}$ (la puissance des lasers a été mesurée à l'aide de la photodiode ultra-rapide I.T.L. HSD50 préalablement étalonnée). Enfin, la largeur spectrale (mesurée à l'aide d'un monochromateur Jobin-Yvon THR2

d'une résolution de 1 GHz environ) est de l'ordre de 15 GHz. L'ensemble du dispositif d'excitation est placé dans une cage de Faraday. Cette précaution est indispensable pour ne pas perturber complètement les signaux superradiants toujours très faibles, par le bruit électrique rayonné par le laser à azote.

3) Cellule de résonance

a) Forme et dimension de la cellule

Nous avons utilisé dans ces expériences deux types de cellule. La première, de longueur $L = 140$ mm et de diamètre $d = 30$ mm, est en pyrex. La seconde, de longueur $L = 30$ mm et de diamètre $d = 30$ mm, est en verre de Corning 1720. Les deux faisceaux laser se propagent en sens inverse suivant l'axe de la cellule et excitent ainsi un échantillon d'atomes contenu dans un cylindre allongé de longueur L et dont la section vaut environ 2 à 3 mm². Le nombre de FRESNEL correspondant vaut $\eta \approx 5$ pour la première cellule et $\eta \approx 20$ pour la seconde.

b) Température et pression du sodium

La connaissance de la température et de la pression de la vapeur de sodium est un élément important pour l'interprétation des résultats obtenus. En effet, il en dépend une connaissance précise de la densité d'atomes excités dans la cellule. La figure V-2 nous montre sur une échelle semi-logarithmique la densité de vapeur saturante du sodium en fonction de la température. On voit qu'à une variation de quelques degrés, il peut correspondre un facteur deux sur la densité.

Une estimation précise du nombre d'atomes excités exigeait de connaître et de stabiliser la température de la cellule à 2 ou 3 degrés près. A cette fin, la cellule est placée dans un four taillé dans un bloc de laiton qui permet de réaliser une bonne homogénéité de température; la température du point froid est réglée à part et détermine la densité d'atomes de sodium dans la cellule. Un dispositif électronique stabilise la température à 2 ou 3 degrés. On maintient enfin les températures du queusot et du four peu différentes (en imposant cependant que celle du queusot soit toujours plus basse pour éviter de contaminer la cellule).

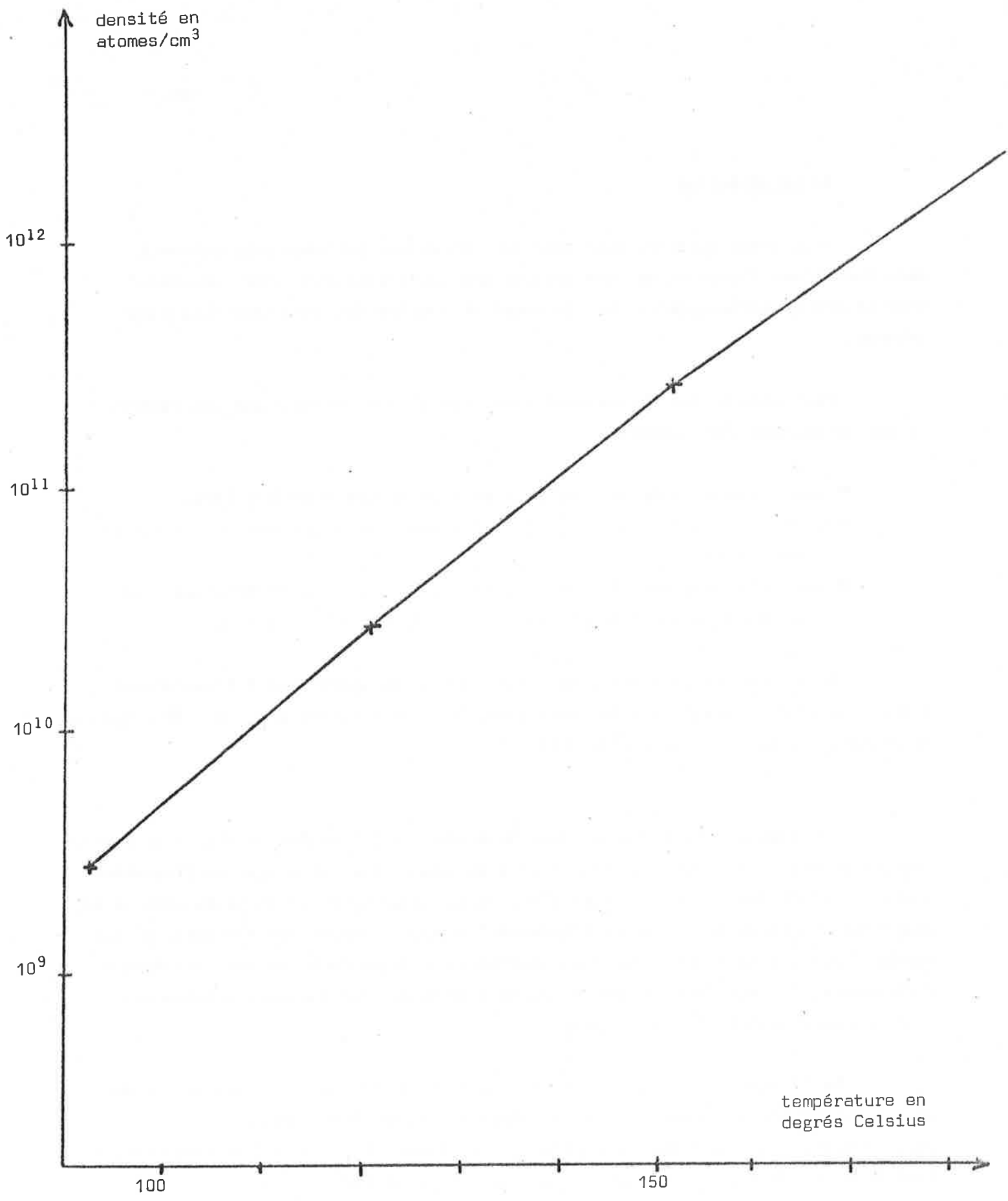


FIGURE V-2
Echelle de température linéaire
Echelle de densité logarithmique

4) La détection

Nous avons utilisé, pour détecter les pulses lumineux superradiants émis dans l'axe d'excitation, une cellule photovoltaïque InSb (SAT) sensible dans le proche infrarouge et dont le temps de réponse est inférieur à la nanoseconde.

Pour séparer les différentes transitions, nous avons placé des filtres devant la cellule photovoltaïque :

- pour la transition $5s - 4p$ ($3,4 \mu$) : un filtre interférentiel;
- pour la transition $5p - 4s$ ($2,2 \mu$) : une lame de germanium + un filtre Schott RG665;
- pour la transition $4P - 3D$ ($1,2 \mu$) : une cuve à eau d'épaisseur 1 cm + un filtre Kodak C88 qui coupe l'émission $3D - 3P$ à $0,82 \mu$.

Pour détecter la fluorescence émise perpendiculairement à l'axe d'excitation, nous avons utilisé pour les transitions $5S - 3p$ à $0,6160 \mu$ et $3D - 3P$ à $0,82 \mu$ un photomultiplicateur Hamamatsu R666.

Les signaux ainsi obtenus sont analysés par une chaîne de détection rapide. Nous utilisons un analyseur de transitoire en temps réel. Il s'agit du "Transient Digitalizer" de Tektronix R7912. Le R7912 permet d'enregistrer en temps réel le signal transitoire et de conserver l'information pour un moyennage éventuel. Un tel appareil est indispensable pour des expériences de superradiance avec des délais très courts. Il peut être également couplé à un moyenneur que nous utiliserons pour analyser de très faibles signaux.

Le "Transient Digitalizer" peut être utilisé en bicanal, ce qui permet d'enregistrer sur une même trace deux signaux pris en même temps. Nous l'utiliserons ainsi pour enregistrer simultanément le pulse laser exciteur (qui fournit l'origine des temps) et le pulse superradiant.

B. DESCRIPTION ET RESULTATS DES EXPERIENCES

1) Procédure expérimentale

Avant de donner des résultats expérimentaux, nous allons brièvement expliquer comment ils ont été obtenus en utilisant le montage décrit au § A.

Pour réaliser l'excitation, il nous faut accorder simultanément à résonance les deux faisceaux lasers. Pour cela, nous accordons le premier laser (jaune) à la fréquence 5890 \AA en repérant la lumière de fluorescence du niveau $3P^{3/2}$ à l'aide d'un photomultiplicateur placé perpendiculairement à l'axe de l'excitation (cette lumière de fluorescence est visible à l'oeil). Nous optimisons le signal, puis alignons le deuxième laser dans l'axe du premier. Pour mettre ce laser à résonance à 6160 \AA , nous détectons la lumière de fluorescence soit du niveau $5S^{1/2}$ vers le niveau $3P$, soit celle du niveau $3D$ vers le niveau $3P$. En optimisant le signal, on sature les deux transitions.

Lorsque cette opération est terminée, on aligne la cellule photovoltaïque dans l'axe de l'excitation derrière le miroir perméable à la longueur d'onde du pulse superradiant. La surface de détection de la cellule InSb étant très petite ($1/100 \text{ mm}^2$), on focalise le pulse sur cette surface avec une lentille en quartz placée après le filtre séparateur.

Le déclenchement de l'enregistrement se fait par l'intermédiaire de la photodiode ultrarapide I.T.L. type HSD50 sur laquelle on envoie le pulse laser excitateur jaune ou rouge. Ce pulse est d'ailleurs enregistré avec le signal superradiant (voir plus haut). On repère ainsi sur chaque courbe l'origine des temps, qu'il faut corriger de la différence des temps de propagation des signaux dans les câbles de connexion associés aux deux détecteurs. Pour cela, on enregistre préalablement à chaque série de mesures le pulse laser de déclenchement détecté simultanément sur la photodiode et sur la cellule photovoltaïque InSb. On obtient deux signaux décalés de la quantité Δt qu'il faut ajouter au temps de détection du pulse par la photodiode pour obtenir l'origine des temps du phénomène superradiant.

2) Observation des signaux de superradiance du sodium

Nous avons observé des signaux lumineux superradiants émis à partir du niveau $5S\frac{1}{2}$ (voir fig. V-1-a) pour le schéma des niveaux).

A une pression de sodium comprise entre 10^{-6} et 10^{-5} torr ($n \sim 10^{10}$ atomes/cm³), nous avons détecté dans l'axe de l'excitation deux pulses infrarouges émis de façon très directive, longs de quelques nanosecondes et dont les longueurs d'onde (mesurées par un réseau de 50,8 traits par mm et blazé à 18 μ) sont 3,41 μ et 2,21 μ , ce qui correspond aux transitions 5S - 4P et 4P - 4S. Des filtres adéquats nous permettent de séparer ces deux transitions et de les étudier indépendamment. Le pulse à 3,41 μ est émis avec un retard de quelques nanosecondes par rapport au pulse laser B₂. Le retard observé le plus long pour cette transition est de 7 ns (la trace étant prise en un seul coup et non pas moyennée). L'observation d'éventuels délais plus longs est rendue impossible car le pulse alors émis est noyé dans le bruit de la détection. Le pulse à 2,21 μ est émis avec un retard de quelques nanosecondes par rapport au pulse à 3,41 μ (le retard observé le plus long par rapport au pulse laser B₂ étant de 12 ou 13 ns). La figure V-3 montre le pulse laser excitateur B₂ (trace a) et des enregistrements typiques de pulses retardés à 3,41 μ (trace b) et à 2,21 μ (trace c). Deux pulses à 3,41 μ ont été représentés sur la trace b, le premier présente des oscillations très nettes.

Nous avons étudié systématiquement les caractéristiques des pulses émis à 3,41 μ : variation de la hauteur et du retard des pulses en fonction de la densité d'atomes excités initialement dans la cellule. Cette étude est rendue difficile du fait que la superradiance est un phénomène instable, très sensible à de faibles fluctuations dans le pompage des atomes ou une faible variation de la température. Nous avons fait deux sortes d'étude différentes et complémentaires.

■ a. Dans une première série d'expériences, nous avons enregistré une série de pulses avec les délais et les intensités distribués de façon aléatoire et nous avons porté sur une courbe l'intensité h en fonction du délai τ_D

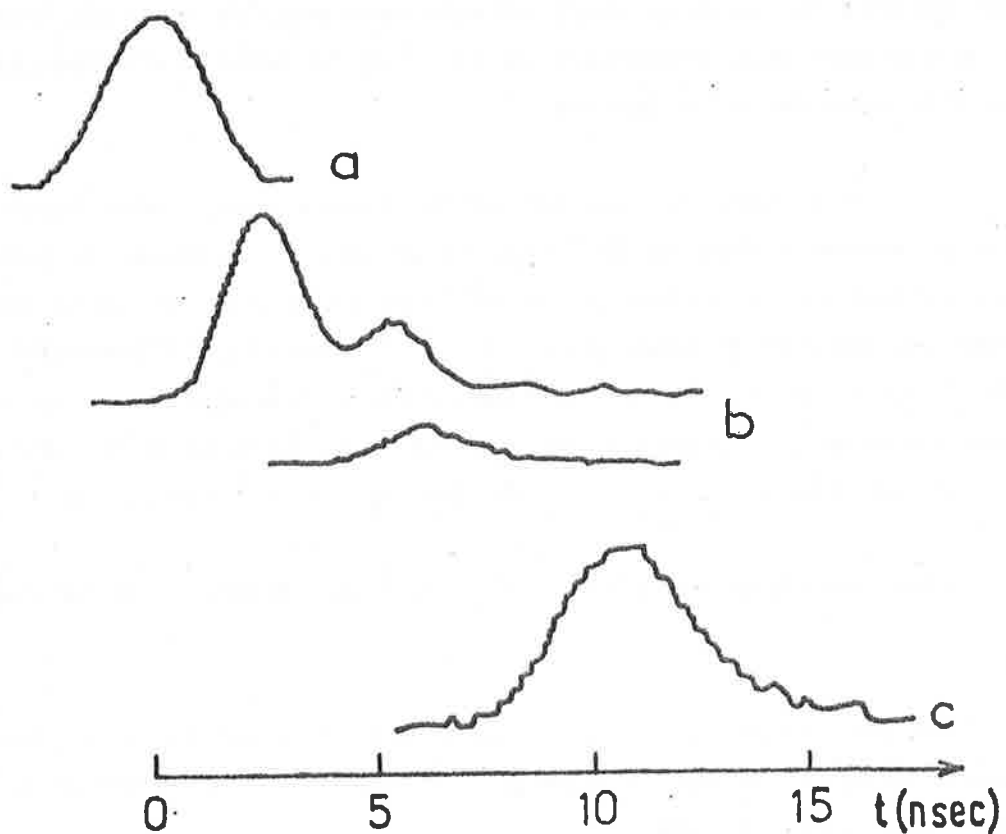


FIGURE V-3

Variation temporelle des pulses superradiants détectée par la cellule photovoltaïque InSb.

Trace a : pulse excitateur B_2 ($0,6160 \mu$) donnant l'origine des temps

Trace b : pulse superradiant à $3,41 \mu$ pour deux taux d'excitation différents

Trace c : pulse superradiant à $2,21 \mu$ pour un même taux d'excitation que le second pulse superradiant à $3,41 \mu$.

pour chaque pulse (voir figure V-4). Nous avons ainsi une série de points expérimentaux qui montrent que h varie suivant une loi approximative τ_D^{-2} (courbe en trait plein). Ce résultat était attendu puisque l'on a vu que l'intensité des pulses devait être proportionnelle au carré de la densité d'atomes excités et le délai à l'inverse de cette densité.

■ b. Dans une seconde série d'expériences, nous avons choisi une pression de sodium d'environ 10^{-5} torr et désaturé le pompage du pulse laser B_2 avec des filtres correspondant à une atténuation connue. De cette manière, nous préparons une densité d'atomes excités proportionnelle à l'intensité I du pulse laser B_2 . Pour éliminer les fluctuations dues au pompage, nous moyennons quelques centaines de coups les pulses superradiants. Nous portons alors les valeurs moyennes de h en fonction de I^2 et de τ_D en fonction de I^{-1} (voir figure V-5).

Nous vérifions les lois en n^2 et n^{-1} de variations respectives de h et τ_D .

Ces caractéristiques constituent, avec les oscillations observées sur les pulses émis et prédites par FELD et al. (8), une mise en évidence du caractère superradiant des pulses lumineux.

Nous avons enfin essayé d'observer la suite de l'émission en cascade, c'est-à-dire la transition 4S - 3P (voir figure V-1-a). Nous avons pu l'observer à la longueur d'onde $1,15 \mu$, sans pouvoir mettre en évidence des délais à cette longueur d'onde, l'observation se faisant pour des densités de sodium très élevées, pour lesquelles les délais de superradiance sont plus courts que le temps de pompage.

REMARQUE :

L'excitation est-elle transversale ou balayée ?

Le pulse laser excitateur B se propage le long de l'échantillon, si bien que l'on peut a priori considérer que l'excitation initiale est, dans nos expériences, balayée et non pas transversale comme nous l'avons assumé dans les calculs théoriques du chapitre IV. En fait, il ne faut pas oublier que l'excitation dure

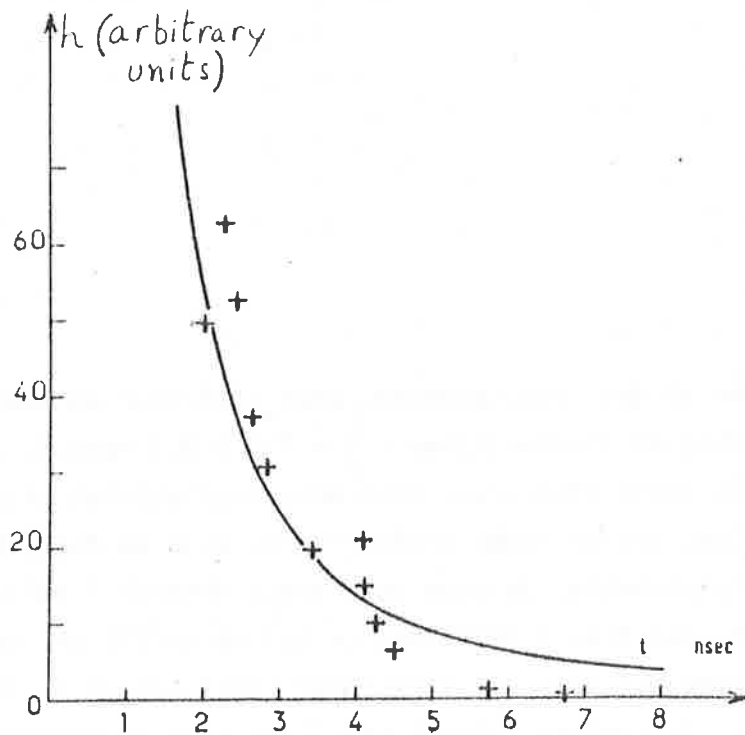


FIGURE V-4 : Variation de la hauteur h des pulses superradiant (à $3,41 \mu$) en fonction de leur délai τ_D . Les croix sont des valeurs expérimentales. La courbe tracée en trait plein correspond à une fonction telle que h soit proportionnel à l'inverse du carré du délai τ_D .

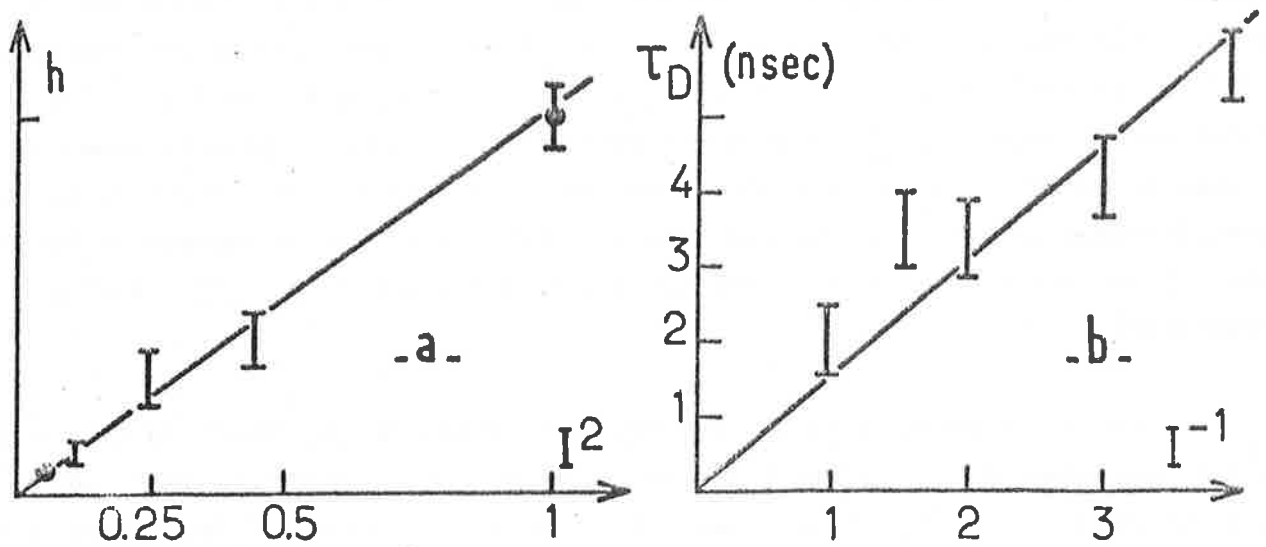


FIGURE V-5 : a) hauteur h du pulse superradiant à $3,41 \mu$ en fonction du carré I^2 de l'intensité du pulse excitateur B_2
 b) délai τ_D du pulse superradiant à $3,41 \mu$ en fonction de l'inverse I^{-1} de l'intensité du pulse excitateur B_2

un temps de l'ordre de deux nanosecondes, bien supérieur au temps de propagation de la lumière le long de l'échantillon ($\frac{L}{c} \approx 0,1$ à $0,3$ nsec.). Les effets liés à la propagation du pulse excitateur sont donc négligeables et on peut tout aussi bien considérer l'excitation comme transversale, mais de durée finie. C'est bien ce que confirme l'expérience, puisque nous avons observé l'émission superradiante indifféremment dans les deux directions, ce qui ne serait pas le cas si l'excitation était produite par un pulse infiniment court balayé le long de l'échantillon à la vitesse de la lumière, auquel cas l'émission se produirait préférentiellement dans le sens du pulse excitateur (voir chapitre IV).

3) Observation indirecte de la superradiance sur la transition 4P - 3D

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre I, nous avons également observé un phénomène de fluorescence anormale sur la transition 3D - 3P (voir figure I-5). C'est d'ailleurs ce phénomène qui nous a conduit à toute cette étude. On observe en effet, lorsque la densité n des atomes excités est supérieure à $5 \cdot 10^{10}$ atomes/cm³, l'apparition d'un signal de fluorescence latérale à $0,82 \mu$. Ce signal est de plus en plus important et émis avec un retard de plus en plus court lorsque n augmente. La longueur d'onde est isolée en intercalant devant le photomultiplicateur un filtre infrarouge Schott RG 665. La courbe de réponse en longueur d'onde du PM et du filtre font que seule la transition 3D - 3P à $0,82 \mu$ est enregistrée.

Cette fluorescence "anormale" met en évidence le peuplement du niveau 3D. Un tel peuplement ne peut s'expliquer par l'émission spontanée "normale", seulement 0,1% des atomes excités dans le niveau 5S retombant sur 3D par le jeu normal des rapports de branchement. Il faut donc admettre que le niveau 3D est peuplé par un pulse superradiant émis sur la transition 4P - 3D. Les caractéristiques de la lumière de fluorescence (délai décroissant lorsque n augmente) accèdent cette hypothèse.

En plus de l'émission superradiante en cascade sur 5S - 4P - 4S, on observe ainsi de l'émission superradiante sur la cascade 5S - 4P - 3D.

Nous avons également essayé de voir s'il existait un pulse superradiant émis à partir du niveau 3D, sur la transition 3D - 3P, à 0,82 μ dans l'axe d'excitation. Nous avons effectivement pu observer une telle émission directive, mais là encore, comme pour le pulse à 1,15 μ , pour une densité trop grande pour permettre l'étude de délais éventuels.

C. INTERPRETATION DES RESULTATS. MECANISME DE COMPETITION ENTRE DEUX TRANSITIONS PARTAGEANT LE MÊME NIVEAU SUPERIEUR

Les ordres de grandeur des densités d'atomes excités (voir Tableau I) nous indiquent que nous sommes dans le cas d'un régime non-markovien. On peut donc utiliser les équations semi-classiques du chapitre IV pour interpréter nos expériences. Nous indiquons dans le tableau I le temps caractéristique T_2^* , le temps de superradiance T_{SR} correspondant à une densité typique de 10^{10} atomes/cm³, et la densité seuil de superradiance pour chacune des transitions concernées. Nous constatons que les ordres de grandeurs des seuils obtenus sont compatibles avec les densités évaluées expérimentalement (10^{10} à 10^{11} atomes excités/cm³).

Les temps de superradiance sont du même ordre de grandeur sur les transitions 5S - 4P et 4P - 4S, mais quatre à cinq fois plus longs sur la transition 4P - 3D. On s'attend donc a priori à observer la cascade 5S - 4P - 4S et non pas la cascade 5S - 4P - 3D qui doit être entièrement "quenchée" par l'émission plus rapide sur l'autre cascade : l'analyse simple du chapitre IV nous a montré que si l'on est bien au-dessus du seuil, la superradiance vide en effet quasi complètement le niveau supérieur de la transition et il ne doit ainsi plus rester assez d'atomes pour permettre la superradiance sur la transition la moins favorisée. L'expérience nous montre que cette analyse qualitative n'est pas toujours exacte : l'observation

T A B L E A U I

Transition	λ (en μ)	T_2^* (en ns)	T_{SR} (en ns)	n_{seuil} (atomes/cm ³)
5S-4P _{3/2} } 5S-4P _{1/2} }	3,41	0,56	0,13	$3 \cdot 10^9$
			0,27	$5 \cdot 10^9$
4P-4S	2,21	0,36	0,17	$5 \cdot 10^9$
4P-3D _{5/2} } 4P-3D _{3/2} }	9,10	1,53	0,77	$5 \cdot 10^9$
			1,13	$7 \cdot 10^{10}$
4P-3P _{1/2}	1,14	0,2	0,53	$3 \cdot 10^{10}$
3D-3P _{1/2}	0,82	0,13	0,53	$4 \cdot 10^{10}$
5S-3P _{1/2}	0,615	0,1	6,66	$6 \cdot 10^{11}$

Différents paramètres des transitions superradiantes possibles à partir du niveau excité 5S.

- T_2^* temps de déphasage Doppler pour la transition
- T_{SR} temps caractéristique de l'émission superradiante, est donné pour une densité de 10^{10} atomes/cm³ et une longueur de la cellule $L = 14$ cm
- n_{seuil} est la densité du seuil de superradiance pour la transition tel que $T_{SR} \sim T_2^*$

par fluorescence du peuplement rapide du niveau 3D prouve qu'il coexiste également une cascade 5S - 4P - 3D pour $n \gtrsim 5 \cdot 10^{10}$ atomes/cm³. Afin d'interpréter l'existence de cette cascade, nous avons résolu le système d'équation à quatre niveaux établi au paragraphe IV-C, pour des valeurs croissantes de l'inversion atomique initiale. On a supposé pour ces calculs que l'inversion est obtenue par un pompage du niveau initial de durée $\Delta T = 2$ nsec., de façon à tenir compte de la durée finie de l'excitation laser.

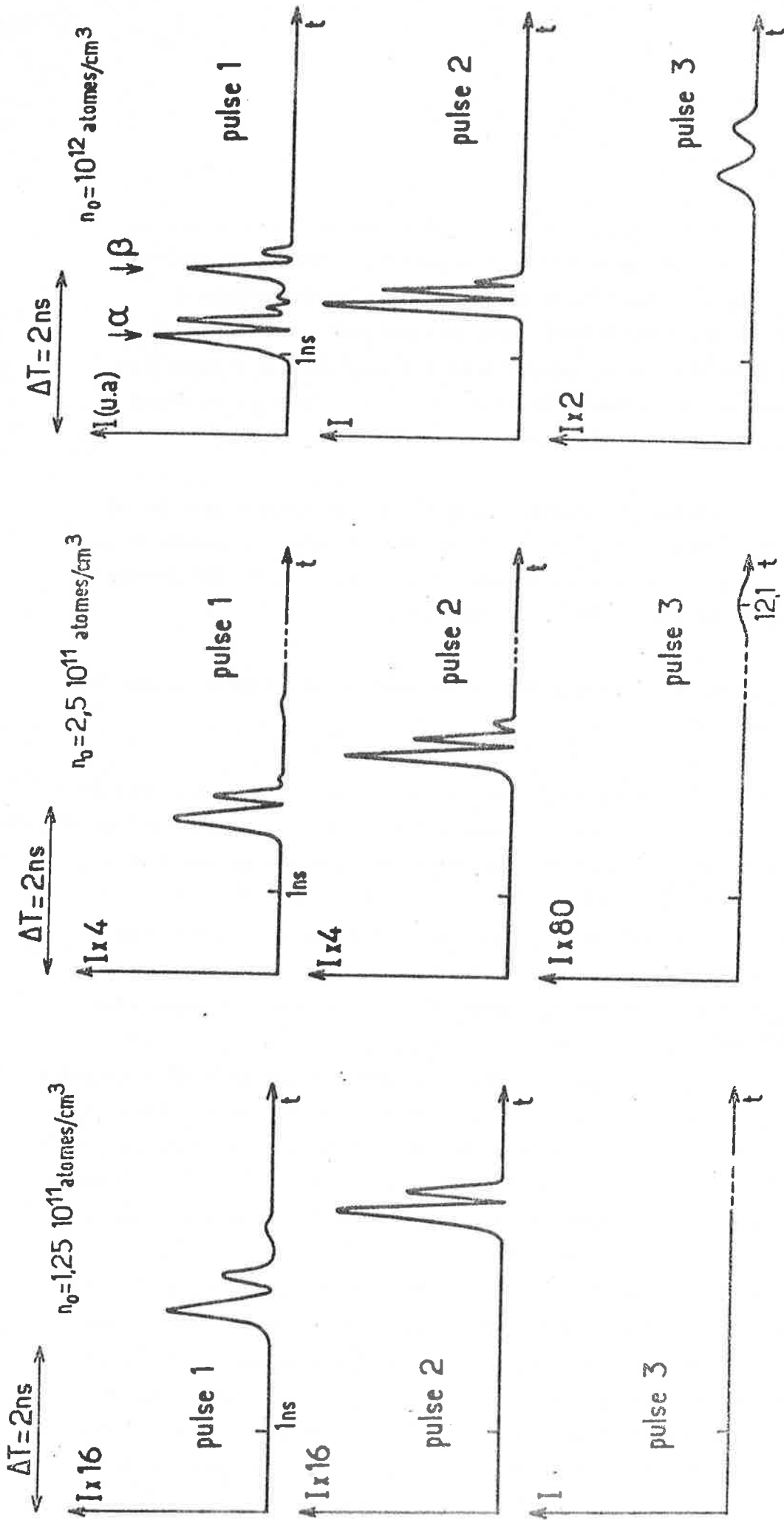
La figure V-6 montre les pulses obtenus sur les transitions 5S- 4P à 3,41 μ (pulse 1), 4P - 4S à 2,21 μ (pulse 2) et 4P - 3D à 9,1 μ (pulse 3) pour des densités d'atomes excités en fin de pompage égales à $n = 1,25 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³, $n = 2,5 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³ et $n = 10^{12}$ atomes/cm³.

Deux régimes distincts peuvent être clairement distingués à la simple observation de ces courbes.

- i) Pour $N < N_c \sim 2 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³, seules les transitions 1 et 2 superradiant et 3 n'apparaît pas conformément à l'analyse qualitative faite plus haut (fig.V-6a)
- ii) Pour $N > N_c$, on voit par contre apparaître en plus des pulses 1 et 2 le pulse 3 correspondant à la transition 4P - 3D (fig. V-6-b, c).

Ces résultats numériques sont en bon accord qualitatif avec l'observation expérimentale, bien que le seuil d'apparition du pulse 3 soit deux ou trois fois supérieur au seuil observé expérimentalement. Il reste à interpréter physiquement ces résultats.

Tant que $N < N_c$, on constate (figure V-6-a) que les pulses 1 et 2 apparaissent bien après la phase de pompage et sont eux-mêmes bien résolus en temps. On est alors dans une situation se rapprochant des conditions idéales d'un pompage instantané du niveau supérieur suivi de la superradiance sur la transition 1, elle-même suivie de la superradiance sur la transition 2, ces transitions se succédant sans recouvrement dans le temps. On peut alors analyser l'évolution du système à l'aide des résultats simples concernant la superradiance d'un système à deux niveaux : à l'issue du pulse 1, une très grande proportion des atomes se trouvent transférés dans le niveau 4P puis, à l'issue du pulse 2 ces atomes, dans leur très grande majorité, se retrouvent dans le niveau 4S. Il reste alors trop peu d'atomes dans le niveau intermédiaire 4P pour que la superradiance sur la transition 4P - 3D puisse apparaître. La figure V-7-a confirme cette analyse en



-a-

-b-

-c-

FIGURE V-6

Pulses superradiants pour les transitions 5S-4P (1), 4P-4S (2) et 4P-3D (3)
 $\Delta T = 2$ ns : temps de pompage du niveau 5S
 L'intensité I est portée en ordonnée avec une unité arbitraire
 a, b et c : courbes tracées pour différents taux d'excitation $n = 1,25 \cdot 10^{11}$ atoms/cm³,
 $n = 5 \cdot 10^{11}$ atoms/cm³ et $n = 10^{12}$ atoms/cm³.

TEMPS DE POMPAGE : $\Delta T = 2\text{ ns}$

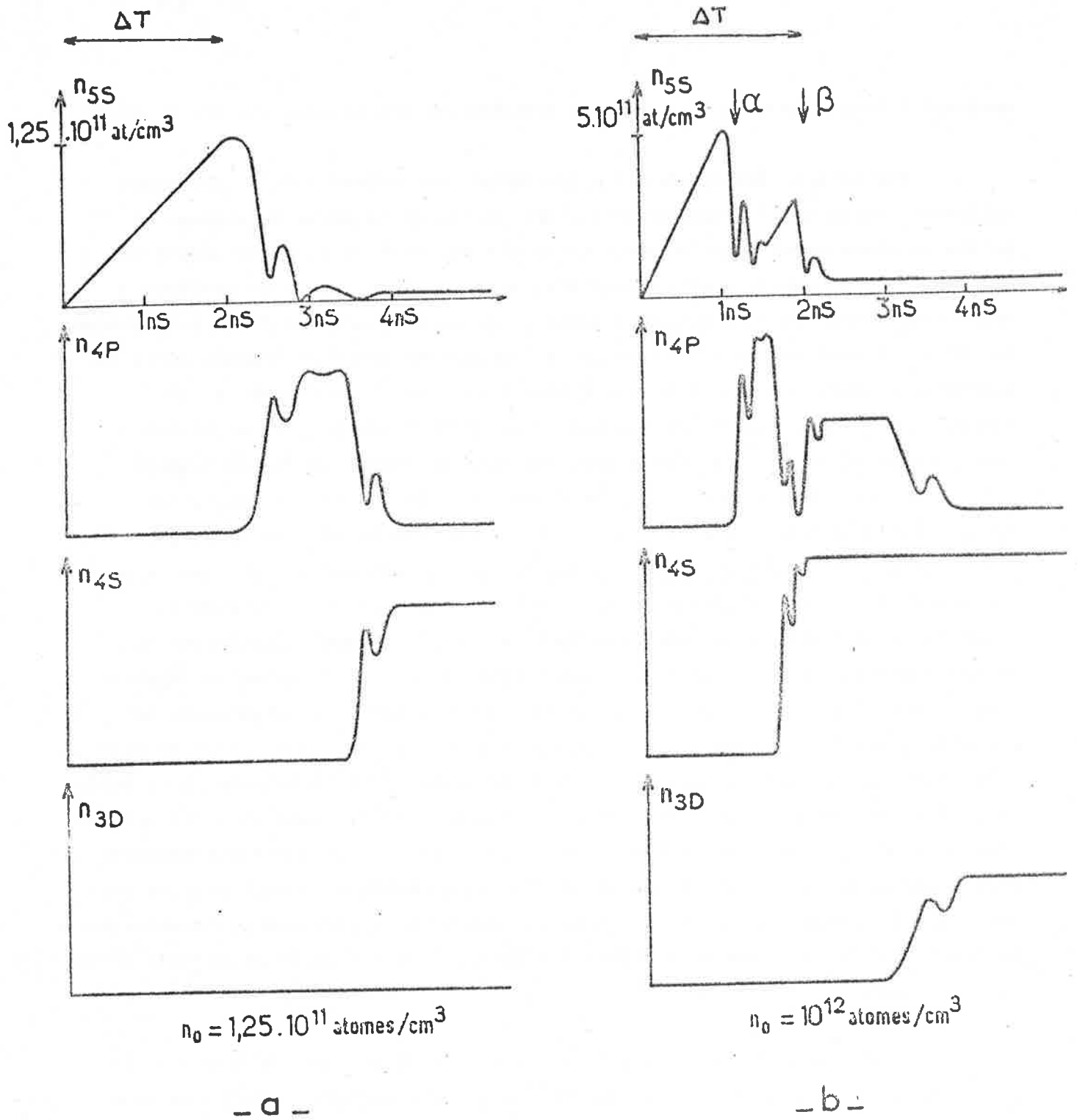


FIGURE V-7

Variation en fonction du temps des populations 5S, 4P, 4S et 3D du sodium au cours de l'émission superradiante en cascade pour des taux d'excitation $n = 1,25 \cdot 10^{11}$ atomes/cm³ (a) et $n = 10^{12}$ atomes/cm³ (b)

montrant l'évolution dans le temps des populations des niveaux 5S, 4P, 4S et 3D

Par contre, lorsque $N > N_c$, les délais des pulses 1 et 2 deviennent tellement courts qu'ils apparaissent avant la fin de la phase de pompage et qu'ils se chevauchent dans le temps (voir figure V-6-c). La situation devient alors plus complexe et cesse d'être analysable en termes de systèmes à deux niveaux superradiant successivement : les populations des différents niveaux 5S, 4P et 4S évoluent sous l'effet de la compétition entre le pompage et la superradiance simultanée sur les deux transitions 1 et 2. La figure V-7-b montre que la population du niveau supérieur 5S commence à se vider brutalement lorsque le seuil de superradiance est atteint, avant la fin du pompage (flèche α). Le pompage continuant, le niveau 5S voit ensuite sa population réaugmenter pour superradiant à nouveau plus tard (flèche β) : on assiste ainsi à un régime d'oscillations de relaxation qui se traduit par le fait que le pulse superradiant 1 présente plusieurs pics dont l'origine est très différente d'oscillations "cohérentes" obtenues dans le cas d'un pompage instantané du niveau supérieur. En même temps, la population du niveau 4P évolue en "opposition de phase" avec celle du niveau 5S : elle passe par un maximum après le pic α du pulse 1. La transition 2 superradie alors ce qui a pour effet de remplir le niveau 4S (voir figure V-7-b). L'émission du pic β du pulse 1 va avoir pour effet de repeupler le niveau 4P (voir figure V-7-b). Cependant, la population du niveau 4P reste inférieure à celle du niveau 4S qui a été précédemment peuplé par le pulse 2 : il en résulte que la superradiance ne peut plus se produire sur la transition 2, ce qui ouvre la voie à une superradiance retardée sur la transition 3 : on observe le pulse 3 (figure V-6-c) et un peuplement important du niveau 3D (figure V-7-b).

On résout ainsi le paradoxe de l'observation de superradiance sur deux transitions ayant un niveau supérieur (le niveau 4P) commun. La superradiance sur la transition défavorisée (4P - 3D) n'apparaît que parce que le niveau 4P se trouve repeuplé par un deuxième pulse de "relaxation" sur la transition 1, alors que le niveau final de la transition 2 n'a pas encore eu le temps de se vider : le phénomène observé résulte ainsi de la compétition de la superradiance

et d'un pompage de durée finie sur les transitions en cascade.

REMARQUE :

Nous avons négligé dans cette analyse la possibilité de superradiance du niveau 4S vers le niveau 3P qui aurait pour effet de vider davantage et plus vite le niveau 4S. L'analyse de la dynamique de l'émission superradiante en serait compliquée, mais sans doute pas modifiée qualitativement. L'essentiel est que le système aboutisse, après un certain nombre de cascades sur la voie principale, à un niveau "final" que les atomes ne peuvent plus quitter par superradiance vers un niveau inférieur. S'il s'agit du niveau 3P au lieu du 4S, le pulse superradiant 2 pourra présenter 2 pics de relaxation au lieu d'un seul et il suffira d'un troisième pic de relaxation sur le pulse 1 pour repeupler le niveau 4P sans qu'il puisse superradier vers 4S, mais soit forcé d'émettre vers 3D.

CONCLUSION

RELATIONS ENTRE LA SUPERRADIANCE
ET D'AUTRES EFFETS D'EMISSION COHERENTE

Nous avons mis en évidence et étudié expérimentalement au cours de ce travail le phénomène de superradiance dans le proche infrarouge. Nous avons montré que l'effet observé correspond, comme c'est le cas ^{(2) (45) (47)} pour les autres expériences de superradiance effectuées à ce jour, au régime de superradiance non markovienne, qui peut être simplement décrit de la façon suivante : les atomes, pour lesquels se trouve, à l'instant initial, réalisée une inversion de population totale sur une transition donnée, développent sous l'effet du couplage avec le champ de rayonnement de fortes corrélations entre eux. Ces corrélations induisent l'apparition dans le milieu d'un champ électrique \mathcal{E} et d'un dipôle macroscopique \mathcal{P} ayant une relation de phase bien définie. L'apparition de ce dipôle macroscopique et de ce champ \mathcal{E} , qui correspond à la phase "quantique" du phénomène, s'effectue au début de l'évolution du système, en un temps caractéristique de l'ordre de $T_{SR} = \frac{1}{\Gamma N \mu}$. Une fois apparus, le champ et la polarisation évoluent et se propagent dans l'échantillon sous les effets combinés de l'absorption et de l'émission induite (phase "classique" du phénomène). La valeur maximum du dipôle et du champ étant proportionnelle à N , nombre d'atomes initialement excités, l'intensité du pulse émis est proportionnelle à N^2 , et le temps caractéristique de l'émission, de l'ordre de quelques T_{SR} , proportionnel à $1/N$. Les effets de propagation du pulse dans l'échantillon se manifestent par l'existence d'oscillations dans le pulse de lumière émis : la polarisation du milieu n'est en effet pas uniforme, si bien qu'à tout instant, l'émission se trouve produite par une partie de l'échantillon seulement. D'autres parties du volume actif peuvent alors réabsorber le rayonnement, absorption et réémission se succédant suivant une périodicité correspondant à la fréquence de RABI des dipôles optiques dans le champ superradiant qu'ils produisent : les oscillations du pulse superradiant apparaissent ainsi comme un effet de nutations optiques auto-induites.

Ce phénomène de superradiance non-markovienne peut être décrit par des équations semi-classiques décrivant la propagation d'un champ électromagnétique classique dans un milieu initialement inversé, à condition de compléter les équations classiques par un terme source simulant les effets quantiques

initiaux responsables du "démarrage" du système. Nous avons justifié la validité de ces équations, introduites pour décrire la superradiance par FELD et al. (8), dès lors que le nombre d'atomes excités est très supérieur à une limite :

$$N_M = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{c}{\Gamma\lambda} \mathcal{G}}$$

qui se trouve être bien plus faible que la limite entre les régimes markovien et non-markovien précédemment admise par d'autres auteurs (24)(36).

Si $N < N_M$, les équations semi-classiques ne sont plus valables et l'on se trouve dans le régime markovien de superradiance "pure" où les effets de propagation deviennent négligeables et où l'émission collective peut être décrite comme un simple effet d'émission spontanée coopérative. Ce dernier régime correspond cependant à un nombre d'atomes excités très petit, beaucoup plus faible que ce qu'ont envisagé BONIFACIO et al. par exemple, et bien inférieur au nombre d'atomes excités dans les expériences précédemment réalisées.

Il nous semble intéressant de conclure ce travail par quelques remarques et questions concernant les deux régimes de superradiance que nous venons de distinguer :

Il est tout d'abord important de noter que la superradiance non markovienne se trouve décrite par des équations classiques de propagation du pulse analogues à celles que l'on utilise pour décrire d'autres effets bien connus d'émission en optique cohérente, les phénomènes de "free induction decay" (48) et d'écho de photons (49) par exemple. Ces deux effets présentent, comme la superradiance, la caractéristique de donner lieu à des émissions proportionnelles à N^2 . Il est donc important de préciser en quoi ils diffèrent du phénomène de superradiance non markovienne.

La première différence importante provient du type d'excitation nécessaire pour étudier ces effets : pour observer les phénomènes de "free induction decay" ou d'écho de photons, il faut préparer initialement dans l'échantillon

un ensemble de dipôles en phase, à l'aide d'une excitation optique cohérente (pulse π ou $\pi/2$). Ces dipôles émettent ensuite, suivant les lois de l'électromagnétisme classique, un pulse de lumière proportionnel à N dans une direction dépendant des conditions géométriques de l'excitation. Il s'agit donc d'effets entièrement classiques dans lesquels l'émission spontanée peut être totalement ignorée. Dans l'expérience de superradiance au contraire, le pompage initial est incohérent et ne prépare aucun dipôle optique macroscopique dans le milieu à $t = 0$. Ce dipôle se construit spontanément à partir des fluctuations du vide au cours de la phase initiale d'évolution du système dans laquelle l'émission spontanée joue un rôle essentiel. Pour que ce dipôle puisse se construire, il faut que la condition de seuil :

$$T_{SR} < T_2^*$$

qui exprime que le temps de superradiance est plus court que le temps de déphasage inhomogène des dipôles, soit réalisée. Cette condition n'est par contre pas nécessaire à l'observation des effets de "free induction decay" et d'écho de photons puisque la polarisation y est imposée au départ et n'a pas à se bâtir dans le milieu. Ces dernières expériences sont réalisées avec la condition :

$$T_{SR} > T_2^*$$

Il en résulte que dans ces expériences, la décroissance de la polarisation atomique est due aux causes de relaxation inhomogène, et non à la réaction du rayonnement comme c'est le cas pour la superradiance. Il s'en suit que le temps caractéristique d'émission du signal, dans une expérience de "free induction decay" ou d'écho de photons, ne dépend pas du nombre d'atomes excités N , comme c'est le cas pour la superradiance, mais se trouve caractérisé seulement par T_2^* . En d'autres termes, dans ces expériences, l'émission du rayonnement peut être considérée comme un moyen d'étudier les processus non radiatifs qui amortissent le système plus vite que le rayonnement, alors que dans la superradiance, le rayonnement émis réagit sur le système et l'amortit beaucoup plus vite que tous les

processus non radiatifs. Certains auteurs (¹²)(⁴¹)(⁵⁰) conviennent de désigner sous le terme général de "superradiance" tous les effets d'émission transitoire collective donnant lieu à une émission en N^2 . "Free induction decay" et écho de photons sont alors considérés comme des phénomènes superradiants tout comme la superradiance décrite dans ce travail, parfois désignée sous le terme de "superfluorescence" afin de la distinguer des autres effets en N^2 . Si l'on tient à qualifier tous ces effets de "superradiants", il est important, comme le font FELD et al., de les distinguer les uns des autres en comparant T_{SR} à T_2^* : le régime où l'on a $T_{SR} < T_2^*$ peut être qualifié de "superradiance forte" (il s'agit de la superradiance non markovienne de nos expériences) et les régimes où l'on a $T_{SR} > T_2^*$, qui correspondent à des milieux optiquement minces au-dessous du seuil de "superradiance forte", peuvent être qualifiés de "superradiance faible" (il s'agit des expériences de "free induction decay" et d'écho de photons).

Il est également important de rapprocher le phénomène de superradiance non markovienne du phénomène d'"émission spontanée amplifiée" (⁵¹) où d'"effet laser sans miroir" souvent également qualifié de "superradiance" dans la littérature. A première vue, la condition de seuil de superradiance :

$$T_{SR} < T_2^*$$

qui s'écrit également :

$$N > \frac{8\pi a^2}{3\Gamma T_2^* \lambda^2}$$

exprime que le milieu émetteur possède un gain d'amplification important, si bien que l'on peut être amené à penser que le phénomène de superradiance n'est pas différent de l'effet laser sur la transition initialement inversée. Ce point de vue se trouve d'ailleurs renforcé si l'on se souvient que, dans le premier papier théorique sur le laser (⁵²), TOWNES et SCHAWLOW proposent un mécanisme de pompage dans la vapeur de potassium très analogue à celui que nous avons réalisé dans notre expérience sur le sodium. On doit alors se poser la question suivante : ne peut-on pas dire que tous les lasers à gain important

se comportent dans leur régime transitoire comme des sources "superradiantes" au sens où nous l'avons entendu dans ce travail ? La réponse à cette question est évidemment négative puisque l'on sait que la plupart des lasers déclenchés en impulsion ont une puissance crête proportionnelle à N et non à N^2 . L'évolution du pulse laser étant décrite par les mêmes équations semi-classiques que la superradiance, il est évident que la différence entre superradiance et "effet laser sans miroir" ne peut venir que des "conditions aux limites" de résolution de ces équations. Considérons par exemple le cas d'un milieu pompé transversalement (laser à rubis sans miroir pompé par un flash). Nous avons vu, au chapitre IV, qu'un tel système ne peut superradié dans son ensemble que si le milieu n'est pas trop long ⁽³⁶⁾ : il faut que l'on ait :

$$\frac{L}{c} < \tau_D$$

où τ_D est le délai du pulse, de l'ordre de quelques dizaines de T_{SR} . D'autre part, le temps de superradiance T_{SR} doit être inférieur au temps de déphasage inhomogène des dipôles optiques, de l'ordre de 10^{-11} seconde dans le cas du rubis. Pour observer un régime superradiant avec un tel système, il faut donc réaliser la condition $\tau_D \lesssim 10^{-10}$ s, c'est-à-dire $L \ll 3$ cm. D'autre part, il faut que la durée du flash de pompage soit bien inférieure à 10^{-10} s. On voit ainsi qu'un barreau de rubis de 10 cm de long, pompé par un flash durant plusieurs dizaines de nanosecondes, ne pourra certainement pas émettre un pulse superradiant, alors qu'il pourra très bien émettre un pulse (ou train de pulses) laser, dont l'intensité est proportionnelle à N . La superradiance non markovienne doit être considérée comme un régime particulier de laser en impulsion qui ne peut être observé que si l'excitation initiale est suffisamment brève et le milieu suffisamment court (nous avons vu, au chapitre IV, que cette dernière restriction peut être levée si l'excitation est balayée au lieu d'être transversale ⁽⁵³⁾).

Parmi la grande variété de système de lasers en impulsion que l'on connaît, il y en a finalement très peu qui fonctionnent dans des conditions où la vraie superradiance peut être mise en évidence de façon indiscutable (milieu amplificateur suffisamment court, pompé assez vite, temps d'émission caractéristique assez long pour pouvoir être étudié à l'aide des détecteurs disponibles ...). Nous espérons avoir montré dans ce travail que la simplicité

du système des niveaux du sodium, ainsi que l'ordre de grandeur de ses constantes d'évolution, fait de cet atome un système idéal pour étudier le phénomène de superradiance non markovienne dans le proche infrarouge.

Une dernière question importante se pose : peut-on mettre en évidence expérimentalement le régime markovien de superradiance ($N < N_M$) ? Comme nous l'avons montré au chapitre III, ce régime pose encore des problèmes sur le plan théorique, dans la mesure où l'on ne sait décrire l'évolution du système dans ce cas que par des équations "approchées", les équations de DICKE, dont la validité est discutable. Un travail théorique important reste donc à faire dans ce domaine, pour essayer de déterminer dans quelles conditions (taille et forme de l'échantillon), un système pourrait émettre dans des conditions de superradiance markovienne pure. Nous avons montré que si un tel régime existe, il ne peut apparaître que dans des conditions très restrictives : il faut que l'échantillon soit grand devant la longueur d'onde (afin de minimiser l'interaction dipôle-dipôle qui détruit la superradiance), que le nombre d'atomes soit assez important ($N > 1/\mu$) pour que la superradiance l'emporte sur l'émission spontanée ordinaire, et assez faible ($N < \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{c}{\Gamma\lambda} \mathcal{F}}$) pour que les effets de propagation soient négligeables.

Pratiquement, ces conditions impliquent que le milieu doit contenir un nombre d'atomes de l'ordre de 10^2 à 10^4 dans un volume de dimensions linéaires de l'ordre de quelques longueurs d'onde. Le temps de superradiance attendu sera alors généralement très long (plusieurs microsecondes), ce qui nécessite la suppression de toutes les causes d'élargissement inhomogène (effet Doppler en particulier). L'émission aura d'autre part une intensité très faible, ce qui exige l'existence de bons détecteurs. Toutes ces conditions rendent évidemment une expérience éventuelle très difficile. On peut cependant espérer la réaliser sur un jet atomique pompé transversalement (afin que l'émission s'effectue dans une direction perpendiculaire au jet pour éliminer l'effet Doppler). Les transitions entre niveaux de Rydberg dans le domaine microonde (λ de l'ordre du millimètre) pourraient satisfaire aux conditions que nous venons de rappeler.

A P P E N D I C E A

CALCUL DU NOYAU INTEGRO-DIFFERENTIEL $K(\tau)$ DE
L'EQUATION (III. 83) DANS LE CAS D'UN VOLUME
EMETTEUR CYLINDRIQUE ALLONGE

Dans le cadre des approximations de BORN et de DICKE (et sans faire l'approximation de MARKOV), les équations d'évolution du système s'écrivent, d'après (III.37) :

$$\frac{d}{dt} \rho_{m,m}(t) = - \sum_{\vec{k} \in \epsilon} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} \int_0^t d\tau 2 \cos c (k_0 - k) \tau$$

$$\left[\left| \vec{k}_0 < r, m-1 \right| R_{\vec{k}}^- \left| r, m \right\rangle_{\vec{k}_0} \right]^2 \rho_{m,m}(t-\tau) - \left| \vec{k}_0 < r, m \right| R_{\vec{k}}^- \left| r, m+1 \right\rangle_{\vec{k}_0} \right]^2 \rho_{m+1,m+1}(t-\tau)$$

(Ap. A.1)

L'équation (III.53) nous donne les éléments de matrice de $R_{\vec{k}}^-$ dans la base des états $\left| r, m \right\rangle_{\vec{k}_0}$ et nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \rho_{m,m}(t) = - \int_0^t d\tau G(\tau) \left[(r+m)(r-m+1) \rho_{m,m}(t-\tau) - (r+m+1)(r-m) \rho_{m+1,m+1}(t-\tau) \right]$$

(Ap. A.2)

avec :

$$G(\tau) = \sum_{\vec{k} \in \epsilon} \frac{g_{\vec{k}\epsilon}^2}{\hbar^2} \times 2 \cos c (k - k_0) \tau \left| F^-(\vec{k}, L, a) \right|^2$$

(Ap. A.3)

où $\left| F^-(\vec{k}, L, a) \right|^2$ est le carré d'une fonction de diffraction telle que :

$$\begin{aligned} \left| F^-(\vec{k}, L, a) \right|^2 &= \left| \frac{1}{N} \sum_i e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{x}_i} \right|^2 = \\ &= \frac{\sin^2(k_z - k_{z0}) L/2}{[(k_z - k_{z0}) L/2]^2} \frac{\sin^2 k_y a/2}{[k_y a/2]^2} \frac{\sin^2 k_x a/2}{[k_x a/2]^2} \end{aligned}$$

(Ap. A.4)

$|F^-(\vec{k}, L, a)|^2$ est une fonction paire par rapport à la variable $(\vec{k}-\vec{k}_0)$, de même que $\cos c(k-k_0)\tau$; seule la partie paire de $g_{\vec{k}\epsilon}^2$ par rapport à $(\vec{k}-\vec{k}_0)$ contribue donc à la somme sur $\vec{k}\epsilon$ et l'on a :

$$g_{\vec{k}\epsilon}^2 = p^2 \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v} = p^2 \frac{\hbar c}{2\epsilon_0 v} [(k-k_0) + k_0] \quad (\text{Ap. A.5})$$

où $p^2 \frac{\hbar c}{2\epsilon_0 v} (k-k_0)$ est la partie impaire

et $p^2 \frac{\hbar c}{2\epsilon_0 v} k_0$ est la partie paire.

$G(\tau)$ s'écrira :

$$G(\tau) = p^2 \frac{k_0 c}{\hbar \epsilon_0 v} \sum_{\vec{k}\epsilon} \cos c(k-k_0)\tau |F^-(\vec{k}, L, a)|^2 \quad (\text{Ap. A.6})$$

La fonction de diffraction décrite par l'équation (Ap. A.4) est centrée sur \vec{k}_0 et a une largeur $2/L$ suivant l'axe z du cylindre émetteur et $2/a$ suivant les axes x et y de la section. Si le nombre de FRESNEL \mathcal{F} est supérieur à un, on peut négliger le déphasage du terme en $\cos c(k-k_0)\tau$ suivant les axes x et y et remplacer k par k_z dans l'expression du cosinus de l'équation (Ap. A.6). En remplaçant $\sum_{\vec{k}\epsilon}$ par $\frac{v}{(2\pi)^3} \iiint dk_x dk_y dk_z$, on écrira donc :

$$G(\tau) = \frac{v}{(2\pi)^3} p^2 \frac{k_0 c}{\hbar \epsilon_0 v} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos c(k_z - k_0)\tau \frac{\sin^2(k_z - k_0) L/2}{[(k_z - k_0) L/2]^2} dk_z \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 k_x a/2}{(k_x a/2)^2} dk_x \right]^2 \quad (\text{Ap. A.7})$$

qui s'écrira encore :

$$G(\tau) = \frac{p^2 k_0 c}{2\pi \epsilon_0 \hbar a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos c(k_z - k_0)\tau \frac{\sin^2(k_z - k_0) L/2}{[(k_z - k_0) L/2]^2} dk_z \quad (\text{Ap. A.8})$$

Il nous faut calculer la quantité

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos c(k_z - k_0)\tau \frac{\sin^2(k_z - k_0) L/2}{[(k_z - k_0) L/2]^2} dk_z \quad (\text{Ap. A.9})$$

qui est aussi égale à :

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ick'\tau} \frac{\sin^2 k' L/2}{(k' L/2)^2} dk' \quad (\text{Ap. A.10})$$

On remarque que $I(\tau)$ peut s'écrire :

$$I(\tau) = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi} \text{TF}^{-1} \left[\sqrt{\frac{2\pi c}{L}} \text{TF} (H(\tau)) \right]^2 \quad (\text{Ap. A.11})$$

où TF signifie transformée de FOURIER ($\text{TF}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$)

et $H(\tau)$ est une fonction créneau telle que :

$$\begin{cases} H(\tau) = \frac{c}{L} & \text{si } |\tau| < \frac{L}{2c} \\ H(\tau) = 0 & \text{si } |\tau| > \frac{L}{2c} \end{cases} \quad (\text{Ap. A.12})$$

et

$$I(\tau) = \frac{2\pi}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau-x) H(x) dx \quad (\text{Ap. A.13})$$

d'où :

$$G(\tau) = \frac{p^2 k_0}{2\epsilon_0 \mu a^2} K(\tau) = \Gamma \mu K(\tau) \quad (\text{Ap. A.14})$$

où $K(\tau)$ est la fonction définie par :

$$K(\tau) = \frac{2}{\tau_c} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right), \quad \text{pour } |\tau| < \tau_c$$

$$K(\tau) = 0, \quad \text{pour } |\tau| > \tau_c$$

avec $\tau_c = \frac{L}{c}$ (Ap. A.15)

Leur évolution est donnée par l'équation d'HEISENBERG :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [X, H] \quad (\text{Ap. B.8})$$

où X est un opérateur quelconque
et H le hamiltonien du système

$$H = \sum_i \hbar \omega_0 r_{3i} + \sum_{\vec{k}} \hbar c k a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \sum_i p \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}} (a_{\vec{k}}^+ r_i^+ e^{ikz_i} + a_{\vec{k}} r_i^- e^{-ikz_i}) \quad (\text{Ap. B.9})$$

L'évolution de \mathcal{E}_Q sera donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_Q(z,t) = -i\omega_0 \mathcal{E}_Q(z,t) + \frac{1}{i\hbar} 2 \sum_{\vec{k}} \hbar c k \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}} a_{\vec{k}}^+ e^{-ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} + \frac{1}{i\hbar} 2 \sum_{\vec{k}} \sum_i \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v} p r_i^+ e^{-ik(z-z_i)} \quad (\text{Ap. B.10})$$

On a :

$$\frac{1}{i\hbar} 2 \sum_{\vec{k}} \hbar c k \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v}} a_{\vec{k}}^+ e^{-ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} = -c \frac{\partial \mathcal{E}_Q(z,t)}{\partial z} + i\omega_0 \mathcal{E}_Q(z,t) \quad (\text{Ap. B.11})$$

et

$$\frac{1}{i\hbar} 2 \sum_{\vec{k}} \sum_i \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 v} p r_i^+ e^{-ik(z-z_i)} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} = -i \frac{k_0 c}{2\epsilon_0} \mathcal{P}_Q(z,t) \quad (\text{Ap. B.12})$$

L'intégration sur k s'obtient en tenant compte de l'hypothèse d'une enveloppe lentement variable, c'est-à-dire que la somme sur k se limite à un intervalle petit Δk , d'où on peut écrire :

$$\sum_k k e^{-ik(z-z_1)} \approx k_0 \delta(z-z_1)$$

(Ap. B.13)

On obtient ainsi l'équation d'évolution de \mathcal{E}_Q :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_Q(z,t) = - \frac{ik_0}{2\epsilon_0} \mathcal{P}_Q(z,t)$$

(Ap. B.14)

On écrit de même pour \mathcal{P}_Q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_Q(z,t) = & -i\omega_0 \mathcal{P}_Q(z,t) - \frac{1}{i\hbar} \left[2\hbar\omega_0 \right. \\ & \sum_i r_i^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} - 2 \sum_i \sum_k p^2 \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 v}} \times \\ & \left. 2 r_{3i} a_k^+ e^{-ikz_i} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \delta(z-z_i) \right] \end{aligned}$$

(Ap. B.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_Q(z,t) = & + \frac{ip^2}{\hbar} \left(\sum_i 2 r_{3i} \delta(z-z_i) \right) \left(- \sum_k 2 \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 v}} \right. \\ & \left. a_k^+ e^{-ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \right) \end{aligned}$$

(Ap. B.16)

et l'équation d'évolution de \mathcal{P}_Q s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_Q(z,t) = + \frac{ip^2}{\hbar} \mathcal{E}_Q(z,t) \mathcal{N}_Q(z,t)$$

(Ap. B.17)

Enfin pour \mathcal{N}_Q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}_Q(z,t) = & \frac{1}{i\hbar} \sum_i \sum_k 2p \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 v}} \left(r_i^+ a_k e^{ikz_i} \delta(z-z_i) \right. \\ & \left. - r_i^- a_k^+ e^{-ikz_i} \delta(z-z_i) \right) \end{aligned}$$

(Ap. B.18)

- (16) R. BONIFACIO and G. PREPARATA, Phys. Rev. A2, 336 (1970)
 R. BONIFACIO, P. SCHWENDIMANN and F. HAAKE, Phys. Rev. A4, 302 (1971);
 Phys. Rev. A4, 854 (1971)
- (17) V. DEGIORGO and F. GHIEMMETTI, Phys. Rev. A4, 2415 (1971)
- (18) A.M. PONTE GONCALVES and A. TALLET, Phys. Rev. A4, 1319 (1971)
- (19) C.R. STROUD, J.H. EBERLY, W.L. LAMA and L. MANDEL, Phys. Rev. A5,
 1094 (1972)
- (20) C. COHEN-TANNOUJJI, Cours du Collège de France, 1975-1976
- (21) R.H. DICKE, in Quantum Electronics III, edited by P. GRIVET and
 N. BLOEMBERGEN (Columbia U.P., New York, 1964), p. 35
- (22) F. HAAKE, Z. Physik, 223, 353 (1969)
- (23) C. COHEN-TANNOUJJI, Les Houches Summer School, July 1975 (to be
 published in Frontiers in laser spectroscopy, session XXVII,
 R. BALIAN, S. HAROCHE and S. LIBERMAN editors, North Holland, 1976).
- (24) R. BONIFACIO and L.A. LUGATIO, Phys. Rev. A11, 1507 (1975)
 Phys. Rev. A12, 587 (1975)
- (25) G. BANFI and R. BONIFACIO, Phys. Rev. A12, 2068 (1975)
- (26) R. FRIEDBERG and B. COFFEY, Phys. Rev. A13, 1645 (1976).
- (27) R. BONIFACIO, L.A. LUGATIO and A. AIROLDI CRESCENTINI, Phys. Rev. A13,
 1648 (1976)
- (28) U. FANO, Phys. Rev. 131, 259 (1963).
 • Voir également la référence (20).
- (29) L.A. LUGATIO, Nuovo Cimento Lett. 10, 169 (1974)
- (30) E. RESSAYRE and A. TALLET, Phys. Rev. Letters, 37, 424 (1976)
- (31) C.T. LEE, Phys. Rev. A12, 575 (1975)
- (32) I.D. ABELLA, N.A. KURNIT and S.R. HARTMANN, Phys. Rev. 141, 391 (1966)
- (33) C.T. LEE, Phys. Rev. A13, 1657 (1976)
- (34) C.T. LEE, Phys. Rev. A14, 1926 (1976)
- (35) M. GROSS, C. FABRE, P. PILLET and S. HAROCHE, Phys. Rev. Letters,
36, 1035 (1976)
 • Voir également : Compte rendu de la conférence de Berkeley, Plenum
 Press (1977)
- (36) F.T. ARECCHI and E. COURTENS, Phys. Rev. A2, 1730 (1970)
 • Voir également : F.T. ARECCHI, E. COURTENS, R. GILMORE and H. THOMAS,
Fundamental and applied laser physics, p. 835 (édité par FELD, JAVAN,
 KURNIT)
- (37) F. HAAKE and R.J. GLAUBER, Phys. Rev. A5, 1457 (1972)
 • Voir aussi Phys. Rev. A13, 357 (1976)
- (38) V. ERNST and P. STEHLE, Phys. Rev. 176, 1456
- (39) J.C. MCGILLIVRAY and M.S. FELD, Phys. Rev. A14, 1169 (1976)

- (40) A. ICSEVGI and W.E. LAMB, Jr., Phys. Rev. 185, 517 (1969)
- (41) M.S. FELD, Les Houches summer school, July 1975 (to be published in *Frontiers in laser spectroscopy*, session XXVII, R. BALIAN, S. HAROCHE and S. LIBERMAN editors, North Holland, 1976)
- (42) D.C. BURNHAM and R.Y. CHIAO, Phys. Rev. 188, 667 (1969)
- (43) I.R. SENITZKY, Phys. Rev. Letters, 31, 955 (1973)
P.W. MILONNI, J.R. ACKERHALT and W.A. SMITH, Phys. Rev. Letters, 31, 958 (1973)
- (44) A. CRUBELLIER, à paraître dans Phys. Rev. A (1977)
- (45) H.M. GIBBS, Q.H.F. VREHEN and H. HIKSPOOR, deux articles à paraître
- (46) G.S. AGARWALL, Phys. Letters, 45A, 15 (1973)
- (47) A. FLUSBERG, T. MOSSBERG and S.R. HARTMANN, Phys. Letters 58A, 6, 373 (1976)
- (48) C.L. TANG and B.D. SILVERMAN, in *Physics of Quantum Electronics*, edited by P.L. KELLEY, B. LAX and P.E. TANNEWALD (Mc Graw Hill, New York, 1966)
- (49) R.G. BREWER and R.L. SHOEMAKER, Phys. Rev. A6, 2001 (1972)
- (50) R. JODOIN and L. MANDEL, Phys. Rev. A10, 1898 (1974)
Voir aussi Phys. Rev. A9, 873 (1974)
- (51) G.I. PETERS and L. ALLAN, J. Phys. A4, 238 (1971)
- (52) A.L. SCHAWLOW and C.H. TOWNES, Phys. Rev. 112, 1940 (1958)
- (53) R. BONIFACIO, F.A. HOPF, P. MEYSTRE and M.O. SCULLY, Phys. Rev. A12, 2568 (1975)

