

THESE

présentée pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3ème CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- Paris 6ème -

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

Option : PHYSIQUE ATOMIQUE ET STATISTIQUE

par Monsieur Didier MAYOU

Sujet de la Thèse : "Analyse de divers cas d'interaction coopérative entre atomes et rayonnement. Etude théorique et expérimentale de la superradiance en régime d'oscillations de pompage et de la superradiance induite par collisions".

Soutenue le 16.06.1981 devant la Commission composée de :

Monsieur S. HAROCHE	Président
Mademoiselle A. CRUBELLIER	Examinateur
Madame F. CYROT	"
Monsieur S. FENEUILLE	"
Monsieur S. LIBERMAN	"



Le présent travail a été effectué au Laboratoire Aimé Cotton pendant les années 1979 et 1980. Je remercie les Professeurs P. JACQUINOT et S. FENEUILLE de m'y avoir accueilli.

J'ai eu la chance de travailler sous la direction de Sylvain LIBERMAN qui m'a fait profiter de sa grande compréhension de la physique et qui a suivi mes premiers pas dans la recherche avec beaucoup d'attention et de gentillesse. Je suis très heureux de lui exprimer ici ma reconnaissance.

Je voudrais aussi exprimer toute ma sympathie à Anne CRUELLIER et Pierre PILLET avec qui j'ai constamment travaillé et qui n'ont pas ménagé leurs efforts pour m'aider durant cette thèse. Je les remercie aussi pour leur compagnie chaleureuse.

J'ai eu le plaisir de travailler avec Marie-Gabrielle SCHWEIGHOFER, Louis CABARET, Jacques PINARD et René-Jean CHAMPEAU. Je suis heureux de pouvoir les remercier ici, et avec eux tous ceux qui ont participé à la réalisation des montages expérimentaux.

Je remercie également S. HAROCHE et F. CYROT de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant de participer au jury.

Je voudrais enfin exprimer ma reconnaissance à Madame FONTAINE qui, avec beaucoup de gentillesse et d'efficacité, s'est chargée de la réalisation de ce mémoire.



## TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u> .....	1
Chapitre I : <u>SUPERRADIANCE D'ATOMES à DEUX</u>	
<u>NIVEAUX. MODELES THEORIQUES</u> .....	9
INTRODUCTION .....	9
1. DESCRIPTION QUALITATIVE DE LA SUPERRADIANCE	
D'ATOMES à DEUX NIVEAUX .....	11
1.1 Description générale (quantique) du système	
atomes à deux niveaux + champ .....	11
1.2 Corrélations atomiques et interférences .....	13
1.3 Conditions pour que l'émission soit coopérative ..	16
2. TRAITEMENT QUANTIQUE. MODELE DE DICKE .....	18
2.1 Point de vue de Heisenberg et de Schrödinger.	
Equation pilote .....	18
2.2 Etats atomiques collectifs. Indiscernabilité	
des atomes .....	19
2.3 Approximations. Modèle de Dicke .....	23
3. TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE .....	24
3.1 Equations de Bloch-Maxwell dans l'approximation	
des ondes planes .....	24

3.2 Démarrage de l'émission superradiante.

Fluctuations "quantiques" ..... 27

Chapitre II : SUPERRADIANCE EN REGIME D'OSCILLA-

TIONS DE POMPAGE ..... 31

INTRODUCTION ..... 31

1. ETUDE EXPERIMENTALE DE LA SUPERRADIANCE DANS LE CAS

D'UN POMPAGE DE LONGUE DUREE ..... 33

1.1 Description générale de l'expérience ..... 33

1.2 Description du montage expérimental ..... 34

1.2.1) L'excitation optique ..... 36

1.2.2) La cellule de résonance ..... 38

1.2.3) La détection ..... 40

1.3 Résultats expérimentaux ..... 41

2. INTERPRETATION DES RESULTATS ..... 43

2.1 Equations semi-classiques incluant le processus

de pompage ..... 44

2.2 Modèle simplifié : pompage faible, en bande large

et approximation du champ moyen ..... 46

2.3 Modèle tenant compte de la propagation. Pompage

en bande étroite ..... 52

Chapitre III : SUPERRADIANCE RAMAN ET SUPERRA-

DIANCE INDUITE PAR COLLISIONS ..... 61

INTRODUCTION ..... 61

1. QUELQUES MODELES SIMPLES ..... 62

1.1 Superradiance Raman. Formalisme de l'équation	
pilote .....	62
1.1.1) Hamiltonien du système atome + champ .....	63
1.1.2) Formalisme de Liouville. Rappels.	
Equation pilote .....	64
1.1.3) Description et discussion des	
approximations .....	67
a) L'approximation séculaire .....	67
b) L'approximation de Markov .....	67
c) L'approximation de couplage faible .....	67
d) L'approximation de Dicke ; les états	
atomiques collectifs symétriques .....	69
e) Conditions de validité des	
approximations .....	72
1.1.4) Calcul du premier ordre de perturbation	
non nul .....	72
a) Remarques préliminaires .....	72
b) Calcul de l'ordre 2 .....	75
c) Calcul de l'ordre 3 .....	76
d) Calcul de l'ordre 4 .....	77
1.1.5) Comparaison avec la superradiance à deux	
niveaux .....	80
1.2 Superradiance Raman. Traitement semi-classique ..	82
1.2.1) Equations d'évolution .....	82
1.2.2) Description de l'évolution du système ....	84
1.3 Superradiance Raman et superradiance induite par	
collisions : formalisme de l'atome habillé .....	87

1.3.1) Atome à deux niveaux. Rappels .....	88
a) Un atome couplé à un mode laser .....	88
b) Influence de l'émission spontanée .....	91
c) Effet des collisions .....	94
d) Evolution de la matrice densité, Régime stationnaire de cascade .....	97
1.3.2) Atome à trois niveaux .....	100
1.3.3) Cas de l'émission spontanée coopérative de N atomes à trois niveaux .....	102
2. DESCRIPTION DES EXPERIENCES, RESULTATS .....	105
2.1 Principe des deux expériences .....	106
2.2 Montages expérimentaux .....	108
2.2.1) L'excitation optique .....	111
2.2.2) Le spectroscope .....	111
2.2.3) Détection .....	112
2.3 Observations .....	114
2.3.1) Conditions expérimentales .....	114
2.3.2) Caractéristiques générales des signaux émis .....	114
2.3.3) Analyse spectrale de la lumière émise ....	118
2.4 Interprétation des résultats .....	120

Chapitre IV : <u>EFFETS COOPERATIFS TRANSITOIRES DUS</u> <u>à L'INTERACTION D'UN CHAMP ELECTROMAGNE-</u> <u>TIQUE AVEC UN MILIEU ATOMIQUE OPTIQUEMENT</u> <u>EPAIS</u> .....	123
---	-----

INTRODUCTION .....	123
1. TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE .....	125
1.1 Propagation d'un paquet d'ondes planes	
progressives .....	125
1.1.1) Equations d'évolution .....	125
1.1.2) Régime coopératif transitoire corres-	
pondant à l'arrivée d'un front d'onde ...	127
1.1.3) Régime coopératif transitoire accompa-	
gnant l'"évacuation" d'un champ électro-	
magnétique uniforme .....	129
a) Calcul négligeant la propagation .....	130
b) Analyse qualitative de l'influence	
de la propagation .....	131
c) Calcul de l'effet de la propagation	
dans le cas où les variations	
spatiales de l'enveloppe du champ	
sont lentes .....	132
1.2 Cas d'une onde stationnaire .....	134
1.2.1) Situation du problème. Equations	
d'évolution .....	134
1.2.2) Atomes au voisinage d'un même plan	
d'onde .....	136
1.2.3) Atomes répartis uniformément dans la	
cavité .....	138
1.2.4) Description d'une expérience idéale .....	140

2. TRAITEMENT QUANTIQUE .....	141
2.1 Equivalent quantique de l'approximation	
linéaire .....	141
2.1.1) Hamiltonien du système. Base d'états	
de la collection d'atomes habillés .....	141
2.1.2) Définition du produit $\otimes$ .....	142
2.1.3) Propriétés fondamentales du produit $\otimes$ .	
Conséquences pour l'évolution du système .....	144
2.2 Assemblée d'atomes interagissant coopérativement	
avec un seul mode du champ électromagnétique .....	146
2.3 Assemblée d'atomes interagissant coopérativement	
avec deux modes du champ électromagnétique .....	150
2.3.1) Atomes situés dans un ventre de l'onde	
stationnaire .....	152
2.3.2) Atomes répartis uniformément dans la	
cavité .....	153
 <u>CONCLUSION</u> .....	 157
 <u>APPENDICE I</u> .....	 161
 <u>APPENDICE II</u> .....	 165
 <u>APPENDICE III</u> .....	 169
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	 173

## INTRODUCTION

L'émission spontanée de lumière par les atomes est un phénomène d'observation courante. Son interprétation théorique est cependant restée longtemps empirique. Il a fallu en effet attendre les développements de cette théorie subtile et raffinée que constitue l'électrodynamique quantique pour en avoir une interprétation rigoureuse et satisfaisante. Dans ce cadre, et pour ce qui intéresse l'émission spontanée ordinaire, on considère que les différents atomes excités du milieu sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'un photon émis par un atome n'influence pas directement l'émission des autres atomes. Une telle situation peut se présenter dans des milieux très dilués où les atomes émetteurs sont éloignés les uns des autres de beaucoup plus qu'une longueur d'onde. Dans ce cas, comme on sait, la probabilité pour un atome excité isolé d'émettre un photon décroît exponentiellement avec le temps; l'émission spontanée d'un grand nombre de tels atomes est la somme des intensités émises par chacun d'entre eux et représente cette décroissance exponentielle en  $\exp[-\Gamma t]$  où  $\Gamma$  est la probabilité d'émission spontanée par unité de temps. Ainsi l'intensité totale émise dans ces

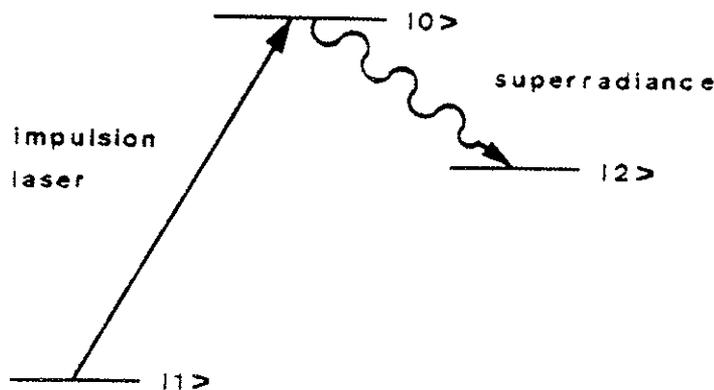
conditions est proportionnelle au nombre  $N$  des émetteurs ; sa constante de temps ,  $T_{Sp} = 1/\Gamma$  , ne dépend que de la transition étudiée.

On sait bien, cependant, qu'il existe des situations dans lesquelles les différents atomes excités ne peuvent plus être considérés comme indépendants, par exemple dans le cas de densités élevées pour lesquelles les atomes émetteurs sont en moyenne séparés les uns des autres de distances inférieures ou voisines de la longueur d'onde. Une telle situation a été étudiée théoriquement pour la première fois par Dicke [1]. Il a montré qu'un ensemble d'atomes excités pouvait être amené à coopérer pour émettre spontanément une impulsion superradiante cohérente, d'intensité maximale non plus proportionnelle à  $N$  mais à  $N^2$  , avec un retard inversement proportionnel à  $N$  . La situation la plus simple susceptible d'évoluer spontanément vers l'émission d'une impulsion superradiante est constituée par un ensemble de  $N$  atomes qu'une excitation lumineuse brève amène à une inversion totale des populations entre 2 niveaux. Une interprétation physique de cet effet fait intervenir l'émission spontanée ordinaire des premiers photons appartenant au mode pour lequel le milieu inversé présente le plus fort gain [2]. Dans ces conditions, et compte-tenu du processus de démarrage de l'émission, la superradiance présente généralement de fortes fluctuations qui se manifestent sur toutes les grandeurs caractéristiques de l'impulsion et en particulier sur l'intensité, la largeur temporelle ou le retard à l'émission. En effet, l'émission étant, à son début, de nature essentiellement quantique et donc sujette à fluctuations, l'effet se trouve en quelque sorte amplifié par le caractère coopératif de l'émission superradiante.

La première mise en évidence expérimentale de la superradiance, ainsi que l'étude de ses propriétés élémentaires évoquées précédemment, n'a pu se faire qu'en 1973 [3]. Depuis cette époque plusieurs études expérimentales ont été entreprises pour étudier les propriétés de l'émission superradiante [4,5,6]. Signalons notamment celles concernant la cohérence avec les battements superradiants [7,8] observés même avec des atomes de classes de vitesse différente [9], ou celles concernant le démarrage de l'émission [10,11], ou encore celles qui sont liées à la dégénérescence des niveaux et qui se reflètent dans la polarisation de la lumière superradiante [12,13]; d'autres encore ont permis l'étude systématique des fluctuations [13,14]. Sans prétendre à donner une liste exhaustive des expériences de superradiance, on peut noter encore celles qui font intervenir des transitions atomiques de longueurs d'onde de plus en plus courtes jusqu'à montrer de la superradiance dans le visible [15,16], ou de plus en plus longues, jusque dans le domaine micro-onde, pour des transitions entre états de Rydberg [17,18]; enfin, des effets spécifiques liés à la propagation des impulsions superradiantes ouvrent une nouvelle classe d'expériences [19,10]. Dans ce mémoire, nous ne nous intéressons que très peu à ce dernier aspect de la superradiance.

L'objet de ce mémoire consiste à élargir le domaine de la superradiance à 2 niveaux en imaginant et en réalisant des situations expérimentales nouvelles, qui diffèrent essentiellement des expériences habituelles de superradiance par le mode d'excitation. D'une façon générale, un système atomique peut émettre spontanément une impulsion superradiante

lorsqu'il est porté dans un état excité qui occasionne une inversion de population totale avec un autre niveau. Pour obtenir une telle situation il est commode d'utiliser, conformément au schéma de la figure ci-dessous, une transition de pompage avec un troisième niveau et d'exciter les atomes au moyen d'une impulsion laser brève et intense accordée à la fréquence de cette transition atomique. L'impulsion de pompage doit



être intense de manière à porter un aussi grand nombre d'atomes que possible dans l'état excité. Elle doit être brève, de façon à laisser ensuite le système atomique évoluer librement. Or, l'évolution coopérative du système est caractérisée par une constante de temps  $T_{SR}$  dont on verra par la suite qu'elle est donnée par l'expression :

$$T_{SR} = 1/N\Gamma\mu$$

(où  $\mu$  est un facteur de forme [21] du volume excité, qui sera précisé ultérieurement). Cette constante de temps de superradiance doit être inférieure à celle qui caractérise l'émission spontanée ordinaire :  $T_{SR} < T_{Sp}$ . Cette relation implique un nombre minimum d'atomes pour obtenir un effet coopératif qui constitue en quelque sorte un seuil pour l'observation de la superradiance. Dès lors, que

se passe-t-il si l'on augmente la durée des impulsions de pompage jusqu'à devenir beaucoup plus grande que  $T_{SR}$  ? On peut imaginer que, dans une toute première phase de cette impulsion, le pompage soit suffisamment efficace pour atteindre la valeur du seuil, et dans ce cas le système évolue rapidement en émettant une impulsion superradiante qui vide le niveau supérieur ; puis, l'impulsion de pompage étant toujours présente, le système atomique est excité à nouveau au-dessus du seuil et réémet une impulsion superradiante et ainsi de suite. On peut donc prévoir, au terme de cette analyse extrêmement succincte, la possibilité d'observer une série d'impulsions superradiantes qui constituent des oscillations de relaxation ou oscillations de pompage.

Avec le même type de montage expérimental et le même système atomique à 3 niveaux on peut se demander ce qu'il advient si le laser de pompage est désaccordé en fréquence par rapport à la transition atomique. Si l'on s'en tient aux effets linéaires avec l'intensité du champ électromagnétique de pompage, deux effets sont à l'évidence en compétition : la superradiance Raman et la superradiance induite par collisions. Dans la superradiance Raman, une inversion totale de population s'établit entre deux niveaux de l'atome "habillé" par le champ, ce qui peut conduire au démarrage d'une impulsion superradiante, pour peu que les conditions de seuil soient satisfaites. Dans la superradiance induite par collisions, le système atomique excité hors résonance est ramené dans l'état excité  $|0\rangle$  par les collisions ; il présente alors une inversion totale de population sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ , qui peut donner lieu à une émission superradiante. Une telle émission après ce

type de pompage présente la propriété très remarquable de donner lieu à une émission cohérente après une excitation par collisions.

Dans tous les cas envisagés il est indispensable de comprendre l'essence des processus par un traitement théorique aussi complet que possible. Or la superradiance est un phénomène complexe, si bien que des simplifications sont indispensables. Le plus souvent, le traitement théorique s'achève sur une simulation par ordinateur des conditions les plus proches des conditions expérimentales. On arrive de la sorte à rendre compte de manière assez satisfaisante de l'essentiel des faits d'observation expérimentale.

Comme il a été dit précédemment, on s'est relativement peu intéressé dans ce travail aux effets liés très spécifiquement à la propagation. Il faut remarquer néanmoins que de tels effets sont à prendre en considération pour expliquer, par exemple, des oscillations du genre de celles qui sont connues sous le nom d'oscillations de "ringing" [22]. Mais, de façon très générale, il faut souligner que la propagation d'impulsions lumineuses cohérentes dans un milieu résonnant dont la densité est compatible avec l'apparition d'effets coopératifs est un problème intéressant par lui-même. C'est d'ailleurs sous cet aspect que nous avons été tout naturellement amenés à nous poser un certain nombre de problèmes théoriques. En particulier, existe-t-il des conditions autres que l'inversion totale de population entre 2 niveaux et donnant lieu à l'apparition d'effets coopératifs ? La réponse est positive par exemple dans les milieux absorbants dans lesquels les

densités volumiques de photons en résonance (ou quasi-résonance) sont beaucoup plus faibles que les densités volumiques d'atomes. L'analyse théoriques de ces conditions fait apparaître qu'un certain nombre de cas expérimentaux plausibles pourraient montrer des effets d'absorption à des fréquences de Rabi généralisées manifestant un caractère collectif évident. Ces considérations, qui n'ont pas encore donné lieu à des vérifications expérimentales, sont exposées en détail dans le dernier chapitre de ce mémoire.

En ce qui concerne le plan général de l'exposé, un premier chapitre est consacré à des rappels sur les divers modèles théoriques qui traitent de la superradiance d'atomes à 2 niveaux. Le Chapitre II rend compte des observations de la superradiance en régime d'oscillations de pompage et en donne l'interprétation théorique. Dans le troisième chapitre on étudie la superradiance Raman et la superradiance induite par collisions et on explique pourquoi seule cette dernière a pu être observée expérimentalement. Enfin, le Chapitre IV, exclusivement théorique, donne un aperçu de nos investigations sur les effets coopératifs transitoires dus à l'interaction d'un champ électromagnétique avec un milieu atomique optiquement épais. En conclusion, après récapitulation rapide des principaux résultats obtenus, nous donnerons quelques indications sur d'éventuels prolongements possibles de notre travail.



## Chapitre I

SUPERRADIANCE D'ATOMES A DEUX NIVEAUX.MODELES THEORIQUES.INTRODUCTION.

Avant d'aborder l'objet même de ce travail qui concerne l'étude de l'émission coopérative, ou superradiance, dans des conditions nouvelles, nous allons faire quelques rappels concernant le problème le plus simple posé par l'émission spontanée coopérative : celui de l'évolution d'un ensemble de  $N$  atomes à deux niveaux qui sont portés à l'instant initial dans un état excité. On suppose, pour simplifier, que les atomes n'interagissent pas directement entre eux et l'on considère seulement le couplage des atomes avec le champ électromagnétique, supposé initialement vide de photons, si bien que le caractère coopératif de l'émission est dû uniquement à l'interaction des atomes par l'intermédiaire du rayonnement qu'ils émettent.

Depuis l'article de Dicke en 1954 [1], ce problème a donné lieu à une grande quantité d'articles théoriques (voir par exemple les références

[21-32]). Comme pour l'émission spontanée "ordinaire" (c'est-à-dire non coopérative), il est en toute rigueur nécessaire d'utiliser l'électrodynamique quantique [33], mais le traitement ne peut être mené à bien sans d'importantes approximations, difficiles à justifier [31,32,34,35] dans la plupart des expériences de superradiance réalisées jusque maintenant. En fait l'approche semi-classique [36], dans laquelle le champ électromagnétique est traité classiquement, permet finalement de mieux rendre compte des observations, pourvu toutefois qu'on traite quantiquement ou qu'on simule convenablement le début de l'émission [22,27,31]. Quoi qu'il en soit, les deux types de traitement sont précieux pour la compréhension du phénomène. Fondamentalement, la superradiance résulte d'interférences interatomiques, qu'on peut comprendre aussi bien comme des interférences entre des champs classiques rayonnés par les dipôles atomiques ou comme des interférences résultant de l'indiscernabilité des atomes vis-à-vis des photons émis. Le caractère quantique du champ n'apparaît qu'au début du phénomène, lorsque les atomes sont soumis aux "fluctuations" du vide de photons. Dans la suite, au contraire, le champ est rayonné de façon cohérente par un grand nombre d'atomes et devient quasi-classique [31].

Dans ce chapitre, nous cherchons simplement à rappeler l'origine physique de la superradiance et à décrire succinctement deux modèles théoriques simples, l'un quantique, l'autre semi-classique. Après une description qualitative de la superradiance à deux niveaux, dans laquelle nous montrons comment l'éventuelle apparition de corrélations entre atomes entraîne celle d'interférences et donne donc lieu à

une émission coopérative, nous rappelons dans quelles conditions ce phénomène peut se produire. Nous décrivons ensuite rapidement le modèle quantique le plus simple, celui de Dicke, et nous montrons à cette occasion le lien profond qui existe entre l'indiscernabilité des atomes et le caractère coopératif de l'émission. Enfin nous décrivons le modèle semi-classique et les problèmes posés dans ce modèle par le démarrage de l'émission.

## 1. DESCRIPTION QUALITATIVE DE LA SUPERRADIANCE À DEUX NIVEAUX.

### 1.1 Description générale (quantique) du système atomes à deux niveaux + champ.

Nous considérons un système composé de  $N$  atomes, situés aux points  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_N$ , interagissant avec le champ électromagnétique. Chaque atome possède deux niveaux, notés  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , séparés par l'intervalle d'énergie  $\hbar\omega_{01}$  (cf. Fig. I.1) et couplés entre eux par l'opérateur dipôle électrique  $\vec{d}$ , avec

$$\langle 0 | \vec{d} | 1 \rangle = \vec{d}_{01} \quad (\text{I.1})$$

(on supposera par la suite, sans perte de généralité, que  $\vec{d}_{01}$  est réel).

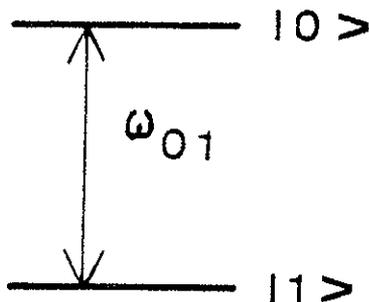


Figure I.1

Chaque atome à deux niveaux est formellement identique à un système de spin  $1/2$ . Les composantes de l'opérateur moment angulaire correspondant à l'atome  $i$  sont :

$$\begin{cases} r_i^z = 1/2 [ |0\rangle_i \langle 0| - |1\rangle_i \langle 1| ] \\ r_i^+ = |0\rangle_i \langle 1| \\ r_i^- = |1\rangle_i \langle 0| \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

et vérifient les relations de commutation habituelles. L'opérateur dipôle électrique pour l'atome  $i$  s'écrit alors :

$$\vec{d}_i = d_{01} [ r_i^+ + r_i^- ] \quad (\text{I.3})$$

Le champ électromagnétique quantifié est décrit à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation  $a_{\vec{k}\lambda}^+$  et  $a_{\vec{k}\lambda}$  correspondant à tous les modes  $(\vec{k}\lambda)$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de polarisation  $\vec{e}_\lambda$ . Le champ électrique, en un point  $\vec{x}$ , par exemple, est représenté par un opérateur  $\vec{E}(\vec{x})$ , combinaison linéaire des  $a_{\vec{k}\lambda}^+$  et  $a_{\vec{k}\lambda}$ , qu'il est commode de séparer en deux parties  $E^+(\vec{x})$  et  $E^-(\vec{x})$ , dites de fréquence positive et négative, qui ne contiennent respectivement que des opérateurs de création et d'annihilation. On écrit :

$$\vec{E}(\vec{x}) = E^+(\vec{x}) + E^-(\vec{x}) \quad , \quad (\text{I.4})$$

avec

$$\begin{cases} E^-(\vec{x}) = - \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{e}_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ E^+(\vec{x}) = [E^-(\vec{x})]^+ \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

$$\text{où } \vec{e}_{\vec{k}\lambda} = \vec{e}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 V}} \quad , \quad (\text{I.6})$$

$V$  étant le volume dans lequel le champ est quantifié.

Le hamiltonien du système atomes + champ s'écrit :

$$H = H_A + H_R + H_I \quad . \quad (I.7)$$

$H_A$  est le hamiltonien des atomes seuls

$$H_A = \hbar\omega_{01} \sum_{i=1, N} r_i^3 \quad , \quad (I.8)$$

$H_R$  est le hamiltonien du champ seul

$$H_R = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar\omega_k a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k}\lambda} \quad ; \quad (I.9)$$

le hamiltonien d'interaction entre les atomes et le champ s'écrit simplement :

$$H_I = - \sum_{i=1, N} (\vec{d}_i \cdot \vec{E}(\vec{x}_i)) \quad , \quad (I.10)$$

soit, en négligeant la partie antirésonnante du couplage (approximation du champ tournant),

$$H_I = \sum_{i=1, N} \sum_{\vec{k}, \lambda} (\vec{d}_{01} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}) \quad (I.11)$$

$$\times [a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} r_i^- e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_i} + a_{\vec{k}\lambda} r_i^+ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_i}] \quad .$$

Si l'on se place dans le point de vue de Heisenberg, l'évolution du système atomes + champ est donc régie par les équations

$$i\hbar \frac{d}{dt} X = [H, X] \quad , \quad (I.12)$$

où  $X$  représente les différents opérateurs atomiques et du champ.

## 1.2 Corrélations atomiques et interférences.

Dans toute la suite de ce travail, nous ne considérerons que des volumes atomiques cylindriques allongés le long de l'axe  $Oz$  (cf.

Figure I.2), qui sont d'ailleurs les volumes généralement rencontrés dans les expériences de superradiance. On appellera  $L$  la longueur et  $a^2$  la section droite du volume atomique et on supposera toujours que le nombre de Fresnel associé à la longueur d'onde atomique  $\lambda_{01}$ ,  $F = a^2/L \lambda_{01}$ , est de l'ordre de 1.

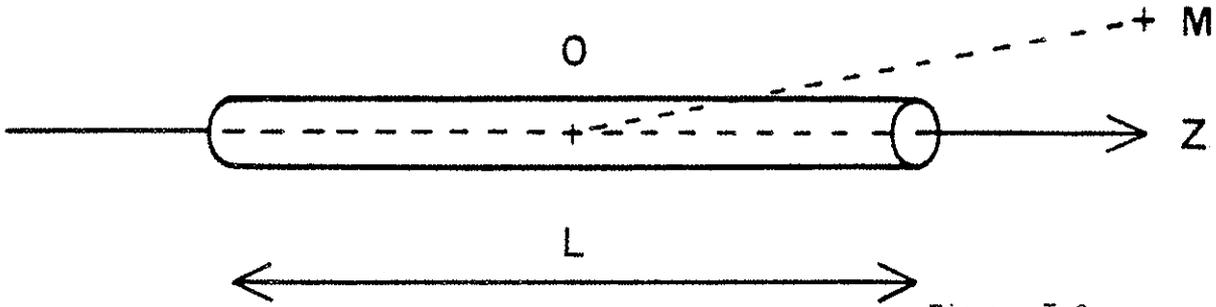


Figure I.2

De même qu'on peut calculer à partir des équations de Maxwell le champ électromagnétique classique rayonné par un dipôle oscillant [37], on peut déduire des équations (I.12) une relation entre l'opérateur champ électrique  $\vec{E}(\vec{x})$  et les opérateurs atomiques  $r_i^\pm$  (nous nous plaçons ici encore dans le point de vue de Heisenberg ; nous indiquons donc explicitement la dépendance temporelle des opérateurs). En un point  $M$  de coordonnées  $\vec{x}$ , suffisamment éloigné des dipôles atomiques, on a

$$\vec{E}^\pm(\vec{x}, t) = \sum_{i=1, N} \theta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_i|}{c}\right) r_i^\pm\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_i|}{c}\right) \sum_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i)} \frac{k^2}{4\pi \epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_i|} (\vec{d}_{01} \cdot \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\lambda, \quad (\text{I.13})$$

où  $\theta(t)$  est la fonction de Heaviside. Le champ rayonné apparaît donc comme une somme de champs émis par les différents atomes et on note  $\vec{E}_i(\vec{x}, t)$  le champ électrique induit par l'atome  $i$ . Si l'on place un détecteur en  $M$ , l'intensité du signal est proportionnelle à

$$I(\vec{x}, t) = \langle \vec{E}^+(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}^-(\vec{x}, t) \rangle , \quad (\text{I.14})$$

où  $\langle X \rangle$  désigne la valeur moyenne de l'opérateur  $X$ . Si l'on explicite l'expression de  $I(\vec{x}, t)$ , on voit apparaître deux termes. Le premier correspond à la somme des produits concernant un même atome

$$I_1(\vec{x}, t) = \sum_{i=1, N} \langle \vec{E}_i^+(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}_i^-(\vec{x}, t) \rangle ; \quad (\text{I.15})$$

on peut l'appeler terme d'émission incohérente. Le deuxième terme est la somme des produits correspondant à deux atomes différents

$$I_2(\vec{x}, t) = \sum_{i \neq j} \langle \vec{E}_i^+(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}_j^-(\vec{x}, t) \rangle ; \quad (\text{I.16})$$

on peut l'appeler terme d'émission cohérente. En effet, cette quantité dépend des termes croisés du type

$$\langle r_i^+(t - \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{c}) r_j^-(t - \frac{\vec{x} - \vec{x}_j}{c}) \rangle , \quad (\text{I.17})$$

qui caractérisent les corrélations entre atomes ou, si l'on veut une image classique, les relations de phase entre dipôles atomiques. A l'instant initial, lorsque tous les atomes sont dans leur état excité, on a :

$$\langle r_i^+(0) r_j^-(0) \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{I.18})$$

et seul le terme d'émission incohérente existe. Dans certaines conditions, il n'apparaît jamais de corrélations entre atomes au cours de l'évolution du système, soit parce que les atomes sont trop éloignés les uns des autres, soit parce qu'il existe des effets "déphasants" (tels que l'effet Doppler ou les collisions). Seul le terme d'émission incohérente demeure alors et l'on a à tout instant

$$I(\vec{x}, t) = I_1(\vec{x}, t) . \quad (\text{I.19})$$

C'est le phénomène d'émission spontané "ordinaire". Si, au contraire, des corrélations se créent au cours de l'évolution, le terme d'interférence entre les dipôles atomiques,  $I_2(\vec{x}, t)$ , n'est pas nul. Dans le cas d'un volume cylindrique allongé (cf. Figure III.2) il a été montré [21,31] que, dans des conditions convenables, les corrélations apparaissent très tôt (dès l'émission des premiers photons) et que les dipôles atomiques prennent la phase d'une onde se propageant suivant l'axe Oz, c'est-à-dire que

$$\langle r_i^+(t) r_j^-(t') \rangle \propto e^{i\omega_{01}[(t-t') - (z_i - z_j)/c]} \quad (I.20)$$

On montre alors facilement que, à cause des termes d'interférence, le rayonnement n'est alors émis pratiquement que dans l'angle solide de diffraction du cylindre

$$\Delta\Omega = \frac{\lambda_{01}^2}{a^2} \quad , \quad (I.21)$$

où  $\lambda_{01}$  est la longueur d'onde de la transition ( $0 \rightarrow 1$ ). Cette propriété, dont l'analogie dans la théorie des antennes est bien connue, explique bien la directivité de l'émission superradiante.

### 1.3 Conditions pour que l'émission soit coopérative.

Si l'on admet que les corrélations entre atomes sont maximales, les termes d'émission cohérente et incohérente sont, d'une part, proportionnels aux angles solides dans lesquels ils sont émis (respectivement  $\Delta\Omega$  et  $4\pi$ ) ; ils sont, d'autre part, proportionnels respectivement au nombre de paires d'atomes,  $N(N-1)$ , et au nombre d'atomes,  $N$ . Le rapport des intensités des deux types d'émission est de l'ordre de

$$\frac{I_2}{I_1} \sim N \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \quad (\text{I.22})$$

et l'émission cohérente ou coopérative l'emporte sur l'émission incohérente si la condition de seuil

$$N \gg \frac{4\pi}{\Delta\Omega} \quad , \quad (\text{I.23})$$

est remplie. Il a par ailleurs été montré [31,32,34] que c'est précisément cette condition qui est nécessaire pour que des corrélations atomiques apparaissent spontanément au début de l'évolution du système. Ainsi, finalement, l'émission est coopérative si la condition (I.23) est satisfaite, le terme d'émission cohérente devenant rapidement prépondérant dans l'intensité rayonnée ; on assiste alors à l'émission d'une impulsion, de maximum proportionnel à  $N^2$  et donc de largeur proportionnelle à  $1/N$ , émise avec un certain retard qui correspond au temps nécessaire à l'établissement spontané des corrélations atomiques.

La condition (I.23) est souvent écrite sous d'autres formes. Si, par exemple, on introduit le facteur de forme [21]

$$\mu = \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda_{01}^2}{a^2} \quad , \quad (\text{I.24})$$

elle s'écrit :

$$N\mu \gg 1 \quad . \quad (\text{I.25})$$

On peut également introduire des temps caractéristiques de l'émission spontanée ordinaire et de l'émission superradiante [34], respectivement définis par

$$\begin{cases} T_{Sp} = 1/\Gamma_{01} \\ T_{SR} = 1/N \Gamma_{01} \mu \end{cases} \quad , \quad (\text{I.26})$$

où  $\Gamma_{01}$  est la probabilité d'émission spontanée par unité de temps sur la transition  $(0 \rightarrow 1)$ . La condition pour que l'émission soit coopérative s'écrit alors :

$$T_{SR} \ll T_{Sp} \quad . \quad (I.27)$$

Il est important de noter que nous avons considéré jusqu'ici des atomes à deux niveaux supposés immobiles. Dans une situation expérimentale réelle, de nombreux effets, tels que l'effet Doppler ou les collisions entre atomes, sont susceptibles d'empêcher l'apparition de relations de phase entre les dipôles atomiques. Lorsqu'il existe de tels effets "déphasants", on doit comparer le temps caractéristique de l'émission superradiante,  $T_{SR}$ , au temps global de déphasage,  $T_2^*$  ; la condition pour que l'émission soit coopérative s'écrit alors [22]

$$T_{SR} \ll T_2^* \quad . \quad (I.28)$$

## 2. TRAITEMENT QUANTIQUE. MODELE DE DICKE.

### 2.1 Points de vue de Heisenberg et de Schrödinger. Equation pilote.

Le hamiltonien du système constitué par les  $N$  atomes et le champ électromagnétique quantifié est donné dans le paragraphe 1.1 par les équations (I.7) à (I.11). Pour étudier l'évolution du système à partir de l'état initial (atomes excités et vide de photons), on peut se placer dans le point de vue de Heisenberg et chercher à résoudre les équations (I.12). Cependant, même lorsqu'on fait l'approximation des ondes planes,

la résolution exacte de ces équations différentielles couplées entre opérateurs est malheureusement impossible. Il est toutefois intéressant de noter la profonde analogie formelle de ces équations avec les équations de Bloch-Maxwell que nous obtiendrons dans le modèle semi-classique ; cette comparaison a d'ailleurs permis de montrer [27,28,31,32] que le modèle semi-classique est valable sauf au tout début de l'émission. Si l'on veut conserver une description quantique du champ, ce qui reste indispensable au début de l'évolution, il est préférable d'adopter le point de vue de Schrödinger. Comme dans le problème de l'émission spontanée, on cherche alors une équation pilote régissant l'évolution de la matrice densité réduite du système atomique [24,33,38]. Nous utiliserons ce formalisme de l'équation pilote dans le Chapitre III, pour des systèmes à trois niveaux, et nous ne le rappellerons pas ici.

## 2.2 Etats atomiques collectifs. Indiscernabilité des atomes.

Dans le formalisme de l'équation pilote, il est nécessaire de choisir une base d'états atomiques collectifs. Chaque atome à deux niveaux étant considéré comme un système de spin 1/2, la somme des moments angulaires des différents atomes, dont les composantes sont

$$\begin{cases} R^3 = \sum_{i=1, N} r_i^3 \\ R^\pm = \sum_{i=1, N} r_i^\pm \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

est évidemment un moment angulaire. On peut donc prendre comme base d'états collectifs des états propres de  $R^3$  et de

$$(R)^2 = (R^3)^2 + (R^+ R^- + R^- R^+) / 2 \quad . \quad (\text{I.30})$$

Si l'on utilise les notations de Dicke [1], où  $m$  et  $r(r+1)$  sont les valeurs propres respectives de ces deux opérateurs, les états s'écrivent

$$|g r m\rangle, \quad (I.31)$$

où l'indice  $g$  sert à distinguer les états de même  $r$  et de même  $m$ .

Cette base d'états est particulièrement bien adaptée au problème traité dans un cas particulier de configuration atomique. Supposons en effet que les  $N$  atomes soient situés approximativement au même point de l'espace  $\vec{x}$  (à l'échelle de la longueur d'onde  $\lambda_{01}$ ). Les facteurs de phase  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_i}$  intervenant dans le hamiltonien (I.11) sont tous identiques et les seuls opérateurs atomiques intervenant dans le hamiltonien  $H$  sont les opérateurs  $R^3$  et  $R^\pm$ . La valeur propre de  $R^2$  se conserve alors tout au long de l'évolution. En particulier, si tous les atomes sont initialement excités, le "nombre de coopération"  $r$  reste ensuite égal à  $N/2$ . Les seuls états atomiques à considérer sont donc les états symétriques par rapport à l'échange des numéros des atomes. Cette propriété découle évidemment de l'invariance du hamiltonien vis-à-vis de l'échange des numéros des atomes, c'est-à-dire de l'indiscernabilité des atomes par rapport au phénomène étudié. Il est en effet impossible, lorsque les atomes sont ainsi proches les uns des autres, de dire quel atome a émis un photon. Ceci permet d'ailleurs de comprendre l'existence des interférences qui caractérisent l'émission cohérente ou coopérative (cf. paragraphe 1.2). Cependant, ce cas des "petits volumes" pose des problèmes très particuliers liés aux singularités locales du champ [25] et nous n'en parlerons pas davantage.

La notion d'indiscernabilité et son lien étroit avec les interférences, c'est-à-dire avec le caractère spécifiquement coopératif de l'émission, peuvent se généraliser au cas que nous considérons ici.

Dans le cas d'un volume atomique cylindrique allongé, de dimensions beaucoup plus grandes que  $\lambda_{01}$  (cf. Figure I.2), une première façon d'éliminer les facteurs de phase qui apparaissent dans le hamiltonien  $H_I$  (cf. équation (I.11)) consiste à admettre que l'émission superradiante a lieu essentiellement sur un mode du champ, de fréquence  $\omega_{01}$  et dirigé suivant  $Oz$ , vers l'avant ou vers l'arrière. Soit en effet  $\vec{k}_0$  le vecteur d'onde de ce mode, si l'on fait sur l'espace des états la transformation unitaire définie par

$$\begin{cases} \widetilde{|0\rangle}_i = e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} |0\rangle_i \\ \widetilde{|1\rangle}_i = |1\rangle_i \end{cases}, \quad (I.32)$$

le terme de  $H_I$  correspondant au mode  $\vec{k}_0$ , supposé prépondérant dans le couplage avec les atomes, ne contient que les opérateurs  $\tilde{R}^+$  et  $\tilde{R}^-$ , les transformés de  $R^+$  et  $R^-$  dans la transformation unitaire (I.32). Si l'on utilise alors comme base d'états atomiques collectifs les états

$$|\widetilde{g r m}\rangle, \quad (I.33)$$

transformés des états (I.31) dans cette transformation unitaire, le nombre de coopération  $r$  est approximativement conservé. En d'autres termes les atomes peuvent être considérés comme indiscernables même dans un volume de grandes dimensions pourvu qu'ils interagissent tous avec le même mode. Ces considérations sont à la base de l'approximation

de Dicke que nous décrivons dans le paragraphe suivant et qui permet finalement d'obtenir des équations simples.

Une approximation moins brutale consiste à supposer que l'émission superradiante est constituée d'un paquet d'ondes planes de vecteur d'onde central  $\vec{k}_0$ . Dans ce cas les atomes qui sont indiscernables sont ceux qui sont situés à l'intérieur d'une même "tranche" du milieu atomique,  $S_k$ , dont l'épaisseur est de l'ordre de  $\lambda_{01}$  (cf. Fig. I.3).

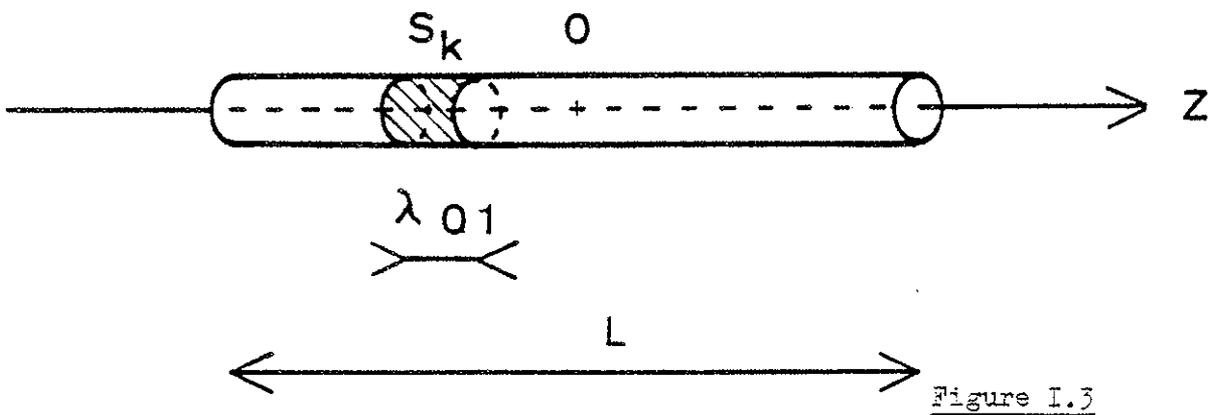


Figure I.3

La coopérativité de l'émission est donc essentiellement "locale", en ce sens que les interférences ne se produisent qu'entre des atomes situés dans des plans d'onde extrêmement proches (à l'échelle de  $\lambda_{01}$ ). Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que la condition de coopérativité (I.25) peut s'écrire

$$N \frac{\lambda_{01}}{L} \gg \frac{8\pi}{3} \frac{a^2}{L \lambda_{01}} \quad (I.34)$$

Elle exprime donc que le caractère coopératif de l'émission ne se manifeste que si le nombre d'atomes indiscernables d'une tranche  $S_k$  est grand (le nombre de Fresnel,  $a^2/L \lambda_{01}$ , est en effet supposé de l'ordre de 1). Remarquons enfin que la condition (I.34), qui fait intervenir la densité linéaire d'atomes, n'impose pas des densités volumiques très

élevées, même pour des longueurs d'onde correspondant au domaine infrarouge ou visible.

### 2.3 Approximations. Modèle de Dicke.

L'équation pilote exacte décrivant l'émission superradiante de  $N$  atomes est extrêmement complexe. Pour en tirer réellement des informations il est nécessaire de faire des approximations. Ces approximations sont discutées en détail, pour le cas d'atomes à deux niveaux, dans les références [31,32]. Nous les utilisons également dans le Chapitre III, dans le cas de systèmes à trois niveaux, pour étudier la superradiance Raman. Nous nous contentons ici de les rappeler brièvement. Les approximations qui conduisent au "modèle de Dicke" sont au nombre de trois. L'approximation de Born ou de couplage faible consiste à ne garder que le premier terme du développement en puissances de l'interaction. On peut montrer [31,39] que cette approximation équivaut à négliger les corrélations entre les atomes et le champ. L'approximation de Markov consiste à supposer que le temps de mémoire de l'interaction est très court devant le temps d'évolution des populations des niveaux collectifs. Enfin l'approximation de Dicke consiste à restreindre l'espace des états atomiques aux états  $|g r m\rangle$  qui sont symétriques par rapport aux numéros des atomes (c'est-à-dire  $r = N/2$ ). Par contre, on conserve la somme sur tous les modes du champ dans le hamiltonien. Cette hypothèse implique que le milieu atomique est considéré comme étant homogène spatialement et il a été montré [26,32] qu'elle est équivalente à l'hypothèse du "champ moyen", dans laquelle on néglige les effets de propagation à l'intérieur du volume atomique [24]. Moyennant ces trois approximations

l'équation pilote s'écrit finalement

$$\frac{d}{dt} \rho = \Gamma_{01} \mu [\tilde{R} \rho \tilde{R}^+ - 1/2 \tilde{R}^+ \tilde{R} \rho - 1/2 \rho \tilde{R}^+ \tilde{R}] , \quad (I.35)$$

où  $\rho$  est l'opérateur densité atomique réduit et  $\mu$  un facteur de forme qui provient de l'intégration sur les modes du champ et qui est donné par l'équation (I.24). Si l'on pose alors

$$\rho_{mm} = \langle N/2 - m | \rho | N/2 - m \rangle \quad (I.36)$$

l'équation s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{mm} = \Gamma_{01} \mu \left\{ (N/2 + m + 1)(N/2 - m) \rho_{m+1, m+1} \right. \\ \left. - (N/2 - m + 1)(N/2 + m) \rho_{mm} \right\} . \end{aligned} \quad (I.37)$$

Nous ne discuterons pas davantage ce modèle. Rappelons simplement que les équations (I.37) permettent de retrouver qualitativement les principales propriétés de la superradiance, excepté bien entendu les oscillations dues à la propagation dans le milieu connues sous le nom de "ringing" [22].

### 3. TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE.

#### 3.1 Equations de Bloch-Maxwell dans l'approximation des ondes planes.

Le hamiltonien de l'ensemble de  $N$  atomes à deux niveaux (cf. Figure I.1) situés aux points  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ , et interagissant avec le champ électromagnétique classique s'écrit :

$$H = H_A + H_I \quad . \quad (I.38)$$

$H_A$  est le hamiltonien (I.8) des atomes seuls et  $H_I$  est le hamiltonien d'interaction qui s'écrit formellement comme dans l'équation (I.10), mais le champ électrique  $\vec{E}(\vec{x})$  est ici non un opérateur mais un nombre réel.

Les équations d'évolution de la matrice densité  $\rho(t)$  du système atomique sont données par

$$i \hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H, \rho(t)] \quad . \quad (I.39)$$

L'état du milieu atomique détermine la valeur du champ électromagnétique et l'évolution du champ électrique  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ , par exemple, est régie par l'équation de Maxwell qui fait intervenir la polarisation du milieu.

Pour écrire simplement cette équation, on décrit la collection d'atomes situés en un ensemble discret de points comme un milieu continu. Pour cela, nous supposons que la matrice densité est factorisable à l'instant initial et donc à tout instant de l'évolution

$$\rho(t) = \prod_{i=1, N} \rho_i(t) \quad . \quad (I.40)$$

Cette propriété est vraie, par exemple, si tous les atomes sont initialement dans l'état  $|0\rangle$ . On définit alors une matrice densité locale  $\rho(\vec{x}, t)$  continue en  $\vec{x}$  et prenant aux points  $\vec{x}_i$  occupés par les atomes la valeur  $\rho_i(t)$ . Dans ces conditions, la polarisation  $\vec{P}(\vec{x}, t)$  du milieu atomique est définie par

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = \vec{d}_{01} n(\vec{x}) [\rho_{01}(\vec{x}, t) + \rho_{10}(\vec{x}, t)] \quad , \quad (I.41)$$

où  $\rho_{01}(\vec{x}, t)$  et  $\rho_{10}(\vec{x}, t)$  sont des éléments de la matrice densité

locale et  $n(\vec{x})$  est la densité volumique. L'équation d'évolution du champ électrique s'écrit alors

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}(\vec{x}, t) \quad . \quad (\text{I.42})$$

L'équation d'évolution de la matrice densité locale se déduit très simplement des équations d'évolution des matrices densité individuelles et l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11}(\vec{x}, t) = -\frac{i}{\hbar} (\vec{d}_{01} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)) [\rho_{10}(\vec{x}, t) - \text{h.c.}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{00}(\vec{x}, t) = \frac{i}{\hbar} (\vec{d}_{01} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)) [\rho_{10}(\vec{x}, t) - \text{h.c.}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{10}(\vec{x}, t) = i \omega_{01} \rho_{10}(\vec{x}, t) - \frac{i}{\hbar} (\vec{d}_{01} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)) [\rho_{11}(\vec{x}, t) - \rho_{00}(\vec{x}, t)] \end{array} \right. \quad (\text{I.43})$$

Les équations (I.42) et (I.43) sont grandement simplifiées lorsqu'on fait l'approximation des ondes planes. Cette approximation consiste à supposer que le champ rayonné par les  $N$  atomes est essentiellement constitué d'ondes planes émises dans la direction de l'axe du cylindre occupé par les atomes et dans les deux sens opposés. On suppose de plus que ce champ rayonné est formé de deux paquets d'ondes planes d'enveloppes lentement variables dont la fréquence centrale est celle de la transition ( $0 \rightarrow 1$ ). Pour simplifier, nous ne considérerons ici que le champ émis vers l'avant. On peut en effet montrer que le couplage des deux ondes, par l'intermédiaire des atomes, est très faible [22,31]. Dans ces conditions, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{x}, t) = \left\{ \vec{e} \epsilon(\vec{x}, t) e^{i\omega_{01}(t-z/c)} + \text{c.c.} \right\} \\ \vec{P}(\vec{x}, t) = \left\{ \vec{e} \mathcal{P}(\vec{x}, t) e^{i\omega_{01}(t-z/c)} + \text{c.c.} \right\} \end{array} \right. \quad , \quad (\text{I.44})$$

où  $\vec{e}$  est la polarisation de la lumière émise sur la transition ( $0 \rightarrow 1$ ) et où  $\varepsilon(\vec{x}, t)$  et  $\mathcal{P}(\vec{x}, t)$  sont les enveloppes lentement variables du champ et de la polarisation du milieu. Si l'on introduit de plus l'inversion de population locale  $\mathcal{N}(\vec{x}, t)$  définie par

$$\mathcal{N}(\vec{x}, t) = n(\vec{x}) [\rho_{00}(\vec{x}, t) - \rho_{11}(\vec{x}, t)] \quad , \quad (\text{I.45})$$

les équations (I.43) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} &= 2 \frac{i}{\hbar} [\varepsilon^* \mathcal{P} - \varepsilon \mathcal{P}^*] \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} &= \frac{i}{\hbar} |d_{01}|^2 \varepsilon \mathcal{N} \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

Avec les mêmes approximations l'équation de Maxwell (I.42) s'écrit

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \varepsilon = -i \frac{\omega_{01}}{2\varepsilon_0 c} \mathcal{P} \quad . \quad (\text{I.47})$$

Nous avons négligé dans ce traitement l'effet Doppler dû au mouvement des atomes ainsi que les collisions entre atomes et les processus de relaxation atomique. Ces différents effets ont sur l'émission superradiante un rôle essentiellement déphasant ; on peut d'ailleurs en tenir compte de manière phénoménologique dans les équations de Bloch-Maxwell [22,36].

### 3.2 Démarrage de l'émission superradiante. Fluctuations "quantiques".

Si l'on suppose que, à l'instant initial, tous les atomes sont dans l'état excité  $|0\rangle$  et qu'aucun champ électromagnétique ne leur est appliqué, on a nécessairement, à  $t=0$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{N}^0(\vec{x}, 0) = n(\vec{x}) \\ \mathcal{S}^0(\vec{x}, 0) = 0 \\ \varepsilon(\vec{x}, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Dans ces conditions il est clair que, d'après les équations (I.46) et (I.47), le système n'évolue pas ; dans le formalisme semi-classique, un tel état initial est donc métastable. Ceci est évidemment en contradiction avec l'expérience mais n'est pas réellement surprenant. En effet on peut s'attendre à ce que la superradiance, en tant que phénomène d'émission spontanée, requière une description complètement quantique. Il a cependant été montré que, excepté durant une courte période qui correspond à l'émission d'une très faible proportion des photons émis, les équations de Bloch-Maxwell décrivent assez correctement l'évolution du système [28,31]. Le champ émis possède d'ailleurs certaines propriétés, de cohérence [7,8,9] ou de polarisation [13,14], par exemple, qui sont caractéristiques d'un champ classique.

Il est donc possible d'utiliser les équations de Bloch-Maxwell pour décrire la superradiance, pourvu qu'on introduise comme conditions initiales de ces équations l'état final d'une courte période quantique qui décrit l'émission des premiers photons. De telles méthodes sont décrites en détail dans les références [22,27,28,31]. On comprend bien, dans un tel traitement, que l'intensité rayonnée fluctue d'un pulse à l'autre (dans des conditions rigoureusement identiques), les fluctuations quantiques du début de l'émission étant en quelque sorte amplifiées dans la suite de l'évolution. On constate finalement des fluctuations macroscopiques affectant toutes les propriétés de l'impulsion

lumineuse émise : retard, maximum de l'intensité, polarisation, ... .  
 Ces fluctuations ont été étudiées théoriquement, par diverses méthodes [13,27,32,40,41] . Dans le Chapitre II nous utilisons, pour rendre compte de ce phénomène, une méthode phénoménologique qui consiste à introduire comme conditions initiales des équations de Bloch-Maxwell, une polarisation  $\mathcal{P}$  ou un champ  $\varepsilon$  dont le module n'est pas nul et dont l'argument varie aléatoirement à l'intérieur du milieu [27].  
 Plus précisément, le milieu atomique est divisé en  $\nu$  tranches identiques auxquelles on attribue une polarisation

$$\mathcal{P}_k = |d_{01}| \sqrt{\nu \bar{n}} e^{i\varphi_k} \quad , \quad (\text{I.49})$$

où  $\bar{n}$  est la densité volumique d'atomes, supposée constante et où les phases  $\varphi_k$  sont aléatoires. On constate que les grandeurs calculées ainsi sont en moyenne pratiquement indépendantes de  $\nu$  lorsque ce nombre est suffisamment grand (de l'ordre de 25 dans nos calculs). Les fluctuations obtenues pour l'intensité sur un grand nombre de tirages de l'ensemble aléatoire  $\{\varphi_k\}$  sont en bon accord avec les autres résultats théoriques [13,27].



## Chapitre II

SUPERRADIANCEEN REGIME D'OSCILLATIONS DE POMPAGEINTRODUCTION.

Lorsque l'on étudie la superradiance d'atomes à deux niveaux, on suppose généralement que les atomes sont portés de façon percussive dans leur état excité. Ceci est vrai si la durée du pompage,  $T_P$ , est très nettement inférieure au temps caractéristique de l'émission superradiante,  $T_{SR}$ . En fait, une telle condition n'est jamais vérifiée dans les expériences de superradiance réalisées jusqu'à maintenant. Cependant les propriétés de l'émission ne sont pratiquement pas modifiées tant que la durée de l'excitation reste très inférieure au temps d'apparition de la superradiance,  $T_D$ . Dans le cas où  $T_P$  devient du même ordre que  $T_D$ , des "effets de pompage" peuvent être observés : de tels effets permettent, par exemple, d'observer une émission superradiante sur la moins probable de deux transitions qui ont même niveau supérieur commun [4,31] ; ils permettent également de déceler

l'existence d'une cascade superradiante aboutissant sur le niveau fondamental de l'atome [42,43]. On prévoit également des propriétés remarquables dans le cas d'une seule transition superradiante et il nous a semblé intéressant d'étudier expérimentalement l'émission superradiante dans le cas habituel d'atomes à trois niveaux (cf. Figure II-1),

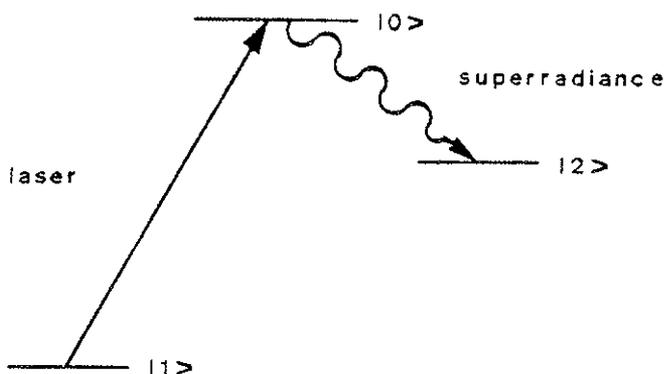


Figure II-1

lorsque l'impulsion laser de pompage, quasi-monochromatique et résonnante avec la transition  $(0 \rightarrow 1)$ , dure un temps beaucoup plus grand que le délai d'apparition de la superradiance sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ . On s'attend alors à ce que l'intensité de la lumière émise présente des oscillations qu'on peut appeler "oscillations de pompage" et que l'on peut comprendre facilement. Des atomes qui sont initialement dans le niveau  $|1\rangle$  sont portés par le pompage du laser dans le niveau  $|0\rangle$  et, lorsque l'inversion de population sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$  est suffisante, une impulsion superradiante est émise et le niveau  $|0\rangle$  se vide, au moins partiellement, au profit du niveau  $|2\rangle$ . Le laser peuple à nouveau le niveau  $|0\rangle$ , si bien qu'une deuxième impulsion superradiante peut alors être émise et ainsi de suite. Il s'établit ainsi, en quelque sorte, un régime d'oscillations de relaxation et l'on observe pendant toute la durée du pompage une succession d'impulsions

superradiantes. Ce phénomène est analogue au régime transitoire qui précède l'établissement d'une oscillation laser ou maser. Dans ce dernier cas, les oscillations ont d'ailleurs été observées [44]. Nos résultats présentent cependant des différences importantes par rapport à ces derniers. Ces différences sont dues essentiellement aux fluctuations quantiques caractéristiques de la superradiance et à l'influence des effets de propagation, eux-mêmes responsables d'oscillations ("ringing" [22]) qui compliquent le phénomène. Dans la première partie du chapitre nous décrivons le montage que nous avons utilisé ainsi que les résultats de nos observations. Dans la seconde partie, nous en donnons une analyse théorique.

## 1. ETUDE EXPERIMENTALE DE LA SUPERRADIANCE DANS LE CAS D'UN POMPAGE DE LONGUE DUREE.

### 1.1 Description générale de l'expérience.

Le principe de l'expérience est celui des expériences habituelles de superradiance [3-6] ; l'originalité de l'expérience vient uniquement de la longue durée de l'impulsion laser de pompage. Les niveaux concernés de l'atome de baryum sont représentés sur la Figure II.2. Le pompage a lieu entre le niveau fondamental  $6s^2 \ ^1S_0$  (noté  $|1\rangle$ ) et le niveau  $6s6p \ ^1P_1$  (noté  $|0\rangle$ ) ; la longueur d'onde correspondante est 553,5 nm. On observe l'émission coopérative partant de ce dernier niveau vers le niveau  $6s5d \ ^1D_2$  (noté  $|2\rangle$ ) ; la longueur d'onde est 1,5  $\mu$ . La durée

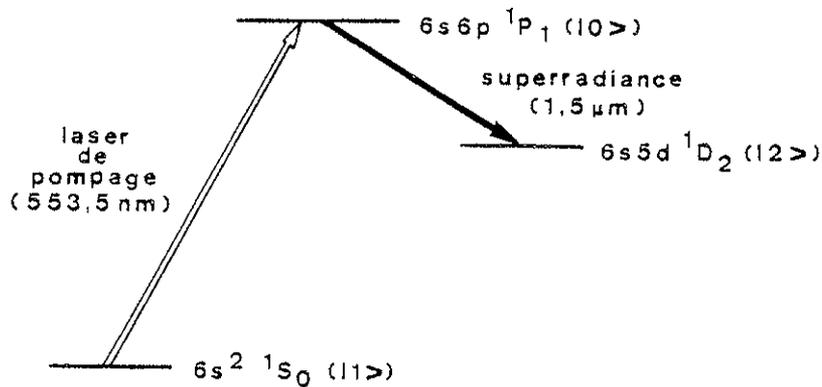


Figure II-2

de l'impulsion laser de pompage est de l'ordre de 50 ns. A titre de comparaison, nous avons également observé l'émission à 1,5  $\mu$  dans des conditions expérimentales similaires, mais dans le cas où l'impulsion laser de pompage est fournie par un laser à colorant pompé par un laser à azote et a donc une durée sensiblement plus courte ( $\sim 5$  ns).

### 1.2 Description du montage expérimental.

Le montage expérimental est schématisé dans la Figure II-3 . La vapeur de baryum est fournie par un "heat-pipe" et est illuminée par un faisceau laser dont la section à l'intérieur du heat-pipe est environ  $0,5 \text{ mm}^2$ . On détecte l'émission à 1,5  $\mu$  dans la direction du laser grâce à un détecteur infrarouge placé derrière un filtre qui élimine la lumière du laser ; l'enregistrement du signal superradiant par un analyseur de transitoires est déclenché au moyen d'une fraction du signal du laser de pompage reçue par une photodiode.

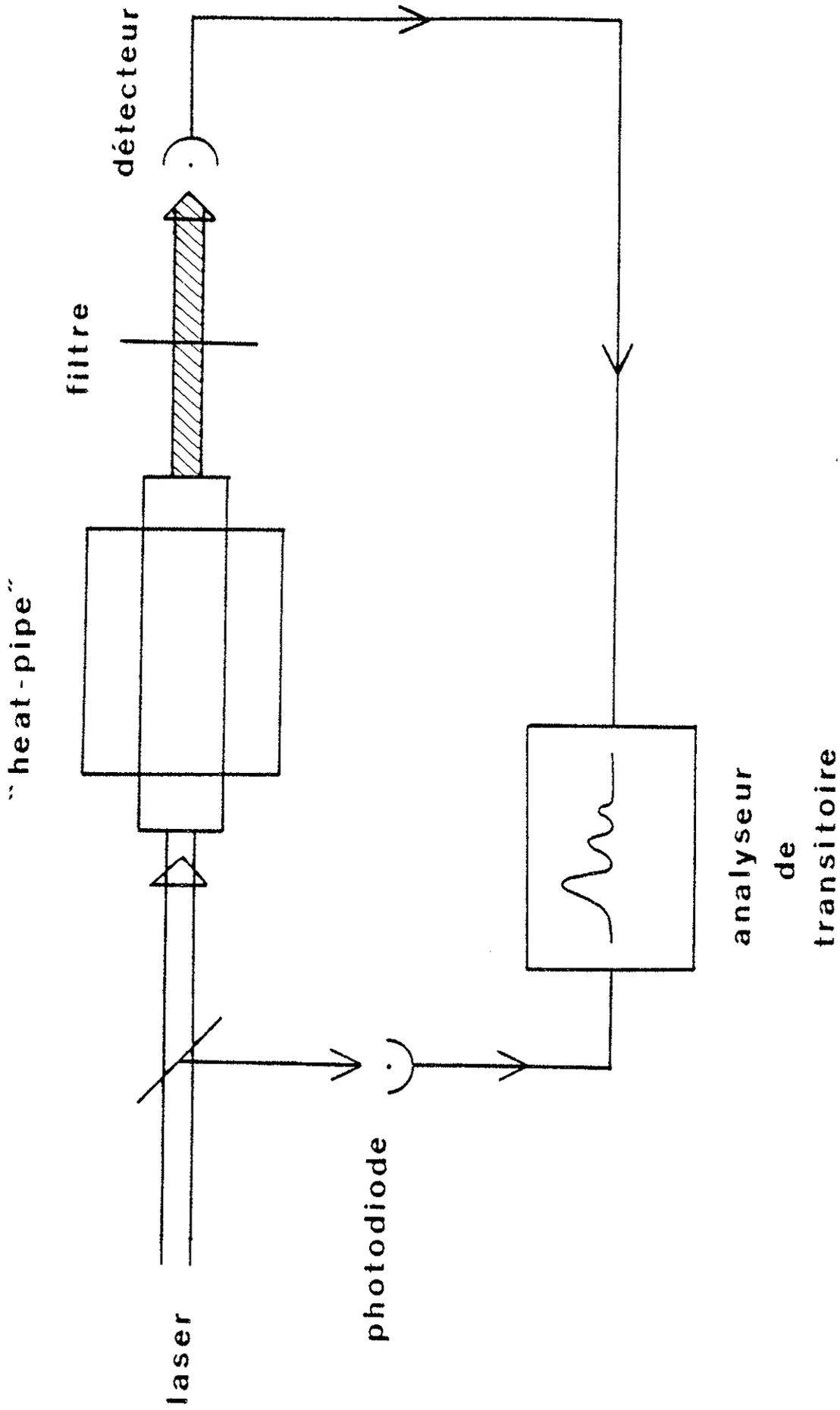


Figure II-3

### 1.2.1) L'excitation optique.

Nous avons utilisé pour cette expérience, un laser monomode pulsé construit au Laboratoire Aimé Cotton [45]. La Figure II-4 en décrit le montage. Le milieu actif est une solution de rhodamine 110 qui circule sous forme d'un jet laminaire afin de ne pas être détériorée par les faisceaux de pompe. Ce colorant est soumis à deux faisceaux. L'un, continu, est produit par un laser à argon ionisé ; sa longueur d'onde est  $\lambda = 514,5 \text{ nm}$  et sa puissance 1 W. L'autre, pulsé, est fourni par un laser à néodyme Yag dont la fréquence est doublée ; sa longueur d'onde est  $\lambda = 473 \text{ nm}$ , la durée des impulsions est de 150 ns environ et leur puissance crête de l'ordre de 1 kW. Le principe du fonctionnement est le suivant : l'excitation par le laser à  $\text{Ar}^+$  donne lieu à une oscillation continue et monomode. Cette oscillation pilote en quelque sorte l'oscillation du laser lorsque celui-ci est soumis à une excitation de forte puissance due aux impulsions du laser Yag doublé. En effet, l'oscillation qui prend naissance sous l'effet des impulsions du laser Yag se forme beaucoup plus vite sur le mode oscillant en continu que sur les autres modes, pour lesquels elle démarre sur le bruit. Alors le gain du milieu actif se sature et diminue pour les modes différents du mode continu, ce qui les défavorise. En d'autres termes, on peut dire que le laser fonctionne comme un laser à injection : le signal d'injection qui pilote en particulier la fréquence de l'oscillation est constitué par la partie continue monomode, tandis que l'excitation de puissance est constituée par les impulsions du Yag. On assiste en quelque sorte à un "verrouillage" des oscillations pulsées sur le mode

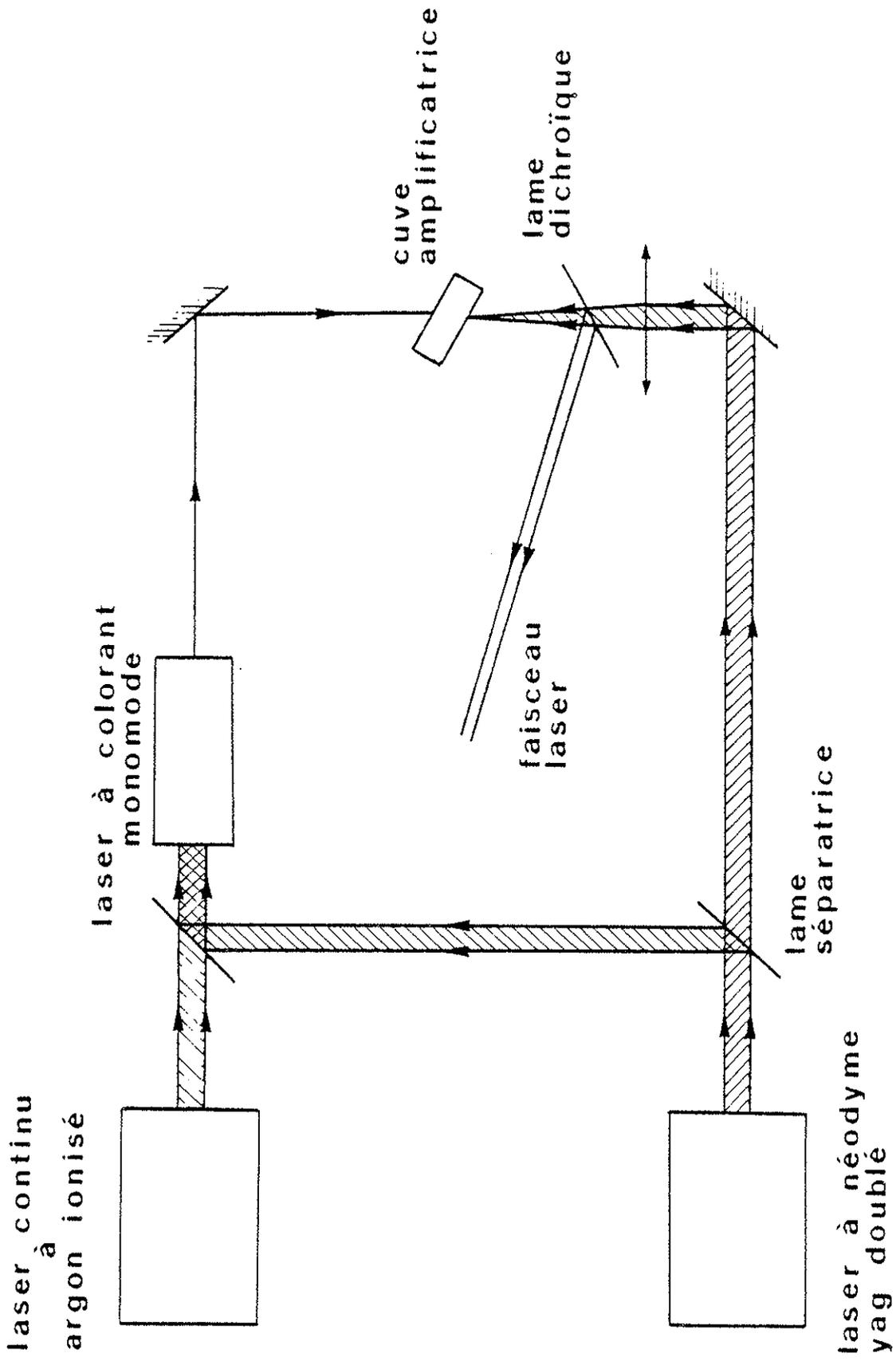


Figure II-4

continu. Il faut remarquer qu'une telle situation ne se maintient que si la puissance de l'impulsion n'est pas trop élevée et sa durée assez faible, autrement l'effet laser finit par se produire sur plusieurs modes. Pour cette raison, seule une partie du faisceau fourni par le Yag est utilisée dans la cavité, l'autre partie sert à pomper un colorant placé dans une cuve sans circulation. Le faisceau à amplifier est colinéaire au faisceau pompe mais de sens de propagation contraire. La puissance obtenue après passage dans la cuve amplificatrice était de l'ordre de 3 W et la durée des impulsions de l'ordre de 50 ns (cf. Figure II-7).

#### 1.2.2) La cellule de résonance.

La vapeur de baryum qui constitue le milieu actif est contenue dans une cellule de forme allongée, fermée à ses extrémités par deux fenêtres, transparentes pour le faisceau laser et l'émission superradiante. Pour que le baryum ne s'y dépose pas et n'empêche pas le passage de la lumière, nous avons utilisé un "heat-pipe", qui est schématisé sur la Figure II-5 : la cellule cylindrique en métal, fermée par deux fenêtres en infrasil (silice fondue, transparente dans l'infrarouge), est chauffée dans sa partie centrale par un four et refroidie à ses extrémités par une circulation d'eau. Le baryum liquide imprègne une mèche en tantale qui couvre la paroi interne, dans la zone chauffée par le four. Enfin, la cellule contient, de plus, un gaz tampon (néon), qu'on introduit avant le chauffage. Dans le fonctionnement en régime "heat-pipe, il apparaît trois zones de températures uniformes séparées par des zones intermédiaires (Figure II-6). La zone centrale , C ,

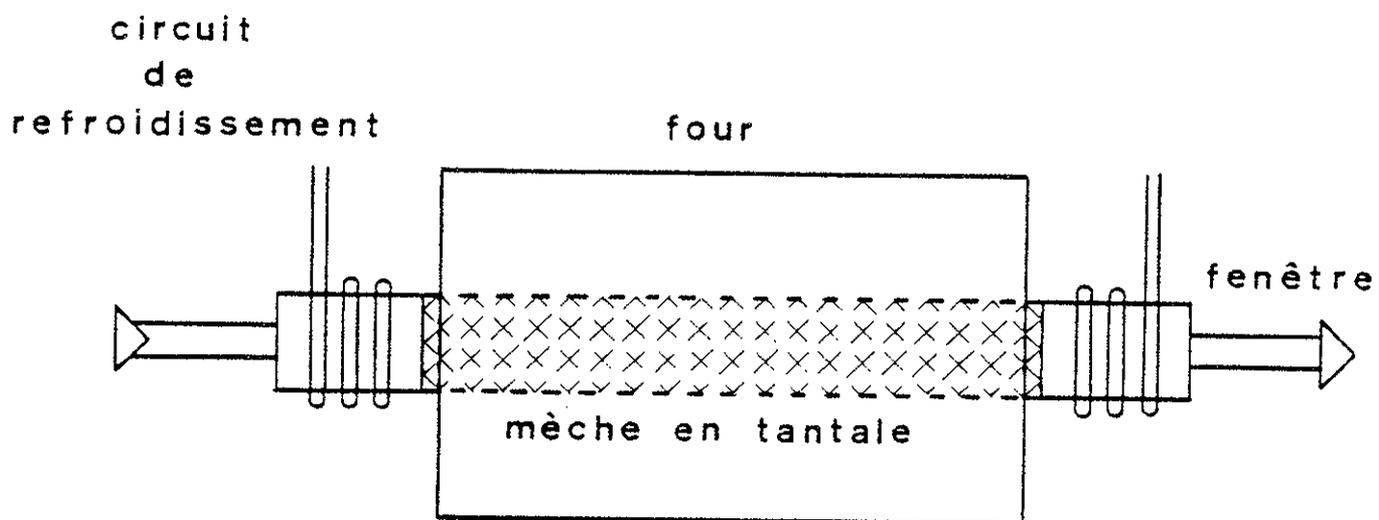


Figure II-5

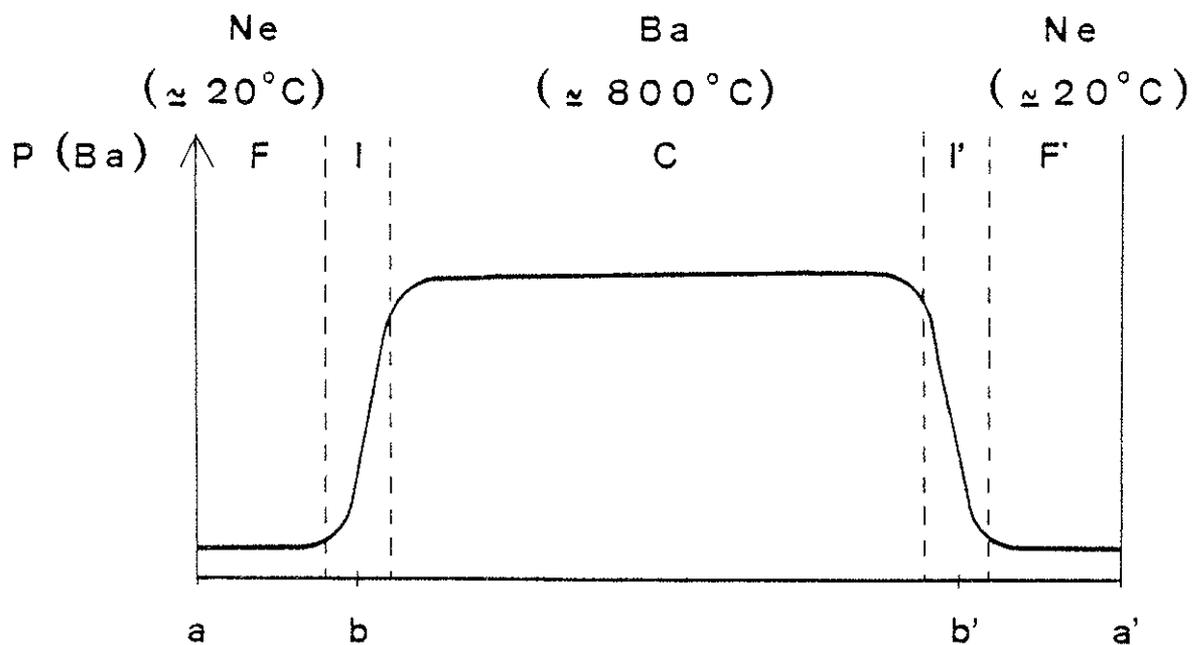


Figure II-6

chauffée par le four, possède une température élevée et la pression de vapeur saturante du baryum y est importante ; les deux zones extrêmes F et F', refroidies par la circulation d'eau possèdent une température basse et la pression de vapeur du baryum y est négligeable. De ce fait, la pression totale due aux deux gaz étant uniforme, le baryum se trouve à l'état presque pur dans la zone C, dont la longueur est de 10 cm environ, et présente dans les zones F et F' des concentrations très faibles, si bien qu'il ne se dépose pas sur les fenêtres. Dans les zones intermédiaires I et I' les deux gaz sont mélangés. La vapeur de baryum dans le "heat-pipe" n'est pas immobile, elle circule de la partie centrale C vers les zones I et I' où elle se condense sous l'effet de la diminution de la température et forme des gouttelettes qui imprègnent la mèche de tantale. Le baryum revient alors par capillarité dans la zone centrale et régénère le liquide consommé par la production de vapeur.

### 1.2.3) La détection.

Pour détecter les impulsions lumineuses superradiantes, nous avons utilisé une cellule photovoltaïque InSb sensible dans le proche infrarouge dont le temps de réponse est de l'ordre de une nanoseconde. Les signaux ainsi obtenus sont enregistrés par un analyseur de transitoires, le "Programmable digitizer" de Tektronix 7912 AD, qui permet un enregistrement en temps réel avec mémorisation du signal digitalisé ainsi qu'un enregistrement sur une bande de magnétoscope. On peut ainsi stocker très simplement un grand nombre de résultats.

### 1.3 Résultats expérimentaux.

Nous avons, dans une expérience préliminaire, étudié l'émission superradiante sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$  lorsque l'excitation sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$  est réalisée à l'aide d'une impulsion laser de 5 ns de durée, délivrée par un laser à colorant pompé par un laser à azote. On obtient dans ce cas, pour des pressions variant de quelques dixièmes de Torr à quelques Torr, une impulsion superradiante à un seul pic (cf. Figure II-7) dont le retard par rapport à l'impulsion laser varie depuis

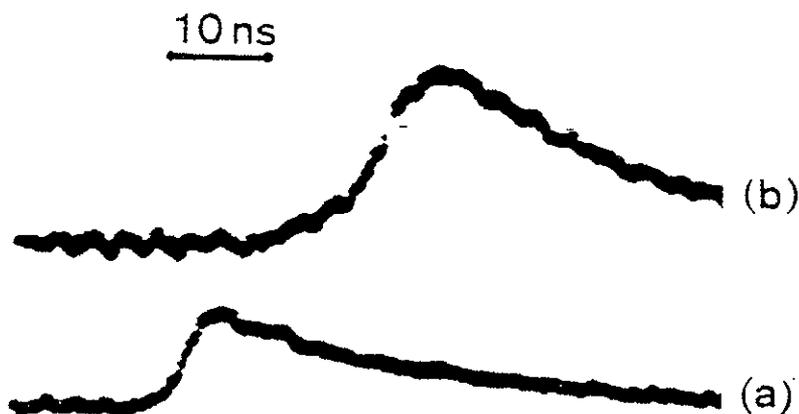


Figure II-7

La trace (a) représente le laser, la trace (b) une impulsion superradiante. Les signaux sont ici considérablement élargis par le détecteur.

La durée de l'impulsion laser est en fait de 5 ns environ.

quelques nanosecondes jusque 30 ns . On constate donc expérimentalement que, lorsqu'on réalise une inversion de population complète sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$  , l'émission sur cette transition est à coup sûr

coopérative lorsque la population du niveau excité (qui est probablement du même ordre que la densité d'atomes) est de l'ordre de  $10^{15}$  ou  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$ .

En ce qui concerne l'expérience proprement dite, c'est-à-dire lorsque l'excitation sur la transition ( $0 \rightarrow 1$ ) est réalisée à l'aide d'une impulsion laser de 50 ns de durée, délivrée par le laser décrit dans le paragraphe 1.2.1), la Figure II-8 montre quelques enregistrements de la

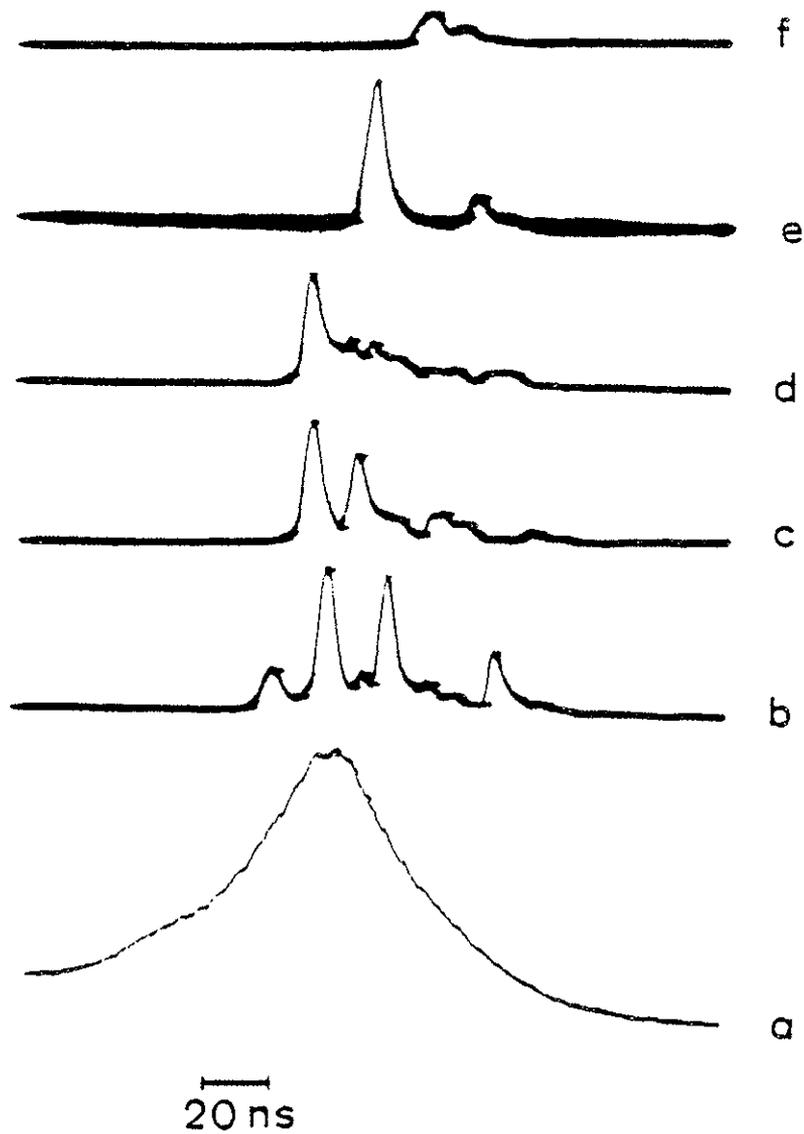


Figure II-8

lumière émise sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ . La trace (a) représente l'impulsion laser, les autres traces représentent l'émission infrarouge ; les traces (b), (c) et (d) ont été obtenues dans des conditions expérimentales identiques ; les traces (e) et (f) ont été obtenues dans les mêmes conditions mais en interposant des densités optiques de valeurs respectives  $d=1$  et  $d=2$  sur le trajet du faisceau laser. On constate ainsi que le temps d'apparition de la superradiance augmente et que, conjointement, le nombre de pics de l'impulsion diminue lorsque l'efficacité du pompage diminue. Par ailleurs, il faut noter que nous n'avons jamais pu mettre en évidence une forme de signal et, notamment, une fréquence, même approchée, de répétition des pics qui soit reproductible d'un coup à l'autre. Ces fluctuations importantes de l'allure même des signaux ne peuvent être totalement expliquées par l'instabilité de la puissance du laser. Elles sont en fait, comme on le verra, la manifestation dans ce cas particulier des fluctuations "quantiques" habituelles de la superradiance [13,14,27].

## 2. INTERPRETATION DES RESULTATS.

Qualitativement, les oscillations observées dans l'expérience décrite ici s'interprètent très naturellement comme étant dues à un phénomène d'oscillations de relaxation. Une interprétation plus quantitative peut être obtenue en utilisant, pour décrire la superradiance, l'un des modèles présentés dans le Chapitre I, par exemple, mais en tenant compte cette fois du processus de pompage. Dans le cas du modèle semi-

classique en particulier, les équations correspondantes sont faciles à obtenir lorsque le pompage est en bande large ou en bande étroite [39]. Les expériences que nous avons réalisées correspondent d'ailleurs à ce dernier cas. Nous avons choisi de décrire ici les résultats de deux modèles. Le premier modèle concerne un pompage en bande large et utilise l'approximation du champ moyen. Il conduit à une solution analytique simple qui rend compte des principales caractéristiques du phénomène observé. Le second modèle est mieux adapté à l'interprétation de nos expériences ; le pompage  $\gamma$  est supposé quasi-monochromatique et l'on y prend en compte la propagation de l'impulsion superradiante. La phase quantique de l'émission est simulée grâce à une polarisation initiale dont la phase varie aléatoirement d'une tranche à l'autre du volume occupé par les atomes. Nous présentons quelques résultats typiques de ce modèle, obtenus par calcul sur ordinateur. Dans toute cette analyse théorique, nous avons négligé la relaxation des niveaux atomiques et les effets de "perte de champ" [22]. Ainsi, à la grande différence des études concernant l'établissement des régimes laser ou maser [44,46], nous ne pouvons pas rendre compte d'un éventuel régime permanent, qui n'avait évidemment pas le temps de s'établir dans notre expérience.

## 2.1 Equations semi-classiques incluant le processus de pompage.

A partir de l'instant  $t=0$  on applique aux atomes à trois niveaux (cf. Figure II-1), supposés initialement dans l'état  $|1\rangle$ , un rayonnement constant accordé à la transition  $(0 \rightarrow 1)$ . Dans ce paragraphe, nous envisagerons à la fois le cas d'un rayonnement quasi-monochromati-

que (excitation en "bande étroite" [39]) et celui d'un rayonnement de grande largeur spectrale (excitation en "bande large" [22]). Comme dans le Chapitre I, le milieu atomique est décrit par une matrice densité  $\rho(\vec{x}, t)$  continue en  $\vec{x}$ . On suppose également que le champ  $E_2$  rayonné sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$  est un paquet d'ondes planes émis suivant Oz et vers l'avant du volume actif ; on introduit les enveloppes lentement variables en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2 = [\epsilon_2 e^{i\omega_{02}(t-z/c)} + c. c.] \\ \rho_{20} = \tilde{\rho}_{20} e^{i\omega_{02}(t-z/c)} \\ \rho_{10} = \tilde{\rho}_{10} e^{i\omega_{01}(t-z/c)} \\ \rho_{12} = \tilde{\rho}_{12} e^{i(\omega_{01} - \omega_{02})(t-z/c)} \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

où  $\omega_{01}$  et  $\omega_{02}$  sont les fréquences respectives des transitions  $(0 \rightarrow 1)$  et  $(0 \rightarrow 2)$ . L'évolution des atomes est régie par les équations suivantes, dans lesquelles on a groupé le cas d'une excitation en bande étroite et celui d'une excitation en bande large :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = -\frac{id_{02}}{\hbar} [\epsilon_2^* \tilde{\rho}_{20} - c. c.] \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{10} = -\frac{id_{02}}{\hbar} \epsilon_2 \tilde{\rho}_{12} \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{20} = \frac{id_{02}}{\hbar} \epsilon_2 (\rho_{00} - \rho_{22}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{12} = -\frac{id_{02}}{\hbar} \epsilon_2^* \tilde{\rho}_{10} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} -\frac{i\omega_1}{2} (\tilde{\rho}_{10} - \tilde{\rho}_{01}) \\ +\frac{i\omega_1}{2} (\rho_{00} - \rho_{11}) \\ -\frac{i\omega_1}{2} \tilde{\rho}_{21} \\ +\frac{i\omega_1}{2} \tilde{\rho}_{02} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} -K (\rho_{11} - \rho_{00}) \\ \\ \\ \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

(superradiance)                      (pompage bande étroite)      ou      (pompage bande large)

A ces équations il faut ajouter, dans les deux cas

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{00} = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{11} + \rho_{22}) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon_2 = - \frac{i \omega_{02} d_{02} n}{2 \varepsilon_0} \tilde{\rho}_{20} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Dans ces équations,  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont les éléments de matrice respectifs du dipôle atomique pour les transitions  $(0 \rightarrow 1)$  et  $(0 \rightarrow 2)$  et  $n$  est la densité volumique des atomes. Dans le cas d'une excitation en bande étroite, le champ appliqué  $E_1$  est décrit par une onde plane

$$E_1 = [\varepsilon_1 e^{i \omega_{01} (t-z/c)} + \text{c.c.}] \quad , \quad (\text{II.4})$$

où  $\varepsilon_1$  est indépendant de  $z$  et de  $t$ , et la fréquence de Rabi correspondante est

$$\omega_1 = \frac{2 d_{01} |\varepsilon_1|}{\hbar} \quad . \quad (\text{II.5})$$

Dans le cas de l'excitation en bande large, le coefficient  $X$  caractérise le taux de pompage.

## 2.2 Modèle simplifié : pompage faible, en bande large et approximation du champ moyen.

Dans l'approximation du champ moyen, on s'intéresse à l'évolution des grandeurs moyennes définies à partir des  $\rho_{ij}$  et de  $\varepsilon_2$  par des équations du type

$$\bar{X} = \frac{1}{L} \int_0^L dz X \quad . \quad (\text{II.6})$$

On suppose que l'on peut négliger les corrélations spatiales entre les différentes grandeurs et écrire des relations du type

$$\overline{XY} = \overline{X} \overline{Y} \quad . \quad (II.7)$$

Dans ces conditions on montre assez simplement [32] que le champ moyen  $\epsilon_2$  est proportionnel à la cohérence optique moyenne sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$

$$\epsilon_2 = \frac{i\omega_{02} d_{02} L n}{2 \epsilon_0 c} \overline{\rho}_{20} \quad (II.8)$$

et que les termes des équations (II.2) qui concernent la superradiance deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \rho_{22} = 2 |\overline{\rho}_{02}|^2 / T_{SR} \\ \frac{d}{dt} \overline{\rho}_{10} = - \overline{\rho}_{20} \overline{\rho}_{12} / T_{SR} \\ \frac{d}{dt} \overline{\rho}_{20} = \overline{\rho}_{20} (\overline{\rho}_{00} - \overline{\rho}_{22}) / T_{SR} \\ \frac{d}{dt} \overline{\rho}_{12} = \overline{\rho}_{02} \overline{\rho}_{10} / T_{SR} \end{array} \right. , \quad (II.9)$$

les termes correspondant au pompage étant, aux valeurs moyennes près, les mêmes que dans les équations (II.2). La constante  $T_{SR}$  qui apparaît dans les équations est l'habituel temps caractéristique de superradiance

$$T_{SR} = \frac{2\pi\epsilon_0 c}{\omega_{02} d_{02}^2 L n} \quad . \quad (II.10)$$

On suppose de plus ici que le pompage est suffisamment faible ou bien que l'on s'intéresse à des temps suffisamment petits pour que la plus grande partie des atomes restent dans l'état  $|1\rangle$ . Ceci permet de simplifier les équations, du moins lorsque l'excitation est en bande large. Finalement, dans le cas d'un pompage en bande large et tant que la proportion d'atomes excités reste suffisamment faible, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\mathcal{N}} &= -4 |\bar{\mathcal{P}}|^2 / T_{SR} + K \\ \frac{d}{dt} \bar{\mathcal{P}} &= \bar{\mathcal{P}} \bar{\mathcal{N}} / T_{SR} \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

à condition de poser

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{N}} &= \bar{p}_{00} - \bar{p}_{22} \\ \bar{\mathcal{P}} &= \bar{p}_{20} \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Nous allons voir qu'il est possible de trouver une solution analytique approchée aux équations (III.11) qui soit de la forme suivante, schématisée dans la Figure II-9 ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{N}} &= K t - \sum_{i=1, \infty} B_i [1 + \text{th } \alpha_i (t - t_i)] \\ \bar{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1, \infty} \frac{A_i}{\text{ch } \alpha_i (t - t_i)} \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

c'est-à-dire une solution où  $\bar{\mathcal{P}}$  et donc l'intensité rayonnée se présentent comme une série de pics dont les sommets sont atteints aux instants  $t_i$  et qui sont bien séparés les uns des autres si

$$1/\alpha_i \ll t_{i+1} - t_i \quad , \quad t_i - t_{i-1} \quad ; \quad (\text{II.14})$$

en ce qui concerne l'inversion de population  $\bar{\mathcal{N}}$  , elle comprend, en plus du terme de pompage  $Kt$  , une fonction "escalier" (descendant) dont la valeur au voisinage d'un pic, c'est-à-dire pour  $t \sim t_i$  , est

$$-2 \sum_{j < i} B_j - B_i [1 + \text{th } \alpha_i (t - t_i)] \quad . \quad (\text{II.15})$$

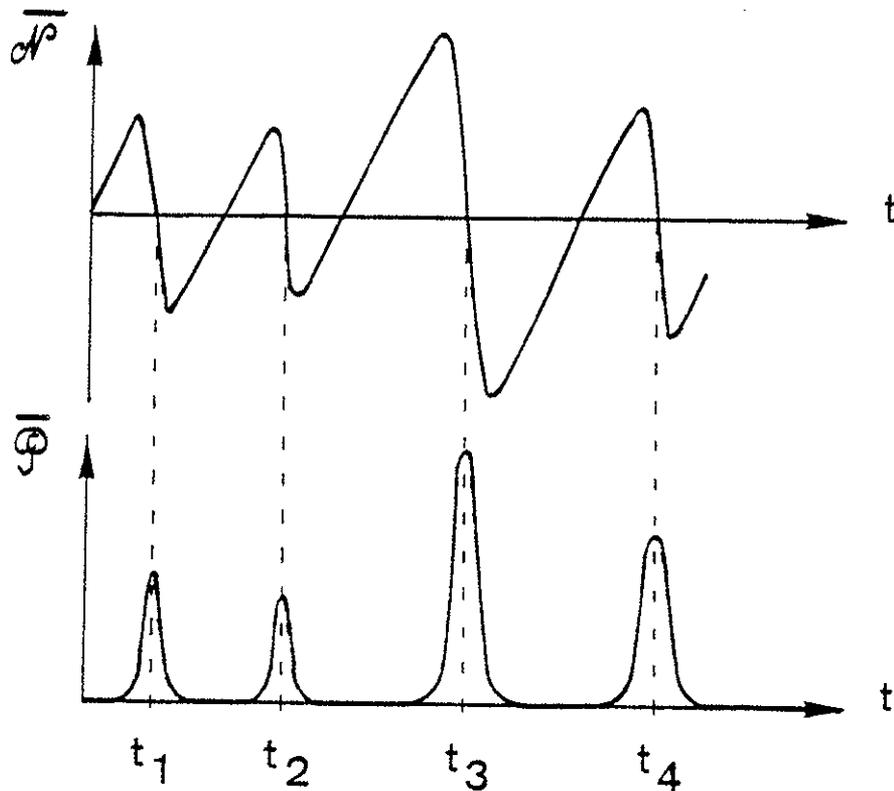


Figure II-9

En supposant la condition (II.14) vérifiée, un calcul simple permet de montrer que les équations (II.11) admettent les fonctions (II.13) comme solution pourvu que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = B_i / T_{SR} \\ A_i = B_i / 2 \\ t_i = [2 \sum_{j < i} B_j + B_i] / K \end{array} \right. \quad (II.16)$$

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre I, l'émission superradiante ne démarre pas si  $\bar{\phi}$  est nul à l'instant  $t=0$ . Il est nécessaire de simuler la phase quantique de l'émission en donnant une valeur initiale

non nulle à  $\bar{\mathcal{P}}$ . Comme on le fait habituellement pour la superradiance (sans effets de pompage), on supposera ici que cette polarisation initiale est induite par les fluctuations du vide de photons dans les modes du volume de diffraction lié à la géométrie du volume occupé par les atomes [22]. Le champ classique correspondant à ces fluctuations est de l'ordre de [31]

$$\sqrt{\frac{\hbar \omega_{02}}{2\epsilon_0 L a^2}} \quad (\text{II.17})$$

et la polarisation correspondante (cf. équation (II.8)) fluctue autour de la valeur

$$\bar{\mathcal{P}}_0 = \sqrt{\frac{T_{\text{SR}}}{N(L/c)}} \quad (\text{II.18})$$

Si l'on choisit une valeur  $\bar{\mathcal{P}}_1$  comme valeur initiale on trouve que le premier pic de la fonction  $\bar{\mathcal{P}}$  est alors caractérisé par un paramètre  $B_1$  tel que

$$B_1^2 = K T_{\text{SR}} \text{Log}(B_1/\bar{\mathcal{P}}_1) \quad (\text{II.19})$$

Les autres pics de la fonction  $\bar{\mathcal{P}}$  sont alors également déterminés sans ambiguïté et les paramètres  $B_i$  sont tous égaux à  $B_1$ , tandis que

$$t_i = (2i+1) B_1/K \quad (\text{II.20})$$

En effet on voit facilement que pour  $t = 2t_1$ , la fonction  $\bar{\mathcal{P}}$  prend à nouveau la valeur  $\bar{\mathcal{P}}_1$  si bien que le calcul de  $B_2$  est identique à celui de  $B_1$  et ainsi de suite. Il faut cependant remarquer que, lorsque la valeur de  $\bar{\mathcal{P}}$  calculée est trop faible, ce sont à nouveau les fluctuations du vide qui fixent la polarisation du milieu atomique. Il est donc nécessaire, pour tenir compte de ces fluctuations, de prendre

des paramètres  $B_i$  différents les uns des autres et changeant aléatoirement d'un pic à un autre. Notons que la valeur moyenne des paramètres  $B_i$ , qui est donnée par l'équation (II.19), est

$$B \sim \sqrt{K T_{SR} \text{Log } u} \quad , \quad (\text{II.21})$$

avec

$$u^2 = K T_{SR} / \bar{\mathcal{P}}_0 = N K L/c \quad , \quad (\text{II.22})$$

pourvu que l'on ait

$$u \gg \text{Log } u \quad . \quad (\text{II.23})$$

L'intervalle moyen entre deux pics est alors

$$\Delta T \sim 2 \sqrt{\text{Log } u} / \Omega \quad (\text{II.24})$$

et la largeur moyenne d'un pic est

$$\delta T \sim 1 / \Omega \sqrt{\text{Log } u} \quad , \quad (\text{II.25})$$

où l'on a posé

$$\Omega^2 = K / T_{SR} \quad . \quad (\text{II.26})$$

Ainsi, le modèle simplifié décrit dans ce paragraphe permet de rendre compte de l'existence d'un régime d'émission coopérative dans lequel les oscillations sont dues uniquement à la longue durée du pompage. En effet il faut souligner ici que le modèle du champ moyen ne rend pas compte des effets de propagation et que les oscillations obtenues ici ne peuvent donc en aucun cas être confondues avec les oscillations cohérentes dites de "ringing". Le modèle permet également de comprendre le rôle des fluctuations "quantiques" dans ce régime d'oscillations de pompage.

2.3 Modèle tenant compte de la propagation. Pompage en bande étroite.

Les équations d'évolution du système sous l'effet d'un pompage en bande étroite sont données par les équations (II.2) et (II.3). Nous y avons inclus l'effet Doppler [22] ; on obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = -\frac{i\omega_1}{2} (\tilde{\rho}_{10} - \tilde{\rho}_{01}) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = -\frac{id_{02}}{\hbar} [\epsilon_2^* \tilde{\rho}_{20} - \text{c.c.}] \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{00} = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{11} + \rho_{22}) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{10} = \frac{i\omega_1}{2} (\rho_{00} - \rho_{11}) - \frac{id_{02}}{\hbar} \epsilon_2 \tilde{\rho}_{12} + i k_{01} v \\
 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{20} = -\frac{i\omega_1}{2} \tilde{\rho}_{21} + \frac{id_{02}}{\hbar} \epsilon_2 (\rho_{00} - \rho_{22}) + i k_{02} v \\
 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{12} = \frac{i\omega_1}{2} \tilde{\rho}_{02} - \frac{id_{02}}{\hbar} \epsilon_2^* \tilde{\rho}_{10} + i(k_{01} - k_{02}) v \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \epsilon_2 = -\frac{i\omega_{02} d_{02} n}{2\epsilon_0} \langle \tilde{\rho}_{20} \rangle_v ;
 \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

dans ces équations, toutes les grandeurs atomiques sont considérées comme fonctions de la vitesse  $v$  et le symbole  $\langle \rangle_v$  représente une moyenne sur les vitesses ;  $k_{01}$  et  $k_{02}$  sont les modules des vecteurs d'onde des deux champs. En ce qui concerne le démarrage de l'émission superradiante, nous avons utilisé la méthode décrite dans le Chapitre I, qui consiste à introduire une valeur initiale de  $\tilde{\rho}_{02}$  non nulle et dont la phase varie aléatoirement à l'intérieur du volume occupé par les atomes.

Des exemples de résultats obtenus après intégration de ces équations sur ordinateur sont présentés dans les figures suivantes. Les Figures II-10, II-12 et II-14 correspondent au cas d'un pompage d'intensité constante pendant toute la durée du calcul. A titre de comparaison, nous avons fait des calculs analogues dans le cas où le pompage est interrompu dès l'émission du premier pic : les figures correspondant à ce cas sont II-11 et II-13. Dans tous les calculs présentés ici, les paramètres atomiques sont choisis de manière à représenter à peu près la situation expérimentale. En ce qui concerne le champ, l'impulsion laser est représentée par un créneau dont la hauteur correspond à la puissance crête du laser. De plus, afin de tenir compte, au moins grossièrement, de l'importante absorption du faisceau laser par les atomes, nous avons pris 1 cm (au lieu de 10 cm) comme longueur du volume atomique.

Les Figures II-10 à II-13 permettent une comparaison assez détaillée entre le cas d'un pompage long et celui d'un pompage court. Le deuxième cas correspond à un cas "ordinaire" d'émission superradiante et les oscillations de l'intensité, connues sous le nom de "ringing", sont alors dues uniquement à des effets de propagation de l'impulsion lumineuse dans le volume atomique. La comparaison entre les deux cas permet donc de bien mettre en évidence les propriétés spécifiques des oscillations de pompage, et de voir comment les effets de pompage se conjuguent aux effets de propagation. La comparaison conduit aux remarques suivantes :

(i) contrairement aux oscillations de "ringing" (Figure II-11(b)), les

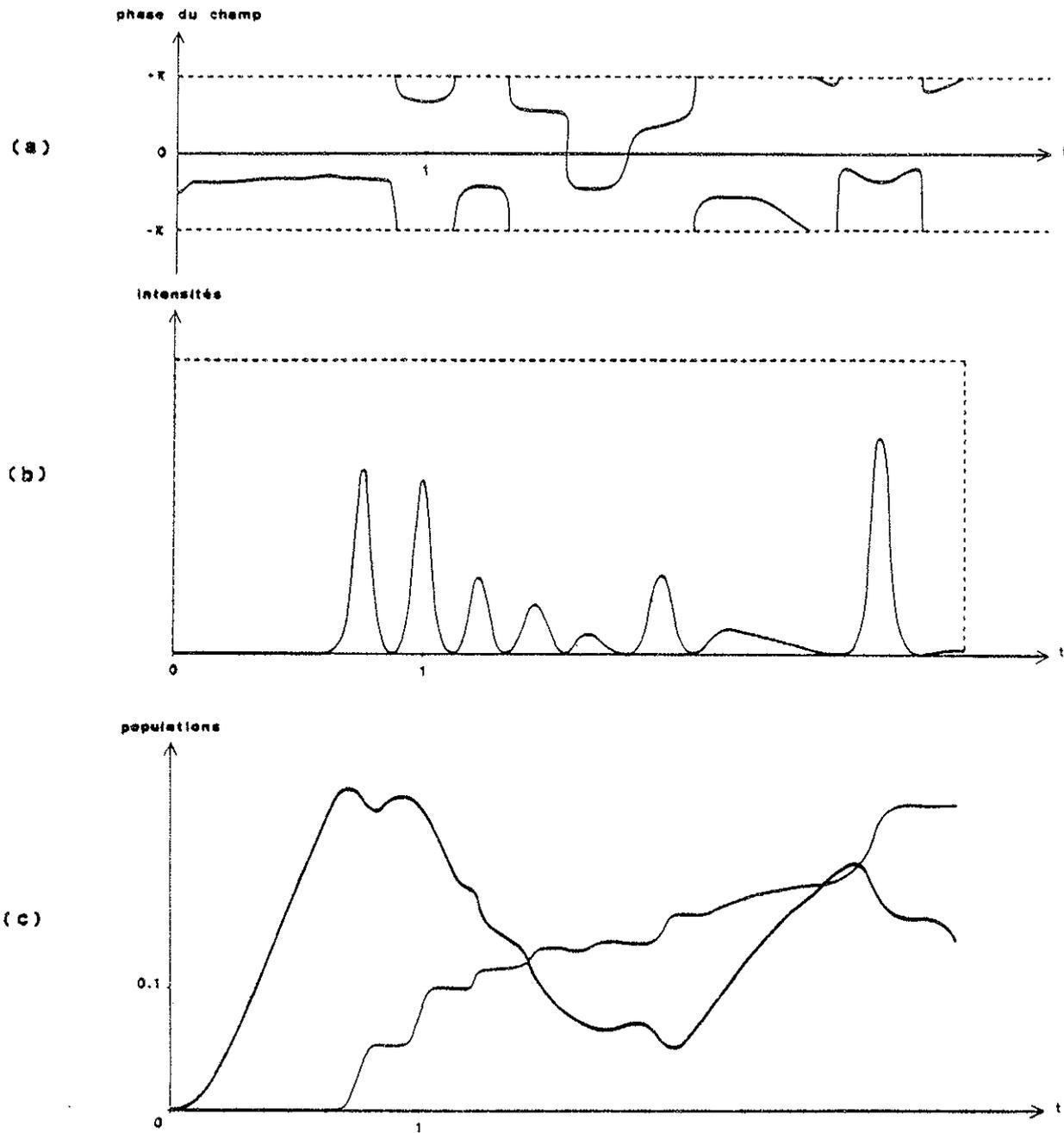


Figure II-10 : La courbe (b) représente l'évolution de  $|\epsilon_2(L,t)|^2$ , c'est-à-dire de l'intensité rayonnée sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$  (trait plein) conjointement avec la forme de l'impulsion de pompage (trait pointillé). La courbe (a) représente l'évolution de la phase de  $\epsilon_2(L,t)$  (modulo  $2\pi$ ) et la courbe (c) celle des populations moyennes (par rapport aux vitesses et aux abscisses) des niveaux  $|0\rangle$  (trait épais) et  $|2\rangle$  (trait fin). Les unités de temps et d'intensité sont arbitraires.

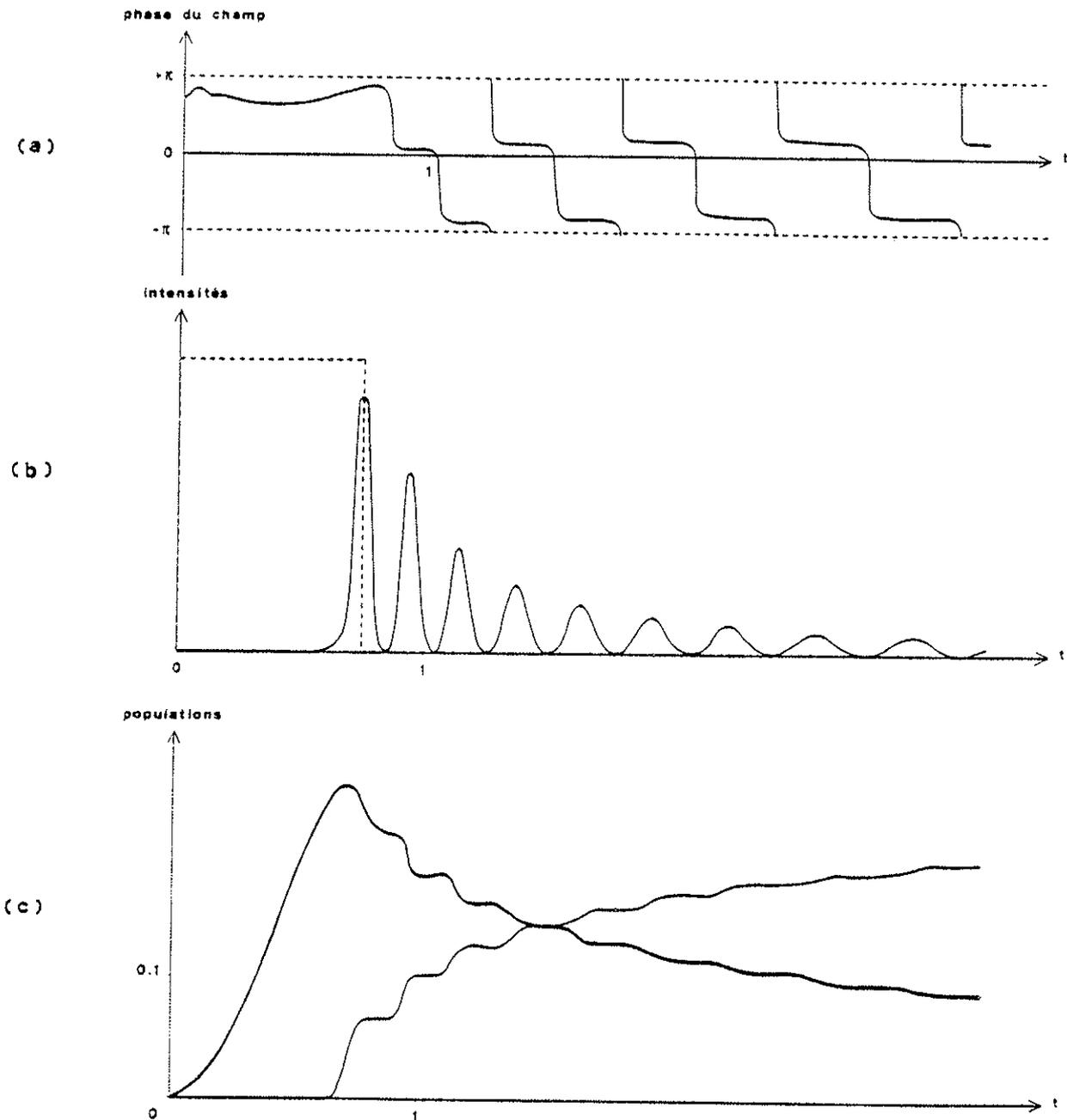


Figure II-11 : La courbe (b) représente l'évolution de  $|\epsilon_2(L,t)|^2$ , c'est-à-dire de l'intensité rayonnée sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$  (trait plein) conjointement avec la forme de l'impulsion de pompage (trait pointillé). La courbe (a) représente l'évolution de la phase de  $\epsilon_2(L,t)$  (modulo  $2\pi$ ) et la courbe (c) celle des populations moyennes (par rapport aux vitesses et aux abscisses) des niveaux  $|0\rangle$  (trait épais) et  $|2\rangle$  (trait fin). Les unités de temps et d'intensité sont arbitraires et identiques à celles de la Figure II-10.

oscillations de la courbe II-10(b) sont très irrégulières. Il n'apparaît pas de période évidente et, surtout, les hauteurs des pics successifs sont très variées. On remarque en particulier qu'après une série de pics de hauteur à peu près décroissante on observe à nouveau un pic aussi haut que le premier ;

(ii) tandis que la phase du champ varie de  $\pi$  (c'est-à-dire que le champ change de signe) entre deux pics successifs dans le cas du "ringing" (Figure II-11(a)), les variations de cette phase sont plus irrégulières dans le cas des oscillations de pompage (Figure II-10(a)). Un changement de phase très différent de  $k\pi$  apparaît notamment avant le dernier pic ;

(iii) dans le cas des oscillations de "ringing", la somme des populations moyennes des niveaux  $|0\rangle$  et  $|2\rangle$  reste évidemment constante et, de plus, l'évolution de chacune de ces deux populations est monotone : le niveau  $|0\rangle$  se vide tandis que le niveau  $|2\rangle$  se remplit (Figure II-11(c)). Dans le cas des oscillations de pompage (Figure II-10(c)), le niveau  $|0\rangle$  se repeuple quelquefois un peu après l'émission d'un pic. On observe même un fort repeuplement qui aboutit, juste avant l'émission du dernier pic, à une inversion de population entre le niveau  $|0\rangle$  et le niveau  $|2\rangle$  ;

(iv) dans le cas du "ringing", on observe toujours un dépeuplement local du niveau  $|0\rangle$  au profit du niveau  $|2\rangle$ , ou l'inverse (Figure II-13). Dans le cas des oscillations de pompage, la compétition entre pompage et émission superradiante complique le phénomène et, à chaque instant, un processus est susceptible de l'emporter localement sur

l'autre, cependant que les réabsorptions de photons émis par des zones plus ou moins éloignées sont toujours possibles. C'est ce qui explique l'allure apparemment compliquée des courbes de la Figure II-12.

Au vu de ces remarques, on peut finalement dire, en schématisant, que les quelques pics qui suivent le premier pic émis correspondent plutôt à un phénomène de "ringing", qui est cependant assez fortement perturbé par le pompage. Par contre, le dernier pic ne peut être expliqué que par un régime d'oscillations de relaxation venant de la compétition entre pompage et superradiance. Etant donné les ordres de grandeurs des différents paramètres, on est amené à penser que c'est ce dernier type d'oscillations qui est seul observé dans l'expérience décrite plus haut. Il est d'ailleurs connu que le modèle de l'onde plane exagère l'amplitude des oscillations de ringing.

L'influence des fluctuations quantiques sur les premiers pics émis est clairement montrée dans la Figure II-14. Les trois traces de gauche (resp. de droite) représentent, avec la même échelle, les intensités rayonnées (resp. la phase des champs), dans le cas d'un pompage long, pour trois tirages différents des phases aléatoires de la polarisation  $\tilde{p}_{02}$  initiale. On voit que la forme du signal se modifie assez nettement d'une trace à l'autre.

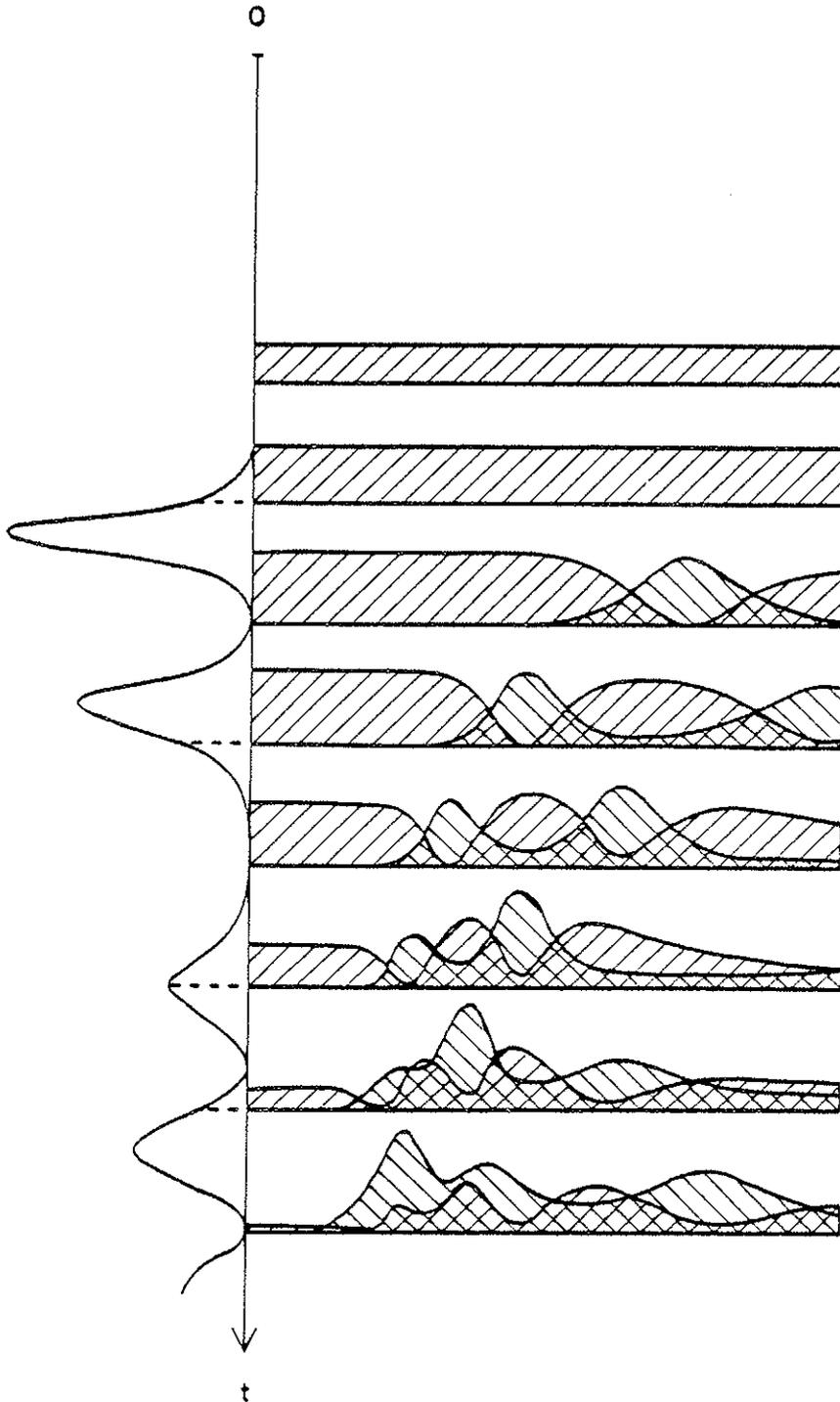


Figure II-12 : Evolution des populations locales (moyennées sur les vitesses) à l'intérieur du volume atomique dans le cas d'un pompage constant pendant toute la durée du calcul. Les hachures montant vers la droite et vers la gauche correspondent respectivement aux valeurs moyennes de  $\rho_{00}$  et  $\rho_{22}$ . Les instants correspondant aux courbes successives sont repérés par rapport à un axe de temps vertical et l'évolution de l'intensité rayonnée par rapport à cet axe est rappelée.

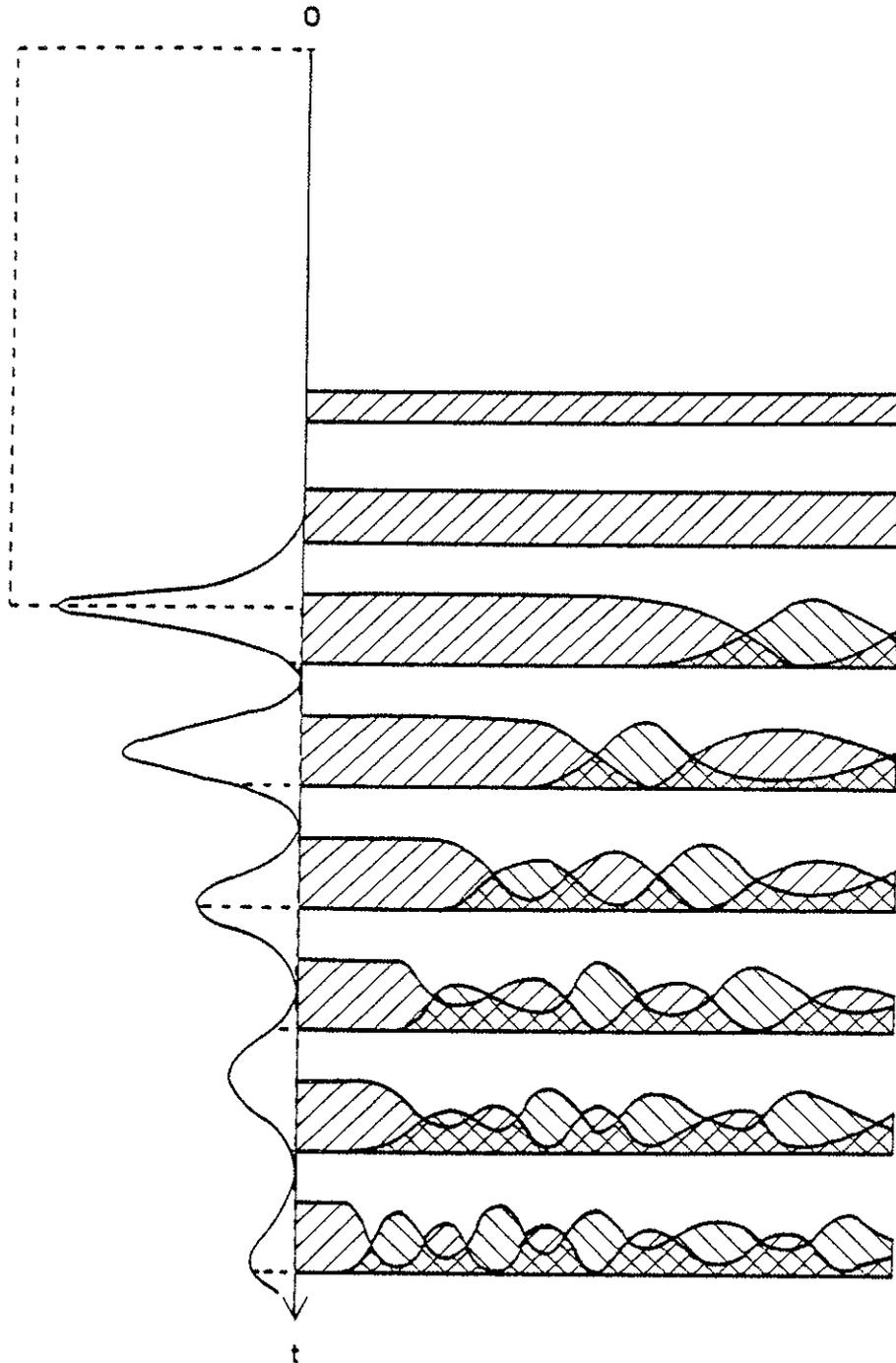


Figure II-13 : Evolution des populations locales (moyennées sur les vitesses) à l'intérieur du volume atomique dans le cas d'un pompage court. Les hachures montant vers le droite et vers la gauche correspondent respectivement aux valeurs moyennes de  $\rho_{00}$  et  $\rho_{22}$ . Les instants correspondant aux courbes successives sont repérés par rapport à un axe de temps vertical ainsi que la forme de l'impulsion de pompage sont rappelées.

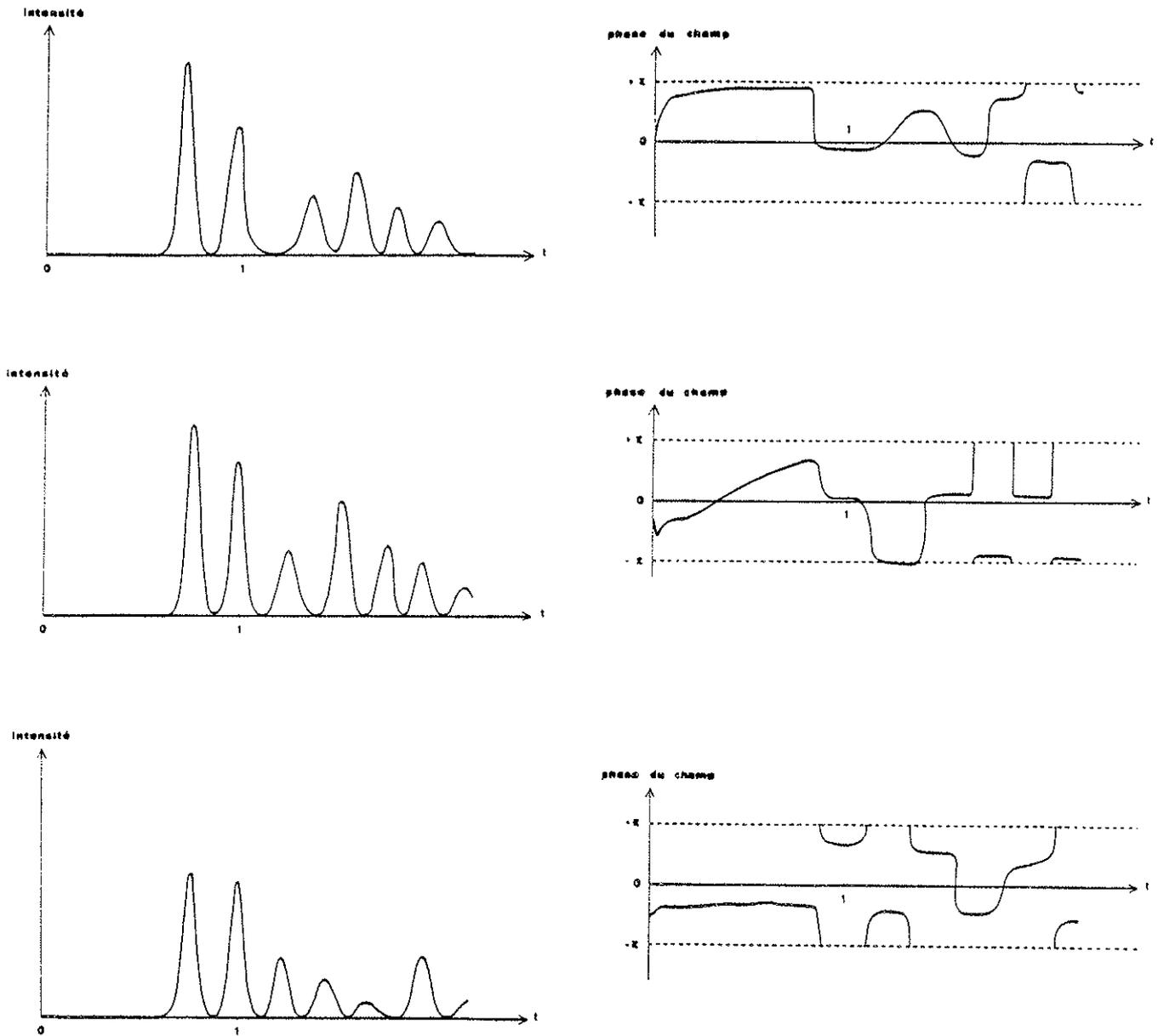


Figure II-14

## Chapitre III

SUPERRADIANCE RAMAN ET SUPERRADIANCE  
INDUITE PAR COLLISIONS

INTRODUCTION

L'émission spontanée Raman ainsi que la fluorescence induite par collisions qui l'accompagne très généralement dans les expériences ont été étudiées théoriquement [47-59] et expérimentalement [60-62]. Comme pour l'émission spontanée ordinaire, on peut s'attendre à ce que, lorsque certaines conditions de seuil sont remplies, l'émission devienne coopérative, donnant lieu à une superradiance Raman ou à une superradiance induite par collisions. Bien que des régimes "non-linéaires" d'émission aient déjà été observés [58], leur caractère coopératif n'avait été clairement mis en évidence ni théoriquement, ni expérimentalement.

Du point de vue théorique, le problème de la superradiance Raman peut être abordé, comme celui de la superradiance à deux niveaux, soit par un modèle quantique utilisant le formalisme de l'équation pilote, soit par un modèle semi-classique. Les deux types de modèles sont

décrits dans ce chapitre et nous permettent de dégager l'analogie entre la superradiance Raman et la superradiance "ordinaire" à deux niveaux. Le troisième modèle que nous présentons, celui de l'atome habillé, permet d'ailleurs de comprendre simplement ce résultat. En effet, dans ce modèle, l'émission Raman se produit entre deux niveaux de l'atome habillé. De plus, ce modèle de l'atome habillé permet de traiter à la fois l'émission Raman et l'émission induite par collisions, et donc d'étudier la compétition entre les deux types de superradiance.

Nous avons cherché à observer ces deux types de superradiance dans le cas d'une vapeur d'atomes de baryum, et pour deux ensembles différents de niveaux. Toutefois, dans les deux cas, le domaine accessible aux paramètres expérimentaux n'était pas suffisamment large pour observer les deux régimes, qui s'excluent généralement l'un l'autre. Nous n'avons finalement observé que la superradiance induite par collisions.

## 1. QUELQUES MODELES SIMPLES.

### 1.1 Superradiance Raman. Formalisme de l'équation pilote.

L'idée de base du calcul exposé dans ce paragraphe est de considérer que l'ensemble des atomes est un "petit système" couplé à un "grand réservoir" qui est constitué par les photons du mode laser et ceux des modes superradiants, l'état du grand réservoir étant supposé peu modifié par l'interaction avec les atomes. Dans ces conditions l'évolution de la matrice densité réduite du système atomique est régie par une équation

pilote et il est possible, grâce à un certain nombre d'approximations que nous justifierons, de calculer son évolution.

1.1.1) Hamiltonien du système atomes + champ.

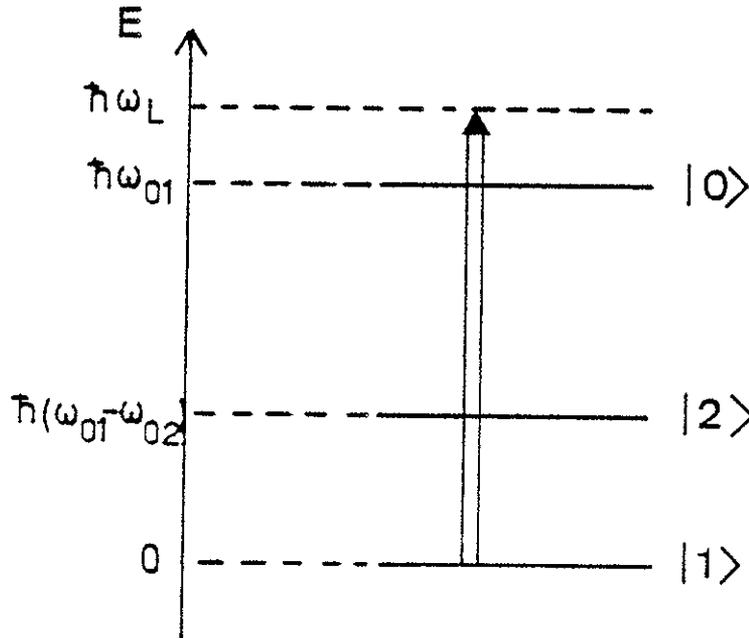


Figure III.1

Nous considérons un ensemble de  $N$  atomes à 3 niveaux (cf. Fig. III.1) qui interagissent avec les modes du champ électromagnétique. Le hamiltonien du système est la somme du hamiltonien propre des atomes et du champ  $H_0$  et du hamiltonien  $H_I$  qui décrit l'interaction

$$H = H_0 + H_I \quad . \quad (\text{III.1})$$

$H_0$  comprend une partie qui décrit les atomes seuls et une partie qui décrit le champ de rayonnement

$$H_0 = H_A + H_R \quad , \quad (\text{III.2})$$

avec

$$\begin{cases} H_A = \sum_{i=1, N} [\hbar\omega_{01} |0\rangle_{ii} \langle 0| + \hbar(\omega_{01} - \omega_{02}) |2\rangle_{ii} \langle 2|] \\ H_R = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}\lambda}}{2} [a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} + a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k}\lambda}] \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

$H_I$  décrit l'interaction des atomes avec le champ électromagnétique, qui s'écrit, en négligeant les termes antirésonnants,

$$H_I = - \sum_{\substack{i=1,N \\ \vec{k}}} g_{\vec{k}} d_{01} [a_{\vec{k}}^{\dagger} |1\rangle_{ii} \langle 0| e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + \text{h.c.}] \\ - \sum_{\substack{i=1,N \\ \vec{k}}} g_{\vec{k}} d_{02} [a_{\vec{k}}^{\dagger} |2\rangle_{ii} \langle 0| e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + \text{h.c.}] \quad (\text{III.4})$$

avec

$$g_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 V}} \quad (\text{III.5})$$

où  $V$  est le volume de quantification et où  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont les éléments de matrice de l'opérateur dipôle atomique  $d$  pour un atome

$$\begin{cases} d_{01} = \langle 0|d|1\rangle \\ d_{02} = \langle 0|d|2\rangle \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

### 1.1.2) Formalisme de Liouville. Rappels. Equation pilote.

Avant d'utiliser dans les calculs qui vont suivre le formalisme de Liouville, nous allons faire quelques rappels [38].

Appelons  $\mathcal{E}$  l'espace des états d'un système quantique. Les opérateurs linéaires qui agissent dans  $\mathcal{E}$  forment eux-mêmes un espace vectoriel  $\mathcal{L}$  qui est l'espace de Liouville. Dans la suite nous désignerons par  $|u\rangle\rangle$  un vecteur de cet espace  $\mathcal{L}$  (et donc un opérateur agissant dans l'espace  $\mathcal{E}$ ). Un opérateur important qui agit dans l'espace  $\mathcal{L}$  est le liouvillien  $L$ . Il est défini par son action sur les vecteurs  $|u\rangle\rangle$  :

$$L |u\rangle\rangle = |[\mathcal{H}, u]\rangle\rangle \quad (\text{III.7})$$

Avec des notations évidentes on a

$$\begin{cases} L = L_0 + L_I \\ L_0 = L_A + L_R \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

où  $L_A$ ,  $L_R$ ,  $L_0$ ,  $L_I$  sont les liouvilliens associés respectivement aux hamiltoniens  $H_A$ ,  $H_R$ ,  $H_0$ ,  $H_I$ .

On peut définir dans  $\mathcal{L}$  un produit scalaire,

$$\langle\langle B|A \rangle\rangle = \text{Tr}_R(B^+A) \quad (\text{III.9})$$

et on montre qu'à cause de l'hermiticité de  $H$  le liouvillien  $L$  est hermitique. On a en effet quels que soient  $A$  et  $B$

$$\langle\langle B|L|A \rangle\rangle = \langle\langle A|L|B \rangle\rangle^* \quad (\text{III.10})$$

et donc :

$$L = L^+ \quad (\text{III.11})$$

Nous désignons par  $|i\rangle$  les états atomiques collectifs et par  $|\alpha\rangle$  les états du champ. Nous notons  $|ij^+\rangle\rangle$  les opérateurs atomiques  $|i\rangle\langle j|$  et  $|\alpha\beta^+\rangle\rangle$  les opérateurs de champ  $|\alpha\rangle\langle\beta|$ . Nous appelons  $\rho(t)$  la matrice densité du système total. La matrice densité du système atomique  $\sigma_A(t)$  est obtenue en prenant la trace de  $\rho(t)$  sur les états du champ :

$$\sigma_A(t) = \text{tr}_R \rho(t) \quad (\text{III.12})$$

et celle du champ  $\sigma_R(t)$  est obtenue en prenant la trace de  $\rho(t)$  sur les états atomiques :

$$\sigma_R(t) = \text{tr}_A \rho(t) \quad (\text{III.13})$$

Nous utiliserons l'opérateur  $P$  défini par

$$P |\rho\rangle\rangle = |\sigma_R(0) \otimes \text{Tr}_R \rho\rangle\rangle \quad (\text{III.14})$$

Cet opérateur peut s'écrire

$$P = P_R \mathbb{1}_A = |\sigma_R(0)\rangle\rangle\langle\langle \mathbb{1}_R | \mathbb{1}_A \quad , \quad (\text{III.15})$$

où  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_R$  sont les opérateurs identité agissant respectivement dans les espaces de Liouville du système atomique et du champ électromagnétique. On montre facilement que cet opérateur est un projecteur ; on a en effet

$$P^2 = P \quad (\text{III.16})$$

et nous appellerons  $Q$  son projecteur complémentaire

$$Q = 1 - P \quad . \quad (\text{III.17})$$

L'équation pilote qui donne l'évolution de la matrice densité du système atomique a la forme suivante [38]

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\sigma_A(t)\rangle\rangle = L_A |\sigma_A(t)\rangle\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau R_A(\tau) |\sigma_A(t-\tau)\rangle\rangle \quad . \quad (\text{III.18})$$

Dans cette équation  $R_A(\tau)$  vaut

$$R_A(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_A(\omega+i\varepsilon) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad , \quad (\text{III.19})$$

avec

$$R_A(\omega+i\varepsilon) = \langle\langle \mathbb{1}_R | R(\omega+i\varepsilon) | \sigma_R(0)\rangle\rangle \quad (\text{III.20})$$

et enfin  $R(\omega+i\varepsilon)$  a pour expression

$$\begin{aligned} R(\omega+i\varepsilon) &= L_I \frac{1}{i\hbar\omega+i\varepsilon-L_0} L_I \\ &+ L_I \frac{1}{i\hbar\omega+i\varepsilon-L_0} L_I \frac{1}{i\hbar\omega+i\varepsilon-L_0} L_I \\ &+ L_I \frac{1}{i\hbar\omega+i\varepsilon-L_0} L_I \frac{Q}{i\hbar\omega+i\varepsilon-L_0} L_I \frac{1}{i\hbar\omega+i\varepsilon-L_0} L_I \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

### 1.1.3) Description et discussion des approximations.

L'équation pilote, bien que formellement simple, possède une grande richesse et décrit un nombre infini de processus à tous les ordres. Il est nécessaire pour l'exploiter d'effectuer certaines approximations que nous allons maintenant présenter.

#### a) L'approximation séculaire.

Si l'on néglige, dans un premier temps, dans l'équation pilote le terme intégral qui traduit l'effet de l'interaction, on montre que les termes

$$\langle\langle ij^+ | \sigma_A(t) \rangle\rangle = \sigma_{ij}(t)$$

évoluent aux fréquences de Bohr  $\omega_{ij}$  du système atomique. L'approximation séculaire [38] consiste à négliger dans l'équation pilote le couplage entre les termes qui ont des fréquences de Bohr différentes. Ainsi nous ne gardons dans le calcul de l'évolution des populations que le couplage entre les populations et les cohérences entre niveaux de même énergie.

#### b) L'approximation de Markov.

Nous supposons (approximation de Markov [38]) que le temps d'évolution des populations et des cohérences de fréquence de Bohr nulle est grand devant le temps de mémoire du processus, c'est-à-dire devant la largeur des fonctions  $\langle\langle ij^+ | R_A(\tau) | kl^+ \rangle\rangle$ , avec

$$\omega_{ij} = \omega_{kl} = 0 \quad .$$

L'équation intégral-différentielle (III.18) devient alors une équation différentielle de la forme

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle\langle ij^+ | \sigma_A(t) \rangle\rangle = \sum_{\substack{k,l \\ \omega_{kl}=0}} \langle\langle ij^+ | R_A(i\varepsilon) | kl^+ \rangle\rangle \langle\langle kl^+ | \sigma_A(t) \rangle\rangle \quad (\text{III.22})$$

soit

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ij}(t) = \sum_{\substack{k,l \\ \omega_{kl}=0}} \Gamma_{ijkl} \sigma_{kl}(t) \quad (\text{III.23})$$

avec

$$\Gamma_{ijkl} = \frac{1}{i\hbar} \langle\langle ij^+ | R_A(i\varepsilon) | kl^+ \rangle\rangle \quad (\text{III.24})$$

où  $R_A(i\varepsilon)$  est donné par les équations (III.20) et (III.21).

Si on appelle  $|\alpha\rangle$  l'état initial du champ électromagnétique

$$|\sigma_R(0)\rangle\rangle = |\alpha\alpha^+\rangle\rangle \quad (\text{III.25})$$

et si on se donne un ensemble d'états  $|\beta\rangle$  formant une base orthonormée pour le champ électromagnétique

$$|\mathbb{1}_R\rangle\rangle = \sum_{\beta} |\beta\beta^+\rangle\rangle \quad , \quad (\text{III.26})$$

on a :

$$\Gamma_{ijkl} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ij^+ \beta\beta^+ | R(i\varepsilon) | kl^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle \quad (\text{III.27})$$

où  $R(i\varepsilon)$  est défini par l'équation (III.21) .

### c) L'approximation de couplage faible.

Nous sommes amenés au cours du calcul de l'évolution des populations à utiliser le développement en puissances de l'interaction de l'opérateur  $R(i\varepsilon)$  donné par l'équation (III.21). Nous faisons alors

l'approximation du couplage faible en ne gardant que le premier terme non nul de ce développement. On peut par ailleurs montrer [32] que cette approximation est équivalente à celle qui consiste à négliger les corrélations qui apparaissent entre les atomes et le champ électromagnétique (approximation de Born).

d) L'approximation de Dicke ; les états atomiques collectifs symétriques.

Malgré les simplifications importantes apportées par les approximations précédentes, l'évolution de la matrice densité atomique est encore complexe à décrire. Pour faciliter le calcul nous allons faire l'approximation de Dicke qui permettra de restreindre considérablement l'espace des états atomiques. Cette approximation conduit à négliger les effets de propagation dans le milieu atomique [26,32] ; elle nous permettra cependant de comprendre l'essentiel du processus.

L'approximation de Dicke consiste ici à supposer que les atomes interagissent essentiellement avec le mode laser  $\vec{k}$ , d'une part, et avec un mode privilégié  $\vec{k}'$  dont le vecteur d'onde est parallèle à l'axe du cylindre et dirigé vers l'avant et dont le désaccord par rapport à la transition  $(0 \rightarrow 2)$  est égal au désaccord du laser par rapport à la transition  $(0 \rightarrow 1)$ . Dans ces conditions, les seuls états atomiques collectifs que nous considérerons sont ceux qui s'obtiennent en combinant de façon complètement symétrique par échange de l'indice  $i$  les états  $|\vec{1}\rangle_i$ ,  $|\vec{0}\rangle_i$ ,  $|\vec{2}\rangle_i$  qui sont définis par

$$\begin{cases} |\bar{1}\rangle_i = |1\rangle_i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \\ |\bar{0}\rangle_i = |0\rangle_i \\ |\bar{2}\rangle_i = |2\rangle_i e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}_i} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Ces états complètement symétriques peuvent s'écrire sous la forme

$$|N-n-m, n, m\rangle$$

où  $N-n-m, n, m$  sont les nombres d'atomes dans les états  $|\bar{1}\rangle$ ,  $|\bar{0}\rangle$ ,  $|\bar{2}\rangle$ .

Il est possible de faire apparaître le rôle privilégié des modes  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  en posant

$$\begin{cases} R_{\Delta\vec{k}}^+ = \sum_{i=1, N} |0\rangle_{ii} \langle 2| e^{i(\vec{k} + \Delta\vec{k})\cdot\vec{r}_i} \\ R_{\Delta\vec{k}}^- = \text{h.c.} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

ainsi que

$$\begin{cases} R'_{\Delta\vec{k}}^+ = \sum_{i=1, N} |0\rangle_{ii} \langle 2| e^{i(\vec{k}' + \Delta\vec{k})\cdot\vec{r}_i} \\ R'_{\Delta\vec{k}}^- = \text{h.c.} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

L'hamiltonien d'interaction (III.4) s'écrit alors

$$\begin{aligned} H_I = & -d_{01} \sum_{\Delta\vec{k}} \hat{s}_{\vec{k}+\Delta\vec{k}} [a_{\vec{k}+\Delta\vec{k}}^+ R_{\Delta\vec{k}}^- + \text{h.c.}] \\ & -d_{02} \sum_{\Delta\vec{k}} \hat{s}_{\vec{k}'+\Delta\vec{k}} [a_{\vec{k}'+\Delta\vec{k}}^+ R'_{\Delta\vec{k}}^- + \text{h.c.}] \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Les opérateurs  $R_0^\pm$  et  $R'_0^\pm$  ne font jamais sortir du sous-espace des états atomiques collectifs symétriques et on montre qu'ils agissent de la façon suivante :

$$\begin{cases} R_0^+ |N-n-m, n, m\rangle = \sqrt{n+1} \sqrt{N-n-m} |N-n-m-1, n+1, m\rangle \\ R_0^- |N-n-m, n, m\rangle = \sqrt{n} \sqrt{N-n-m+1} |N-n-m+1, n-1, m\rangle \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{cases} R_0^+ |N-n-m, n, m\rangle = \sqrt{n+1} \sqrt{m} |N-n-m, n+1, m-1\rangle \\ R_0^- |N-n-m, n, m\rangle = \sqrt{n} \sqrt{m+1} |N-n-m, n-1, m+1\rangle \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

Lorsque  $\vec{\Delta k}$  est différent de zéro, les opérateurs  $R_{\vec{\Delta k}}^{\pm}$  et  $R'_{\vec{\Delta k}}^{\pm}$  ne conservent pas la symétrie des états atomiques mais la restriction de ces opérateurs au sous-espace des états collectifs symétriques s'écrit simplement

$$\begin{cases} R'_{\vec{\Delta k}}^+ = R_0^+ \frac{1}{N} \left( \sum_{c=1} e^{i\vec{\Delta k} \cdot \vec{r}_c} \right) \\ R'_{\vec{\Delta k}}^- = \text{h.c.} \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

et des expressions analogues pour les opérateurs correspondants de la transition  $(0 \rightarrow 1)$ .

Enfin l'action du hamiltonien atomique  $H_A$  est simple ; on a de façon presque évidente

$$H_A |N-n-m, n, m\rangle = [n\hbar\omega_{01} + m\hbar(\omega_{01} - \omega_{02})] |N-n-m, n, m\rangle \quad (\text{III.35})$$

Cette expression montre que les états  $|N-n-m, n, m\rangle$  ont tous des énergies différentes et il n'existe donc pas de cohérence entre niveaux qui soit associée à une fréquence de Bohr nulle. Cette remarque est importante car, alors, l'approximation séculaire entraîne que les populations de la matrice densité ne sont couplées dans leur évolution qu'aux autres populations et l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \sigma_{ii}(t) = \sum_j \Gamma_{ij} \sigma_{jj}(t) \\ \text{avec } \Gamma_{ij} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\beta} \langle \langle ii^+ \beta \beta^+ | R(i\varepsilon) | jj^+ \alpha \alpha^+ \rangle \rangle \end{array} \right. . \quad (\text{III.36})$$

e) Conditions de validité des approximations.

Si l'on appelle  $\Gamma$  l'ordre de grandeur des  $\Gamma_{ij}$  les plus grands, le temps caractéristique d'évolution des populations est de l'ordre de  $T = 1/\Gamma$ . On montre alors [38,39] que l'approximation séculaire est valable si l'on a

$$T \gg \frac{1}{\omega_0} \quad (\text{III.37})$$

où  $\omega_0$  est une fréquence de Bohr typique.

On peut montrer aussi [38,39] que les approximations de Markov et de couplage faible sont valables si

$$T \gg \tau_c \quad (\text{III.38})$$

où  $\tau_c$  est le temps de mémoire du processus.

Il est possible de montrer [31,34] que ce temps est de l'ordre de

$$\tau_c = L/c \quad (\text{III.39})$$

où  $L$  est la longueur de l'échantillon.

L'approximation de Dicke (cf. Chapitre I) pose quant à elle un problème difficile et nous ne chercherons pas à en donner ici une condition de validité [32].

1.1.4) Calcul du premier ordre de perturbation non nul.

a) Remarques préliminaires.

Avant d'aborder le calcul des termes  $\Gamma_{ij}$  qui apparaissent dans l'équation pilote (III.36),

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | R(i\varepsilon) | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle ,$$

nous allons faire quelques remarques.

(i) Nous supposons par la suite que  $|\alpha\rangle$ , qui désigne l'état initial du champ électromagnétique, est un état  $|p\rangle_{\vec{k}}$  qui contient  $p$  photons dans le mode laser.

(ii) Il est possible de trouver une base d'états propres de  $H_0$  dans laquelle les éléments de matrice du hamiltonien d'interaction  $H_I$  sont réels (c'est cette base que nous utiliserons désormais). En effet, d'après l'équation (III.34) on peut écrire, par exemple,

$$R'_{\Delta\vec{k}} = A R'_0 e^{i\varphi(\Delta\vec{k})} \quad (\text{III.40})$$

où  $A R'_0$  est un opérateur à coefficients réels dans la base atomique  $|N-n-m, n, m\rangle$ . En choisissant pour états du champ les états

$$\widetilde{|p\rangle}_{\vec{k}+\Delta\vec{k}} = e^{i\varphi(\Delta\vec{k})} |p\rangle_{\vec{k}+\Delta\vec{k}} , \quad (\text{III.41})$$

on vérifie aisément que l'on a

$$a_{\vec{k}+\Delta\vec{k}}^+ e^{i\varphi(\Delta\vec{k})} \widetilde{|p\rangle}_{\vec{k}+\Delta\vec{k}} = \sqrt{p+1} \widetilde{|p+1\rangle}_{\vec{k}+\Delta\vec{k}} . \quad (\text{III.42})$$

Le produit d'opérateurs

$$a_{\vec{k}+\Delta\vec{k}}^+ R'_{\Delta\vec{k}}$$

n'a alors que des éléments de matrice réels. On peut faire de même pour les autres termes de  $H_I$  et obtenir finalement une base dans laquelle la matrice de  $H_0$  (qui est de plus diagonale) et celle de  $H_I$  sont réelles.

(iii) Pour simplifier les démonstrations, nous supposons que les modes peuplés du champ électromagnétique sont voisins des modes non résonnants

$\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  définis dans le paragraphe 1.1.3.d). Plus précisément, nous négligerons les processus du type de ceux de la Figure (III.2), qui

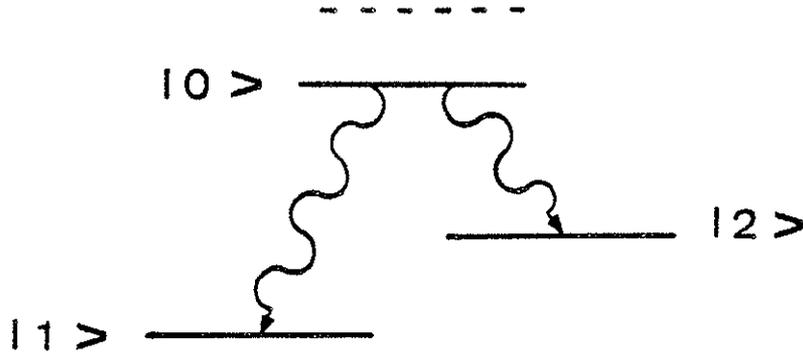


Figure III.2

peuplent les modes du champ (initialement vides) résonnants avec les transitions  $(0 \rightarrow 1)$  et  $(0 \rightarrow 2)$ . Ceci signifie en fait que l'on suppose que le niveau intermédiaire  $|0\rangle$  reste non peuplé. On peut montrer que, en dehors des collisions, dont nous ne tenons pas compte ici, le processus d'ordre le plus faible qui peuple le niveau  $|0\rangle$  est d'ordre 6. Or nous verrons que le premier terme non nul de  $\Gamma_{ij}$  est d'ordre 4, ce qui justifie l'hypothèse utilisée. Si nous décomposons le hamiltonien d'interaction en deux termes

$$H_I = H_I^+ + H_I^- ,$$

avec

$$\begin{cases} H_I^+ = d_{01} \sum_{\Delta\vec{k}} \vec{e}_{\vec{k}+\Delta\vec{k}} a_{\vec{k}+\Delta\vec{k}}^+ R_{\Delta\vec{k}}^- - d_{02} \sum_{\Delta\vec{k}} \vec{e}_{\vec{k}'+\Delta\vec{k}} a_{\vec{k}'+\Delta\vec{k}}^+ R_{\Delta\vec{k}}^- \\ H_I^- = (H_I^+)^+ \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

$H_I^+$  et  $H_I^-$  ne conservent pas l'énergie ;  $H_I^+$  diminue l'énergie d'une quantité proche de  $\hbar\delta$ , où  $\delta = \omega_{01} - \omega_L$ ,  $\omega_L = |\vec{k}|c$  étant la fréquence du laser, et  $H_I^-$  augmente l'énergie de  $\hbar\delta$  environ.

(iv) Nous allons maintenant écrire quelques relations qui nous seront utiles.

A  $H_I^+$  et  $H_I^-$  nous associons  $L_I^+$  et  $L_I^-$  définis par

$$L_I^\pm |u\rangle\rangle = |[H_I^\pm, u]\rangle\rangle \quad ; \quad (\text{III.44})$$

si  $\varphi$  est un état propre de  $H_0$  on peut montrer facilement que

$$\delta(L_0) L_I | \varphi \varphi^+ \rangle\rangle = 0 \quad , \quad (\text{III.45})$$

relation qui exprime simplement la non-conservation de l'énergie au cours d'un processus élémentaire d'interaction, liée à l'hypothèse (iii).

On peut montrer aussi que, à cause de l'hermiticité de  $H_0$  et  $H_I$ , les opérateurs de l'espace de Liouville  $L_I$ ,  $L_0$  et  $\mathcal{P}(1/L_0)$  changent l'hermiticité d'un opérateur de l'espace des états. On a en effet

$$L_I |u^+\rangle\rangle = -(L_I |u\rangle\rangle)^+ \quad (\text{III.46})$$

ainsi que le même type de relation avec

$$L_0 \text{ et } \mathcal{P}(1/L_0) \quad .$$

Enfin nous utiliserons le fait que le produit scalaire de deux opérateurs d'hermiticité opposée est imaginaire pur

$$\langle\langle B/A \rangle\rangle = - \langle\langle B/A \rangle\rangle^* \quad . \quad (\text{III.47})$$

#### b) Calcul de l'ordre 2.

D'après le développement perturbatif (III-21) de  $R(i\varepsilon)$

$$\Gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{i\varepsilon} \sum_{\beta} \langle\langle i i^+ \beta \beta^+ | L_I \frac{1}{i\varepsilon - L_0} L_I | j j^+ \alpha \alpha^+ \rangle\rangle \quad . \quad (\text{III.48})$$

on a

$$\frac{1}{i\varepsilon - L_0} = - \left[ \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) + i\pi\delta(L_0) \right] \quad (\text{III.49})$$

et  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  s'écrit comme la somme de deux termes

$$\Gamma_{ij}^{(2)} = \frac{i}{\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle - \frac{\pi}{\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \delta(L_0) L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle \quad . \quad (\text{III.50})$$

Comme les coefficients de  $H_I$  et  $H_0$  sont réels, les coefficients de  $L_I$  et  $L_0$  dans la base  $|ii^+ \beta\beta^+\rangle$  le sont aussi. Ceci entraîne que les termes  $\langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle$  sont réels. D'autre part  $L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I$  change trois fois d'hermiticité, donc  $L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle$  est antihermitique. Son produit scalaire avec  $|ii^+ \beta\beta^+\rangle$  est donc imaginaire pur ; comme il est aussi réel, d'après ce que l'on a vu plus haut, il ne peut être que nul.

D'après l'équation (III.45), un terme de la forme  $\delta(L_0) L_I |\varphi\varphi^+\rangle$ , où  $\varphi$  est état propre de  $H_0$ , est nul. Ceci entraîne que le deuxième terme de  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  est nul, et que  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  est nul lui aussi.

c) Calcul de l'ordre 3.

$$\Gamma_{ij}^{(3)} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \frac{1}{i\varepsilon - L_0} L_I \frac{1}{i\varepsilon - L_0} L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle \quad . \quad (\text{III.51})$$

$L_I$  agit trois fois sur  $|jj^+ \alpha\alpha^+\rangle$  et donc le résultat obtenu est une combinaison linéaire d'opérateurs qu'on peut écrire

$$\sum \alpha_{kjk',j} |kk'^+ jj'^+\rangle$$

où  $|j\rangle$  et  $|j'\rangle$  sont des états du champ qui ont forcément un nombre de photons différent. Le produit scalaire avec  $|ii^+ \beta\beta^+\rangle$  ne peut alors être que nul, ce qui fait que  $\Gamma_{ij}^{(3)}$  est nul.

d) Calcul de l'ordre 4.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(4)} &= \frac{i}{\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | \\ &L_I \left[ \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) + i\pi\delta(L_0) \right] L_I \left[ \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) + i\pi\delta(L_0) \right] Q L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) + i\pi\delta(L_0) L_I \\ &|jj'^+ \alpha\alpha^+\rangle \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

avec  $Q = \mathbb{1} - P$  .

Le  $\delta(L_0)$  de droite n'intervient pas pour la même raison que dans le calcul de  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  . Le  $\delta(L_0)$  de gauche n'intervient pas non plus car  $\delta(L_0)$  est hermitique et donc

$$\langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \delta(L_0) = (\delta(L_0) L_I |ii^+ \beta\beta^+\rangle\rangle)^+ = 0 \quad . \quad (\text{III.53})$$

Les termes

$$\langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle$$

sont nuls pour les mêmes raisons qui font que, dans  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  ,

$$\langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle \text{ est nul.}$$

Il reste alors trois termes dans l'expression de  $\Gamma_{ij}^{(4)}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(4)} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I \delta(L_0) L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) P L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle \\ &+ \frac{i}{\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I \delta(L_0) P L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle \quad . \quad (\text{III.54}) \end{aligned}$$

Montrons que le dernier terme donne une contribution nulle. Considérons le terme

$$\delta(L_0) P L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle \quad ;$$

d'après l'équation (III.15) qui définit  $P$  ,

$$PL_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right)L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle = |\alpha\alpha^+\rangle\rangle \otimes \text{Tr}_R [L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right)L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle] \quad (\text{III.55})$$

L'opérateur obtenu en prenant la trace sur les états du champ est un opérateur atomique qu'on peut écrire

$$\sum_{a,b} c_{ab} |ab^+\rangle\rangle \quad , \quad (\text{III.56})$$

où  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  sont des états atomiques.

En appliquant  $\delta(L_0)$  à ces termes on n'obtient un résultat non nul que si  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  ont même énergie. Les états atomiques collectifs symétriques auxquels nous nous restreignons ayant un spectre d'énergie non dégénéré, on doit avoir en fait  $|a\rangle = |b\rangle$ . Par conséquent, on a

$$\text{Tr}_R (L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right)L_I |jj^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle) = \sum_a \alpha_a |a\rangle\langle a| + A' \quad (\text{III.57})$$

où  $A' = \sum_{a \neq b} \alpha_{ab} |a\rangle\langle b|$  ne donne pas de contribution au terme que nous calculons.

On peut donc écrire le dernier terme de l'équation (III.54) sous la forme

$$\frac{\pi}{\hbar} \sum_{\beta} \sum_a c_a \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right)L_I |aa^+ \alpha\alpha^+\rangle\rangle \quad (\text{III.58})$$

et ce terme est nul comme est nulle la première contribution à  $\Gamma_{ij}^{(2)}$  que nous avons calculée.

En définitive il reste dans  $\Gamma_{ij}^{(4)}$  deux termes. On peut montrer directement que le deuxième est nul mais il est plus simple de remarquer que  $L_I$ ,  $\mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right)$ ,  $\delta(L_0)$  et  $P$  n'ayant que des coefficients réels, le premier terme est réel et le second imaginaire pur. Comme  $\Gamma_{ij}^{(4)}$  est bien sûr réel, puisque c'est un taux de transfert de population, le deuxième terme est nul.

Nous pouvons donc écrire

$$\Gamma_{ij}^{(4)} = -\frac{\pi}{\hbar} \sum_{\beta} \langle\langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}(\frac{1}{L_0}) L_I \delta(L_0) L_I \mathcal{P}(\frac{1}{L_0}) L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle . \quad (\text{III.59})$$

Si l'on utilise la décomposition de  $L_I$  en  $L_I^+$  et  $L_I^-$  (cf. équations (III.43) et (III.44)), on peut montrer que les termes de (III.59) dans lesquels le nombre de  $L_I^+$  est différent du nombre de  $L_I^-$  sont nuls. En effet on est amené à calculer des contributions du genre

$$c = \text{Tr} [ |i\beta\rangle \langle i\beta| A a_{k_1}^{\pm} a_{k_2}^{\pm} a_{k_3}^{\pm} |j\alpha\rangle \langle j\alpha| a_{k_4}^{\pm} B ] \quad (\text{III.60})$$

où A et B sont des opérateurs atomiques, soit

$$c = \langle j\alpha | a_{k_4}^{\pm} B | i\beta \rangle \langle i\beta | A a_{k_1}^{\pm} a_{k_2}^{\pm} a_{k_3}^{\pm} | j\alpha \rangle \quad (\text{III.61})$$

ou encore

$$c = \langle \alpha | a_{k_4}^{\pm} | \beta \rangle \times \langle \beta | a_{k_1}^{\pm} a_{k_2}^{\pm} a_{k_3}^{\pm} | \alpha \rangle \times \langle j | B | i \rangle \times \langle i | A | j \rangle \quad (\text{III.62})$$

ce qui montre que si  $a_{k_i}^+$  intervient  $a_{k_i}$  doit aussi intervenir.

Si l'on suppose que  $|j\rangle$  est un état pour lequel aucun atome ne se trouve dans le niveau intermédiaire  $|0\rangle$ , (nous verrons plus loin que ceci est vrai pour les états peuplés lors de l'évolution), le  $L_I$  de droite a pour seule contribution non nulle celle qui correspond à l'absorption d'un photon laser. Toute contribution à  $\Gamma_{ij}^{(4)}$  devra donc faire intervenir dans l'un des trois  $L_I$  restant la partie associée à l'émission d'un photon laser. Si cette partie se trouve dans le deuxième  $L_I$  à partir de la droite, on a

$$L_I \mathcal{P}(\frac{1}{L_0}) L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle = A | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle \quad (\text{III.63})$$

et la contribution à  $\Gamma_{ij}^{(4)}$  est

$$A \sum_{\beta} \langle ii^+ \beta\beta^+ | L_I \mathcal{P}\left(\frac{1}{L_0}\right) L_I | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle \quad , \quad (\text{III.64})$$

qui est nulle comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois. Donc l'émission d'un photon laser est associée à l'un des deux  $L_I$  de gauche.

Les deux autres  $L_I$  sont associés comme nous l'avons vu à un même mode et le  $\delta(L_0)$  central impose que ce mode permette la conservation de

l'énergie. Nous n'avons donc à considérer que les processus de type Raman. On trouve alors que  $\Gamma_{ij}^{(4)}$  vaut

$$\Gamma_{ij}^{(4)} = - \frac{\pi}{\hbar^3 \delta^2} \sum_{\beta} \delta(E_{i\beta} - E_{j\alpha}) \langle \langle ii^+ \beta\beta^+ | (L_I^- L_I^+ - L_I^+ L_I^-)^2 | jj^+ \alpha\alpha^+ \rangle \rangle \quad (\text{III.65})$$

où  $E_{i\beta}$  est l'énergie de  $|i\beta\rangle$  et  $E_{j\alpha}$  est l'énergie de  $|j\alpha\rangle$ .

Explicitant l'action des opérateurs  $L_I^+$  et  $L_I^-$  on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(4)} &= \frac{2\pi}{\hbar^3 \delta^2} \sum_{\beta} \delta(E_{i\beta} - E_{j\alpha}) |\langle i\beta | [H_I^-, H_I^+] | j\alpha \rangle|^2 \\ &\quad - \delta_{ij} \frac{2\pi}{\hbar^3 \delta^2} \sum_{k\beta} \delta(E_{k\beta} - A_{j\alpha}) |\langle k\beta | [H_I^-, H_I^+] | j\alpha \rangle|^2 \quad . \quad (\text{III.66}) \end{aligned}$$

Les coefficients de transfert qui apparaissent dans cette expression peuvent également être obtenus en utilisant le formalisme des fonctions d'onde et la règle d'or de Fermi. Nous décrivons rapidement cette méthode dans l'Appendice I.

#### 1.1.5) Comparaison avec la superradiance à deux niveaux.

En utilisant les expressions (III.43) de  $H_I^{\pm}$  on trouve que

$$\Gamma_{ij}^{(4)} = \Gamma_{R^{\mu}} \left\{ |\langle i | [R_0^-, R_0'^+] | j \rangle|^2 - \delta_{i,j} \sum_k |\langle k | [R_0^-, R_0'^+] | j \rangle|^2 \right\} \quad (\text{III.67})$$

avec

$$\Gamma_{R\mu} = \frac{2\pi}{\hbar^4 c \delta^2} d_{01}^2 d_{02}^2 \varepsilon_k^2 \varepsilon_{k'}^2 P_{\vec{k}} \left( \sum_{|\vec{k}|=|\vec{k}'|} \frac{1}{N^2} \left| \sum_{i=1, N} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}_i} \right|^2 \right) \quad (\text{III.68})$$

Dans cette équation le facteur de forme  $\mu$  est défini pour la transition  $(0 \rightarrow 2)$  par une équation analogue à (I.24) et on a

$$\Gamma_R = \frac{\omega_1^2}{4\delta^2} \Gamma_2 \quad (\text{III.69})$$

où  $\omega_1 = 2g_k d_{01} \sqrt{P}$  est la fréquence de Rabi associée au laser et  $\Gamma_2$  la probabilité de la transition  $(0 \rightarrow 2)$ .

L'équation (III.67) montre que les transferts de population à partir d'un niveau  $|N-n-m, n, m\rangle$  ne se font que vers le niveau  $|N-n-m-1, n, m+1\rangle$ . Ainsi la population du niveau intermédiaire, qui est nulle au début, le reste tout au long de l'évolution et les atomes se comportent en fait comme des atomes à deux niveaux. On peut donc indiquer les niveaux atomiques par l'indice  $m$  seul et l'équation d'évolution des populations s'écrit alors

$$\dot{\sigma}_{m,m} = \Gamma_{R\mu} \left\{ (m+1)(N-m-n) \sigma_{m-1,m-1} - m(N-m-n+1) \sigma_{mm} \right\} \quad (\text{III.70})$$

L'analogie avec les équations (I.37) décrivant l'évolution des populations dans le cas de la superradiance à deux niveaux est alors complète.

## 1.2 Superradiance Raman. Traitement semi-classique.

### 1.2.1) Equations d'évolution.

Dans ce traitement, les atomes à trois niveaux (cf. Figure III.1) interagissent avec deux champs électromagnétiques classiques, le champ laser,  $E_1$ , de fréquence  $\omega_L = \omega_{01} - \delta$ , et le champ superradiant  $E_2$ , dont la fréquence est supposée voisine de  $\omega_{02}$ . Comme dans le Chapitre I, nous négligeons ici les collisions et l'effet Doppler, ainsi que les processus de relaxation atomique. Le hamiltonien s'écrit alors :

$$H = H_A + H_I ,$$

où  $H_A$  est le hamiltonien des atomes seuls

$$H_A = \sum_{i=1, N} [\hbar\omega_{01} |0\rangle_{ii}\langle 0| + \hbar(\omega_{01} - \omega_{02}) |2\rangle_{ii}\langle 2|] \quad (\text{III.71})$$

et  $H_I$  est le hamiltonien d'interaction

$$H_I = - \sum_{i=1, N} \left\{ d_{01} E_1(\vec{x}_i) [ |1\rangle_{ii}\langle 0| + \text{h.c.} ] \right. \\ \left. + d_{02} E_2(\vec{x}_i) [ |2\rangle_{ii}\langle 0| + \text{h.c.} ] \right\} . \quad (\text{III.72})$$

Comme dans le Chapitre I, nous décrivons le milieu atomique par une matrice densité  $\rho(\vec{x}, t)$  continue en  $\vec{x}$ . Les équations d'évolution de cette matrice densité sont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = - \frac{i d_{01} E_1}{\hbar} (\rho_{10} - \rho_{01}) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = - \frac{i d_{02} E_2}{\hbar} (\rho_{20} - \rho_{02}) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{00} = - \frac{d}{dt} (\rho_{11} + \rho_{22}) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{10} = i \omega_{01} \rho_{10} + \frac{i d_{01} E_1}{\hbar} (\rho_{00} - \rho_{11}) - \frac{i d_{02} E_2}{\hbar} \rho_{12} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{20} = i \omega_{02} \rho_{20} + \frac{i d_{02} E_2}{\hbar} (\rho_{00} - \rho_{22}) - \frac{i d_{01} E_1}{\hbar} \rho_{21} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{12} = i(\omega_{01} - \omega_{02}) \rho_{12} + \frac{i d_{01} E_1}{\hbar} \rho_{02} - \frac{i d_{02} E_2}{\hbar} \rho_{10} .
 \end{array} \right. \quad (\text{III.73})$$

En ce qui concerne les champs, nous supposons que le champ laser  $E_1$  qui est appliqué aux atomes n'est pas perturbé par eux ; il peut donc être décrit comme une onde plane

$$E_1 = [\varepsilon_1 e^{i\omega_L(t-z/c)} + \text{c.c.}] , \quad (\text{III.74})$$

où  $\varepsilon_1$  est indépendant du temps et de l'espace. Par contre le champ  $E_2$  est créé par les atomes et il est piloté par la polarisation locale du milieu atomique

$$P_2(\vec{x}, t) = d_{02} n(\vec{x}) [\rho_{20}(\vec{x}, t) + \rho_{02}(\vec{x}, t)] , \quad (\text{III.75})$$

où  $n(\vec{x})$  est la densité volumique d'atomes. L'évolution de  $E_2$  est donc régie par une équation de Maxwell analogue à (I.42). Comme dans le Chapitre I, nous supposons que ce champ est constitué d'un paquet d'ondes planes émises vers l'avant dont l'enveloppe est lentement variable ; on écrira donc

$$E_2 = [\varepsilon_2 e^{i(\omega_{02} - \delta)(t-z/c)} + \text{c.c.}] , \quad (\text{III.76})$$

où  $\varepsilon_2$  est une fonction lentement variable de  $z$  et de  $t$ . Les

quantités  $\rho_{10}$ ,  $\rho_{20}$  et  $\rho_{12}$  sont alors elles aussi des paquets d'ondes planes et l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{10} = \widetilde{\rho}_{10} e^{i \omega_L (t - z/c)} \\ \rho_{20} = \widetilde{\rho}_{20} e^{i(\omega_{02} - \delta)(t - z/c)} \\ \rho_{12} = \widetilde{\rho}_{12} e^{i(\omega_{01} - \omega_{02})(t - z/c)} \end{array} \right. \quad (\text{III.77})$$

Avec ces notations les équations d'évolution des atomes et du champ  $E_2$  s'écrivent, en négligeant les termes antirésonnants,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = 2 \mathcal{J}_m \left( \frac{d_{01}}{\hbar} \epsilon_1^* \widetilde{\rho}_{10} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = 2 \mathcal{J}_m \left( \frac{d_{02}}{\hbar} \epsilon_2^* \widetilde{\rho}_{20} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{00} = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{11} + \rho_{22}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\rho}_{10} = i \delta \widetilde{\rho}_{10} + \frac{i d_{01} \epsilon_1}{\hbar} (\rho_{00} - \rho_{11}) - \frac{i d_{02} \epsilon_2}{\hbar} \widetilde{\rho}_{12} \\ \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\rho}_{20} = i \delta \widetilde{\rho}_{20} + \frac{i d_{02} \epsilon_2}{\hbar} (\rho_{00} - \rho_{22}) - \frac{i d_{01} \epsilon_1}{\hbar} \widetilde{\rho}_{21} \\ \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\rho}_{12} = \frac{i d_{01} \epsilon_1}{\hbar} \widetilde{\rho}_{02} - \frac{i d_{02} \epsilon_2^*}{\hbar} \widetilde{\rho}_{10} \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \epsilon_2 = - i \frac{\omega_{02} d_{02}}{2 \epsilon_0 c} \widetilde{\rho}_{20} n \end{array} \right. \quad (\text{III.78})$$

où  $n$  est la densité volumique d'atomes.

### 1.2.2) Description de l'évolution du système.

Nous supposons que le temps caractéristique d'évolution des enveloppes lentement variables et des populations,  $T$ , est grand devant l'inverse du désaccord

$$T \gg \frac{1}{\delta} \quad . \quad (\text{III.79})$$

On peut dans ce cas négliger dans les équations d'évolution des cohérences le terme  $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}$  devant le terme  $i\delta \tilde{\rho}$  ; on obtient alors :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{10} = \frac{1}{\hbar\delta} [d_{01} \varepsilon_1 (\rho_{11} - \rho_{00}) + d_{02} \varepsilon_2 \tilde{\rho}_{12}] \\ \tilde{\rho}_{20} = \frac{1}{\hbar\delta} [d_{02} \varepsilon_2 (\rho_{22} - \rho_{00}) + d_{01} \varepsilon_1 \tilde{\rho}_{21}] \end{cases} \quad . \quad (\text{III.80})$$

Les équations d'évolution deviennent, en utilisant ces relations

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = \frac{2d_{01} d_{02}}{\hbar^2 \delta} \mathcal{J}_m [\varepsilon_1^* \varepsilon_2 \tilde{\rho}_{12}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = \frac{2d_{01} d_{02}}{\hbar^2 \delta} \mathcal{J}_m [\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \tilde{\rho}_{21}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{21} = - \frac{i}{\hbar^2 \delta} [d_{01}^2 |\varepsilon_1|^2 - d_{02}^2 |\varepsilon_2|^2] \tilde{\rho}_{21} - \frac{i d_{01} d_{02} \varepsilon_1^* \varepsilon_2}{\hbar^2 \delta} [\rho_{22} - \rho_{11}] \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon_2 = - \frac{i\omega_{02} d_{02} n}{2\varepsilon_0 \hbar \delta} [d_{02} \varepsilon_2 (\rho_{22} - \rho_{00}) + d_{01} \varepsilon_1 \tilde{\rho}_{21}] \end{cases} \quad . \quad (\text{III.81})$$

On remarque tout d'abord que, dans ces conditions ( $T \gg \frac{1}{\delta}$ ), le niveau intermédiaire ne se peuple pas ; on montre en effet aisément que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{00} = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{11} + \rho_{22}) = 0 \quad . \quad (\text{III.82})$$

On voit aussi que les équations d'évolution de la matrice densité ne font intervenir que les niveaux  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  des atomes et que ces

niveaux subissent des déplacements lumineux qui valent respectivement

$$- \frac{d_{01}^2 |\varepsilon_1|^2}{\hbar\delta} \quad \text{et} \quad - \frac{d_{02}^2 |\varepsilon_2|^2}{\hbar\delta} \quad .$$

Si le champ laser est suffisamment intense pour que l'on puisse avoir

$$\left| \frac{d_{01} \varepsilon_1}{\hbar} \right| \gg \left| \frac{d_{02} \varepsilon_2}{\hbar} \right| , \quad (\text{III.83})$$

l'équation d'évolution de  $\varepsilon_2$  se simplifie ; on peut en effet négliger  $\frac{d_{02} \varepsilon_2}{\hbar} (\rho_{00} - \rho_{22})$  devant  $\frac{d_{01} \varepsilon_1}{\hbar} \widetilde{\rho}_{21}$  et on obtient

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon_2 = - i \frac{\omega_{02} d_{02}}{\hbar \delta} n \frac{d_{01} \varepsilon_1}{\hbar \delta} \widetilde{\rho}_{21} . \quad (\text{III.84})$$

On peut simplifier aussi l'équation d'évolution de  $\widetilde{\rho}_{21}$  et garder seulement

$$\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\rho}_{21} = - i \frac{d_{01}^2 |\varepsilon_1|^2}{\hbar^2 \delta} \widetilde{\rho}_{21} - i \frac{d_{01} \varepsilon_1^*}{\hbar} \frac{d_{02} \varepsilon_2}{\hbar \delta} (\rho_{22} - \rho_{11}) . \quad (\text{III.85})$$

En posant alors

$$\begin{cases} \mathcal{P} = n d \widetilde{\rho}_{21} e^{-i(\omega_1^2/4\delta)(t-z/c)} \\ \varepsilon = \varepsilon_2 e^{-i(\omega_1^2/4\delta)(t-z/c)} \\ \mathcal{N} = n(\rho_{22} - \rho_{11}) \end{cases} , \quad (\text{III.86})$$

où  $\omega_1 = 2d_{01} \varepsilon_1/\hbar$  est la fréquence de Rabi associée au laser et où  $d = (\omega_1/2\delta)d_{02}$ , les équations deviennent identiques aux équations de Bloch-Maxwell pour une assemblée d'atomes à deux niveaux (cf. équations (I.46) et (I.47)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N} = \frac{2i}{\hbar} (\varepsilon^* \mathcal{P} - \varepsilon \mathcal{P}^*) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} = i \frac{d^2}{\hbar} \varepsilon \mathcal{N} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon = - i \frac{\omega_{02}}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \end{cases} \quad (\text{III.87})$$

La superradiance Raman est donc analogue à une superradiance d'atomes à deux niveaux. Le temps caractéristique de l'évolution du système est

$$T_R = (N \Gamma_R \mu)^{-1} \quad (\text{III.88})$$

où  $N$  est le nombre d'atomes,  $\mu$  est le facteur de forme associé à la

transition  $(0 \rightarrow 2)$  (cf. équation (I.24)) ; la probabilité de transition

Raman  $\Gamma_R$  vaut

$$\Gamma_R = \Gamma_2 \frac{\omega_1^2}{4\delta^2} \quad . \quad (III.89)$$

Cette dernière expression est identique à l'expression (III.69) que nous avait fournie l'équation pilote.

Notons enfin que c'est le temps caractéristique d'évolution  $T_R$  qui intervient dans la condition (III.79), qui s'écrit donc

$$T_R \gg 1/\delta \quad .$$

Si cette condition, qu'on peut écrire aussi

$$\delta^3 \gg N \Gamma_2 \mu \omega_1^2/4 \quad (III.90)$$

n'est pas vérifiée, les phénomènes sont plus complexes et l'on ne peut pas se ramener à un ensemble de systèmes à deux niveaux.

### 1.3 Superradiance Raman et superradiance induite par collisions : formalisme de l'atome habillé.

Le formalisme de l'atome habillé va nous permettre, contrairement aux deux modèles que nous avons présentés, de tenir compte simplement d'un effet qui est souvent important dans les expériences où l'on observe une émission Raman : les collisions entre atomes. Il est ainsi possible d'étudier simultanément émission Raman et émission induite par collisions, si bien qu'on peut prédire le type de superradiance attendue. Dans une première partie, nous considérerons l'évolution d'un seul atome dans un champ laser et nous ne tiendrons pas compte de la transition  $(0 \rightarrow 2)$ . Nous ajouterons alors l'effet sur l'évolution de cet atome

habillé de l'émission spontanée et des collisions, en nous intéressant plus particulièrement aux populations des différents niveaux dans le régime permanent. La deuxième étape consistera alors à tenir compte de la transition  $(0 \rightarrow 2)$ . On verra qu'il existe au voisinage de cette transition deux signaux d'émission spontanée : un signal Raman de fréquence  $(\omega_{02} - \delta)$  et un signal non désaccordé qui correspond à la fluorescence induite par collisions. Enfin, dans la troisième partie, regardant l'ensemble des atomes d'une expérience de superradiance comme un ensemble d'atomes habillés, nous utiliserons les résultats obtenus précédemment et nous pourrons mettre en évidence deux types distincts de superradiance, qui sont en compétition : superradiance Raman et superradiance induite par collisions.

### 1.3.1) Atome à deux niveaux. Rappels.

#### a) Un atome couplé à un mode laser.

Nous considérons, dans un premier temps, un atome à deux niveaux couplés par un moment dipolaire (cf. Figure III-3),

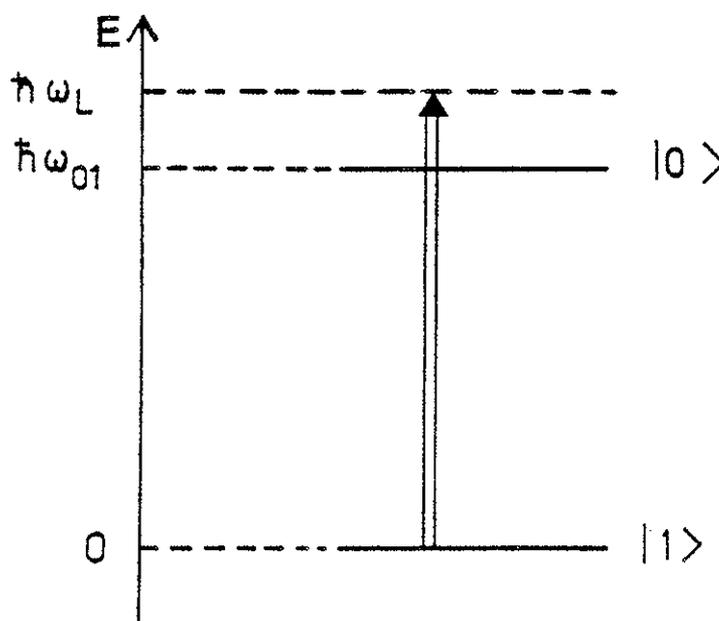


Figure III-3

interagissant avec les photons d'un mode laser quasi résonnant (Figure III-4) .

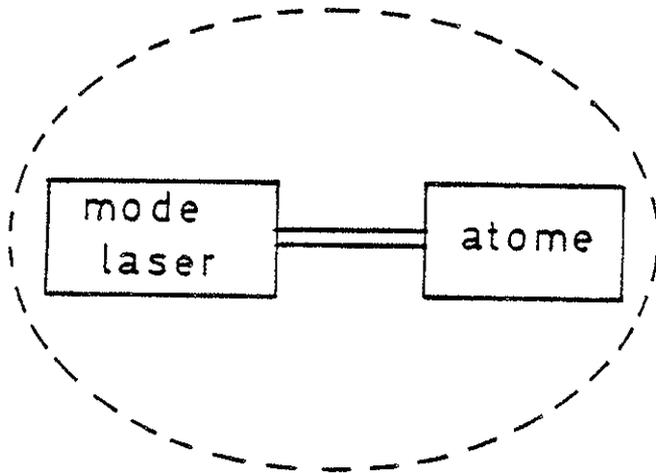


Figure III-4

Le hamiltonien de ce système est

$$H = H_A + H_R + H_I = H_0 + H_I \quad . \quad (\text{III.91})$$

$H_A$  , l'hamiltonien de l'atome, s'écrit :

$$H_A = \hbar\omega_{01} |0\rangle\langle 0| \quad ; \quad (\text{III.92})$$

$H_R$  , l'hamiltonien du champ, s'écrit :

$$H_R = \frac{\hbar\omega_k}{2} [a_k a_k^+ + a_k^+ a_k] \quad ; \quad (\text{III.93})$$

enfin  $H_I$  , qui traduit l'interaction atome-mode laser, s'écrit :

$$H_I = \frac{\hbar c k}{2\varepsilon_0 V} d_{01} (a_k^+ |1\rangle\langle 0| + a_k |0\rangle\langle 1|) \quad , \quad (\text{III.94})$$

où  $d_{01} = \langle 0|d|1\rangle$  ,  $d$  étant l'opérateur dipôle atomique,

$V$  est le volume de quantification et  $\vec{k}$  le vecteur d'onde du mode laser ( $|\vec{k}| = \omega_L/c$ ) . Les états propres de  $H_0$  se groupent par paires,  $|1, n+1\rangle$  et  $|0, n\rangle$  d'énergies voisines, qui constituent les "multiplicités"  $\varepsilon_n$  . La matrice de  $H$  pour la multiplicité  $\varepsilon_n$  s'écrit

$$(H) = \text{tr} \begin{pmatrix} (n+1)\omega_L & \frac{\omega_1}{2} \\ \frac{\omega_1}{2} & \delta + (n+1)\omega_L \end{pmatrix} \quad (\text{III.95})$$

où  $\delta = \omega_{01} - \omega_L$  est le désaccord du laser par rapport à la transition  $(0 \rightarrow 1)$  et où  $\omega_1$  est la fréquence de Rabi associée au laser

$$\omega_1 = \frac{2d_{01}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon} \frac{n+1}{V}} .$$

En introduisant  $\bar{\omega}$  et  $\varphi$  tels que

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \omega_1^2 + \delta^2 \\ \text{tg}(2\varphi) = \frac{\omega_1}{\delta} \quad (0 \leq 2\varphi \leq \pi) \end{cases} \quad (\text{III.96})$$

les deux états propres s'écrivent

$$\begin{cases} |a, n\rangle = \cos \varphi |0, n\rangle + \sin \varphi |1, n+1\rangle \\ |b, n\rangle = -\sin \varphi |0, n\rangle + \cos \varphi |1, n+1\rangle \end{cases} , \quad (\text{III.97})$$

leurs énergies étant

$$\begin{cases} E_{a,n} = \hbar \left( \frac{\delta}{2} + \frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{2} \right) + (n+1)\omega_L \\ E_{b,n} = \hbar \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{2} \right) + (n+1)\omega_L \end{cases} \quad (\text{III.98})$$

Le schéma des niveaux de l'atome habillé correspondant aux multiplicités  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_{n-1}$  est représenté sur la Figure (III-5).

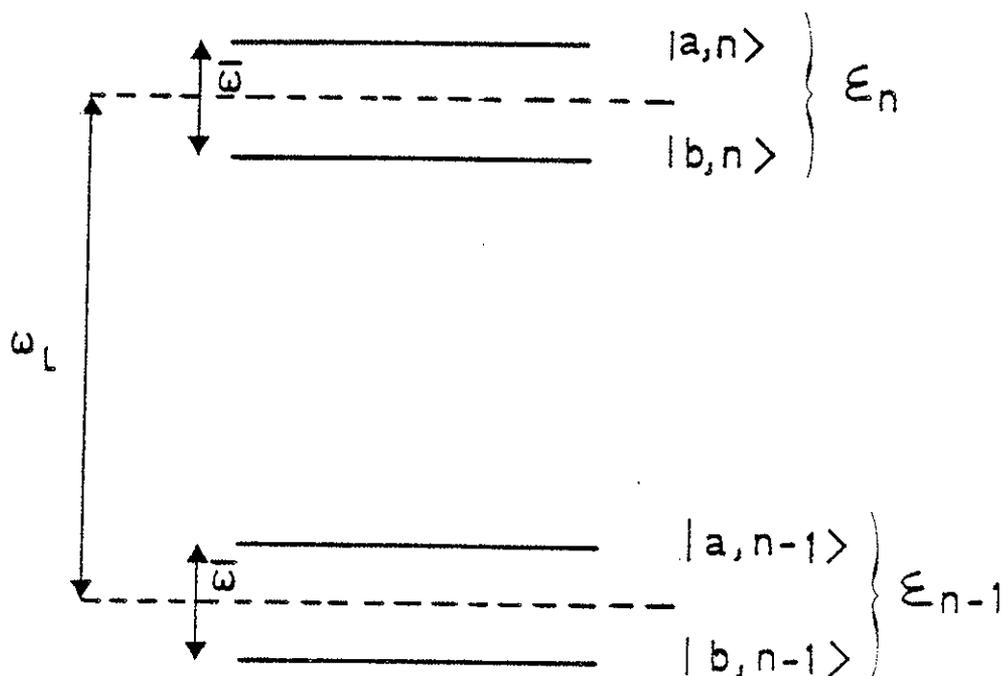


Figure III-5

b) Influence de l'émission spontanée.

Nous allons maintenant tenir compte de l'émission spontanée, c'est-à-dire de l'interaction de l'atome avec les modes autres que le mode laser (Figure III-6).

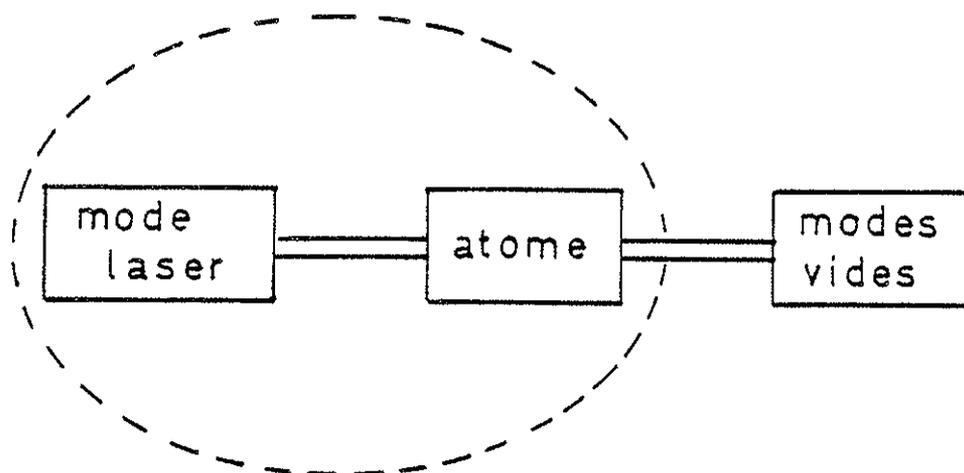


Figure III-6

Nous avons représenté sur la Figure III-7 les transitions entre niveaux de l'atome habillé qui sont couplés par le dipôle atomique : c'est sur ces transitions que l'émission spontanée se produit.

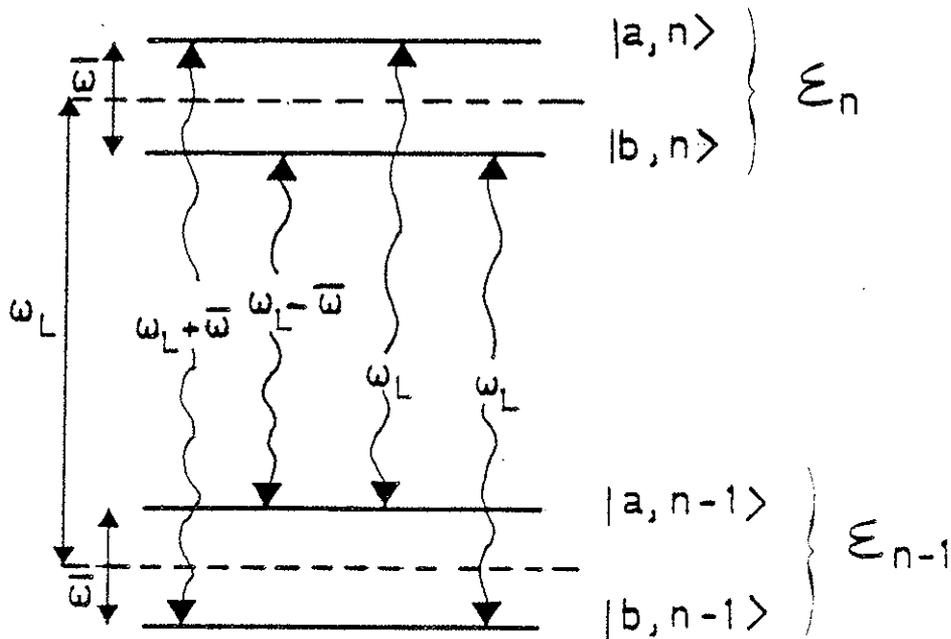


Figure III-7

Il est possible de décrire le système atome + mode laser par une matrice densité. Nous allons rappeler les arguments physiques qui permettent d'établir la forme que prend l'équation d'évolution de cette matrice densité [63], nous retrouverons d'ailleurs les mêmes arguments lors de l'étude de l'effet des Collisions.

Dans le couplage du système atome + mode laser avec les modes vides deux temps caractéristiques interviennent :  $\tau_c$  qui est le temps de corrélation des fluctuations du vide qui agissent sur le dipôle atomique et sont responsables de l'émission spontanée et  $1/\Gamma$  qui est le temps moyen au bout duquel se produit l'émission d'un photon. Si le

temps  $\tau_c$  est nettement inférieur à  $1/\Gamma$ , alors l'évolution de la matrice densité peut être décrite par une équation pilote. Puisque  $\tau_c$  est de l'ordre de l'inverse de  $\omega_{01}$ , cette condition se traduit par

$$\Gamma \ll \omega_{01}, \omega_L \quad . \quad (\text{III.99})$$

Nous supposerons cette condition réalisée et nous utiliserons donc une équation pilote pour décrire l'évolution du système atome + mode laser. Nous pourrions de plus prendre pour cette équation une forme simple, dans laquelle les termes d'émission spontanée s'ajoutent au terme d'évolution propre. Les fluctuations du vide agissent sur le dipôle atomique avec un temps de corrélation  $\tau_c$ . Si le couplage entre l'atome et les photons laser est suffisamment faible, on peut considérer que pendant ce temps  $\tau_c$  les photons n'interagissent pas et restent "spectateurs". Alors, pour décrire l'évolution de la matrice densité, il suffit d'ajouter le terme d'émission spontanée qui décrit l'interaction pendant le temps  $\tau_c$  au terme d'évolution propre qui décrit le système atome + mode laser entre deux interactions élémentaires séparées de  $1/\Gamma$ . Pour que cette approximation soit valable, il faut que le temps de corrélation  $\tau_c$ , qui est de l'ordre d'une période optique, soit beaucoup plus petit que la période des oscillations de Rabi

$$\bar{\omega} \ll \omega_{01}$$

et donc, comme  $\bar{\omega} = \omega_1^2 + \delta^2$ ,

$$\omega_1, |\delta| \ll \omega_{02} \quad . \quad (\text{III.100})$$

Ces conditions sont toujours vérifiées lorsque  $\omega_{01}$  est dans le domaine

optique et nous prendrons l'équation pilote sous la forme

$$\frac{d}{dt} \sigma = - \underbrace{\frac{\Gamma}{2} [r^+ r^-, \sigma]_+}_{\text{Emission spontanée}} + \underbrace{\Gamma r^- \sigma r^+ - \frac{i}{\hbar} [H, \sigma]}_{\text{Evolution propre}} , \quad (\text{III.101})$$

avec 
$$\begin{cases} r^+ = |0\rangle\langle 1| \\ r^- = |1\rangle\langle 0| \end{cases} \quad (\text{III.102})$$

et où  $\Gamma$  est la probabilité de la transition ( $0 \rightarrow 1$ ) .

On obtient ainsi pour la restriction à la multiplicité  $\epsilon_n$  de la matrice densité les équations d'évolution

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle a, n-1 | \sigma | a, n-1 \rangle = \Gamma \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \langle a, n | \sigma | a, n \rangle \\ \quad + \Gamma \cos^4 \varphi \langle b, n | \sigma | b, n \rangle - \Gamma \cos^4 \varphi \langle a, n-1 | \sigma | a, n-1 \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle b, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle = \Gamma \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \langle b, n | \sigma | b, n \rangle \\ \quad + \Gamma \cos^4 \varphi \langle a, n | \sigma | a, n \rangle - \Gamma \sin^4 \varphi \langle b, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle a, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle = - \Gamma \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \langle a, n | \sigma | b, n \rangle \\ \quad - (\Gamma + i\bar{\omega}) \langle a, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle . \end{cases} \quad (\text{III.103})$$

Ces équations ont été établies en faisant l'approximation séculaire qui est valable si

$$\omega_1, |\delta| \gg \Gamma . \quad (\text{III.104})$$

### c) Effet des collisions.

Nous allons d'abord rappeler l'effet d'une collision en l'absence de couplage dipôle-onde électromagnétique.

Lorsque deux atomes s'approchent l'un de l'autre, les énergies de

leurs niveaux sont perturbés et dépendent de la distance des deux atomes. Généralement les déplacements des énergies des niveaux sont différents et l'on peut les représenter par des courbes du type de celles de la Figure (III-8)

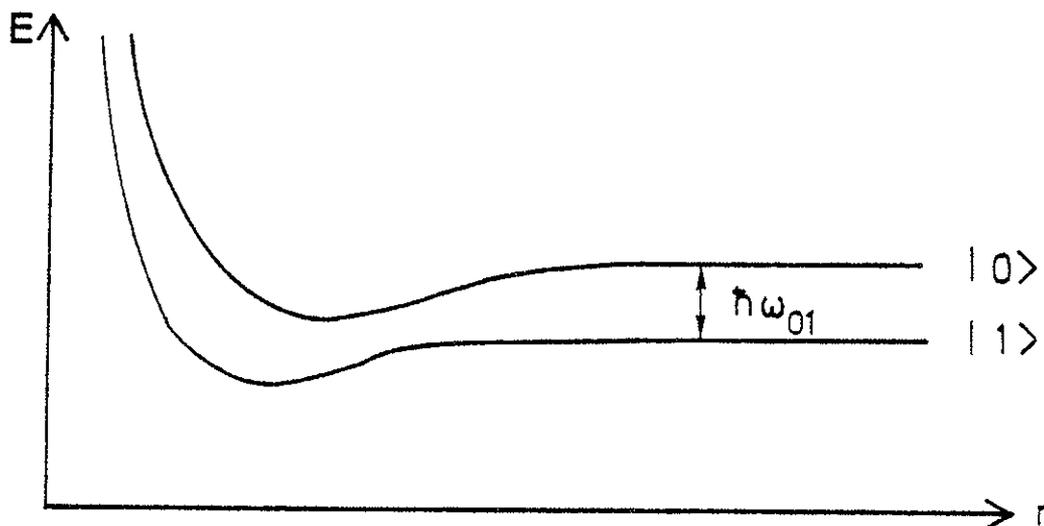


Figure III-8

Pendant le choc, la distance  $r$  varie et les énergies subissent au cours du temps des variations comme celles de la Figure (III-9)

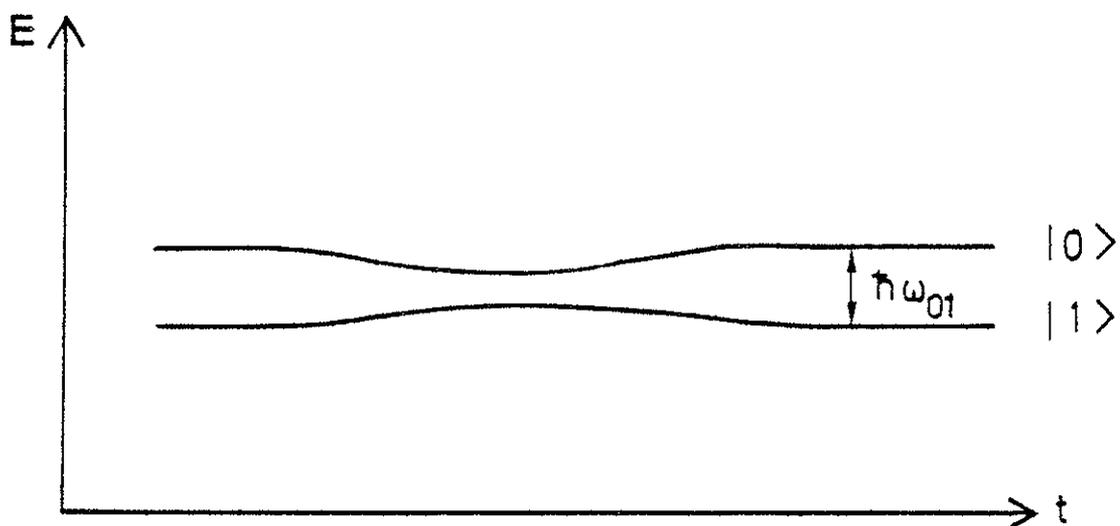


Figure III-9

Pour les collisions déphasantes [63-65], qui sont les seules que nous considérerons, le seul effet est l'introduction d'un déphasage  $\Phi$  du dipôle

$$\Phi = \int_{-\tau}^{+\tau} (E_0(t) - E_1(t) - \omega_0) dt \quad .$$

Il n'y a pas d'échange de population entre les deux niveaux (les collisions déphasantes sont "élastiques" ou "adiabatiques"). Il n'y a pas non plus de variation de la vitesse de l'atome. Après le choc, la cohérence  $\sigma_{01}$  est multipliée par  $e^{-i\Phi}$ , et, si l'on fait la moyenne sur les différents chocs (vitesses différentes, paramètres d'impact différents), on obtient pour la variation de  $\sigma_{01}$  due aux collisions

$$\frac{d}{dt} \sigma_{01} = -\gamma' \sigma_{01} \quad , \quad (\text{III.105})$$

avec  $\gamma' = \langle 1 - e^{-i\Phi} \rangle = r + is \quad .$

On peut alors comprendre le comportement en présence d'irradiation laser par des raisonnements analogues à ceux que nous avons donnés pour l'émission spontanée. La durée d'une collision,  $\tau$ , est l'analogue du temps de corrélations des fluctuations du vide  $\tau_c$  et  $1/|\gamma'|$ , temps caractéristique d'évolution sous l'effet des chocs, est l'analogue de  $1/\Gamma$ , temps moyen au bout duquel se produit l'émission d'un photon. La condition analogue à la condition (III.99) qui justifie l'emploi d'une équation pilote se traduit par

$$\tau \ll 1/|\gamma'| \quad , \quad (\text{III.106})$$

où  $\tau$  est la durée moyenne d'une collision. La condition analogue à la condition (III.100), qui permet de séparer l'effet des collisions de l'évolution propre, s'écrit :

$$\omega_1, |\delta| \ll 1/\tau \quad . \quad (III.107)$$

Cette condition définit ce que l'on appelle habituellement le régime d'impact.

En résumé, l'effet des collisions dans le régime d'impact conduit à ajouter aux termes d'évolution propre et d'émission spontanée deux termes qui s'écrivent dans la base découplée

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle 0, n | \sigma | 1, n+1 \rangle = -\gamma \langle 0, n | \sigma | 1, n+1 \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle 1, n+1 | \sigma | 0, n \rangle = -\gamma^* \langle 1, n+1 | \sigma | 0, n \rangle \end{cases} \quad , \quad (III.108)$$

et qui donnent dans la base couplée

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle a, n-1 | \sigma | a, n-1 \rangle = 2r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi [\langle a, n-1 | \sigma | a, n-1 \rangle \\ \quad - \langle b, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle] \\ \frac{d}{dt} \langle b, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle = -\frac{d}{dt} \langle a, n-1 | \sigma | a, n-1 \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle a, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle = -[r(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \\ \quad + is(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \langle a, n-1 | \sigma | b, n-1 \rangle \end{cases} \quad (III.109)$$

Notons que ces équations ont été établies en appliquant l'approximation séculaire. On doit donc avoir

$$\omega_1, |\delta| \gg r \quad . \quad (III.110)$$

d) Evolution de la matrice densité. Régime stationnaire de cascade.

Nous avons maintenant tous les éléments pour décrire l'évolution de la matrice densité de l'atome habillé.

En appelant  $A_n$  la restriction à la multiplicité  $\epsilon_n$  de la



matricielle

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Pi_{aa} \\ \Pi_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{aa} \\ \Pi_{bb} \end{pmatrix} \quad (\text{III.117})$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \Gamma \cos^4 \varphi + 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ \beta = \Gamma \sin^4 \varphi + 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \end{cases} . \quad (\text{III.118})$$

On voit alors en calculant la trace et le déterminant de la matrice que les deux valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -(\alpha + \beta)$$

$$\lambda_2 = 0 \quad .$$

Le vecteur propre associé à  $\lambda_1$  s'amortit en un temps

$$\tau_e = \frac{1}{\alpha + \beta} \quad . \quad (\text{III.120})$$

Pour des grands désaccords ( $|\delta| \gg \omega_1$ ),  $\tau_e$  est de l'ordre de  $1/\Gamma$ .

Le vecteur propre associé à  $\lambda_2$  n'évolue pas. C'est lui qui détermine le régime permanent de cascade pour lequel les populations sont stationnaires.

On peut donc dire en résumé qu'après le branchement de l'interaction avec le laser, les populations et la cohérence connaissent un régime transitoire qui dure un temps  $\tau_e \sim 1/\Gamma$ . A l'issue de ce régime la cohérence est nulle et les populations sont constantes, leur rapport étant

$$\frac{\Pi_{aa}^n(\infty)}{\Pi_{bb}^n(\infty)} = \frac{\Gamma \sin^4 \varphi + 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\Gamma \cos^4 \varphi + 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \quad . \quad (\text{III.121})$$

### 1.3.2) Atome à trois niveaux.

Nous allons dans ce paragraphe considérer le cas d'un atome à trois niveaux (cf. Figure (III.1)) habillé par le champ du laser et étudier les caractéristiques de l'émission spontanée sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ .

Pour tenir compte du niveau  $|2\rangle$  de l'atome, il faut introduire dans chaque multiplicité  $\epsilon_n$  un troisième niveau que nous noterons  $|2,n\rangle$ . Pour ce niveau, l'atome est dans l'état  $|2\rangle$  et le mode laser dans l'état  $|n\rangle$ . La figure (III-10) représente les niveaux d'énergie d'une multiplicité  $\epsilon_n$ .

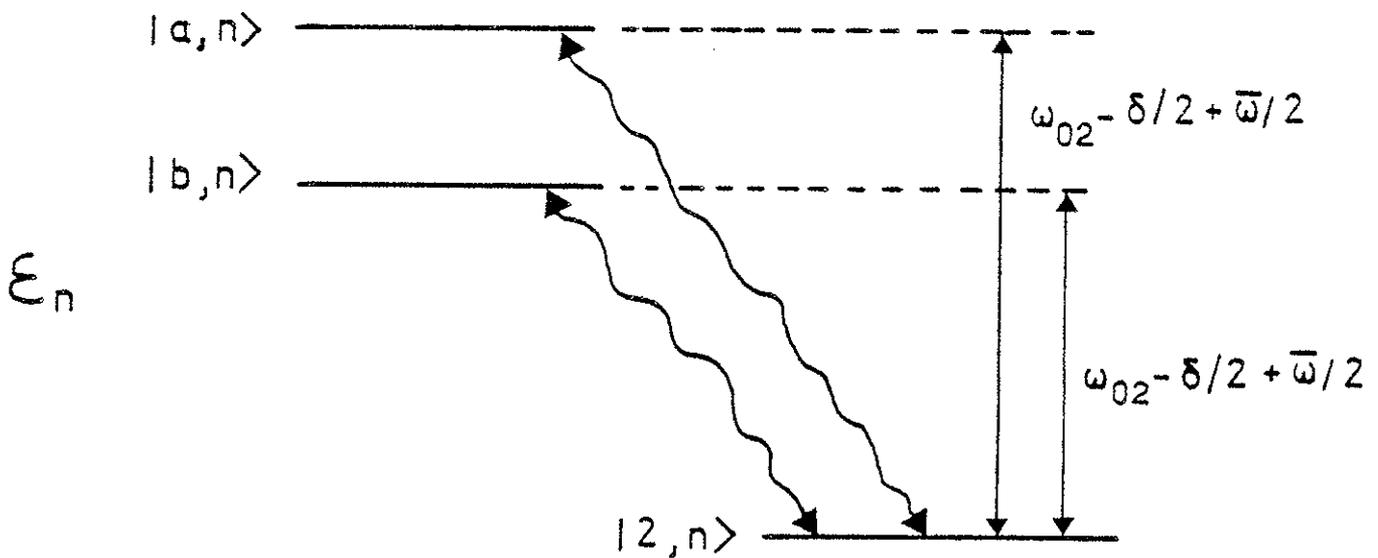


Figure III-10

L'existence du moment dipolaire de la transition  $(0 \rightarrow 2)$  de l'atome nu entraîne qu'il existe un couplage dipolaire des niveaux  $|a,n\rangle$  et  $|b,n\rangle$  avec le niveau  $|2,n-1\rangle$ . C'est ce couplage qui est responsable

de l'émission spontanée qui apparaît sur la deuxième transition et que nous avons représenté sur la Figure III-10 par des flèches ondulées.

Les taux de transfert de population des niveaux  $|a,n\rangle$  et  $|b,n\rangle$  vers le niveau  $|2,n\rangle$ , qu'on notera  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , se calculent facilement. Ils sont proportionnels au carré de l'élément de matrice du dipôle de la deuxième transition pris entre l'état initial et l'état final.

On trouve

$$\begin{cases} \Gamma_a = \Gamma_2 \cos^2 \varphi \\ \Gamma_b = \Gamma_2 \sin^2 \varphi \end{cases} \quad (\text{III.122})$$

où  $\Gamma_2$  est la probabilité de la transition  $(0 \rightarrow 2)$ . Nous allons maintenant comparer les intensités émises à partir des deux niveaux  $|a,n\rangle$  et  $|b,n\rangle$ . Pour cela il faut connaître, en plus des taux de transitions, les populations des deux niveaux de départ. L'étude que nous avons faite des systèmes à deux niveaux nous a montré que l'évolution de ces populations conduit en un temps  $\tau_e$  (cf. équation III.120) à un état stationnaire. Si ce temps  $\tau_e$  est beaucoup plus petit que le temps caractéristique d'émission sur la deuxième transition,  $1/\Gamma_2$ , on peut considérer que, dès le début de l'émission sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ , les populations des niveaux  $|a,n\rangle$  et  $|b,n\rangle$  sont données par leur valeur d'équilibre (et de la cohérence entre ces niveaux est nulle). Le rapport entre l'intensité  $I_a$  émise à partir du niveau  $|a,n\rangle$  et l'intensité  $I_b$  émise à partir du niveau  $|b,n\rangle$  vaut alors

$$\frac{I_a}{I_b} = \frac{\Pi_{aa}^n(\infty)}{\Pi_{bb}^n(\infty)} \times \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \frac{\Gamma \sin^4 \varphi + 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\Gamma \cos^4 \varphi + 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \times \frac{\Gamma_2 \cos^2 \varphi}{\Gamma_2 \sin^2 \varphi}. \quad (\text{III.123})$$

Rappelons que  $\varphi$  est donné par l'équation (III.96) et que les photons

émis sur la deuxième transition à partir des niveaux  $|a,n\rangle$  et  $|b,n\rangle$  ont les pulsations (cf. Fig. III-10)

$$\begin{cases} \omega_a = \omega_{02} - \delta/2 + \bar{\omega}/2 \\ \omega_b = \omega_{02} - \delta/2 - \bar{\omega}/2 \end{cases} \quad (\text{III.124})$$

Pour le cas des désaccords grands devant la fréquence de Rabi ( $\delta \gg \omega_1$ ) deux possibilités se présentent.

Si  $\delta > 0$ , la transition  $|b,n\rangle \rightarrow |2,n\rangle$  correspond à la fluorescence Raman et la transition  $|a,n\rangle \rightarrow |2,n\rangle$  correspond à un signal non désaccordé qui est la fluorescence induite par collisions.

Si  $\delta < 0$ , la situation est inversée. On peut calculer que, dans les deux cas, le rapport  $\frac{I_R}{I_{\text{coll}}}$  de l'intensité du signal Raman sur l'intensité du signal non désaccordé vaut

$$\frac{I_R}{I_{\text{coll}}} = \frac{\Gamma + 2r\left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2 + 2r} \sim \frac{\Gamma}{2r} \quad (\text{III.125})$$

### 1.3.3) Cas de l'émission spontanée coopérative de N atomes à trois niveaux.

Pour étudier l'émission spontanée, coopérative de N atomes à trois niveaux habillés par le champ du laser, il peut paraître naturel de supposer que chaque atome est individuellement "habillé" par ce champ, si bien qu'il est possible d'utiliser les résultats des deux paragraphes précédents. Toutefois, comme nous le verrons dans le Chapitre IV, ceci n'est vrai que si le faisceau laser n'est pas absorbé de manière appréciable par les atomes. Nous supposerons pour simplifier que ceci est

vrai et que la propagation du faisceau dans le milieu atomique se fait dans un régime permanent pour lequel le champ électrique oscille en tout point à la fréquence de l'onde incidente. Il est alors possible de dire que chaque atome est habillé par le champ laser. Nous supposerons aussi qu'avant le démarrage de la superradiance le régime stationnaire de cascade est atteint, c'est-à-dire que le temps caractéristique de la superradiance est beaucoup plus grand que  $1/\Gamma$ . Chaque atome habillé peut alors être représenté avant l'émission superradiante par un ensemble de multiplicités  $\epsilon_n$  dont les niveaux  $|a,n\rangle$  et  $|b,n\rangle$  sont peuplés avec un rapport de populations donné par l'équation (III.123). Remarquons d'abord que l'émission superradiante peut se produire a priori sur la transition  $(0 \rightarrow 1)$  comme sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ . Cependant on peut voir que, pour les transitions permises de l'atome habillé à deux niveaux, la probabilité de transition et l'inversion de population ne sont jamais simultanément importantes. Pour cette raison nous supposerons que la superradiance ne se produit que sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ . On calcule facilement que les temps caractéristiques de superradiance  $T_{\text{coll}}$  du signal non désaccordé et  $T_R$  du signal Raman valent, à la limite des grands désaccords, ( $|\delta| \gg \omega_1$ ),

$$\begin{cases} T_{\text{coll}} = \frac{1}{N\Gamma_{\text{coll}}\mu} \\ T_R = \frac{1}{N\Gamma_R\mu} \end{cases} \quad (\text{III.126})$$

avec

$$\begin{cases} \Gamma_{\text{coll}} = \left( \frac{\Gamma \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^4 + 2r \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2}{\Gamma + 4r \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2} \right) \Gamma_2 \\ \Gamma_R = \left( \frac{\Gamma + 2r \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2}{\Gamma + 4r \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2} \right) \Gamma_2 \frac{\omega_1^2}{4\delta^2} \end{cases} \quad (\text{III.127})$$

et où  $\mu$  est le facteur de forme associé à la deuxième transition (cf. équation (I.24)). Ce dernier résultat est identique, lorsque les collisions n'interviennent pas ( $r=0$ ), aux résultats que nous avons obtenus par l'équation pilote et le modèle semi-classique.

Contrairement à l'émission spontanée la superradiance ne peut pas apparaître simultanément sur les deux transitions ( $a \rightarrow 2$ ) et ( $b \rightarrow 2$ ), car, par un phénomène d'inhibition [66], c'est sur la transition pour laquelle le temps caractéristique d'émission  $T_{SR}$  est le plus court que la superradiance apparaît presque exclusivement. Un rapport des  $T_{SR}$  de quelques unités suffit à favoriser presque totalement l'une des deux transitions. Le rapport des temps caractéristiques de superradiance vaut :

$$\frac{T_R}{T_{coll}} = \frac{\Gamma \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2 + 2r}{\Gamma + 2r \left(\frac{\omega_1}{2\delta}\right)^2} \quad . \quad (III.128)$$

Si  $(\omega_1/2\delta) \ll 1$ , ce que nous supposons réalisé, alors on obtient simplement que le signal Raman est favorisé si  $\Gamma > 2r$  et que c'est le signal non désaccordé qui est favorisé si  $\Gamma < 2r$ .

En définitive le modèle de l'atome habillé nous aura permis de montrer que, pour une expérience de superradiance Raman dans laquelle des collisions en régime d'impact peuvent se produire, il existe deux régimes de superradiance, selon la valeur relative de la probabilité  $\Gamma$  de la transition ( $0 \rightarrow 1$ ), et de l'élargissement par collisions  $2r$  sur cette transition. Quels que soient le désaccord  $\delta$  et la puissance du laser, on s'attend à observer une superradiance Raman si  $\Gamma > 2r$ , et

une superradiance induite par collisions si  $\Gamma < 2r$ . Si l'on se souvient du rôle déphasant des collisions entre atomes mentionné au Chapitre I, il peut sembler paradoxal de parler de superradiance induite par collisions. En fait, on suppose ici que les collisions ont un effet déphasant pour la transition  $(0 \rightarrow 1)$  seulement. Leur rôle consiste alors, grâce à la présence du laser, à peupler le niveau intermédiaire  $|0\rangle$ . En ce qui concerne l'effet des collisions sur la transition  $(0 \rightarrow 2)$ , il est supposé faible, de sorte que la condition de seuil (cf. (I.27))

$$T_R, T_{\text{coll}} \ll T_2^* \quad , \quad (\text{III.129})$$

où  $T_2^*$  est le temps déphasant associé à la transition  $(0 \rightarrow 2)$ , est supposée remplie.

## 2. DESCRIPTION DES EXPERIENCES. RESULTATS.

Pourvu qu'on désaccorde le laser par rapport à la résonance atomique, le montage expérimental utilisé pour mettre en évidence les oscillations de pompage (cf. Chapitre II) est bien adapté à l'étude de la superradiance Raman ou de la superradiance induite par collisions. On doit en effet utiliser un laser pulsé - la superradiance étant un phénomène essentiellement transitoire - mais dont l'impulsion a une durée relativement longue par rapport au temps d'évolution du système. S'il s'agit de superradiance Raman, chaque photon superradiant émis correspond en effet à un photon laser absorbé, si bien que l'impulsion

superradiante ne peut en aucun cas se produire après la fin de l'impulsion laser. Dans le cas de la superradiance induite par collisions, l'impulsion superradiante peut présenter un certain retard par rapport à l'impulsion laser mais celle-ci doit être suffisamment longue pour permettre au peuplement collisionnel de se produire.

Nous avons ainsi, dans un premier temps, cherché à observer une émission superradiante en utilisant le montage du Chapitre II et en désaccordant le laser. On observe bien une telle émission sur une assez large plage de désaccords, mais l'analyse spectrale de la lumière superradiante prouve qu'il s'agit, dans tout le domaine de pression de baryum et d'intensité du laser accessibles à l'expérience, de superradiance induite par collisions. Ce résultat s'interprète d'ailleurs très bien en utilisant le modèle décrit précédemment.

Dans l'espoir d'observer également la superradiance Raman, nous avons réalisé une seconde expérience, analogue à la première mais mettant en jeu trois autres niveaux du baryum. Là encore, seule la superradiance induite par collisions a cependant pu être observée.

### 2.1 Principe des deux expériences.

La première expérience concerne trois niveaux du baryum incluant le fondamental (cf. Figure III-11). Les atomes de baryum sont initialement dans leur niveau fondamental ; ils sont éclairés par une impulsion laser quasi-résonnante avec la transition  $(0 \rightarrow 1)$  et de relativement longue durée ; on observe la lumière émise au voisinage de la transition  $(0 \rightarrow 2)$ .

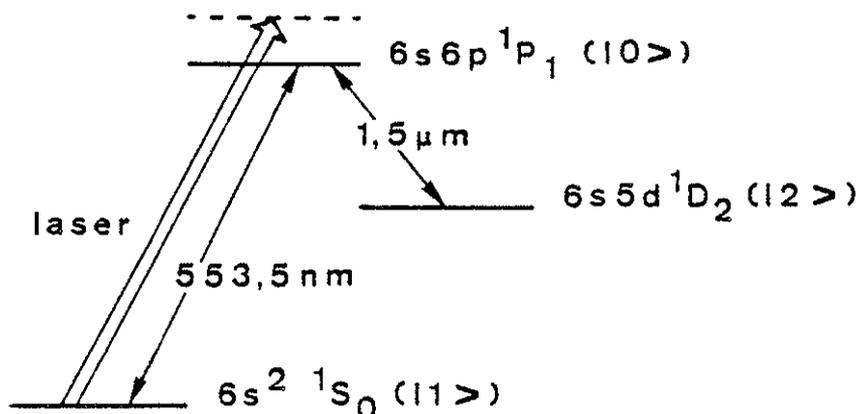


Figure III-11

Dans la seconde expérience les niveaux intéressants,  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  (cf. Figure III-12), sont trois niveaux excités du baryum.

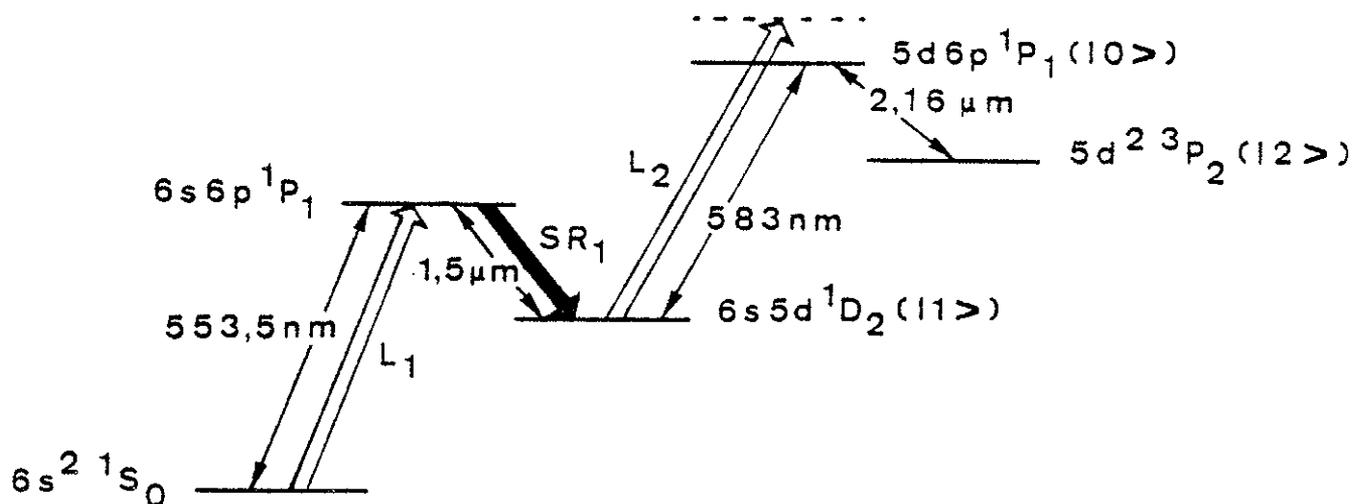


Figure III-12

Dans un premier temps, le niveau  $|1\rangle$  est peuplé grâce à une impulsion laser, brève et résonnante avec la transition  $(6s^2 1S_0 \rightarrow 6s6p 1P_1)$ , qui est presque immédiatement suivie d'une impulsion superradiante sur la transition  $(6s6p 1P_1 \rightarrow 6s5d 1D_2)$ . Ensuite, avant que le niveau  $|1\rangle$  (qui est d'ailleurs métastable) ne se vide, les atomes sont éclairés par une seconde impulsion laser, quasi-résonnante avec la transition

( $0 \rightarrow 1$ ) et de relativement longue durée. La Figure III-13 représente

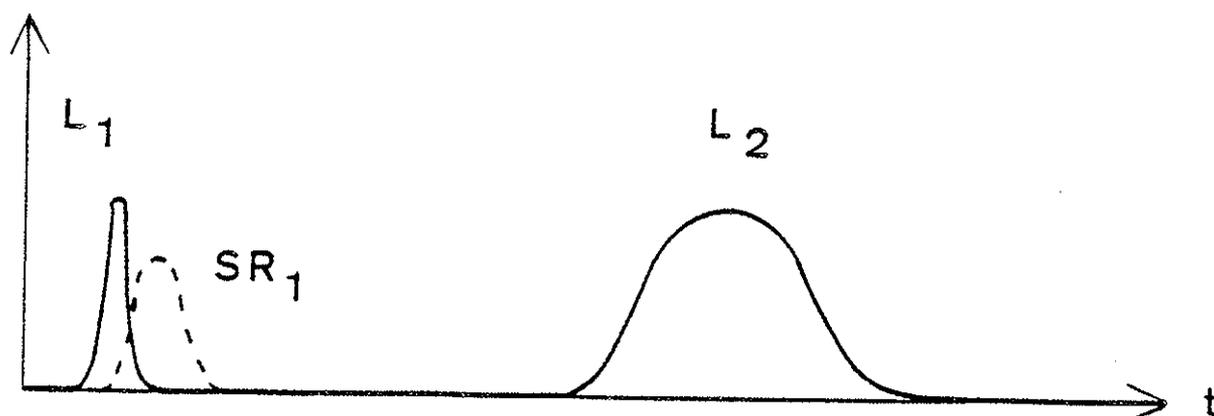


Figure III-13

schématiquement la succession temporelle des différentes impulsions lumineuses. On détecte, comme dans la première expérience, la lumière émise au voisinage de la transition ( $0 \rightarrow 2$ ).

## 2.2 Montages expérimentaux.

Les montages expérimentaux des deux expériences, schématisés dans les Figures III-14 et III-15, sont assez peu différents du montage du Chapitre II (cf. Figure II-3). Ils comprennent tous deux un "heat-pipe" à baryum dans lequel on fait converger le ou les faisceaux laser. La lumière émise vers l'avant est dans les deux expériences analysée par un spectroscope, puis détectée à l'aide d'un détecteur infrarouge. L'enregistrement des signaux est réalisé par un analyseur de transitoires et il est déclenché par une fraction de signal laser (le laser 2 dans la seconde expérience) reçue par une photodiode. Les signaux peuvent également être stockés grâce à un magnétoscope. Nous allons décrire ici les éléments des deux montages qui sont nouveaux par rapport à l'expérience décrite dans le Chapitre II.

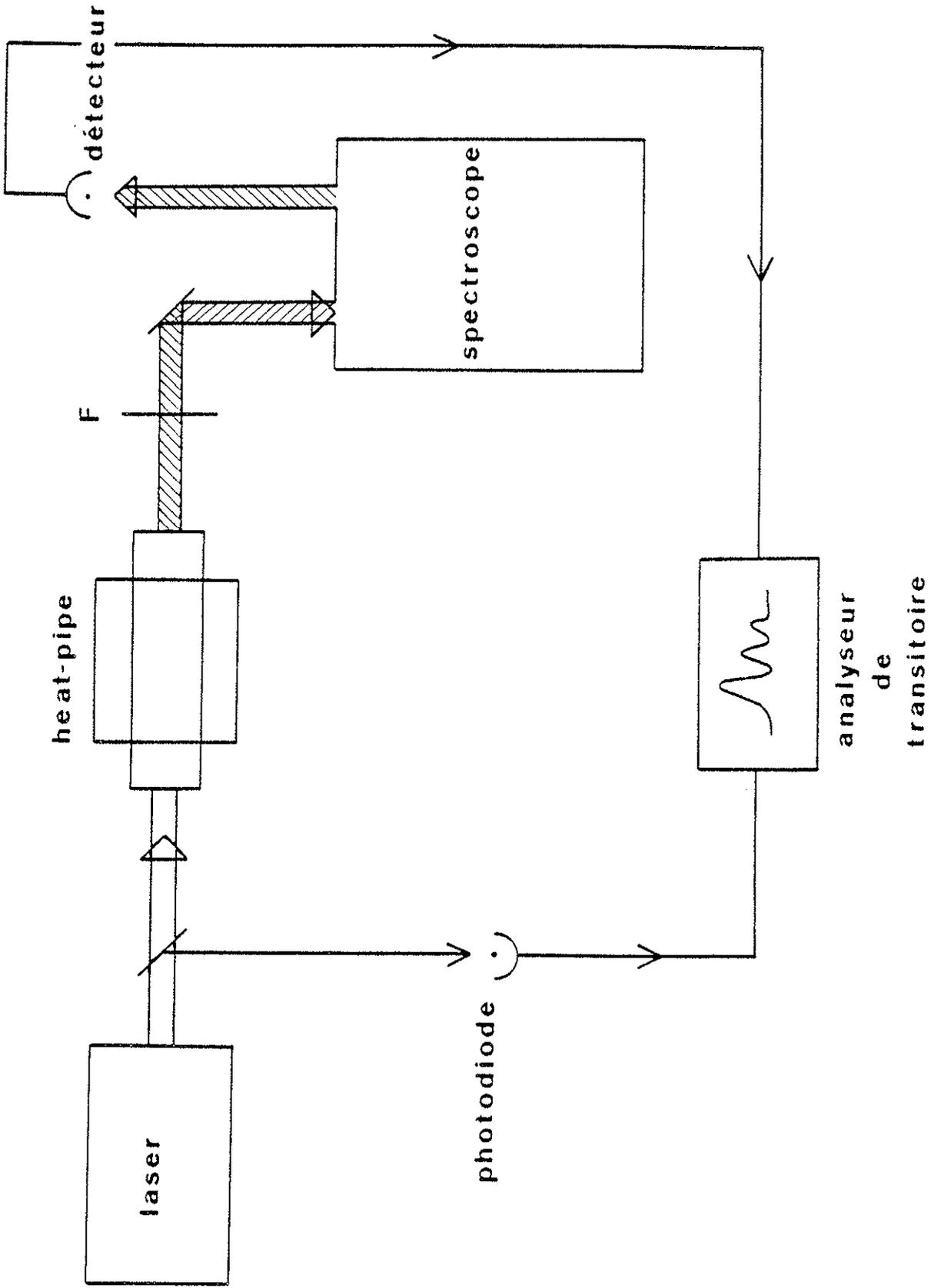


Figure III-14

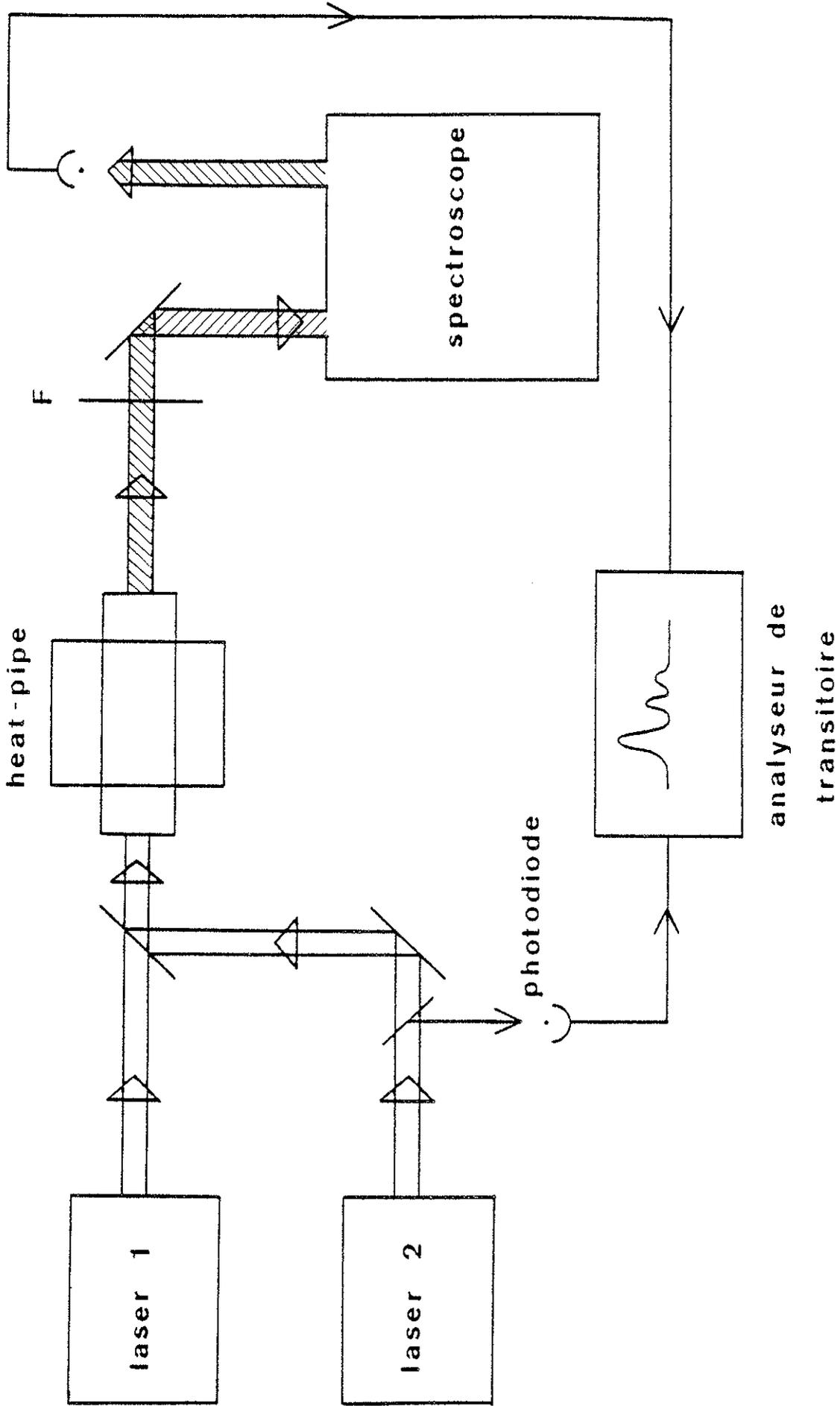


Figure III-15

### 2.2.1) L'excitation optique.

Dans la première expérience, l'excitation est réalisée grâce à un laser monomode pulsé ; le montage (cf. Figure II-4) et le colorant sont les mêmes que pour l'expérience décrite dans le Chapitre II. Avec ce montage [45], il est possible de réaliser un balayage uniforme sur un grand domaine (jusque  $5 \text{ cm}^{-1}$ ). La fréquence du laser est repérée à l'aide de franges données par un interféromètre Fabry-Perot de référence.

Dans la deuxième expérience, l'excitation est réalisée au moyen de deux lasers pulsés synchronisés (cf. Figure III-13) ; le retard de l'impulsion du laser 2 sur celle du laser 1 est de l'ordre de 200 ns et n'est pas fixé de manière très précise (il suffit qu'il reste petit devant la durée de vie du niveau métastable  $6s5d \ ^1D_2$ ). Le laser noté 2 est un laser pulsé monomode dont le montage est le même que dans la première expérience ; le colorant est toutefois différent (il s'agit ici de rhodamine 6G) et la puissance crête des impulsions est cette fois de 200 W ; la durée des impulsions est toujours de l'ordre de 50 ns. Le laser noté 1 est un laser accordable à colorant, pompé par un laser à azote ; la durée des impulsions est de 5 ns environ et leur puissance crête de l'ordre de 5 kW .

### 2.2.2) Le spectroscopie.

Le spectroscopie que nous avons utilisé pour déterminer la longueur d'onde de la lumière superradiante est un spectroscopie à réseau (montage Littrow). La résolution était suffisante pour distinguer superradiance

Raman et superradiance induite par collisions ; cependant une mesure de petits déplacements du réseau était pratiquement impossible. Nous avons donc légèrement modifié le montage (cf. Figure III-16). Nous avons ajouté sur le trajet du faisceau, juste avant la fente de sortie, une lame à faces parallèles (d'épaisseur 3 mm) montée sur une platine goniométrique. La fonction de cette lame était de rattraper le déplacement du faisceau lors d'une variation de longueur d'onde, le réseau étant laissé fixe. Il faut signaler toutefois que, à cause de la relativement faible intensité du signal superradiant, nous avons été obligés d'ouvrir assez largement les fentes du spectroscope, diminuant ainsi la résolution (qu'on peut grossièrement évaluer à 50 mK dans la première expérience et 25 mK dans la seconde).

### 2.2.3) Détection.

La détection utilisée est la même que dans l'expérience décrite dans le Chapitre II. La présence du spectroscope rend évidemment inutile le filtre infrarouge.

En plus de l'étude résolue dans le temps des impulsions superradiantes, nous avons voulu étudier les variations de l'énergie totale de ces impulsions. Pour cela nous avons utilisé un détecteur lent PbS, dont le temps de réponse est de l'ordre de 1 ms. L'émission superradiante, dont la durée totale ne dépasse pas 50 ns, représente pour ce détecteur une excitation percussionnelle. Sa réponse est alors un signal dont la forme est toujours la même et dont la hauteur maximale est proportionnelle à l'aire de l'impulsion superradiante, c'est-à-dire à l'énergie émise.

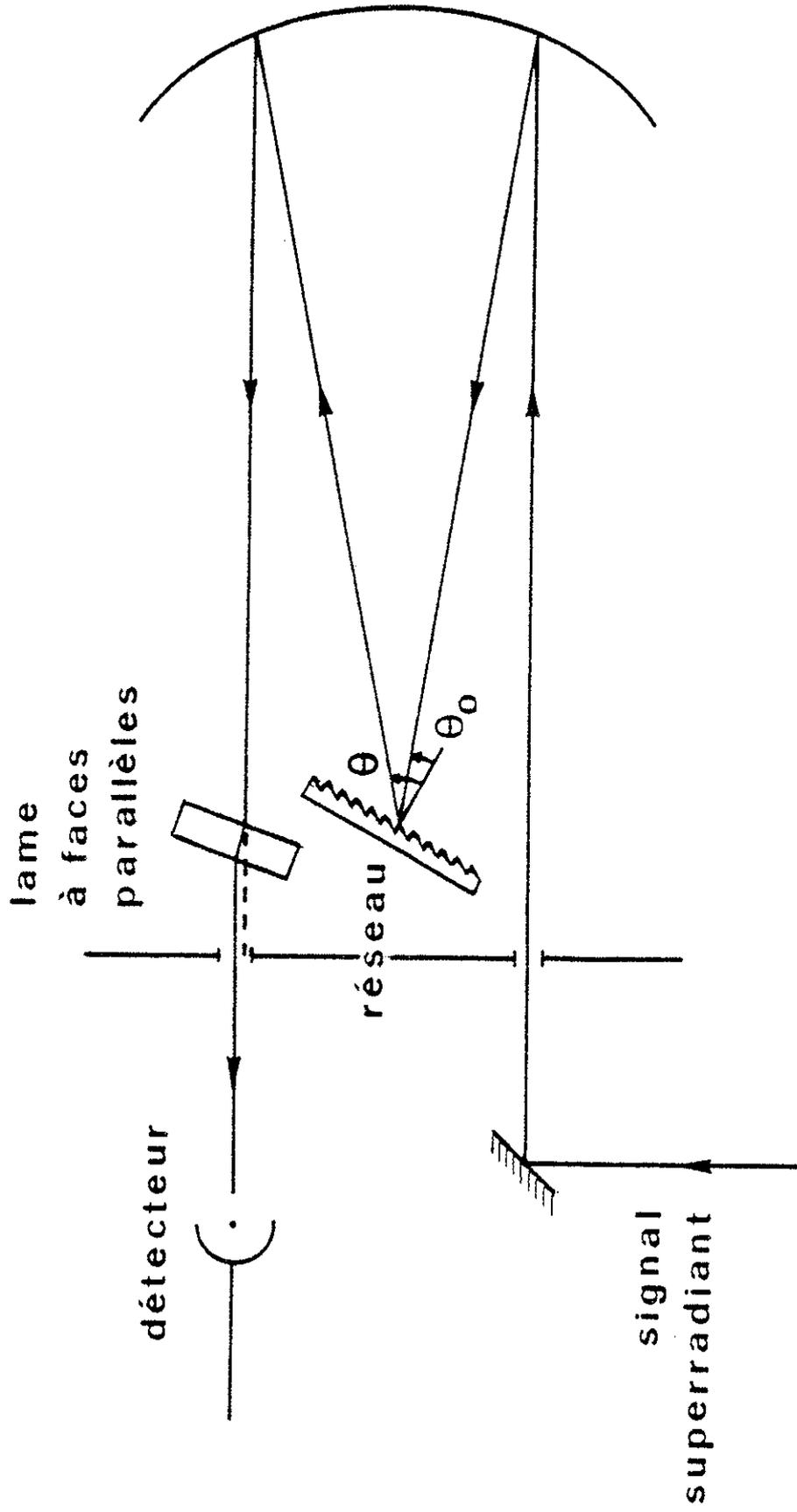


Figure III-16

### 2.3 Observations.

#### 2.3.1) Conditions expérimentales.

Dans les deux expériences la température de fonctionnement du "heat-pipe" était limitée à 710°C environ (température de fusion du baryum) vers les basses températures et à 950°C environ vers les hautes températures. Au-dessus de cette température, le retour du baryum par capillarité vers la zone centrale n'était en effet plus assez rapide et il était impossible d'obtenir un fonctionnement stable. Nous avons donc pu faire varier la densité volumique d'atomes entre quelques  $10^{15}$  et quelques  $10^{16}$  atomes/cm<sup>3</sup>. En ce qui concerne le laser pompant la transition (0 → 1) (laser 2 dans la seconde expérience), la section de ce faisceau était de l'ordre de 0,5 mm<sup>2</sup>; le flux lumineux correspondant dans le heat-pipe pouvait ainsi varier, grâce à l'emploi de densités optiques calibrées, de 0 jusqu'à une valeur de l'ordre de 0,6 kW/cm<sup>2</sup> dans la première expérience et de 40 kW/cm<sup>2</sup> dans la seconde.

#### 2.3.2) Caractéristiques générales des signaux émis.

Dans les deux expériences nous avons observé sur la transition (0 → 2) (cf. Figures III-11 et III-12) des impulsions lumineuses infrarouges émises de façon très directive, et ceci pour un large domaine de densité atomique et de puissance lumineuse, ainsi que pour des désaccords du laser allant jusqu'à  $1 \text{ cm}^{-1}$  de part et d'autre de la fréquence de la transition (0 → 1). La Figure III-17 montre quelques

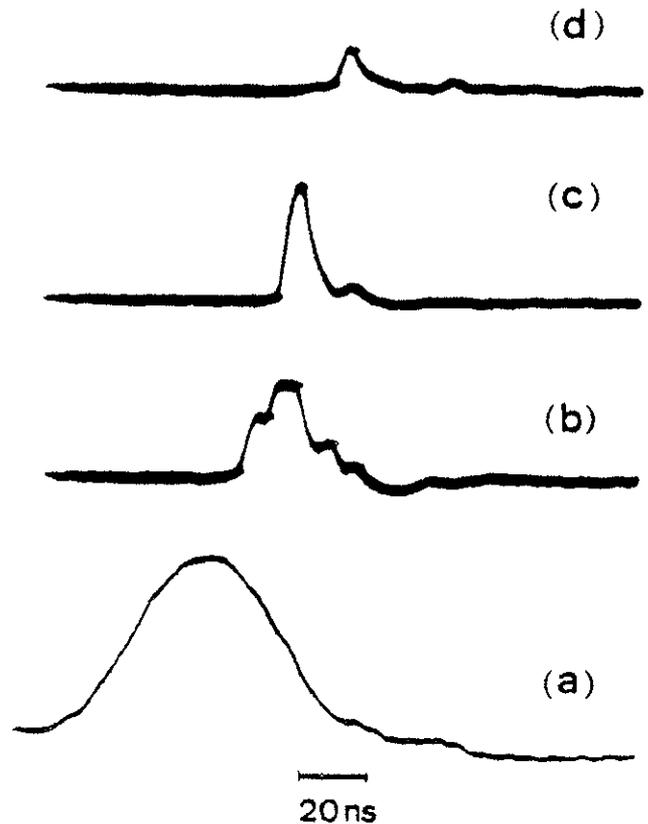


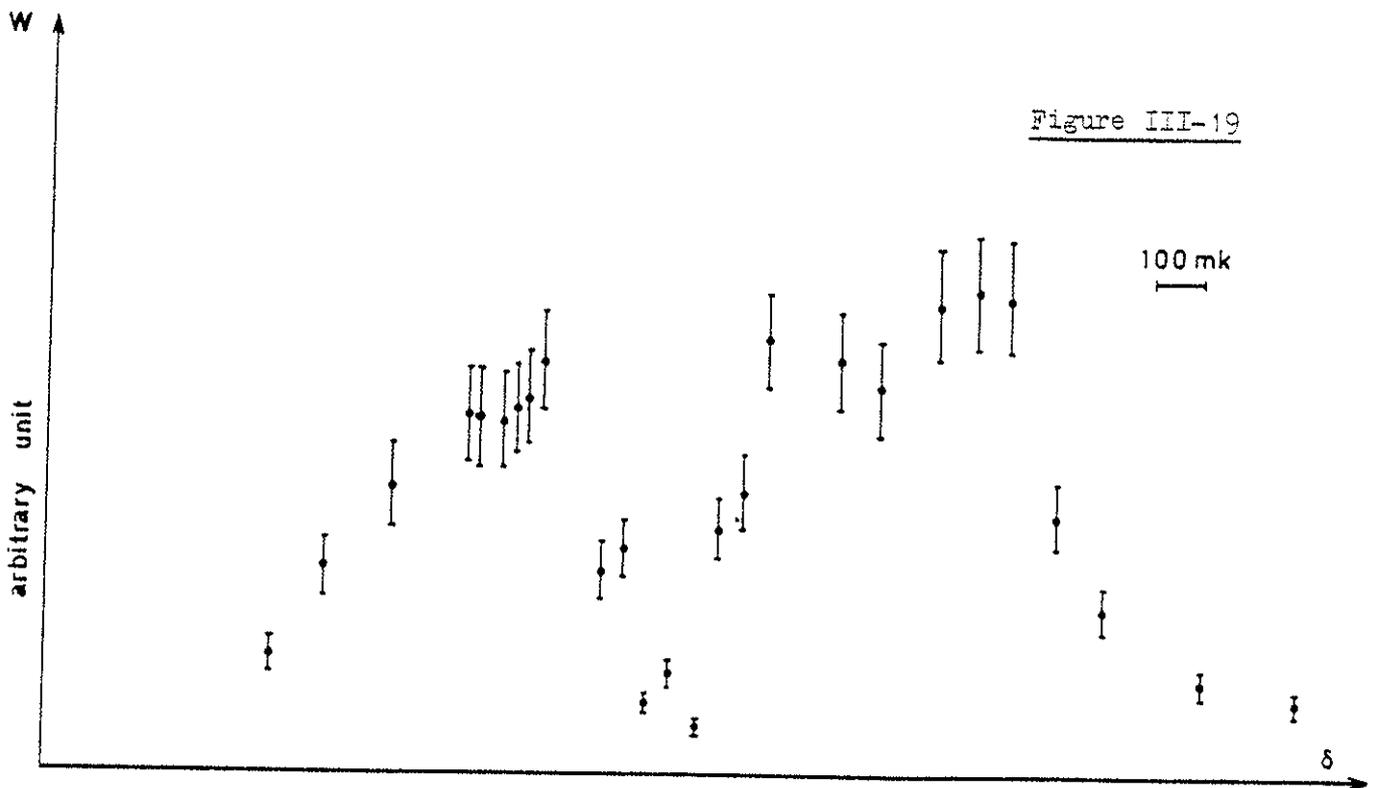
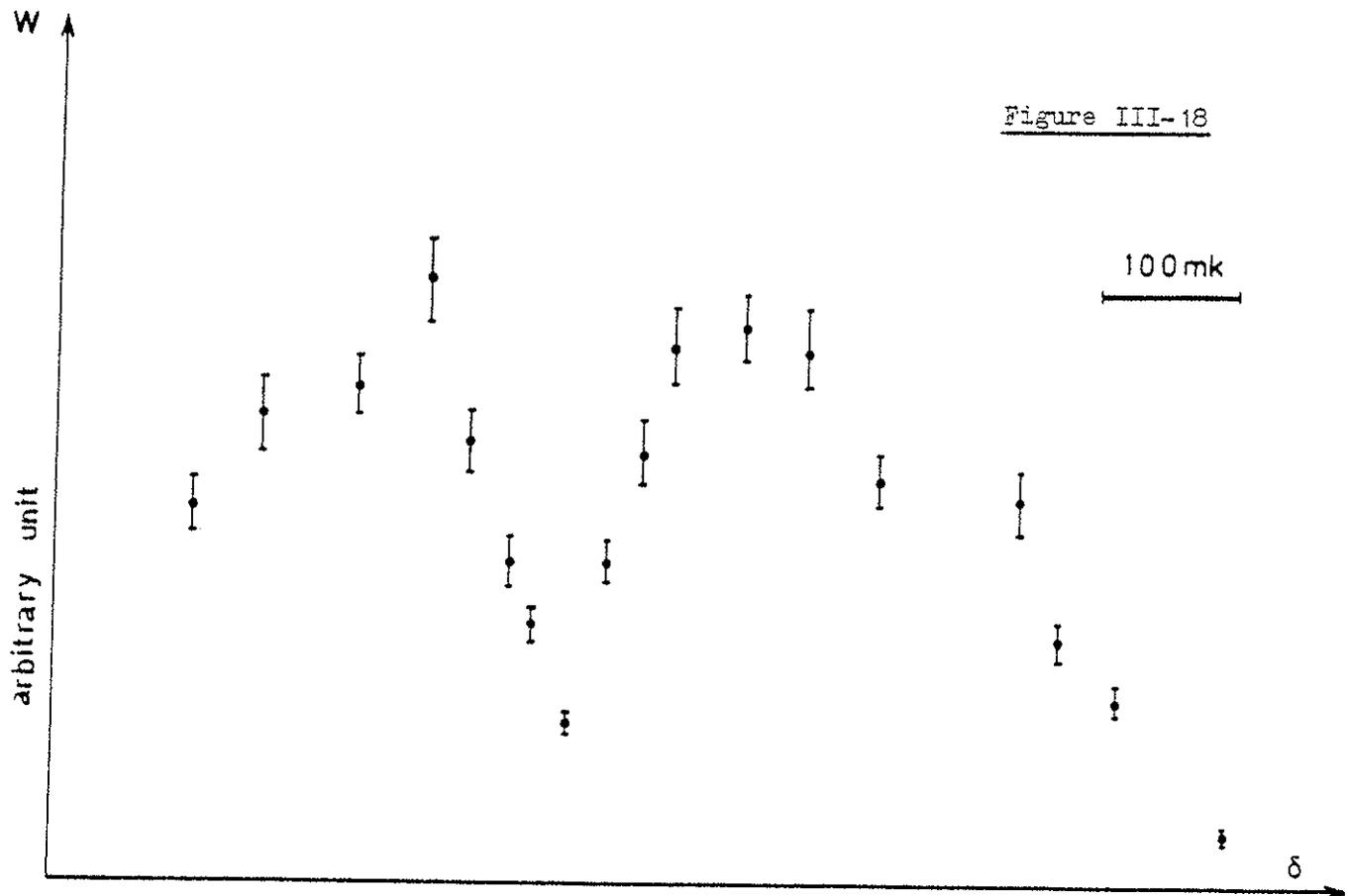
Figure III-17

La trace (a) représente l'impulsion laser, les traces (b), (c) et (d) des impulsions superradiantes. La trace (b) correspond à une température de  $730^{\circ}\text{C}$  et à un désaccord de  $100\text{ mK}$  environ vers le bleu. Les traces (c) et (d) correspondent à  $830^{\circ}\text{C}$  et  $100\text{ mK}$  environ vers le rouge. Pour la trace (d) une densité optique  $d=2$  était interposée sur le trajet du faisceau laser.

signaux typiques, obtenus lors de la première expérience et pour des désaccords relativement importants (l'élargissement Doppler sur la transition  $(0 \rightarrow 1)$  est alors de l'ordre de  $0,035\text{ cm}^{-1}$ ). L'allure des signaux obtenus dans la deuxième expérience est similaire. Dans les deux cas, on observe des oscillations de pompage lorsque le désaccord du laser avec la transition  $(0 \rightarrow 1)$  est faible.

Dans les deux expériences, nous avons observé que le retard de l'impulsion superradiante par rapport à l'impulsion laser augmente lorsque la densité volumique d'atomes diminue ou lorsque la puissance du laser diminue. De plus, comme pour les oscillations de pompage, la forme des signaux présente, d'un coup à l'autre, d'importantes fluctuations, impossibles à attribuer uniquement aux instabilités de puissance du laser. Ces diverses caractéristiques constituent l'évidence expérimentale du caractère superradiant de la lumière émise.

Nous nous sommes aussi intéressés à la variation de l'énergie  $W$  émise lors d'une impulsion superradiante en fonction du désaccord  $\delta$  du laser. Les Figures III-18 et III-19 montrent l'allure de ces variations dans le cas de la première expérience et pour des températures respectives de  $790^\circ\text{C}$  ( $5 \cdot 10^{15}$  atomes/cm<sup>3</sup> environ) et  $900^\circ\text{C}$  ( $2,5 \cdot 10^{16}$  atomes/cm<sup>3</sup> environ). Les points de ces courbes ont été calculés en faisant la moyenne de l'intensité maximale du signal donné par le détecteur PbS pour 40 impulsions. Les barres donnent une estimation de l'incertitude sur cette moyenne. Il faut signaler ici qu'aux fluctuations inhérentes à la superradiance s'ajoutent celles dues aux instabilités de puissance du laser. Dans la seconde expérience, l'allure de la courbe  $W(\delta)$  était similaire. Nous n'en présentons pas de courbe car, dans cette expérience, les fluctuations d'intensité du laser étaient encore plus importantes. De façon générale, on remarque que l'énergie émise par superradiance possède un minimum très marqué au voisinage de la résonance et que cette énergie tend vers zéro lorsque la valeur absolue du désaccord  $\delta$  augmente. Cette dernière propriété



se comprend aisément, quel que soit le type de superradiance observée. La diminution - et même, dans certains cas, la disparition - du signal au voisinage de la résonance s'explique probablement par la grande épaisseur optique du milieu. Le faisceau laser étant alors absorbé complètement sur quelques millimètres, le milieu atomique n'a plus une forme cylindrique allongée et l'émission ne présente plus de direction vraiment privilégiée, ce qui défavorise certainement l'émission superradiante.

### 2.3.3) Analyse spectrale de la lumière émise.

Afin de déterminer le type de superradiance observé, nous avons étudié, dans les deux expériences, les variations du désaccord  $\delta'$  de la lumière superradiante par rapport à la transition  $(0 \rightarrow 2)$  en fonction du désaccord  $\delta$  du laser par rapport à la transition  $(0 \rightarrow 1)$ . Les Figures III-20 et III-21 représentent les courbes  $\delta'(\delta)$  correspondant respectivement à la première et à la seconde expérience et à des densités volumiques d'atomes respectives de  $0,25 \cdot 10^{16}$  et  $10^{16}$  atomes/cm<sup>3</sup> environ. La valeur zéro du désaccord  $\delta$  du laser, qui correspond à la résonance, est approximativement repérée en déterminant visuellement le maximum d'absorption du laser. Il apparaît clairement sur les deux courbes que la longueur d'onde de la lumière superradiante est indépendante du désaccord  $\delta$  : le désaccord  $\delta'$  est donc certainement nul (comme on l'a arbitrairement indiqué sur les courbes). Nous avons réalisé ces mesures, pour les deux expériences, dans les conditions de température les plus différentes possibles ainsi qu'en faisant varier la puissance du laser. Quelles que soient les conditions,

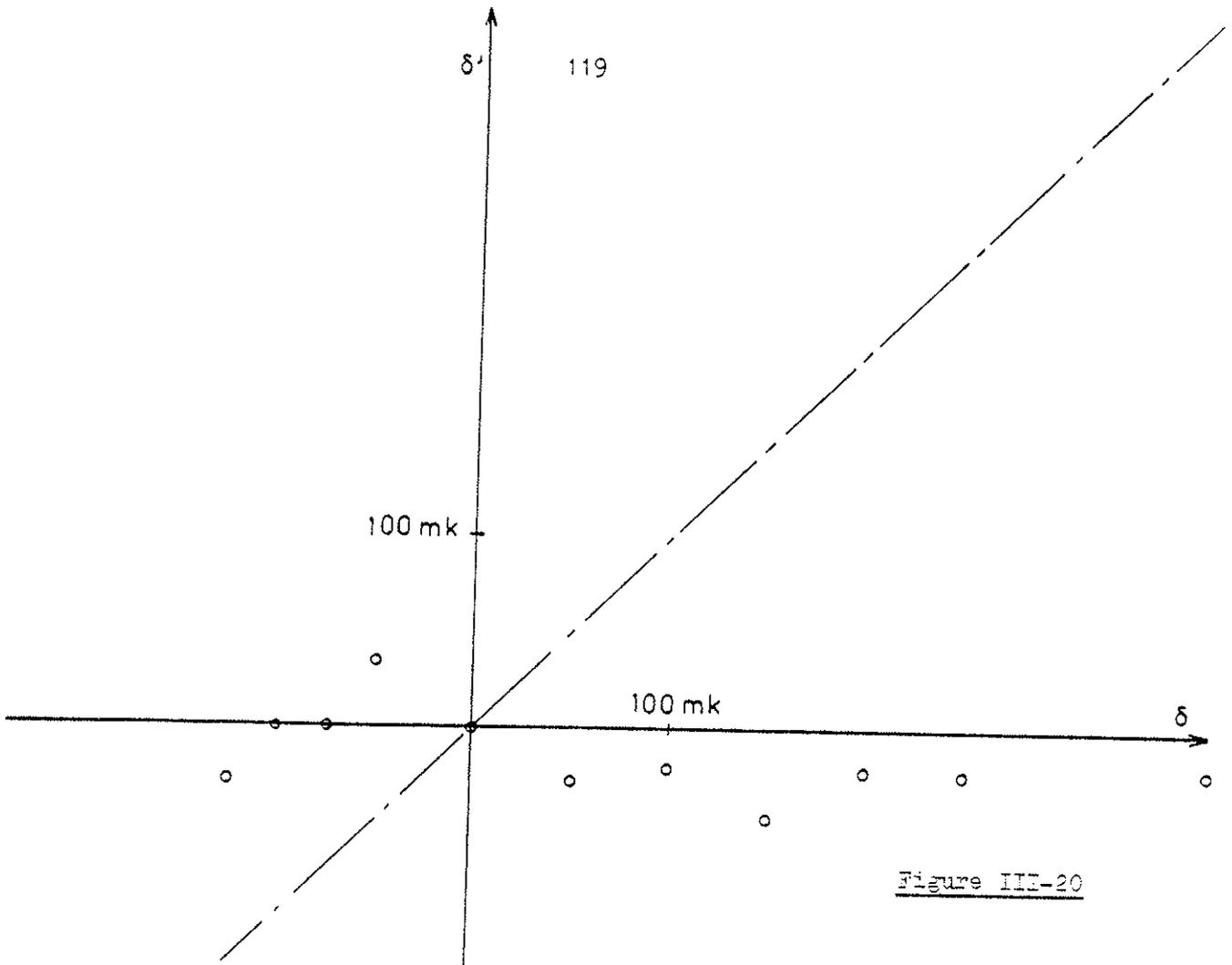


Figure III-20

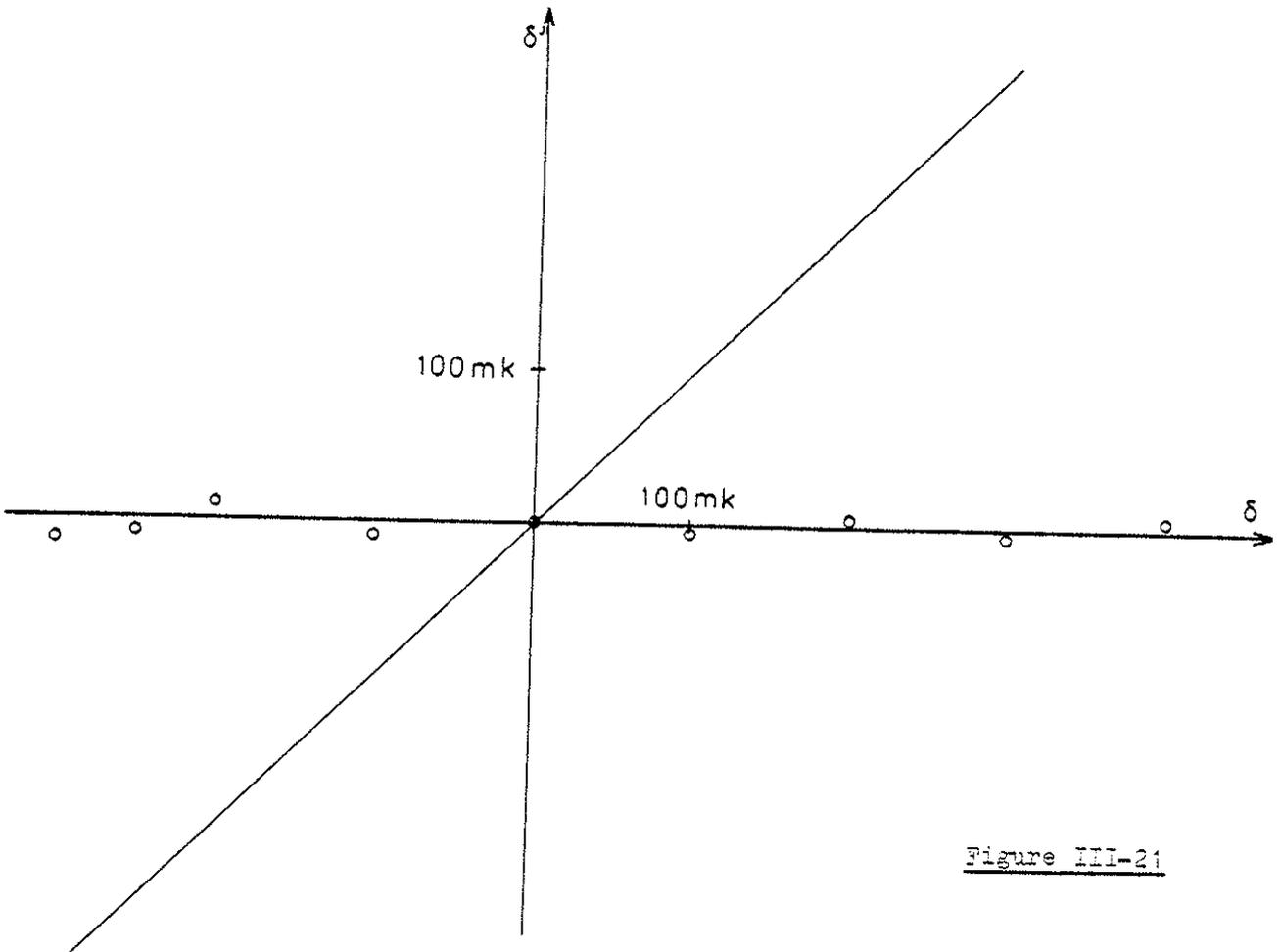


Figure III-21

l'émission superradiante a lieu à la longueur d'onde de la transition  $(0 \rightarrow 2)$ .

#### 2.4 Interprétation des résultats.

L'observation d'un signal émis à la fréquence de la transition  $(0 \rightarrow 2)$  prouve le peuplement du niveau  $|0\rangle$ . Il serait difficile d'attribuer un tel peuplement à un autre effet que les collisions atomiques et la superradiance observée est donc nécessairement une superradiance induite par collisions. Ce résultat s'interprète d'ailleurs parfaitement à l'aide du modèle que nous avons décrit dans le paragraphe III.1.3, au moins dans le cas de la première expérience pour laquelle les paramètres atomiques utiles dans cette analyse sont connus.

Dans le cas de la première expérience, les valeurs expérimentales de  $\Gamma$  [67] et de  $r$  [68] sont

$$\Gamma = 1,2 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$$

$$2r = 6,8 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} \quad ;$$

la valeur de  $r$  donnée ici correspond à une pression de 1 Torr et cette grandeur est à peu près proportionnelle à la pression dans le domaine qui nous intéresse. On remarque tout d'abord que l'approximation d'impact est valable même pour les désaccords les plus grands pour lesquels nous ayons obtenu un signal, c'est-à-dire  $1 \text{ cm}^{-1}$  environ. En effet, la fréquence de Rabi correspondant à la puissance maximale du laser est  $\omega_1 = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ . Or une valeur plausible pour la durée d'une

collision entre deux atomes de baryum, dans nos conditions expérimentales, est  $\tau = 10^{-12}$  s, si bien que la condition (III.107) est toujours vérifiée. De plus, les diverses inégalités utilisées dans le paragraphe III.1.3 sont vérifiées. Le temps nécessaire à l'établissement de l'équilibre entre les populations des niveaux de l'atome habillé est ici  $\tau_g \sim 1/\Gamma = 8,4$  ns. Ce temps est relativement petit devant la durée de l'impulsion laser, si bien qu'on peut admettre que le rapport des temps caractéristiques correspondant à la superradiance induite par collisions et à la superradiance Raman est donné par l'équation (III.128) : pour des désaccords  $\delta$  assez grands pour qu'on distingue les deux processus, ce rapport est donc à peu près égal à  $\Gamma/2r$ . Pour une pression de baryum de 0,25 Torr, qui est la pression la plus basse que nous ayons pu réaliser, ce rapport vaut 0,07 ; il est donc normal que la superradiance Raman soit totalement inhibée par la superradiance induite par collisions.

Dans le cas de la seconde expérience, l'analyse précise est impossible car les paramètres  $\Gamma$  et  $2r$  ne sont pas connus. De plus, la population du niveau  $|1\rangle$  n'est pas cette fois égale à la densité d'atomes ; il semble cependant que le résultat doit être identique. Finalement, les deux systèmes de niveaux du baryum étudiés ici semblent mal adaptés à l'observation de la superradiance Raman ; dans la première expérience, en particulier, on peut prédire, au moins dans le régime d'impact, que cette dernière n'apparaîtrait que pour des pressions très faibles, impossibles à réaliser dans un heat-pipe tel que le nôtre. De plus, pour qu'un régime coopératif puisse alors s'établir, il

faudrait une cellule de très grande longueur. Les deux expériences réalisées nous ont en tous cas permis d'observer un phénomène assez remarquable : l'existence d'une émission coopérative, c'est-à-dire cohérente, induite par les collisions.

## Chapitre IV

EFFETS COOPERATIFS TRANSITOIRES DUS à L'INTERACTION  
D'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE AVEC UN MILIEU  
ATOMIQUE OPTIQUEMENT EPAIS.

Introduction.

Lors de l'analyse des expériences décrites dans cette thèse, il nous est apparu que, l'absorption du faisceau laser par les atomes étant manifestement importante, au moins à résonance, il était intéressant d'étudier le problème de la réaction du milieu atomique sur le champ électromagnétique qui lui est appliqué. En particulier, nous nous sommes demandés si cette réaction n'avait pas un caractère spécifique lorsque les atomes se trouvent dans des conditions où ils interagissent coopérativement avec le champ. Plus précisément, nous avons étudié le problème de la réaction coopérative d'un ensemble d'atomes à deux niveaux sur un champ électromagnétique résonnant ou quasi-résonnant dans le cas où les atomes sont initialement dans leur état fondamental

("absorption coopérative") et lorsque le champ est peu intense. Nous supposons en fait que la densité volumique de photons est beaucoup plus faible que la densité volumique des atomes, si bien que la proportion d'atomes excités reste faible. Nous utilisons successivement un traitement semi-classique, dans lequel les équations d'évolution sont les mêmes que celles qui décrivent l'émission superradiante, et un traitement purement quantique, où l'on utilise la notion d'atomes habillés "collectivement" ou de collection d'atomes habillée. Dans les deux traitements, nous montrons que l'hypothèse concernant la faible intensité du laser simplifie considérablement le problème : dans le traitement semi-classique les équations deviennent linéaires par rapport au champ tandis que l'évolution quantique du système à partir d'un état à  $n$  photons peut être déduite de son évolution à partir d'un état à un seul photon. Il faut cependant signaler ici que, au contraire de l'optique linéaire, nous ne nous intéressons pas au régime permanent d'oscillations forcées, dont nous ne pourrions d'ailleurs rendre compte qu'en introduisant dans les équations les divers phénomènes de relaxation du système. Nous n'étudions ici que le régime transitoire qui, seul, présente un caractère coopératif. Ce caractère se manifeste en général par l'apparition d'oscillations qui sont caractérisées par une fréquence analogue à la fréquence de Rabi, mais dans laquelle la densité volumique de photons est remplacée par la densité volumique d'atomes, que nous appelons "fréquence de Rabi coopérative". Mis à part le cas particulier de la superradiance, le problème de l'interaction coopérative d'un ensemble d'atomes avec un champ électromagnétique a été relativement peu étudié jusqu'à maintenant. Le problème de la fluorescence

de résonance coopérative [69-78], qui est assez voisin de celui étudié ici, a surtout été envisagé dans le cas de champs très intenses ou de très petits nombres d'atomes. Parmi les références qui concernent un problème un peu analogue au nôtre [79,80,32], signalons la référence [81] dans laquelle une oscillation de période proportionnelle à  $N^{-1/2}$  est prévue par diagonalisation, lorsque  $N$  tend vers l'infini, d'un hamiltonien similaire au nôtre. Quoi qu'il en soit, le phénomène étudié ici nous paraît essentiellement nouveau et n'a probablement jamais été observé. Nous étudions à la fois classiquement et quantiquement quelques cas particuliers de régimes transitoires coopératifs et nous décrivons, pour l'un de ces cas, le principe d'une expérience idéale qui permettrait de mettre en évidence une oscillation à la fréquence de Rabi coopérative.

## 1. TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE.

### 1.1 Propagation d'un paquet d'ondes planes progressives.

#### 1.1.1) Equations d'évolution.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'interaction coopérative d'une assemblée d'atomes à deux niveaux occupant un volume cylindrique allongé avec un champ électromagnétique constitué d'un paquet d'ondes planes progressives. L'émission superradiante est, au moins dans ses aspects classiques, un cas particulier de ce type d'interaction et les équations qui nous intéressent sont celles établies au Chapitre I :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N} = \frac{2i}{\hbar} [\varepsilon^* \mathcal{P} - \varepsilon \mathcal{P}^*] \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} = \frac{i}{\hbar} |d_{01}|^2 \varepsilon \mathcal{N} + i\delta \mathcal{P} \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon = - \frac{i\omega_{01}}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \quad . \quad (\text{IV.2})$$

$\mathcal{N}$  est l'inversion de population locale et  $\varepsilon$  et  $\mathcal{P}$  sont les enveloppes lentement variables du champ et de la polarisation locale du milieu atomique ; la fréquence centrale pour ces deux grandeurs est égale à la fréquence du champ appliqué,  $\omega_L$ , qui est éventuellement légèrement différente de la fréquence atomique ( $\omega_L = \omega_{01} - \delta$ ).

Si l'on suppose maintenant que le milieu atomique est optiquement épais, c'est-à-dire que le champ ne peut exciter qu'une faible partie des atomes, l'inversion de population  $\mathcal{N}$  est pratiquement toujours égale à l'opposé de la densité volumique des atomes,  $n$ . Les équations (IV.1) et (IV.2) se simplifient et l'on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} = - \frac{i|d_{01}|^2}{\hbar} \varepsilon n + i\delta \mathcal{P} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon = - \frac{i\omega_{01}}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \end{cases} \quad . \quad (\text{IV.3})$$

Ces équations sont encore très complexes et l'allure de la solution dépend énormément des conditions initiales. Nous n'étudions ici le problème que dans deux cas particuliers simples : celui où les atomes sont initialement tous dans l'état  $|1\rangle$  et voient arriver un front d'onde électromagnétique plane, résonnant avec la transition ( $0 \rightarrow 1$ ), et le cas où les atomes sont brusquement portés dans l'état  $|1\rangle$  alors que le volume qu'ils occupent contient un champ électromagnétique à peu près homogène, résonnant ou quasi-résonnant avec la transition ( $0 \rightarrow 1$ ).

1.1.2) Régime coopératif transitoire correspondant à l'arrivée d'un front d'onde.

Nous considérons ici que les atomes sont initialement dans leur état fondamental et qu'ils interagissent avec une onde plane progressive, résonnante avec la transition atomique, se propageant suivant Oz et dont le front d'onde arrive à l'instant initial à l'entrée du milieu atomique. Les conditions aux limites sont donc

$$\begin{cases} \varepsilon (z=0, t \geq 0) = \varepsilon_0 \\ \varepsilon (z=0, t < 0) = 0 \\ \mathcal{P}(z, t < 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Il est commode de faire le changement de variables défini par

$$\begin{cases} z' = z/c \\ \tau = t - z/c \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Les équations (IV.3) deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P} = - \frac{i |d_{01}|^2}{\hbar} \varepsilon \\ \frac{\partial}{\partial z'} \varepsilon = - \frac{i \omega_{01}}{2 \varepsilon_0} \mathcal{P} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

En tenant compte du fait que dans le milieu atomique le champ se propage avec une vitesse inférieure ou égale à  $c$ , les conditions aux limites deviennent

$$\begin{cases} \varepsilon (z'=0, \tau \geq 0) = \varepsilon_0 \\ \varepsilon (z'=0, \tau < 0) = 0 \\ \mathcal{P}(z', \tau \leq 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

La résolution des équations (IV.6) pour les conditions aux limites (IV.7)

est décrite dans l'Appendice II. Elle fait apparaître une fréquence  $\Omega_1$  définie par

$$\hbar \Omega_1 = 2 \frac{\hbar \omega_{01}}{2\epsilon_0} \sqrt{n} |d_{01}| \quad . \quad (\text{IV.8})$$

Cette fréquence est identique à une fréquence de Rabi, à ceci près que la densité volumique de photons  $n$  est remplacée par une densité volumique d'atomes . Nous verrons que cette fréquence apparaît continuellement dans ce chapitre ; elle caractérise l'interaction coopérative entre les atomes et le champ - elle est d'ailleurs proportionnelle à la racine carrée de la densité d'atomes. Nous l'appellerons dans toute la suite du chapitre "fréquence de Rabi coopérative". Dans le cas particulier qui nous occupe, la solution des équations est

$$\begin{aligned} \epsilon(z', \tau) &= \epsilon_0 J_0 (\Omega_1 \sqrt{z' \tau}) \\ (z', \tau) &= - \frac{2i |d_{01}|^2 n \epsilon_0}{\hbar \Omega_1} \frac{\tau}{z'} J_1 (\Omega_1 \sqrt{z' \tau}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Si, par exemple, on s'intéresse à l'intensité du champ rayonné à la sortie du volume atomique ( $z'=L$ ), on voit que celle-ci doit présenter, dans son régime transitoire, des oscillations dont la rythme dépend de la fréquence de Rabi coopérative  $\Omega_1$  et donc de la densité des atomes. Cependant la réponse du système atomique reste complexe et, notamment, la fréquence  $\Omega_1$  n'y apparaît pas très simplement. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers un autre cas.

1.1.3) Régime coopératif transitoire accompagnant l'"évacuation"  
d'un champ électromagnétique uniforme.

Nous étudions ici la propagation dans le milieu atomique d'un paquet d'ondes planes progressives qui, à l'instant initial, n'est réparti que dans ce milieu. Nous supposerons que, à cet instant initial, les atomes sont tous dans leur état non excité. On peut par exemple supposer que l'instant initial correspond à un peuplement brusque de cet état, synchronisé avec le passage, dans le milieu atomique, d'une impulsion lumineuse de durée égale au temps de propagation de la lumière dans le volume occupé par les atomes,  $T_v = L/c$ . Nous supposerons de plus que le champ est à peu près homogène dans le milieu atomique à l'instant initial (nous préciserons plus loin ce que cela veut dire) car l'évolution du système est alors simple.

Les équations à résoudre sont les équations (IV.3) et les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} \varepsilon(z, t=0) = \varepsilon_0(z) \\ \mathcal{P}(z, t=0) = 0 \end{cases} \quad . \quad (\text{IV.10})$$

Dans un premier temps, nous négligerons purement et simplement le terme de propagation  $\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon$  qui apparaît dans l'équation (IV.3). Nous étudierons ensuite de façon simple et qualitative quelle est l'influence de la propagation. Enfin nous traiterons plus quantitativement ses effets, en nous limitant toutefois au cas où l'enveloppe du champ a une variation spatiale lente à l'échelle de la longueur d'onde associée à sa fréquence de modulation temporelle.

a) Calcul négligeant la propagation.

Si l'on néglige le terme  $\frac{\partial}{\partial z}$  dans les équations (IV.3), on obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{P} = - \frac{i |d_{01}|^2}{\hbar} \varepsilon_n + i\delta \mathcal{P} \\ \frac{d}{dt} \varepsilon = - \frac{i\omega_{01}}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

Le champ  $\varepsilon$  vérifie donc l'équation du second ordre suivante

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} - i\delta \frac{d}{dt} + \frac{\Omega_1^2}{4} \right) \varepsilon = 0 \quad , \quad (\text{IV.12})$$

où la fréquence de Rabi coopérative  $\Omega_1$  est toujours définie par l'équation (IV.8). La résolution de cette équation est simple.  $\varepsilon$  est une combinaison linéaire de termes  $e^{i\omega t}$  où  $\omega$  est racine de l'équation

$$-\omega^2 + \omega \delta + \frac{\Omega_1^2}{4} = 0 \quad , \quad (\text{IV.13})$$

c'est-à-dire que  $\omega$  peut être égal à  $\omega_+$  ou  $\omega_-$  avec

$$\omega_{\pm} = (\delta \pm \sqrt{\Omega_1^2 + \delta^2}) / 2 \quad . \quad (\text{IV.14})$$

En tenant compte des conditions aux limites (IV.10) on écrit finalement

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_0(z) (\omega_+ e^{i\omega_+ t} - \omega_- e^{i\omega_- t}) / (\omega_+ - \omega_-) \quad . \quad (\text{IV.15})$$

Le champ électrique réel est

$$E(z, t) = [\varepsilon(z, t) e^{i\omega_L(t-z/c)} + \text{c.c.}] \quad , \quad (\text{IV.16})$$

soit, en supposant  $\varepsilon_0(z)$  réel ,

$$E(z, t) = \frac{2\varepsilon_0(z)}{\omega_+ - \omega_-} \left\{ \omega_+ \cos[(\omega_L + \omega_-)t - \omega_L z/c] - \omega_- \cos[(\omega_L + \omega_+)t - \omega_L z/c] \right\} \quad (\text{IV.17})$$

En un point donné le champ est donc la superposition de deux composantes qui oscillent avec les pulsations

$$\begin{cases} \omega_L + \omega_- = (\omega_{01} + \omega_L - \Omega_1^2 + \delta^2) / 2 \\ \omega_L + \omega_+ = (\omega_{01} + \omega_L + \Omega_1^2 + \delta^2) / 2 \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

La différence entre ces deux pulsations est donc

$$\bar{\omega} = \Omega_1^2 + \delta^2 \quad (\text{IV.19})$$

b) Analyse qualitative de l'influence de la propagation.

Nous supposons qu'à l'instant initial les atomes se trouvent dans leur état fondamental et sont mis en présence d'un champ uniforme  $\epsilon_0$ . Nous supposons de plus que l'on impose, en amont du volume occupé par les atomes, un champ  $\epsilon(t)$  qui est égal au champ  $\epsilon_{np}(t)$  qu'on obtiendrait avec les mêmes conditions initiales mais en négligeant la propagation, c'est-à-dire donné par l'équation (IV.15) en remplaçant  $\epsilon_0(z)$  par  $\epsilon_0$ . Dans ces conditions, il est clair qu'à l'intérieur du volume atomique le champ est à tout instant égal à sa valeur calculée en négligeant la propagation car le terme  $\frac{\partial}{\partial z} \epsilon(z,t)$  est effectivement nul partout. Nous nous intéressons en fait ici au cas où aucun champ n'est imposé en amont du volume actif. Nous pouvons cependant affirmer que le champ à la sortie du volume ( $z = L$ ) est effectivement égal à la valeur calculée en ignorant la propagation tant que  $t$  est inférieur ou égal à  $T_v = L/c$ . En effet l'état du champ en  $z = L$  à l'instant  $t$  ne peut en aucun cas dépendre de ce qui se passe en  $z = 0$  à un instant antérieur à  $t$  de plus de  $T_v$ . On peut donc dire que, si le

champ est initialement homogène dans le volume atomique, les oscillations du champ à la sortie de ce volume sont insensibles à l'effet de la propagation pendant un temps qui est au moins de l'ordre du temps de propagation de la lumière à travers le milieu.

c) Calcul de l'effet de la propagation dans le cas où les variations spatiales de l'enveloppe du champ sont lentes.

Nous allons maintenant présenter un calcul tenant compte des effets de propagation pourvu que l'enveloppe lentement variable du champ initial,  $\varepsilon_0(z)$ , ait une longueur caractéristique de variation,  $l$ , beaucoup plus grande que la longueur d'onde associée à la fréquence de Rabi coopérative, soit  $l \gg c/\Omega_1$ . Nous supposons de plus que le désaccord  $\delta = \omega_{01} - \omega_L$  est beaucoup plus petit que  $\Omega_1$ . Le calcul, qui est décrit dans l'Appendice III, consiste à étudier les équations différentielles d'évolution du système dans l'espace des transformées de Fourier spatiales et temporelles du champ et de la polarisation du milieu atomique. On trouve ainsi

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_0(z - ct/2) e^{i\delta t/2} \cos(\Omega_1 t/2) \quad , \quad (\text{IV.20})$$

et, par conséquent, en supposant  $\varepsilon_0(z)$  réel,

$$E(z, t) = \varepsilon_0(z - ct/2) \quad (\text{IV.21})$$

$$\left\{ \cos[(\omega_{01} + \omega_L + \Omega_1)t/2 - \omega_L z/c] + \cos[(\omega_{01} + \omega_L - \Omega_1)t/2 - \omega_L z/c] \right\} .$$

On obtient donc le même comportement oscillant que dans le paragraphe a) et les deux pulsations sont bien celles qu'on obtient dans ce paragraphe lorsque  $\delta \ll \Omega_1$ . Finalement, avec les approximations faites ici, la

réaction coopérative des atomes sur le champ entraîne :

- (i) un déplacement de la fréquence centrale des oscillations, qui devient égale à la moyenne de la fréquence du champ et de la fréquence atomique ;
- (ii) une modulation de l'enveloppe du champ à une fréquence voisine de la fréquence de Rabi coopérative ;
- (iii) une propagation de cette enveloppe à une vitesse égale à  $c/2$  .

Ce dernier résultat peut paraître surprenant. On peut cependant s'en donner une image simple en disant que les photons sont absorbés par les atomes la moitié du temps et ne se propagent que pendant l'autre moitié.

Dans le premier exemple d'interaction coopérative entre atomes et ondes progressives étudié dans ce paragraphe 1.1, le caractère spécifiquement coopératif de l'intensité rayonnée ne pourrait être mis en évidence expérimentalement que par une analyse temporelle de cette intensité. Dans le second exemple, au contraire, la fréquence de Rabi coopérative apparaît simplement comme une fréquence de modulation du champ rayonné et est donc susceptible d'être mise en évidence par une analyse spectrale. Ce résultat repose sur le fait que l'on suppose que les variations spatiales du champ sont lentes, c'est-à-dire que l'on peut négliger les effets de propagation. Cependant les modulations n'apparaissent que transitoirement, pendant un temps qui est de l'ordre de  $L/c$  . Nous nous sommes demandés s'il était possible d'augmenter la durée du régime transitoire tout en conservant un régime oscillant sinusoidal pour le champ. Ceci est possible, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, si l'on considère des ondes stationnaires.

## 1.2 Cas d'une onde stationnaire.

### 1.2.1) Situation du problème. Equations d'évolution.

Nous considérons ici le cas d'un champ électromagnétique qui est constitué de deux paquets d'ondes planes d'enveloppes lentement variables se propageant suivant Oz dans les deux sens opposés et interférant entre eux, c'est-à-dire formant une onde stationnaire. Ce cas se rencontre par exemple lorsqu'on place une assemblée d'atomes dans une cavité de type Fabry-Perot accordée à la fréquence  $\omega_L$  du champ appliqué. Nous supposons ici que l'onde stationnaire n'est pas détruite par l'interaction avec les atomes, c'est-à-dire que le champ électrique  $E$  et la polarisation locale du milieu atomique  $P$  s'écrivent

$$\begin{cases} E = [\varepsilon e^{i\omega_L t} + \text{c.c.}] \cos kz \\ P = [\mathcal{P} e^{i\omega_L t} + \text{c.c.}] \cos kz \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

où  $k = \omega_L/c$  et où  $\varepsilon$  et  $\mathcal{P}$  sont supposés indépendants de  $z$  et lentement variables à l'échelle du temps de propagation de la lumière à travers la cavité  $T_V = L/c$ . Dans ces conditions, les équations d'évolution des grandeurs atomiques, qui sont des équations locales, sont les mêmes que dans le cas d'une onde progressive ; elles s'écrivent ici :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{N} = \frac{2i}{\hbar} [\varepsilon^* \mathcal{P} - \varepsilon \mathcal{P}^*] \cos^2 kz \\ \frac{d}{dt} \mathcal{P} = \frac{i}{\hbar} |d_{01}|^2 \varepsilon \mathcal{N} + i\delta \mathcal{P} \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

L'équation d'évolution de  $\varepsilon$  peut être déduite de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique totale contenue dans la cavité,  $W$ ,

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{W}{2T_c} - \frac{\hbar\omega_{01}}{2} \frac{d\mathcal{N}_T}{dt} \quad (\text{IV.25})$$

Dans cette équation,  $T_c$  est le temps caractéristique de la cavité

$$T_c = T_v f \quad , \quad (\text{IV.26})$$

$f$  étant la finesse du Fabry-Perot, qui est liée au coefficient de réflexion  $R$  des miroirs par

$$f = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad ; \quad (\text{IV.27})$$

$\mathcal{N}_T$  représente l'inversion de population totale, c'est-à-dire la somme de l'inversion de population locale,  $\mathcal{N}$ , sur le volume  $v_a$  occupé par les atomes. D'après les équations (IV.22), l'énergie électromagnétique  $W$  s'écrit

$$W = \epsilon_0 v_c |\epsilon|^2 \quad ,$$

où  $v_c = L a^2$  est le volume occupé par le champ à l'intérieur de la cavité. Pour obtenir réellement l'équation d'évolution de  $\epsilon$ , il est nécessaire de préciser la position occupée par les atomes dans la cavité; nous considérerons deux cas particuliers simples, celui où les atomes sont tous au voisinage d'un même plan d'onde et celui où les atomes sont répartis uniformément dans le volume  $v_c$  de la cavité. En général, cependant, les équations d'évolution ainsi obtenues n'ont pas de solution simple. Le cas où aucun champ n'est appliqué aux atomes et où ceux-ci sont initialement dans leur état excité est celui de la superradiance à l'intérieur d'une cavité, qui est étudié en détail dans la référence [32]. Nous nous intéressons ici à la réponse transitoire coopérative du système atomique à un champ appliqué dans le cas où ce dernier n'est pas assez intense pour exciter une proportion notable des atomes,

c'est-à-dire lorsque la densité volumique de photons est très inférieure à celle des atomes. Dans ce cas en effet, comme dans celui d'une onde progressive, on peut remplacer  $\mathcal{N}$  par l'opposé de la densité volumique des atomes,  $n$  (qui est supposée constante) et les équations ne couplent plus que  $\varepsilon$  et  $\mathcal{P}$ .

### 1.2.2) Atomes au voisinage d'un même plan d'onde.

Si l'on suppose que les atomes se trouvent tous pratiquement dans le même plan d'onde, c'est-à-dire que la dimension suivant  $Oz$  du volume atomique  $v_a$  est beaucoup plus petite que la longueur d'onde atomique  $\lambda_{01}$ , on peut écrire facilement les équations d'évolution des grandeurs atomiques totales,  $\mathcal{N}_T$  et  $\mathcal{P}_T$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{N}_T = \frac{2i}{\hbar} [\varepsilon^* \mathcal{P}_T - \varepsilon \mathcal{P}_T^*] \cos^2 kz_0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{P}_T = \frac{i}{\hbar} |d_{01}|^2 \varepsilon \mathcal{N}_T + i\delta \mathcal{P}_T \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

où  $z_0$  est l'abscisse commune des différents atomes.

L'équation d'évolution de  $\varepsilon$  est alors obtenue en remplaçant  $\frac{d\mathcal{N}_T}{dt}$  par sa valeur dans l'équation (IV.25) ; on obtient

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2T_c} - \frac{i\omega_{01}}{\varepsilon_0 v_c} \cos^2 kz_0 \mathcal{P}_T \quad (\text{IV.29})$$

Dans le cas qui nous intéresse ici d'un milieu atomique optiquement épais,  $\mathcal{N}_T$  est pratiquement toujours égal au nombre d'atomes  $N$  et les équations d'évolution s'écrivent

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - i\delta\right) \mathcal{P}_T = -\frac{i|d_{01}|^2}{\hbar} \varepsilon N \\ \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{2T_c}\right) \varepsilon = -\frac{i\omega_{01}}{\varepsilon_0 v_c} \cos^2 kz_0 \mathcal{P}_T \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

On remarque l'analogie formelle de ces équations avec celles que nous avons obtenues dans le paragraphe 1.1.3.a) pour une onde progressive mais en ignorant la propagation. D'après les équations (IV.30),  $\varepsilon$  vérifie l'équation du second ordre :

$$\left(\frac{d}{dt} - i\delta\right) \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{2T_c}\right) \varepsilon = -(\Omega'_0)^2/2 \varepsilon, \quad (\text{IV.31})$$

où la fréquence  $\Omega'_0$  est définie par

$$\Omega'_0 = \Omega'_1 |\cos kz_0|; \quad (\text{IV.32})$$

elle dépend donc, évidemment, de la position des atomes par rapport aux ventres et aux noeuds de l'onde stationnaire et de la fréquence de Rabi coopérative qui est, cette fois, définie par

$$\hbar \Omega'_1 = 2 \sqrt{\frac{\hbar \omega_{01}}{2\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{N}{V_c}} d_{01}; \quad (\text{IV.33})$$

elle fait donc intervenir non pas la densité réelle des atomes mais leur densité moyenne dans la volume de la cavité. Si l'on cherche le champ  $\varepsilon$  comme une combinaison linéaire d'exponentielles du type  $e^{(-\gamma+i\omega)t}$ , on trouve, pourvu que

$$\delta, \Omega'_0 \gg 1/2T_c, \quad (\text{IV.34})$$

que les solutions possibles pour  $\gamma$  et  $\omega$  sont

$$\begin{cases} \gamma = 1/4T_c \\ \omega_{\pm} = (\delta \pm \sqrt{2\Omega'^2_0 + \delta^2})/2 \end{cases}. \quad (\text{IV.35})$$

Nous supposons maintenant que les conditions initiales sont les suivantes : atomes tous dans l'état fondamental et champ électromagnétique uniforme, soit :

$$\begin{cases} \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \\ \mathcal{P}_T(0) = \frac{\pi}{i|d_{01}|^2} \left[ \left( \frac{d}{dt} - i\delta \right) \varepsilon(t) \right]_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

La solution s'écrit alors

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\left( -\frac{1}{4T_c} + \frac{i\delta}{2} \right) t} \cos\left( \sqrt{2\Omega_0'^2 + \delta^2} t/2 \right) \quad (\text{IV.37})$$

Le champ électrique réel à l'intérieur de la cavité est donc, si  $\varepsilon_0$  est réel,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) = \varepsilon_0 e^{-\left( \frac{1}{4T_c} \right) t} \cos kz \\ \left\{ \cos\left[ (\omega_{01} + \omega_L + \sqrt{2\Omega_0'^2 + \delta^2}) t/2 \right] \right. \\ \left. + \cos\left[ (\omega_{01} + \omega_L - \sqrt{2\Omega_0'^2 + \delta^2}) t/2 \right] \right\} \quad (\text{IV.38}) \end{aligned}$$

On obtient donc pour le champ à l'intérieur de la cavité un comportement analogue à celui du paragraphe 1.1.3) ; les deux pulsations obtenues sont très analogues, au remplacement de  $\Omega_1$  par  $2\Omega_0'$  près. Les oscillations durent un temps de l'ordre du temps caractéristique de la cavité,  $T_c$ , c'est-à-dire  $f$  fois plus grand que le temps de propagation de la lumière à travers la cavité.

### 1.2.3) Atomes répartis uniformément dans la cavité.

Lorsque les atomes sont à différents endroits de la cavité, il leur correspond des fréquences  $\Omega_0'$  différentes. Pour un ensemble d'atomes répartis uniformément, on s'attend à observer un effet de moyennage de ces fréquences. L'équation d'évolution de  $\varepsilon$  déduite de l'équation (IV.25) s'écrit dans ce cas

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2T_c} - \frac{i\omega_{01}}{2\varepsilon_0} \mathcal{P} \quad . \quad (\text{IV.39})$$

Si l'on suppose le milieu optiquement épais, la densité d'inversion de population  $\mathcal{N}$  reste pratiquement égale à l'opposé de la densité  $n$ , si bien qu'on a

$$\left(\frac{d}{dt} - i\delta\right) \mathcal{P} = -\frac{i|d_{01}|^2}{\pi} n \varepsilon \quad . \quad (\text{IV.40})$$

Le champ  $\varepsilon$  vérifie donc l'équation

$$\left(\frac{d}{dt} - i\delta\right) \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{2T_c}\right) \varepsilon = -(\Omega_1'^2/4) \varepsilon \quad . \quad (\text{IV.41})$$

La fréquence qui apparaît ici est exactement la fréquence de Rabi coopérative définie dans l'équation (IV.33) : en effet la densité volumique des atomes  $n = N/v_A$ , où  $v_A$  est le volume occupé par les atomes, est égale à leur densité moyenne dans la cavité  $N/v_c$ . La résolution de l'équation (IV.41) est identique à celle de l'équation (IV.31). Avec les conditions initiales (IV.36) on obtient finalement

$$E(z,t) = \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{4T_c}t} \cos kz \left\{ \cos[(\omega_{01} + \omega_L + 2\sqrt{\Omega_1'^2 + \delta^2})t/2] + \cos[(\omega_{01} + \omega_L - 2\sqrt{\Omega_1'^2 + \delta^2})t/2] \right\} \quad . \quad (\text{IV.42})$$

La fréquence des oscillations en l'absence de désaccord  $\delta$  est  $\Omega_1'$ , soit  $\sqrt{2}$  fois plus faible que la fréquence  $\Omega_0'$  correspondant à un ventre du champ électrique dans le paragraphe précédent. Ceci s'interprète facilement en remarquant que les atomes situés aux nœuds du champ ne jouent aucun rôle, si bien que le nombre effectif d'atomes est  $N/2$ .

#### 1.2.4) Description d'une expérience idéale.

Sans aller jusqu'à établir un véritable projet d'expérience, nous avons cherché à imaginer comment mettre en évidence le caractère coopératif que manifeste l'interaction entre les atomes et le champ dans les deux exemples précédents. Des atomes sont introduits à l'intérieur d'un Fabry-Perot, soit sous la forme de vapeur, dans une cellule, soit sous la forme de jet atomique. Les conditions initiales (IV.36) peuvent être réalisées de la façon suivante. On commence par envoyer dans la cavité, préalablement accordée à la fréquence du laser, le faisceau d'un laser monomode, résonnant ou quasi-résonnant avec une transition atomique, pendant un temps  $T$  suffisant pour que s'établisse l'onde stationnaire du régime permanent. La condition est évidemment  $T \gg T_c$ . On interrompt alors brutalement le faisceau laser. Au même instant, on réalise un brusque peuplement du niveau  $|1\rangle$ , c'est-à-dire du niveau inférieur de la transition atomique, par exemple à l'aide d'une impulsion laser brève et intense accordée à une transition atomique dont le niveau  $|1\rangle$  est le niveau supérieur. On peut également songer à utiliser un processus analogue à celui qui est décrit dans le Chapitre III, qui comporte une impulsion laser vers un niveau situé plus haut que le niveau  $|1\rangle$ , suivie d'une impulsion superradiante aboutissant au niveau  $|1\rangle$ . Si on analyse alors spectralement la lumière qui sort du Fabry-Perot, on s'attend à observer deux raies séparées par un intervalle qui est de l'ordre de la fréquence de Rabi coopérative  $\Omega_1$  et donc proportionnel à la racine carrée de la densité des atomes. La largeur de ces raies est au minimum de l'ordre de  $1/T_c$ . Elles ne sont donc bien distinctes que si  $\Omega_1 \gg 1/T_c$ .

## 2. TRAITEMENT QUANTIQUE.

### 2.1 Equivalent quantique de l'approximation linéaire.

Dans le traitement semi-classique, la linéarité des équations vient du fait que le champ est supposé relativement peu intense, si bien que la proportion d'atomes excités reste faible. Il nous a paru intéressant de chercher quelles simplifications sont apportées par cette hypothèse dans le traitement quantique. On peut en effet penser que si, dans le traitement semi-classique, le comportement du système est qualitativement indépendant de l'intensité du champ, l'évolution du système quantique à partir d'un état à  $n$  photons peut être déduite de son évolution à partir d'un état à 1 photon. C'est cette idée intuitive que nous allons maintenant préciser.

#### 2.1.1) Hamiltonien du système. Base d'états de la collection d'atomes habillée.

L'hamiltonien de la collection d'atomes à deux niveaux en interaction avec le champ électromagnétique quantifié s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H = \hbar \omega_{01} \sum_{i=1, N} |0\rangle_{ii} \langle 0| + \sum_{\vec{k}} \hbar c |\vec{k}| a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} & \quad (\text{IV.43}) \\
 + \sum_{\vec{k}, i=1, N} g_{\vec{k}} d_{01} [a_{\vec{k}}^{\dagger} |0\rangle_{ii} \langle 1| e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} + \text{h.c.}] & .
 \end{aligned}$$

Le coefficient de couplage est

$$g_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar c |\vec{k}|}{2\varepsilon_0 v}} \quad , \quad (\text{IV.44})$$

$v$  étant le volume de quantification. Les états "non perturbés" de la

collection d'atomes habillée s'écrivent comme le produit tensoriel d'un état atomique  $|\Psi\rangle_a$  par un état du champ  $|\Psi\rangle_c$ . Nous prendrons comme base pour les états du champ les produits tensoriels d'états à  $n_i$  photons dans les modes  $\vec{k}_i$ ; en ce qui concerne les états atomiques nous prendrons comme base les états produits d'états monoatomiques, que nous caractériserons par l'ensemble des numéros  $m$  des atomes excités. Les états de base s'écrivent donc

$$| \{m\} \rangle \otimes | n_1 \rangle_{\vec{k}_1} \otimes | n_2 \rangle_{\vec{k}_2} \otimes \dots \quad (\text{IV.45})$$

### 2.1.2) Définition du produit $\otimes$ .

Nous allons maintenant définir, à l'intérieur de l'espace des états du système atomes + champ, un produit, noté  $\otimes$ , qui permet de déduire l'évolution du système à partir d'un état à  $p+q$  photons de celle de deux états qui contiennent initialement  $p$  photons et  $q$  photons.

A tout couple d'états atomes + champ,  $|\Psi_1\rangle$  et  $|\Psi_2\rangle$  nous en associons un troisième,

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \quad (\text{IV.46})$$

On suppose que ce produit possède les propriétés suivantes :

(i) il est symétrique, c'est-à-dire

$$|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle = |\Psi_2\rangle \otimes |\Psi_1\rangle \quad ; \quad (\text{IV.47})$$

(ii) il est bilinéaire, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} [\lambda_1 |\Psi_1\rangle + \lambda'_1 |\Psi'_1\rangle] \otimes |\Psi_2\rangle = \lambda_1 |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle + \lambda'_1 |\Psi'_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \\ |\Psi_1\rangle \otimes [\lambda_2 |\Psi_2\rangle + \lambda'_2 |\Psi'_2\rangle] = \lambda_2 |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle + \lambda'_2 |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi'_2\rangle \end{array} \right. ; \quad (\text{IV.48})$$

(iii) il agit séparément sur les espaces atomiques et de champ :

$$\begin{aligned} [|\Psi_1\rangle_a \otimes |\Psi_1\rangle_c] \otimes [|\Psi_1\rangle_a \otimes |\Psi_2\rangle_c] & \quad (\text{IV.49}) \\ & = [|\Psi_1\rangle_a \otimes |\Psi_2\rangle_a] \otimes [|\Psi_1\rangle_c \otimes |\Psi_2\rangle_c] \quad ; \end{aligned}$$

(iv) à l'intérieur des états du champ, le produit  $\otimes$  agit séparément sur les différents modes

$$\begin{aligned} [|\Psi_1\rangle_{\vec{k}_1} \otimes |\Psi_1\rangle_{\vec{k}_2}] \otimes [|\Psi_2\rangle_{\vec{k}_1} \otimes |\Psi_2\rangle_{\vec{k}_2}] & \quad (\text{IV.50}) \\ & = [|\Psi_1\rangle_{\vec{k}_1} \otimes |\Psi_2\rangle_{\vec{k}_1}] \otimes [|\Psi_1\rangle_{\vec{k}_2} \otimes |\Psi_2\rangle_{\vec{k}_2}] \quad . \end{aligned}$$

L'action du produit  $\otimes$  à l'intérieur de l'espace des états atomes + champ est alors complètement définie si l'on se donne le produit de deux états  $|\{m_i\}\rangle$  et de deux états  $|n_i\rangle_{\vec{k}_i}$ . Nous écrivons

$$\left\{ \begin{array}{l} |\{m_1\}\rangle \otimes |\{m_2\}\rangle = |\{m_1\} \cup \{m_2\}\rangle, \quad \text{si } \{m_1\} \cap \{m_2\} = \emptyset \\ = 0, \quad \text{si } \{m_1\} \cap \{m_2\} \neq \emptyset \end{array} \right. \quad (\text{IV.51})$$

$$|n_1\rangle_{\vec{k}} \otimes |n_2\rangle_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!}} |n_1 + n_2\rangle_{\vec{k}} \quad . \quad (\text{IV.52})$$

Etant donné que nous supposons ici que la proportion d'atomes excités est faible, deux états atomiques de base pris au hasard parmi ceux qui nous intéressent ont très peu de chances de contenir le même atome excité. Ainsi, si l'on appelle  $\mathcal{A}_n$  l'espace des états à  $n$  "excitations",

c'est-à-dire dans lesquels la somme du nombre de photons et du nombre d'atomes excités est  $n$ , le produit  $\otimes$  d'un état de  $\mathcal{A}_p$  par un état de  $\mathcal{A}_q$  est en général un état de  $\mathcal{A}_{p+q}$ .

2.1.3) Propriétés fondamentales du produit  $\otimes$ . Conséquences pour l'évolution du système.

D'après l'équation (IV.52) il est facile de montrer que

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}[|n_1\rangle_{\vec{k}} \otimes |n_2\rangle_{\vec{k}}] &= [a_{\vec{k}}|n_1\rangle_{\vec{k}}] \otimes |n_2\rangle_{\vec{k}} + |n_1\rangle_{\vec{k}} \otimes [a_{\vec{k}}|n_2\rangle_{\vec{k}}] \\ a_{\vec{k}}^{\dagger}[|n_1\rangle_{\vec{k}} \otimes |n_2\rangle_{\vec{k}}] &= [a_{\vec{k}}^{\dagger}|n_1\rangle_{\vec{k}}] \otimes |n_2\rangle_{\vec{k}} \\ &= |n_1\rangle_{\vec{k}} \otimes [a_{\vec{k}}^{\dagger}|n_2\rangle_{\vec{k}}] \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Ces égalités se généralisent aisément à des états quelconques du mode  $\vec{k}$  ainsi qu'à des produits tensoriels de différents modes, donc à des états quelconques du champ. Signalons que si l'on appelle  $|\alpha\rangle_{\vec{k}}$  et  $|\beta\rangle_{\vec{k}}$  deux états cohérents correspondant au mode  $\vec{k}$ , on a

$$|\alpha\rangle_{\vec{k}} \otimes |\beta\rangle_{\vec{k}} = e^{(\alpha^*\beta + \alpha\beta^*)} |\alpha + \beta\rangle_{\vec{k}} \quad ; \quad (\text{IV.55})$$

le produit  $\otimes$  est donc l'analogie de la somme algébrique de deux champs classiques. En ce qui concerne les états atomiques, on a

$$\begin{aligned} |0\rangle_{ii}\langle 0| [|\{m_1\}\rangle \otimes |\{m_2\}\rangle] &= [|0\rangle_{ii}\langle 0| |\{m_1\}\rangle] \otimes |\{m_2\}\rangle \\ &+ |\{m_1\}\rangle \otimes [|0\rangle_{ii}\langle 0| |\{m_2\}\rangle] \end{aligned} \quad , \quad (\text{IV.56})$$

égalité vraie que  $|\{m_1\}\rangle \otimes |\{m_2\}\rangle$  soit nul ou non.

On peut écrire également

$$\begin{aligned}
|0\rangle_{ii}\langle 1| [ |\{m_1\}\rangle \otimes |\{m_2\}\rangle ] &= [ |0\rangle_{ii}\langle 1| |\{m_1\}\rangle ] \otimes |\{m_2\}\rangle \\
&+ |\{m_1\}\rangle \otimes [ |0\rangle_{ii}\langle 1| |\{m_2\}\rangle ] \quad , \quad (IV.58)
\end{aligned}$$

excepté lorsque

$$\{m_1\} \cap \{m_2\} = \{i\} \quad , \quad (IV.58)$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
|1\rangle_{ii}\langle 0| [ |\{m_1\}\rangle \otimes |\{m_2\}\rangle ] &= [ |1\rangle_{ii}\langle 0| |\{m_1\}\rangle ] \otimes |\{m_2\}\rangle \\
&= |\{m_1\}\rangle \otimes [ |1\rangle_{ii}\langle 0| |\{m_2\}\rangle ] \quad . \quad (IV.59)
\end{aligned}$$

Si l'on considère maintenant deux états atomiques quelconques correspondant à une faible proportion d'atomes excités, des égalités analogues à (IV.56), (IV.57) et (IV.59) pourront être écrites : en effet le nombre de paires d'états de base qui vérifient (IV.58) est infime vis-à-vis du nombre total de paires et leur incidence dans le produit  $\otimes$  peut être ignorée en première approximation. Finalement les égalités (IV.53), (IV.54), (IV.56), (IV.57) et (IV.59) peuvent être généralisées à des états quelconques du système atome + champ et l'on en déduit alors aisément que pour tout couple d'états "peu excités",  $|\Psi_1\rangle$  et  $|\Psi_2\rangle$  ,

$$H[ |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle ] = [ H|\Psi_1\rangle ] \otimes |\Psi_2\rangle + |\Psi_1\rangle \otimes [ H|\Psi_2\rangle ] \quad . \quad (IV.60)$$

Cette équation traduit véritablement les propriétés de "linéarité" du système ou du moins leur analogue quantique. Considérons en effet deux états initiaux du système  $|\Psi_p(0)\rangle$  et  $|\Psi_q(0)\rangle$  , contenant respectivement  $p$  et  $q$  photons. Sous l'influence de  $H$  , le système évolue à l'intérieur des sous-espaces  $\mathcal{H}_p$  et  $\mathcal{H}_q$  et les fonctions d'onde à

l'instant  $t$  s'écrivent

$$\begin{aligned} |\Psi_p(t)\rangle &= e^{-iHt/\hbar} |\Psi_p(0)\rangle \\ |\Psi_q(t)\rangle &= e^{-iHt/\hbar} |\Psi_q(0)\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

Considérons maintenant l'état initial à  $p+q$  photons défini par

$$|\Psi_{p+q}(0)\rangle = |\Psi_p(0)\rangle \otimes |\Psi_q(0)\rangle \quad (\text{IV.62})$$

Soit alors  $|\Psi_{p+q}(t)\rangle$  l'état de  $\mathcal{A}_{p+q}$  atteint par le système à l'instant  $t$

$$|\Psi_{p+q}(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi_{p+q}(0)\rangle \quad (\text{IV.63})$$

L'équation (IV.60) permet alors d'écrire

$$|\Psi_{p+q}(t)\rangle = |\Psi_p(t)\rangle \otimes |\Psi_q(t)\rangle \quad (\text{IV.64})$$

Pour connaître l'évolution du système lorsque l'on a initialement  $p+q$  photons, il suffit donc de connaître son évolution lorsqu'il y a initialement  $p$  photons et  $q$  photons. On peut bien sûr itérer le raisonnement et déduire l'évolution à " $n$  photons" de celle "à un photon", qui est mathématiquement beaucoup plus simple.

## 2.2 Assemblée d'atomes interagissant coopérativement avec un seul mode du champ électromagnétique.

Nous reprenons maintenant l'étude de l'exemple du paragraphe 1.1.3, dans lequel un ensemble d'atomes interagissent avec une onde électromagnétique classique dont l'enveloppe est spatialement homogène dans le milieu atomique. Si l'on ignore les phénomènes de propagation, on peut

schématiser cette situation dans un formalisme quantique en supposant que les atomes occupent un volume  $v$  et qu'ils interagissent avec un mode de ce volume. Le hamiltonien de ce système (cf. équation (IV.43)) s'écrit aussi

$$H = \hbar\omega_L a^+ a + \hbar\omega_{01} \sum_{i=1,N} |\tilde{0}\rangle_{ii} \langle \tilde{0}| + \frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{N}} \left\{ a^+ \sum_{i=1,N} |\tilde{1}\rangle_{ii} \langle \tilde{0}| + \text{h.c.} \right\} . \quad (\text{IV.65})$$

Dans cette expression on a utilisé des états atomiques obtenus à partir des états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  par transformation unitaire

$$\begin{cases} |\tilde{0}\rangle_i = |0\rangle_i \\ |\tilde{1}\rangle_i = |1\rangle_i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \end{cases} ; \quad (\text{IV.66})$$

$\vec{k}$  et  $\omega_L$  sont respectivement le vecteur d'onde et la fréquence de mode du champ ; on pose  $\omega_L = \omega_{01} - \delta$ . La fréquence  $\Omega_1$  que nous avons fait apparaître dans  $H$  est la fréquence de Rabi coopérative du système

$$\hbar\Omega_1 = 2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{01}}{2\varepsilon_0 v}} \sqrt{N} d_{01} , \quad (\text{IV.67})$$

où  $v$  est le volume de quantification du champ, qui est supposé égal au volume occupé par les atomes.

L'hamiltonien (IV.65) est symétrique par rapport à l'échange des numéros des atomes. L'état initial atomique l'est également, si bien que les seuls états atomiques utiles sont les états symétriques, qu'on caractérisera ici par le nombre  $m$  d'atomes excités qu'ils contiennent. Une base d'états pour la collection d'atomes habillés par le laser est constituée par les états découplés

$$|m,n\rangle$$

produits d'états atomiques symétriques à  $m$  atomes excités et d'états du champ à  $n$  photons dans le mode  $\vec{k}$ . La diagonalisation de  $H$  dans cette base, qui fournit les états propres des atomes habillés collectivement est mathématiquement un peu compliquée, même dans le cas qui nous intéresse ici d'une multiplicité dont le nombre maximal de photons est beaucoup plus petit que le nombre d'atomes. Nous préférons utiliser les résultats du paragraphe concernant l'équivalent quantique de l'hypothèse de linéarité utilisée dans le traitement semi-classique. En effet, ceci nous permet de déduire l'évolution du système, quel que soit l'état initial, de celle d'un système dont l'état initial ne contient qu'un photon dans le mode  $\vec{k}$ . La diagonalisation de  $H$  est alors beaucoup plus simple.

Nous supposons maintenant, pour rester aussi proche que possible du traitement classique, que l'état initial du champ est un état cohérent,  $|\alpha\rangle$ , et que tous les atomes sont initialement dans leur état fondamental. La fonction d'onde du système à  $t=0$  est donc

$$|\varphi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0,\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |1,n\rangle \quad . \quad (\text{IV.68})$$

D'après l'équation (IV.52) on a

$$|0,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} [ |0,1\rangle ]^{\otimes n} \quad , \quad (\text{IV.69})$$

où  $[ ]^{\otimes n}$  désigne la nième puissance du produit  $\otimes$ .

Si l'on appelle  $|X(t)\rangle$  la fonction d'onde d'un système dont l'état initial est  $|0,1\rangle$ , alors, d'après l'équation (IV.64),

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0,\infty} \frac{\alpha^n}{n!} [ |X(t)\rangle ]^{\otimes n} \quad . \quad (\text{IV.70})$$

Pour calculer  $|X(t)\rangle$  il suffit de diagonaliser la sous-matrice de  $H$  sur les états  $|0,1\rangle$  et  $|1,0\rangle$ , qui s'écrit

$$(H) = \mathbb{H} \begin{pmatrix} \omega_L & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & \omega_{01} \end{pmatrix} . \quad (\text{IV.71})$$

Ses valeurs propres sont

$$\mathbb{H}(\omega_L + \omega_{\pm}) = \mathbb{H}(\omega_L + \omega_{01} \pm \bar{\Omega}) / 2 , \quad (\text{IV.72})$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{\pm} = (\delta \pm \bar{\Omega}) / 2 \\ \bar{\Omega} = \sqrt{\Omega_1^2 + \delta^2} . \end{cases}$$

Les vecteurs propres correspondants sont

$$|\Psi_{\pm}\rangle = [ \sqrt{\bar{\Omega} \mp \delta} |0,1\rangle \pm \sqrt{\bar{\Omega} \pm \delta} |1,0\rangle ] / \sqrt{2\bar{\Omega}} . \quad (\text{IV.73})$$

On en déduit aisément que

$$\begin{cases} X(t) = f(t) |0,1\rangle + g(t) |1,0\rangle \\ f(t) = [\omega_+ e^{-i\omega_+ t} - \omega_- e^{-i\omega_- t}] e^{-i\omega_L t} / (\omega_+ - \omega_-) \\ g(t) = \Omega_1 [e^{-i\omega_+ t} - e^{-i\omega_- t}] e^{-i\omega_L t} / 2(\omega_+ - \omega_-) . \end{cases} \quad (\text{IV.74})$$

Il est possible maintenant de calculer la valeur moyenne de la composante  $E^-$  de l'opérateur champ électrique, qui est l'équivalent quantique du champ électrique classique complexe,  $\epsilon^*(t) e^{-i\omega_L t}$ . On a

$$\langle E^- \rangle(t) = \sqrt{\frac{i\omega_{01}}{2\epsilon_0 v}} \langle \varphi(t) | a | \varphi(t) \rangle . \quad (\text{IV.75})$$

D'après l'équation (IV.70), on a

$$a | \varphi(t) \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0, \infty} \frac{\alpha^n}{n!} a [ |X(t)\rangle ]^{\otimes n} . \quad (\text{IV.76})$$

Or, d'après la généralisation de l'équation (IV.53) ,

$$\begin{aligned} a[|X(t)\rangle]^{\otimes n} &= n[a|X(t)\rangle] \otimes [|X(t)\rangle]^{\otimes (n-1)} \\ &= n[|X(t)\rangle]^{\otimes (n-1)} \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

On trouve donc

$$\begin{cases} \langle E^- \rangle(t) = \langle E \rangle(0) f(t) \\ \langle E^- \rangle(0) = \alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_{01}}{2\varepsilon_0 v}} \end{cases} \quad (\text{IV.78})$$

c'est-à-dire que l'on trouve exactement le même résultat que dans le traitement classique lorsqu'on ignore la propagation.

### 2.3 Assemblée d'atomes interagissant coopérativement avec deux modes du champ électromagnétique.

Dans un formalisme quantique, on peut schématiser le problème posé par l'interaction d'un ensemble d'atomes avec le champ électromagnétique contenu dans une cavité Fabry-Perot en considérant que les atomes interagissent avec deux modes, de vecteurs d'onde  $+\vec{k}$  et  $-\vec{k}$ , de cette cavité. Le hamiltonien de ce système s'écrit, avec essentiellement les mêmes notations que dans la paragraphe

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_L [a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^{\dagger} a_{-\vec{k}}] + \hbar\omega_{01} \sum_{i=1, N} |0\rangle_{ii} \langle 0| \\ &+ \frac{\hbar\Omega'_1}{2\sqrt{N}} \left\{ \sum_{i=1, N} (a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + a_{-\vec{k}}^{\dagger} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}) |1\rangle_{ii} \langle 0| + \text{h.c.} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

où la fréquence de Rabi coopérative  $\Omega'_1$  est définie par

$$\hbar\Omega'_1 = 2 \sqrt{\frac{\hbar\omega_{01}}{2\varepsilon_0 v_c}} \sqrt{N} d_{01} \quad , \quad (\text{IV.80})$$

$v_c$  étant le volume de la cavité.

On introduit les combinaisons linéaires d'opérateurs annihilation et création qui sont symétriques ou antisymétriques par échange des deux modes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_S = (a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}) / \sqrt{2} \\ A_S^+ = \text{h.c.} \\ A_{AS} = (a_{\vec{k}} - a_{-\vec{k}}) / \sqrt{2} \\ A_{AS}^+ = \text{h.c.} \end{array} \right. \quad (\text{IV.81})$$

Le hamiltonien devient alors

$$\begin{aligned} H = \hbar\omega_L [A_S^+ A_S + A_{AS}^+ A_{AS}] + \hbar\omega_{01} \sum_{i=1, N} |0\rangle_{ii} \langle 0| \\ + \frac{\hbar\Omega_1 \sqrt{2}}{2\sqrt{N}} \left\{ \sum_{i=1, N} [A_S^+ \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_i) - i A_{AS}^+ \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_i)] |1\rangle_{ii} \langle 0| + \text{h.c.} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

Nous supposons dans la suite que l'état initial du champ électromagnétique est formé de deux états cohérents identiques correspondant aux deux modes - ce qui est l'équivalent quantique des ondes stationnaires classiques. Cet état initial est symétrique par rapport à l'échange des modes. Nous introduisons donc les états du champ symétriques de nombre total de photons  $n$  définis par

$$|n\rangle_S = \sum_p \sqrt{C_n^p / 2^n} |p\rangle_{\vec{k}} |n-p\rangle_{-\vec{k}} \quad . \quad (\text{IV.83})$$

On montre facilement que ces états vérifient les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} A_S |n\rangle_S = \sqrt{n} |n-1\rangle_S \\ A_S^+ |n\rangle_S = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_S \end{array} \right. \quad (\text{IV.84})$$

et, avec la même définition du produit  $\otimes$  que dans le paragraphe 2.1 ,

$$|p\rangle_S \otimes |q\rangle_S = \sqrt{c_{p+q}^p} |p+q\rangle_S \quad . \quad (\text{IV.85})$$

L'état initial du champ s'écrit alors

$$|\alpha\rangle_{\vec{k}} \otimes |\alpha\rangle_{-\vec{k}} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0, \infty} \frac{(\sqrt{2}\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_S \quad . \quad (\text{IV.86})$$

Nous allons maintenant étudier deux cas particuliers - qui sont l'analogue "quantique" de ceux étudiés dans les paragraphes 1.2.2) et 1.2.3).

### 2.3.1) Atomes situés dans un ventre de l'onde stationnaire.

Cette situation correspond au cas où l'on a, pour tous les atomes,  $\vec{k} \cdot \vec{r}_i = 0$  (modulo  $2\pi$ ). Le terme antisymétrique du hamiltonien d'interaction disparaît et le hamiltonien total est symétrique aussi bien par rapport à l'échange des deux modes que par rapport à l'échange des numéros des atomes. Si l'on note, comme précédemment,  $|m, n\rangle$  les états symétriques à  $m$  atomes excités et  $n$  photons, on a

$$|\varphi(0)\rangle = r^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0, \infty} \frac{(\sqrt{2}\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |0, n\rangle \quad , \quad (\text{IV.87})$$

et donc

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0, \infty} \frac{(\sqrt{2}\alpha)^n}{\sqrt{n!}} [ |X(t)\rangle ]^{\otimes n} \quad , \quad (\text{IV.88})$$

où  $|X(t)\rangle$  est la fonction d'onde d'un système dont l'état initial est  $|0, 1\rangle$ . Les calculs sont, vu les propriétés (IV.84) des états  $|n\rangle_S$ , tout-à-fait analogues à ceux du paragraphe précédent et le résultat obtenu pour  $\langle E^- \rangle(t)$  est finalement le même, au remplacement de  $\Omega_1$  par  $\Omega_1 \sqrt{2}$  près. Nous retrouvons donc le résultat du traitement semi-

classique (cf. paragraphe 1.2.2), à l'exception du terme d'amortissement de l'énergie contenue dans la cavité. On remarque de nouveau que la fréquence de Rabi coopérative fait intervenir la densité moyenne des atomes dans la cavité.

### 2.3.2) Atomes répartis uniformément dans la cavité.

Nous supposons ici que la longueur de la cavité est beaucoup plus grande que la longueur d'onde associée aux modes du champ,  $2\pi c/\omega_L$ . Les atomes sont donc répartis uniformément sur un grand nombre de noeuds et de ventres de l'onde stationnaire classique. Si, comme dans le paragraphe précédent, on note  $|0, n\rangle$  l'état de la collection habillée d'atomes qui est le produit de l'état atomique symétrique non excité et de l'état du champ symétrique contenant en tout  $n$  photons, on a encore

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0, \infty} \frac{(\sqrt{2}\alpha)^n}{\sqrt{n!}} [ |X(t)\rangle ]^{\otimes n} \quad (\text{IV.89})$$

où  $|X(t)\rangle$  est l'état du système dont l'état initial est  $|0, 1\rangle$ . Le calcul de  $|X(t)\rangle$  est toutefois un peu plus délicat que dans les cas précédents car l'hamiltonien n'est rigoureusement symétrique ni par échange des atomes, ni par échange des modes.

L'action du hamiltonien sur l'état  $|0, 1\rangle$  s'écrit

$$H |0, 1\rangle = \hbar\omega_L |0, 1\rangle + \frac{\hbar\Omega\sqrt{2}}{2\sqrt{N}} \sum_{i=1, N} [\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}_i) |0\rangle_i \prod_{j \neq i} |1\rangle_j] |0\rangle_S . \quad (\text{IV.90})$$

Nous appelons  $|1, 0\rangle$  l'état qui est le produit de l'état du champ vide de photons par l'état atomique suivant

$$\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1, N} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_i) |0\rangle_i \prod_{j \neq i} |1\rangle_j \quad . \quad (\text{IV.91})$$

La norme de cet état est

$$\frac{2}{N} \sum_{i=1, N} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r}_i) \quad (\text{IV.92})$$

et nous la supposons égale à l'unité puisque les phases  $\vec{k} \cdot \vec{r}_i$  prennent toutes les valeurs entre 0 et  $2\pi$ . On peut alors écrire

$$H |0, 1\rangle = \hbar\omega_L |0, 1\rangle + \hbar \frac{\Omega'_1}{2} |1, 0\rangle \quad . \quad (\text{IV.93})$$

L'action de  $H$  sur  $|1, 0\rangle$  donne alors

$$H |1, 0\rangle = \hbar\omega_{01} |1, 0\rangle + \frac{\hbar\Omega'_1}{N} \left\{ \sum_{i=1, N} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r}_i) |1\rangle_S \right. \\ \left. - i \sum_{i=1, N} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_i) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_i) |1\rangle_{AS} \right\} \prod_{i=1, N} |1\rangle_i \quad . \quad (\text{IV.94})$$

Dans cette expression la première somme sur  $i$  vaut  $N/2$  et la seconde 0. On a donc  $H |1, 0\rangle = \hbar\omega_{01} |1, 0\rangle + \frac{\hbar\Omega'_1}{2} |0, 1\rangle$  et la sous-matrice de  $H$  sur les états  $|0, 1\rangle$  et  $|1, 0\rangle$  est identique à (IV.71), au remplacement de  $\Omega_1$  par  $\Omega'_1$  près. L'évolution de la valeur moyenne de l'opérateur champ électrique est donc analogue à celle qu'on obtient dans les paragraphes précédents et on retrouve encore, au terme d'amortissement près, le même résultat que dans le traitement semi-classique.

En conclusion de ce Chapitre IV, on voit que l'absorption d'un champ électromagnétique par une assemblée d'atomes peut, dans certaines conditions, présenter un régime transitoire coopératif. Nous n'avons pas ici précisé les conditions de coopérativité : elles sont analogues

à celles de la superradiance. Ce régime transitoire est particulièrement simple lorsque les phénomènes de propagation jouent un rôle mineur. Dans ce cas les effets coopératifs se traduisent par des oscillations de l'intensité lumineuse transmise par le milieu atomique. Deux fréquences apparaissent en effet, qui encadrent la fréquence du champ initialement présent dans le milieu atomique. L'écart entre ces deux fréquences dépend essentiellement de la fréquence de Rabi coopérative, qui est proportionnelle au nombre total d'atomes concernés par l'interaction. Ce comportement s'explique aussi bien dans le traitement semi-classique, où l'on peut tenir compte des effets de propagation, que dans le traitement quantique, où l'on pourrait ajouter l'influence de l'émission spontanée. Le fait que les deux traitements soient équivalents n'est pas réellement surprenant. Comme dans le cas de la superradiance, les atomes peuvent être assimilés à un "grand" moment cinétique, dont le comportement est quasi-classique. De plus, contrairement au cas de la superradiance, le champ électromagnétique n'est pas initialement vide de photons, si bien qu'il ne se pose aucun problème de démarrage de l'évolution. On n'attend d'ailleurs pas de fluctuations. Les calculs présentés ici doivent probablement être raffinés si l'on veut établir un projet concret de mise en évidence expérimentale ; une telle expérience paraît, en principe, assez simple à réaliser.



## CONCLUSION

Parvenus au terme de cet exposé, nous pouvons récapituler les principaux résultats obtenus. Dans une première expérience, au cours de laquelle on excitait des atomes de baryum au moyen d'impulsions de longue durée, des oscillations de pompage ont été observées dans le signal de superradiance émis. Après nous être assurés que ces oscillations présentaient effectivement les caractéristiques attendues pour un signal superradiant, nous avons procédé à l'interprétation théorique des résultats. Cette interprétation s'est successivement appuyée sur divers modèles dérivés des équations semi-classiques. Un premier modèle, utilisant l'approximation du champ moyen et un pompage en bande large, nous a conduits à une solution analytique rendant compte des caractéristiques essentielles de signaux observés. Dans un second modèle, plus proche des conditions expérimentales, nous avons d'une part utilisé un pompage en bande étroite et, d'autre part, pris en compte la propagation de l'impulsion superradiante. Ce dernier modèle ne donne pas une solution analytique simple mais il se prête bien à une exploitation sur ordinateur, à laquelle nous avons d'ailleurs procédé. Cet effet

d'oscillations de pompage nous semble interprété de façon satisfaisante et ces caractéristiques physiques bien comprises.

Dans le but de mettre en évidence de nouveaux systèmes superradiants, nous avons imaginé une expérience utilisant, là encore, des atomes de baryum, mais pompés hors résonance de manière à pouvoir observer de la superradiance Raman. Une analyse théorique complète nous avait convaincus de la possibilité d'existence d'une telle émission. Cependant, le signal observé, non désaccordé par rapport à la fréquence atomique, ne présentait pas les caractéristiques attendues pour une émission Raman. La prise en considération des effets des collisions nous a permis de comprendre l'origine du signal observé dans ce que nous avons appelé la superradiance assistée par collisions. L'analyse théorique de ce processus, qui est en compétition avec celui de la superradiance Raman, nous a montré qu'il devait l'emporter sur cette dernière dans les conditions expérimentales que nous avons utilisées ; elle nous a permis de mieux préciser les conditions dans lesquelles elle devrait pouvoir être réellement observée.

Enfin, les problèmes généraux liés à la propagation d'impulsions lumineuses dans des milieux résonnants, nous ont très naturellement amenés à réfléchir sur certains types d'interaction rayonnement-atomes et, notamment, à nous poser la question de l'existence d'effets coopératifs lors de tels processus. Nous nous sommes ainsi plus particulièrement intéressés au cas de l'interaction d'un champ électromagnétique avec un milieu atomique optiquement épais, c'est-à-dire pour lequel la densité volumique d'atomes est notablement plus grande que celle des

photons. Nous avons pu mettre en évidence, dans ce cas, un régime coopératif transitoire se caractérisant par l'apparition d'une fréquence de Rabi collective dans laquelle intervient non plus la puissance lumineuse, mais le nombre d'atomes. Les oscillations correspondantes de l'intensité lumineuse devraient pouvoir être observées expérimentalement.



APPENDICE I

Le calcul que nous avons présenté avec le formalisme de l'équation pilote dans le Chapitre III est assez long et nous allons montrer ici qu'il est possible d'arriver plus rapidement à une expression des taux de transferts  $\Gamma_{ij}$ . Pour cela nous décrirons le système atomes + champ non pas par une matrice densité, mais par une fonction d'onde. Nous utiliserons pour calculer l'évolution de cette fonction d'onde un développement de l'opérateur d'évolution en puissances de l'interaction, qui est l'analogie du développement que nous avons utilisé pour l'opérateur  $R_A(i\epsilon)$ . Nous verrons alors qu'au lieu d'un développement à l'ordre 4 un développement à l'ordre 2 suffit (absorption d'un photon laser et émission d'un photon superradiant). Nous constaterons aussi que les termes de ce développement sont plutôt plus faciles à calculer. Il faut cependant remarquer que nous ne démontrerons pas l'existence des taux de transferts. Nous montrerons seulement que lorsque le système se trouve initialement dans un état  $|N-m, 0, m\rangle \otimes |p, m\rangle$ , où  $|p, m\rangle$  désigne un état du champ à  $p$  photons laser et  $m$  photons

superradiants, il évolue vers des états du type  $|N-m-1, 0, m+1\rangle \otimes |p-1, m+1\rangle$  avec un taux de transfert  $\Gamma$  qui doit bien sûr être égal au taux que nous avons déjà calculé. Pour simplifier les notations nous appellerons  $|\alpha\rangle$  le niveau de départ et  $|\beta, E\rangle$  les niveaux accessibles à partir de  $|\alpha\rangle$ . Nous ferons l'approximation de Born en négligeant les réabsorptions possibles des photons superradiants de l'état  $|\alpha\rangle$ . Enfin notons que la situation qui nous intéresse est tout-à-fait analogue à la diffusion non-résonnante d'un photon par un atome, si bien que le calcul que nous proposons est formellement identique au calcul de cette diffusion [63].

Un développement à l'ordre 2 de l'opérateur d'évolution du système total donne

$$U(t) = U_0(t) + U_1(t) + U_2(t) \quad (\text{AI.1})$$

cù

$$U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (\text{AI.2})$$

est l'opérateur d'évolution en l'absence d'interaction,

$$U_1(t) = \frac{1}{(i\hbar)} \int_{t > t' > 0} U_0(t-t') H_I U_0(t') dt' \quad (\text{AI.3})$$

$$U_2(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t > t' > t'' > 0} U_0(t-t') H_I U_0(t'-t'') H_I U_0(t'') dt' dt'' \quad (\text{AI.4})$$

Nous allons calculer la population des niveaux  $|\beta, E\rangle$ ,  $|\langle \beta, E | U(t) | \alpha \rangle|^2$ , à la limite où le couplage devient très faible, c'est-à-dire aussi à la limite où les transferts de population s'effectuent en des temps importants. Nous calculons d'abord  $\langle \beta, E | \Psi(t) \rangle = \langle \beta, E | U(t) | \alpha \rangle$ . Le terme d'ordre zéro vaut

$$\begin{aligned} \langle \beta, E | U_0(t) | \alpha \rangle &= \langle \beta, E | e^{-iE_0 t/\hbar} | \alpha \rangle \\ &= e^{-iE_\alpha t/\hbar} \langle \beta, E | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (\text{AI.5})$$

Il est donc nul puisque  $\langle \beta, E | \alpha \rangle$  est nul.

Le terme d'ordre 1 s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \beta, E | U_1(t) | \alpha \rangle &= \langle \beta, E | \frac{1}{i\hbar} \int_0^t U_0(t-t') H_I U_0(t') dt' | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E}{\hbar}(t-t')} e^{-iE_\alpha t'/\hbar} dt' \langle \beta, E | H_I | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (\text{AI.6})$$

En posant  $E = E_\alpha + \varepsilon$  l'intégrale s'écrit

$$I = e^{-iE_\alpha t/\hbar} \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{-i\varepsilon(t-t')/\hbar} dt' \quad (\text{AI.7})$$

et l'on obtient

$$|I|^2 = \left[ \frac{\sin(\varepsilon t/2\hbar)}{\varepsilon/2} \right]^2 = \frac{2\pi t}{\hbar} \delta_t(\varepsilon) \quad (\text{AI.8})$$

où  $\delta_t(\varepsilon)$  est une fonction de largeur  $\hbar/t$ .

Comme  $H_I$  ne couple le niveau de départ  $|\alpha\rangle$  qu'aux états obtenus par absorption d'un photon laser (approximation de Born), les états  $|\beta, E\rangle$  qui interviennent ont une énergie  $E = E_\alpha + \hbar\delta$ . D'autre part, nous considérons la limite des temps de transferts de populations infiniment longs et nous avons donc

$$\hbar |\delta| \gg \hbar/t \quad (\text{AI.9})$$

ce qui montre que l'intégrale  $I$  est nulle.

Finalement la première contribution non nulle à  $\langle \beta, E | U(t) | \alpha \rangle$  est  $\langle \beta, E | U_2(t) | \alpha \rangle$ . Par un calcul du type de celui que nous venons de faire

on peut montrer que

$$|\langle \beta, E | U(t) | \alpha \rangle|^2 = \frac{2\pi}{\hbar^2 \delta^2} t |\langle \beta, E | H_I^{-\delta+\varepsilon} H_I^\delta | \alpha \rangle|^2 \delta(\varepsilon) \quad (\text{AI.10})$$

où  $H_I^\delta$  est la partie du hamiltonien d'interaction qui augmente l'énergie de  $\hbar\delta$  (c'est l'absorption d'un photon laser), et  $H_I^{-\delta+\varepsilon}$  diminue l'énergie  $\hbar\delta - \varepsilon$  (c'est l'émission d'un photon superradiant).

Le coefficient de transfert  $\Gamma$  que nous cherchons est tel que

$$\Gamma t = \int |\langle \beta, E | U(t) | \alpha \rangle|^2 \rho(\beta, E) d\beta d\varepsilon ;$$

$\rho(\beta, E)$  est la densité des états  $|\beta, E\rangle$  et  $\varepsilon$  vaut  $\varepsilon = E - E_\alpha$ . On a

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar^2 \delta^2} \int |\langle \beta, E | H_I^{-\delta+\varepsilon} H_I^\delta | \alpha \rangle|^2 \rho(\beta, E) d\beta d\varepsilon \delta(\varepsilon) .$$

Cette expression est identique au terme de  $\Gamma_{ij}^{(4)}$  (cf. équation (III.66)) qui traduit le dépeuplement de l'état  $|i\rangle$  ; en effet, si dans cet état le niveau intermédiaire  $|0\rangle$  n'est pas peuplé, c'est-à-dire si  $n=0$ , seul le terme  $H_I^+ H_I^-$  du commutateur intervient.

APPENDICE II

Nous cherchons ici à résoudre les équations (IV.3) avec les conditions aux limites (IV.4), soit des équations du type

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P} = A \varepsilon \\ \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon = B \mathcal{P} \end{cases}, \quad (\text{AII.1})$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \varepsilon(z=0, \tau \geq 0) = \varepsilon_0 \\ \varepsilon(z=0, \tau < 0) = 0 \\ \mathcal{P}(z, \tau < 0) = 0 \end{cases}. \quad (\text{AII.2})$$

Nous utilisons un développement en série du type

$$\begin{cases} \mathcal{P}(z, \tau) = \sum_{n=0, \infty} \frac{z^n}{n!} \mathcal{P}_n(\tau) \\ \varepsilon(z, \tau) = \sum_{n=0, \infty} \frac{z^n}{n!} \varepsilon_n(\tau) \end{cases} \quad (\text{AII.3})$$

Les équations (AII.1) peuvent alors être remplacées par

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \mathcal{P}_n = A \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1} = B \mathcal{P}_n \end{cases} \quad (\text{AII.4})$$

et les conditions aux limites (AII.2) par

$$\begin{cases} \varepsilon_0(\tau \gg 0) = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_n(\tau < 0) = 0 \\ \mathcal{P}_n(\tau < 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{AII.5})$$

La résolution est alors simple : il suffit d'utiliser alternativement les deux équations (AII.4). On obtient par exemple pour les premiers termes

$$\begin{cases} \mathcal{P}_0 = A \varepsilon_0 \tau \\ \varepsilon_1 = A B \varepsilon_0 \tau \\ \mathcal{P}_1 = A^2 B \varepsilon_0 \frac{\tau^2}{2!} \\ \varepsilon_2 = A^2 B^2 \varepsilon_0 \frac{\tau^2}{2!} \dots \end{cases} \quad (\text{AII.6})$$

La forme générale des termes  $\varepsilon_n$  et  $\mathcal{P}_n$  apparaît alors clairement

$$\begin{cases} \varepsilon_n = (AB)^n \varepsilon_0 \frac{\tau^n}{n!} \\ \mathcal{P}_n = A^{n+1} B^n \varepsilon_0 \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases} \quad (\text{AII.7})$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} \varepsilon(z, t) = \varepsilon_0 \sum_{n=0, \infty} \frac{(A B z \tau)^n}{(n!)^2} \\ \mathcal{P}(z, \tau) = A \varepsilon_0 \tau \sum_{n=0, \infty} \frac{(A B \tau z)}{n!(n+1)!} \end{cases} \quad (\text{AII.8})$$

Si le produit  $A B$  est négatif, on peut poser

$$A B = - \Omega^2$$

et l'on peut écrire la solution à l'aide de fonctions de Bessel

$$\begin{cases} \varepsilon (z, \tau) = \varepsilon_0 J_0 (2\Omega \sqrt{z\tau}) \\ \mathfrak{P} (z, \tau) = \frac{A \varepsilon_0}{\Omega} \sqrt{\frac{\tau}{z}} J_1 (2\Omega \sqrt{z\tau}) \end{cases} \quad . \quad (\text{AII.9})$$



APPENDICE III

Nous cherchons ici à résoudre les équations

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\delta\right) \mathcal{P}(z, t) = A \varepsilon(z, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z}\right) \varepsilon(z, t) = B \mathcal{P}(z, t) \end{cases} \quad (\text{AIII.1})$$

Si l'on appelle respectivement  $\mathcal{P}(q, t)$  et  $\varepsilon(q, t)$  les transformées de Fourier spatiales de  $\mathcal{P}(z, t)$  et  $\varepsilon(z, t)$

$$\begin{cases} \varepsilon(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} \varepsilon(q, t) dq \\ \mathcal{P}(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqz} \mathcal{P}(q, t) dq \end{cases}, \quad (\text{AIII.2})$$

les équations (AIII.1) deviennent

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\delta\right) \mathcal{P}(q, t) = A \varepsilon(q, t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + i c q\right) \varepsilon(q, t) = B \mathcal{P}(q, t) \end{cases} \quad (\text{AIII.3})$$

Nous cherchons pour  $\mathcal{P}(q, t)$  et  $\varepsilon(q, t)$  des solutions qui soient des combinaisons linéaires d'exponentielles

$$\begin{cases} \mathcal{P}(q, t) = \sum_i \mathcal{P}(q, \omega_i) e^{i\omega_i t} \\ \varepsilon(q, t) = \sum_i \varepsilon(q, \omega_i) e^{i\omega_i t} \end{cases} \quad (\text{AIII.4})$$

On trouve facilement que  $\omega_i$  vérifie

$$(\omega_i + qc)(\omega_i - \delta) = -A B \quad (\text{AIII.5})$$

On suppose que  $A B$  est négatif et on écrit

$$A B = -\Omega^2 \quad (\text{AIII.6})$$

Dans ces conditions, les deux fréquences possibles pour  $\omega_i$  sont

$$\omega_{\pm} = (\delta - qc)/2 \pm \sqrt{(\Omega^2 + \delta qc) + (qc - \delta)^2/4} \quad (\text{AIII.7})$$

Nous supposons ici que l'enveloppe du champ a une variation spatiale lente devant la longueur d'onde associée à  $\Omega$ , ou, ce qui revient au même, que les composantes de Fourier qui ont une contribution importante sont telles que

$$qc \ll \Omega \quad (\text{AIII.8})$$

Nous supposons d'autre part que

$$\delta \ll \Omega \quad (\text{AIII.9})$$

si bien que l'on a, approximativement

$$\omega_{\pm} = (\delta - qc)/2 \pm \Omega \quad (\text{AIII.10})$$

Les conditions aux limites étant données par

$$\begin{cases} \varepsilon(z, t=0) = \varepsilon_0(z) \\ \mathcal{P}(z, t=0) = 0 \end{cases} \quad (\text{AIII.11})$$

on calcule alors aisément, d'après (AIII.4)

$$\varepsilon(q, t) = \varepsilon(q, 0) \left[ (qc + \omega_+) e^{-i\omega_- t} - (qc + \omega_-) e^{i\omega_+ t} \right] / \Omega, \quad (\text{AIII.12})$$

avec

$$\varepsilon(q, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqz} \varepsilon_0(z) dz. \quad (\text{AIII.13})$$

En posant alors

$$\varepsilon(q, t) = \varepsilon(q, 0) \tilde{f}(q, t), \quad (\text{AIII.14})$$

on arrive à

$$\varepsilon(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(z') f(z - z', t) dz', \quad (\text{AIII.15})$$

où

$$\tilde{f}(z - z', t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{iq(z-z')} \tilde{f}(q, t) dq. \quad (\text{AIII.16})$$

Le calcul de  $\varepsilon(z, t)$  se ramène donc au calcul du propagateur  $f(z - z', t)$ . En utilisant l'expression de  $\tilde{f}(q, t)$  donnée par les équations (AIII.12) et (AIII.14), on montre que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z, t) = \pi e^{i(\delta + \Omega)t/2} \left\{ \left(1 - \frac{\delta}{2\Omega}\right) \delta_a(z - ct/2) + \frac{c}{2i\Omega} \frac{\partial}{\partial z} [\delta_a(z - ct/2)] \right\} \\ + [\Omega \leftrightarrow -\Omega], \end{aligned} \quad (\text{AIII.17})$$

où  $\delta_a(u)$  est une fonction de largeur  $1/a$  centrée en  $u=0$ . Le calcul de  $\varepsilon(z, t)$  fait finalement intervenir les deux expressions suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(z') \delta_a(z - z' - ct/2) dz' &= \varepsilon_0(z - ct/2) \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(z') \frac{\partial}{\partial z} [\delta_a(z - z' - ct/2)] dz' &= - \frac{d}{dz'} \varepsilon_0(z') \Big|_{z' = z - ct/2} \end{aligned} \right. \quad (\text{AIII.18})$$

La seconde de ces deux égalités se démontre aisément au moyen d'une intégration par parties. L'expression finale de  $\varepsilon(z,t)$  est donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(z,t) = & \varepsilon_0(z - ct/2) e^{i\delta t/2} \cos \Omega t & (\text{AIII.19}) \\ & - e^{i\delta t/2} \sin \Omega t \left[ c \frac{d}{dz'} \varepsilon_0(z') \Big|_{z' = z - ct/2} + i\delta \varepsilon_0(z - ct/2) \right] / 2\Omega. \end{aligned}$$

Il faut signaler que le terme contenant  $\sin \Omega t$  est, d'après les hypothèses (AIII.8) et (AIII.9), négligeable devant celui qui contient  $\cos \Omega t$ . On écrira finalement

$$\varepsilon(z,t) = \varepsilon_0(z - ct/2) e^{i\delta t/2} \cos \Omega t \quad . \quad (\text{AIII.20})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 99 (1954).
- [2] R. H. Dicke, Quantum Electronics, Ed. Grivet and Bloembergen,  
Vol. I (Columbia University Press, N. Y., 1964).
- [3] N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. McGillivray and M. S. Feld,  
Phys. Rev. Letters 30, 309 (1973) ;  
voir également :  
N. Skribanowitz, I. P. Herman and M. S. Feld, Appl. Phys. Letters  
21, 466 (1972) ;  
N. Skribanowitz, I. P. Herman, R. M. Osgood, Jr., M. S. Feld and  
A. Javan, Appl. Phys. Letters 20, 428 (1972).
- [4] M. Gross, C. Fabre, P. Pillet and S. Haroche, Phys. Rev. Letters  
36, 1035 (1976).  
voir également :  
S. Haroche, C. Fabre, M. Gross and P. Pillet, in Atomic Physics 5,  
Ed. R. Marrus, P. Prior et H. Shugart (Plenum, N.Y., 1977).
- [5] A. Flusberg, T. Mossberg and S. R. Hartmann, Phys. Letters 58A,  
6, 373 (1976).
- [6] H. M. Gibbs, Q. H. F. Vreken and H. M. J. Hikspoors, Phys. Rev.  
Letters 39, 547 (1977).
- [7] Q. H. F. Vreken, H. M. J. Hikspoors and H. M. Gibbs, Phys. Rev.  
Letters 38, 764 (1977).
- [8] J. Marek, J. Phys. B 12, L 229 (1979).

- [9] M. Gross, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Letters 40, 1711 (1978) ;  
voir également :  
J. M. Raimond, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1979).
- [10] Q. H. F. Vreken, M. F. H. Schuurmans, Phys. Rev. Letters 42, 224 (1979)
- [11] N. W. Carlson, D. J. Jackson, A. L. Schalow, M. Gross, S. Haroche, Opt. Commun. 32, 350 (1980).
- [12] A. Crubellier, S. Liberman and P. Pillet, Phys. Rev. Letters 41, 1237 (1978).
- [13] A. Crubellier, S. Liberman, P. Pillet and M. G. Schweighofer, J. Phys. B 14, L 177 (1981).
- [14] Q. H. F. Vreken, Proceedings of the Fourth International Conference, Rottach-Egern, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York 1979).
- [15] C. Bréchnac, P. Cahuzac, J. Physique Paris 40, L 123 (1979).
- [16] P. Cahuzac, H. Sontag and P. E. Toschek, Opt. Commun. 31, 37 (1979).
- [17] M. Gross, C. Fabre, P. Goy, S. Haroche et J. M. Raimond, Phys. Rev. Letters 43, 343 (1979).
- [18] F. Gounand, M. Hugon, R. P. Fournier and J. Berlande, J. Phys. B 12, 547 (1979).
- [19] F. P. Mattar, H. M. Gibbs, S. McCall and M. S. Feld, Phys. Rev. Letters 46, 1123 (1981).
- [20] M. Le Berre-Rousseau, E. Ressayre and A. Tallet, Phys. Rev. Letters 43, 1314 (1979).
- [21] N. E. Rehler and J. H. Eberly, Phys. Rev. A 3, 1735 (1971) ;  
voir également :

- L. Allen and J. H. Eberly, "Optical Resonance and Two Level Atoms",  
Ed. Wiley (1975).
- [22] J. C. McGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. A 14, 1169 (1976) ;  
voir également :
- I. P. Herman, J. C. McGillivray, N. Skribanowitz and M. S. Feld,  
Laser Spectroscopy (p. 379), Ed. R. G. Brewer and A. Mooradian.  
N. Skribanowitz, Thèse, Institut de Technologie de Massachusetts  
(1972) : "Coherent effects in optically pumped HF gas".  
J. C. McGillivray, "Superradiance in an extended, optically thick  
medium" (degree of Bachelor of Science).
- [23] F. T. Arecchi and E. Courtens, Phys. Rev. A 2, 1730 (1970) ;  
voir également :
- F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, Fundamental  
and Applied Laser Physics, p. 835 (Ed. Feld, Javan, Kurnit).
- [24] R. Bonifacio and G. Preparata, Phys. Rev. A 2, 336 (1970) ;  
R. Bonifacio, P. Schwendimann and F. Haake, Phys. Rev. A 4, 302  
(1971) ; Phys. Rev. A 4, 854 (1971) ;  
R. Bonifacio and L. A. Lugatio, Phys. Rev. A 11, 1507 (1975) ; Phys.  
Rev. A 12, 587 (1975) ;  
G. Banfi and R. Bonifacio, Phys. Rev. A 12, 2068 (1975) ;  
R. Bonifacio, L. A. Lugatio and A. Airoidi Crescentini, Phys. Rev. A  
13, 1648 (1976).
- [25] R. Friedberg and S. R. Hartmann, Phys. Letters 37A, 4, 285 (1971) ;  
R. Friedberg and S. R. Hartmann, Phys. Letters 38A, 227 (1972) ;  
R. Friedberg and S. R. Hartmann, Phys. Letters 40A, 365 (1972) ;  
R. Friedberg, S. R. Hartmann and J. T. Manassah, Phys. Letters 40A,  
365 (1972) ;

- R. Friedberg and S. R. Hartmann, *Opt. Commun.* 10, 298 (1974) ;
- R. Friedberg and S. R. Hartmann, *Phys. Rev. A* 10, 1728 (1974) ;
- R. Friedberg and S. R. Hartmann, *Phys. Rev. A* 13, 495 (1976) ;
- R. Friedberg and B. Coffey, *Phys. Rev. A* 13, 1645 (1976).
- [26] E. Ressayre et A. Tallet, *Phys. Rev. A* 15, 2410 (1977) ;
- E. Ressayre and A. Tallet, *Phys. Rev. A* 18, 2196 (1978).
- [27] F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus and R. Glauber, *Phys. Rev. A* 20, 2047 (1979) ;
- voir également :
- F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus, R. Glauber and F. Hopf, *Phys. Rev. Letters* 42, 1740 (1979) ;
- F. Haake, J. Haus, H. King, G. Schröder and R. Glauber, *Phys. Rev. Letters* 45, 558 (1980) ;
- F. Haake, *Proceedings of the Fourth International Conference, Rottach-Egern, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.*
- [28] D. Polder, M. F. H. Schuurmans, Q. H. F. Vreken, *Phys. Rev. A* 19, 1192 (1979) ;
- voir également :
- M. F. H. Schuurmans and D. Polder, *Proceedings of the Fourth International Conference, Rottach-Egern, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.*
- [29] F. A. Hopf, *Phys. Rev. A* 20, 2064 (1979).
- [30] A. Crubellier and M. Schweighofer, *Phys. Rev. A* 18, 1797 (1978) ;
- A. Crubellier, *Phys. Rev. A* 15, 2430 (1977).
- [31] P. Pillet, *Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1977) (non publiée).*

- [32] M. Gross, Thèse d'Etat, Université Paris VI (1980) (non publiée).
- [33] G. S. Agarwal, Quantum Optics 70, Springer tracts in Modern Physics (1974) ;  
voir également :  
G. S. Agarwal, Phys. Rev. 178, 2025 (1969) ; Phys. Rev. A 2, 2038 (1970) ; Phys. Rev. A 3, 1783 (1971) ; Phys. Rev. A 4, 1791 (1971) ; Phys. Rev. A 4, 1778 (1971) ; Phys. Rev. A 7, 1195 (1973).
- [34] T. Arecchi et E. Courtens, Phys. Rev. A 2, 1730 (1970).
- [35] E. Ressayre et A. Tallet, Phys. Rev. A 12, 1725 (1975).
- [36] M. S. Feld, Les Houches Summer School, July 1975, publié dans Frontiers in laser spectroscopy, session XXVII, R. Balian, S. Haroche and S. Liberman, Editors, North Holland (1976).
- [37] R. Feynmann, Electromagnétisme, Tome II-1.
- [38] C. Cohen-Tannoudji, Cours du Collège de France, 1975-76 (non publié).
- [39] C. Cohen-Tannoudji, Les Houches Summer School, July 1975, publié dans Laser spectroscopy, session XXVII, R. Balian, S. Haroche and S. Liberman, Editors, North Holland (1976).
- [40] V. Degiorgio, Opt. Commun. 2, 262 (1971).
- [41] F. Haake, R. Glauber, Phys. Rev. A 5, 1457 (1972) ;  
R. Glauber, F. Haake, Phys. Rev. A 13, 357 (1976).
- [42] A. Crubellier, C. Bréchnignac, P. Cahuzac and P. Fillet, Proceedings of the Fourth International Conference, Rottach-Egern, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.
- [43] C. Bréchnignac and P. Cahuzac, J. Phys. B 14, 221 (1981).
- [44] H. Stutz and G. de Mars, Quantum Electronics, New York, Columbia University Press, 1960, p. 531.

- [45] J. Pinard and S. Liberman, *Opt. Commun.* 20, 344 (1977).
- [46] C. L. Tang, *J. Appl. Phys.* 34, 2935 (1963).
- [47] C. S. Wang, *Phys. Rev.* 182, 482 (1969).
- [48] M. Maier, W. Kaiser and J. A. Giordmaine, *Phys. Rev.* 177, 580 (1969).
- [49] R. L. Carman, F. Shimizu, C. S. Wang and N. Bloembergen, *Phys. Rev. A* 2, 60 (1970).
- [50] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *J. Phys. B* 10, 345 (1977).
- [51] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *J. Phys. B* 10, 365 (1977).
- [52] E. Courtens and A. Szöke, *Phys. Rev. A* 15, 1588 (1977).
- [53] P. L. Knight, *J. Phys. B* 13, 4551 (1980).
- [54] D. Cotter and R. Wyatt, *J. Phys. B* 13, 3035 (1980).
- [55] M. G. Raymer, J. Mostowski and J. L. Carlsten, *Phys. Rev. A* 19, 2304 (1979).
- [56] J. Mostowski and M. G. Raymer, *Opt. Commun.* 36, 237 (1981).
- [57] A. Omont, E. W. Smith and J. Cooper, *The Astrophysical J.* 175, 185 (1972).
- [58] B. R. Mollow, *Phys. Rev. A* 15, 1023 (1977).
- [59] S. Yeh and P. R. Berman, *Phys. Rev. A* 19, 1106 (1979).
- [60] D. L. Rousseau, G. D. Patterson and P. F. Williams, *Phys. Rev. Letters* 34, 1306 (1975).
- [61] M. G. Raymer and J. L. Carlsten, *Phys. Rev. Letters* 39, 1326 (1977).
- [62] J. L. Carlsten, A. Szöke and M. G. Raymer, *Phys. Rev. A* 15, 1029 (1977).
- [63] C. Cohen-Tannoudji, *Cours du Collège de France, 1976-77* (non publié).
- [64] F. Hoffbeck, *Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1978* (non publiée).

- [65] S. Reynaud, Thèse d'Etat, Université de Paris VI, 1981 (non publiée).
- [66] A. Crubellier, S. Liberman and P. Pillet, *Opt. Commun.* 33, 143 (1980).
- [67] A. Lurio, *Phys. Rev. A* 136, 376 (1964) ;  
L. O. Dickie and F. M. Kelly, *Can. J. Phys.* 48, 879 (1970) ;  
W. Rasmussen, R. Schrieder and H. Walther, *Opt. Commun.* 12, 315 (1974).
- [68] N. P. Penkin and L. N. Shabanova, *Opt. Spekt.* 26, 191 (1969) ;  
voir également ;  
X. Drago, Thèse de 3ème cycle, Université Paris-Sud, 1977 (non publiée).
- [69] G. S. Agarwal, A. C. Brown, L. M. Narducci et G. Vetri, *Phys. Rev. A* 15, 1613 (1977).
- [70] I. R. Senitzky, *Phys. Rev.* 40, 1334 (1978).
- [71] R. Bonifacio et L. A. Lugiato, dans "Coherence and Quantum Optics",  
Ed. L. Mandel et E. Wolf, p. 249 (Plenum Press, New York, 1978).
- [72] A. S. J. Amin et J. G. Cordes, *Phys. Rev. A* 18, 1298 (1978).
- [73] C. Mavroyannis, *Phys. Rev. A* 18, 185 (1978) et *Opt. Commun.* 33, 42  
(1980).
- [74] H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1106 (1979).
- [75] P. Carbonaro, G. Compagno et F. Persico, *Phys. Lett.* 73A, 97 (1979)
- [76] S. J. Kilin, *J. Phys. B* 13, 2653 (1979).
- [77] G. S. Agarwal, R. Saxena, L. M. Narducci, D. H. Feng et R. Gilmore,  
*Phys. Rev. A* 21, 257 (1980).
- [78] M. Kus et K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. A* 23, 853 (1981)
- [79] C. S. Chang et P. Stelhe, dans "Coherence and Quantum Optics", éd.  
L. Mandel et E. Wolf (Plenum Press, New York, 1973).
- [80] A. Shalom, *Phys. Rev. Lett.* 40, 544 (1978).
- [81] G. Sharf, *Helv. Phys. Acta* 43, 806 (1970).

