

SÉRIE A, N° 2643
N° D'ORDRE : 3515

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Brigitte DOSSIER

1^{re} THÈSE. — Recherches sur l'apodisation des
images optiques.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1953, devant la Commission d'examen.

MM. J. CABANNES, *Président.*
F. CROZE
P. JACQUINOT } *Examineurs.*
A. MARÉCHAL }

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1954

SÉRIE A, N° 2643
N° D'ORDRE : 3515

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Brigitte DOSSIER

1^{re} THÈSE. — **Recherches sur l'apodisation des images optiques.**

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 13 juin 1953 devant la Commission d'examen.

MM. J. CABANNES, *Président.*
F. CROZE
P. JACQUINOT } *Examineurs.*
A. MARÉCHAL }

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1954

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen. M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	M ^{me} COUSIN T	Biologie animale (P. C. B.).
A. DRNJOY T	Théorie des Fonctions.	CHRÉTIEN T	Chimie minérale.
L. LUTAUD T	Géographie physique et Géologie dynamique.	P. DRACH T	Zoologie.
E. DARMOIS T	Enseignement de Physique.	KASTLER T	Physique.
Robert LÉVY T	Physiologie comparée.	CHATELET T	Arithmétique et théorie des nombres.
FOCH T	Mécanique physique et expérimentale.	ÉPBRUSSI T	Génétique.
PAUTHENIER T	Electrotechnique générale.	WURMSER T	Biologie physico-chimique.
De BROGLIE T	Théories physiques.	BAUER T	Chimie physique.
JOB T	Chimie générale.	RIVIÈRE T	Géologie (P. C. B.)
PRENANT T	Anatomie et Histologie comparés.	GAUTHERET T	Biologie Végétale (P. C. B.).
COMBES T	Physiologie végétale.	LUCAS T	Physique.
GARNIER T	Géométrie supérieure.	A. THOMAS T	Evolution des êtres organisés.
PÉRÉS T	Mécanique des fluides et applications.	ARNULF T	Optique appliquée.
LAUGIER T	Physiologie générale.	MAX MORAND T	Physique.
TOUSSAINT T	Technique aéronautique.	SOLRILLET T	Physique.
M. CURIE T	Physique (P. C. B.).	FORTIER T	Mécanique expérimentale des fluides.
G. RIBAUD T	Hautes températures.	DANJON T	Astronomie.
CHAZY T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	FROMAGROT T	Chimie biologique.
CROZE T	Physique théorique et Physique céleste.	LAPORTE T	Physique générale et Radio-activité.
DUPONT T	Théories chimiques.	JANET T	Mathématiques générales.
VALIRON T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	PETIT T	Biologie maritime.
BARRABÉ T	Géologie structurale et géologie appliquée.	QUENEY T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
G. DARMOIS T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	GALLIEN T	Biologie animale (P. C. B.).
Jacques BURCART T	Géographie physique et Géologie dynamique.	EICHHORN T	Biologie végétale (P. C. B.).
AUBEL T	Chimie biologique.	DE CUGNAC T	Biologie végétale (P. C. B.).
M ^{me} JOLIOT-CURIE T	Physique générale et Radio-activité.	M ^{me} CAUCHOIS T	Chimie-Physique.
PLANTEFOL T	Botanique.	THELLIER T	Physique du Globe.
CABANNES T	Recherches physiques.	AUDUBERT T	Electrochimie.
GRASSÉ T	Evolution des êtres organisés.	L'HÉRITIER T	Génétique.
PRÉVOST T	Chimie organique.	GRIVET T	Radio-Électricité.
BOULIGAND T	Application de l'analyse à la Géométrie.	PONCIN T	Mécanique des fluides.
CHAUDRON T	Chimie appliquée.	THIRY T	Mécanique appliquée.
WYART T	Minéralogie.	DUBREIL T	Mathématiques générales.
TRISSIER T	Zoologie.	QUELET T	Chimie (P. C. B.).
MANGENOT T	Biologie végétale.	GAGNIARD T	Géophysique appliquée.
P. AUGER T	Physique quantique et relativité.	CHAMPETIER T	Chimie appliquée.
MONNIER T	Physiologie générale.	CUVILLIER T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
PIVETEAU T	Géologie.	JUNG T	Pétrographie.
ROCARD T	Physique.	TRILLAT T	Physique (P. C. B.).
H. CARTAN T	Mathématiques (E. N. Supérieure).	WIEMANN T	Chimie (P. C. B.).
SCHAEFFER T	Physiologie des fonctions.	JACQUINOT T	Physique (P. C. B.).
LAFFITTE T	Chimie générale.	VASSY T	Physique de l'atmosphère.
FAVARD T	Mécanique générale.	DESTOUCHES T	Théories physiques.
COULOMB T	Physique du globe.	M. PRUVOST T	Géologie.
		AMIEL T	Chimie (P. C. B.).
		HOCART T	Minéralogie.
		J. P. MATHIEU T	Physique (P. C. B.).
		COUTEAUX T	Biologie animale (P. C. B.).
		MAY T	Biologie animale (P. C. B.).
		CHOQUET T	Calcul différentiel.
		FELDMANN T	Biologie (P. C. B.).
		GUINIER T	Physique (P. C. B.).
		JOST T	Biologie (P. C. B.).

Secrétaire. Ch. MONIER.

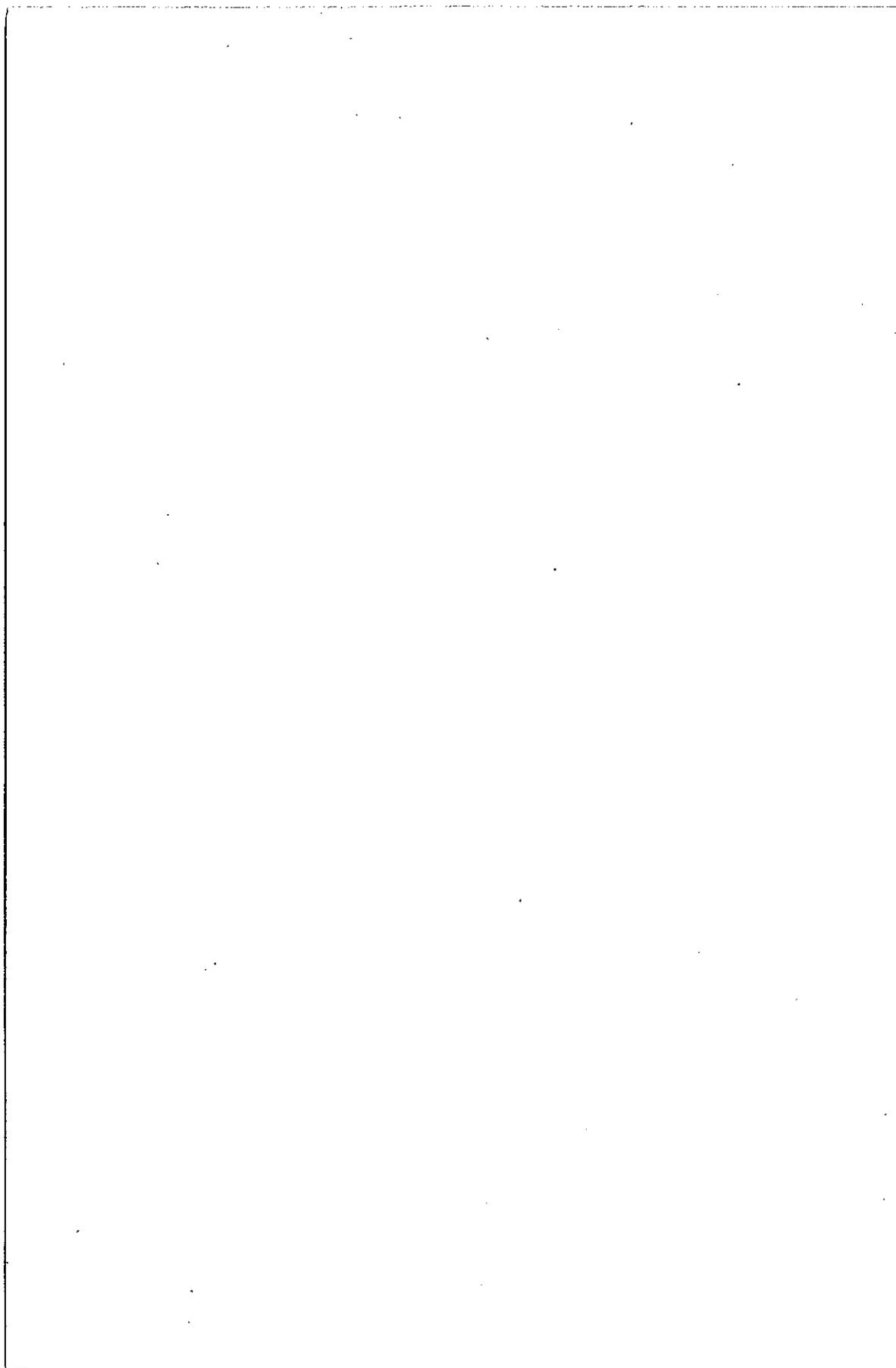
A MON MAITRE

MONSIEUR P. JACQUINOT

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

qui a inspiré et guidé ce travail

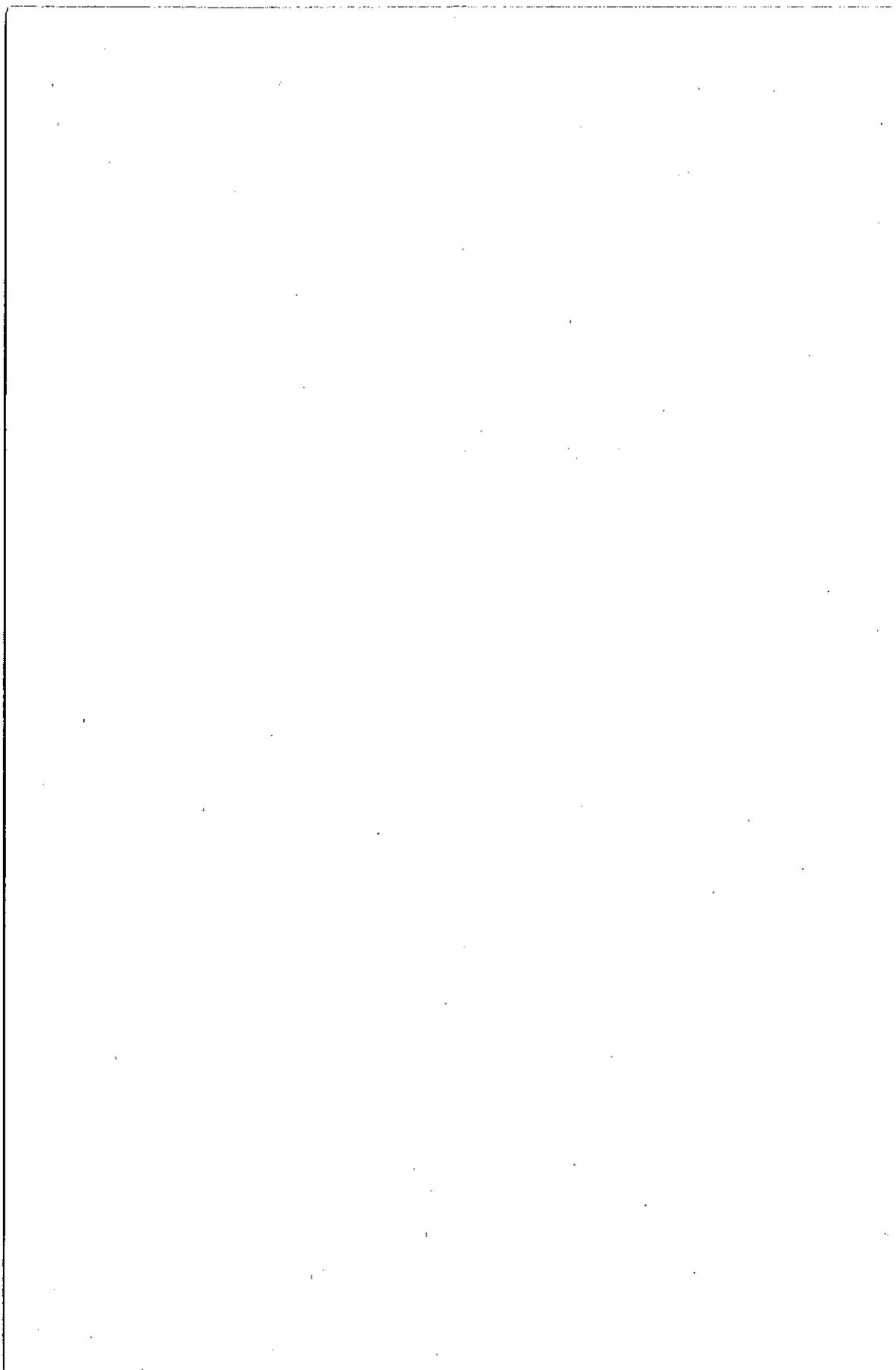
Hommage de profonde gratitude.



A TOUS CEUX QUI ME SONT CHERS

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA MÈRE



**RECHERCHES SUR L'APODISATION
DES IMAGES OPTIQUES**

par M^{lle} Brigitte DOSSIER

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Introduction	8
Généralités concernant les figures de diffraction et les images	12
I. Figures de diffraction.....	12
1. Rappel des conventions et notations relatives à l'intégrale de diffraction ..	12
2. Relations de symétrie et apodisation	17
3. Eléments caractéristiques des figures de diffraction. Coefficients d'apodisation. Largeur	20
II. Images	24
Qualités caractéristiques des images de fentes : éclairement central, largeur, taux d'apodisation.....	25
PREMIÈRE PARTIE : Etude des différents procédés permettant de modifier l'amplitude complexe sur la pupille en vue de l'apodisation. Comparaison de ces procédés au regard de l'efficacité et de la luminosité.....	28
I. Ecrans pupillaires de phase : l'apodisation des figures de diffraction est impossible	28
II. Répartitions pupillaires interférentielles.....	40
1. L'apodisation des figures de diffraction est possible	40
2. Mais l'apodisation des images normales ne peut être que très médiocre.	48
3. Vérifications expérimentales	52
III. Ecrans pupillaires absorbants.....	56
1. L'apodisation des figures de diffraction. } peuvent être excellentes...	57
2. L'apodisation des images	
DEUXIÈME PARTIE : Etude des critères pour la détermination d'écrans absorbants apodisants. Expression mathématique de ces critères.....	61
I. Choix d'un critère d'apodisation.....	61
II. Développements en série des fonctions d'amplitude pupillaire et d'amplitude diffractée. Modes et conditions de convergence.....	67
III. Exemples de développements.....	72
IV. Application des développements de Fourier et de Dini-Bessel à l'apodisation..	83
TROISIÈME PARTIE : Détermination effective de plusieurs séries d'écrans apodisants rectilinéaires et circulaires.....	93
I. Généralités sur les familles d'écrans apodisants à n termes.....	93
II. Détermination de l'écran d'apodisation <i>maximum</i> dans une famille à n termes.	93
III. Choix d'un écran d'apodisation moyenne <i>donnée</i> dans une famille à n termes..	100
1. Ce choix peut tenir compte de certaines exigences supplémentaires...	100
2. Quelques exemples de qualités « linéaires »	103
3. Choix d'écrans qui, à apodisation donnée, possèdent la plus grande clarté	107
IV. Résultats : Ecrans circulaires à 2 et 3 termes.....	111
Ecrans rectilinéaires à 2, 3 et 4 termes.....	114
V. Vérifications expérimentales.....	118
CONCLUSIONS	121
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	123

NOTATIONS ADOPTÉES

	Pages
$A(x) = a(x) e^{i\varphi(x)}$ $A(r) = a(r) e^{i\varphi(r)}$	fonction d'amplitudes pour une pupille rectilinéaire. circulaire.
$\mathcal{A}(\xi) = \alpha(\xi) e^{i\Phi(\xi)}$ $\mathcal{A}(\rho) = \alpha(\rho) e^{i\Phi(\rho)}$	fonction d'amplitudes diffractées associée à $A(x)$. $A(r)$.
<p>A ou A_0, écran pupillaire rectangulaire de transparence uniforme. \mathcal{A} ou \mathcal{A}_0, écran pupillaire circulaire de transparence uniforme.</p>	
<p>a, largeur d'une pupille rectangulaire; $\bar{a} = \frac{a}{\lambda}$, mesure de a en longueurs d'onde.</p>	16
$\alpha_p = \frac{c_p}{c_0} \sqrt{2}$, $\alpha_0 = 1$.	84
<p>B, luminance d'une source.</p>	
$B_{n,m}$, écran pupillaire <i>rectilinéaire</i> à 2 termes, dont la figure de diffraction est apodisée entre $\xi_1 = n$ et $\xi_2 = m$; $B_{n,\infty}$ s'abrège en B_n .	93
$\mathcal{B}_{n,m}$, écran pupillaire <i>circulaire</i> à 2 termes, dont la figure de diffraction est apodisée entre $\rho_1 = \frac{\lambda_n}{\pi}$ et $\rho_2 = \frac{\lambda_m}{\pi}$; $\mathcal{B}_{n,\infty}$ s'abrège en \mathcal{B}_n .	93
$\beta_p = \frac{c_p}{c_0}$; $\beta_0 = 1$.	84
$C = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A(x) dx$ ou $C = 2 \int_0^1 A(r) r dr$, clarté d'un écran pupillaire.	103
$C_{n,m}$, $\mathcal{C}_{n,m}$, écrans pupillaires à 3 termes (cf. $B_{n,m}$ et $\mathcal{B}_{n,m}$).	93
$c = \frac{2\theta}{\Omega}$, coefficient de <i>couverture pupillaire</i> (taux de couverture de la pupille par l'image de la source en éclairage semi-cohérent).	44
c_p , coefficients d'un développement en série de $A(x)$ ou de $\mathcal{A}(\xi)$, de $A(r)$ ou de $\mathcal{A}(\rho)$.	62

$$\mathfrak{D}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} \mathfrak{J}(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{J}(\xi) d\xi}, \quad \mathfrak{D}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} \mathfrak{J}(\rho) \rho d\rho}{\int_0^{+\infty} \mathfrak{J}(\rho) \rho d\rho}, \quad \text{facteurs de dispersion} \quad 22 \text{ et } 87$$

persion de l'énergie diffractée entre ξ_1 et $+\infty$ ou entre ρ_1 et $+\infty$;
 $\mathfrak{D}_0(\xi_1)$, $\mathfrak{D}_0(\rho_1)$, expressions de \mathfrak{D} dans le cas d'une pupille rectangulaire ou circulaire uniforme.

$D_{n,m}$, $\mathcal{O}_{n,m}$, écrans à 4 termes (cf. $B_{n,m}$ et $\beta_{n,m}$). 93

δ , fonction de Dirac.

$\Delta\xi_{0,405}$, largeur d'une figure de diffraction, ou d'une image de fente, prise à 0,405 du maximum. 23

E , énergie diffractée dans une région déterminée de la figure de diffraction. 29

E_G , éclairement géométrique : $E_G = \tau E_0$. 25

E_0 , valeur limite de E_G , obtenue pour un écran pupillaire de transmission totale $\tau = 1$. 25

$\mathcal{E}(\xi)$, fonction d'éclairement dans une image de fente de largeur non négligeable. 26

e , étendue réduite d'un faisceau « dans le plan $x Cz$ ». 43

$\varepsilon_0 = \frac{\lambda}{a}$ ou $\varepsilon_0 = \frac{\lambda}{2R}$, unité optique (intervalle de deux zéros dans la figure de diffraction d'une fente à travers une pupille rectangulaire uniforme de largeur a ou $2R$). 16

$$e_{pq}(\xi_1) = 2 \int_{\xi_1}^{+\infty} \varphi_p(\xi) \varphi_q(\xi) d\xi; \quad e_{pq}(\rho_1) = \int_{\rho_1}^{+\infty} \varphi_p(\rho) \varphi_q(\rho) \rho d\rho. \quad 87 \text{ et } 88$$

$$e_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \frac{(-1)^{p+q}}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - p^2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - q^2} d\xi; \quad 91$$

$$e_{pq}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_q^2}{\pi^2}} d\rho.$$

$f_p(x)$ ou $f_p(r)$, système de fonctions de base pour les développements en série de $A(x)$ ou $A(r)$; $\varphi_p(\xi)$ ou $\varphi_p(\rho)$, système associé pour le développement de $\mathcal{A}(\xi)$ ou de $\mathcal{A}(\rho)$. 62 et 70

$\mathcal{I}(\xi) = |\mathcal{A}(\xi)|^2$, $\mathcal{I}(\rho) = |\mathcal{A}(\rho)|^2$, intensité diffractée ; $\mathcal{J}_0(\xi)$ et $\mathcal{J}_0(\rho)$ correspondent à des pupilles uniformes.

$K(\xi) = \frac{J_0(\xi)/J_0(0)}{J(\xi)/J(0)}$, fonction d'apodisation ; on considère aussi $K^{-1}(\xi)$ et $K^{-1/2}(\xi)$. 21, 73 et 79

k_p , p^e racine positive de $J_0(w) = 0$. 80

$\mathcal{L}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} J(\xi) d\xi}{J(0)}$, $\mathcal{L}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} J(\rho) \rho d\rho}{J(0)}$, facteurs d'étalement 22 et 88

de l'énergie diffractée entre ξ_1 et $+\infty$ ou entre ρ_1 et $+\infty$; $\mathcal{L}_0(\xi_1)$, $\mathcal{L}_0(\rho_1)$ correspondent au cas d'une pupille circulaire ou rectangulaire uniforme.

L , L_0 et $L_G = \tau L_0$, luminosité, luminosité intrinsèque et luminosité géométrique d'un système optique. 26

l , largeur de l'image géométrique de la fente-objet, ε_0 étant pris pour unité. 43

λ_p , p^{me} racine (positive ou nulle) de $J(w) = 0$. 77

λ , longueur d'onde.

$\mathcal{M}(\mathcal{D}) = \frac{\mathcal{D}_0}{\mathcal{D}}$, $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}}$, $\mathcal{M}(\mathcal{F}) = \frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{F}}$, coefficients d'apodisation moyenne. 22

$\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} K^{-1}(\xi) d\xi$, $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} K^{-1}(\rho) d\rho$, facteurs de pieds de la figure de diffraction entre ξ_1 et ξ_2 ou entre ρ_1 et ρ_2 ; $\mathcal{F}_0 = 1$ correspond au cas de la pupille uniforme. 22

R , rayon d'une pupille circulaire ; $\bar{R} = \frac{R}{\lambda}$, mesure de R en longueurs d'onde. 16

\bar{r} , rayon polaire d'un point courant M de la pupille, mesuré en longueurs d'onde. 16

$r = \frac{\bar{r}}{R}$, rayon polaire réduit. 16

$\bar{\rho} = \sqrt{\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2}$; $\rho = \frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0}$, mesure de $\bar{\rho}$ en unités optiques.

R , pouvoir de résolution d'une pupille rectangulaire éclairée par une fente-source de largeur réduite u . 24 et 28

R_G , pouvoir de résolution géométrique (obtenu pour des valeurs de u suffisamment grandes).

R_0 , pouvoir de résolution intrinsèque d'une pupille rectangulaire uniforme.

$$\tau \text{ ou } T = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A^2(x) dx, \quad \tau \text{ ou } T = 2 \int_0^1 A^2(r) r dr, \text{ transparence} \quad 25$$

ou *transmission totale* d'une pupille rectangulaire ou circulaire.

$$u, \text{ largeur de l'image géométrique d'une fente-source incohérente, } \varepsilon_0 \quad 44$$

étant pris pour unité.

\bar{x} , mesure, en longueurs d'onde, de l'abscisse d'un point courant M de la pupille.

$$x = \frac{\bar{x}}{a/2} \text{ ou } x = \frac{\bar{x}}{R}, \text{ abscisse réduite de M rapportée à la demi-lar-} \quad 16$$

geur de la pupille.

$$\bar{\xi}, \text{ premier cosinus directeur d'une direction CN.} \quad 13$$

$$\xi = \frac{\bar{\xi}}{\varepsilon_0}. \quad 16$$

\bar{y} , mesure, en longueurs d'onde, de l'ordonnée d'un point courant M de la pupille.

$$y = \frac{\bar{y}}{a/2} \text{ ou } y = \frac{\bar{y}}{R}, \text{ ordonnée de M.} \quad 16$$

$$\bar{\eta}, \text{ deuxième cosinus directeur d'une direction CN.} \quad 13$$

$$\eta = \frac{\bar{\eta}}{\varepsilon_0}. \quad 16$$

RECHERCHES SUR L'APODISATION DES IMAGES OPTIQUES

SOMMAIRE. — *L'apodisation, c'est-à-dire l'atténuation du fond de lumière diffractée (« pieds ») qui entoure les images optiques soulève, depuis quelques années, beaucoup d'intérêt : elle serait souhaitable en astronomie et en microscopie, où les anneaux de diffraction masquent souvent une partie du champ. Elle faciliterait, d'autre part, l'étude spectroscopique des structures faibles (isotopes rares, pieds naturels des raies). C'est l'origine des présentes recherches qui se limitaient initialement au meilleur conditionnement, pour l'apodisation, des spectroscopes (images de fentes, pupilles rectangulaires). Mais, en les poursuivant, certaines conditions générales qui régissent l'apodisation et qui n'avaient pas encore été mises en évidence, se sont dégagées. Elles ont permis, d'une part, d'étendre les procédés initiaux au cas des pupilles circulaires, d'autre part, d'exercer sur l'image un contrôle s'étendant à plus d'une qualité à la fois (recherche systématique des meilleurs compromis apodisation-luminosité, par exemple).*

La 1^{re} partie traite des conditions de l'apodisation : il faut, pour modifier la figure de diffraction, changer la répartition pupillaire des amplitudes ou des phases. C'est sur ces grandeurs qu'on peut donc agir pour apodiser.

La quantité de lumière transmise étant indépendante de la phase des vibrations, l'apodisation par la phase paraît, a priori, le procédé de choix. On montre qu'il est malheureusement inefficace : la modification des amplitudes est nécessaire.

Mais cette modification peut être produite sans absorption de lumière, par le jeu d'interférences à la surface de l'objectif. Ce procédé, utilisable surtout dans le cas du spectroscope, est facile à mettre en œuvre (système démultiplicateur de faisceaux, biprisme par exemple, placé devant l'objet). Mais on montre que ces systèmes interférentiels ne sont efficaces qu'avec des fentes-objets 5 fois plus fines environ que celles qu'on emploie normalement en spectroscopie. On ne saurait donc généralement recommander l'usage, dans les spectroscopes, de ces systèmes peu lumineux.

Finalement, c'est à l'absorption qu'on doit recourir pour l'apodisation. On couvrira l'objectif d'un écran formé par le dépôt, sur une lame de verre plane, d'une couche métallique d'épaisseur non uniforme convenable. Ces écrans ont l'avantage de conserver leur pouvoir apodisant pour des objets dont les dimensions sont de l'ordre d'une frange normale. L'éclairement obtenu au centre de l'image est alors très voisin de l'éclairement « géométrique », proportionnel à la transparence totale τ de l'écran pupillaire. Or il est possible d'obtenir des apodisations importantes avec des facteurs de transparence de l'ordre de 0,3, 0,4 ou même 0,6. Ainsi utilisés, les écrans apodisants par absorption constituent des dispositifs à la fois efficaces et lumineux.

Encore importe-t-il de rechercher systématiquement les meilleurs d'entre eux, c'est-à-dire ceux qui, à apodisation donnée, correspondent aux plus grandes transmissions. On en définit deux types : écrans à isopaques (lignes d'égale densité optique) rectilignes pour les pupilles rectangulaires, écrans à isopaques circulaires pour les pupilles circulaires (en abrégé : écrans

rectilinéaires et circulaires). Comme on ne peut les déterminer par la donnée a priori de leur figure de diffraction (problème généralement sans solution), on considère une famille de fonctions d'amplitude pupillaire, dépendant de n paramètres, dont on extrait une ou plusieurs fonctions d'écran privilégiées : le choix résulte de l'application de certains critères (d'apodisation, principalement) qui se traduisent par un nombre suffisant de relations entre les paramètres.

Une discussion générale (2^e partie) montre qu'il est commode de choisir pour fonctions d'écran rectilinéaires des combinaisons de fonctions $\cos p\pi x$ (p entier; $-1 \leq x \leq 1$) et pour fonctions d'écran circulaires des combinaisons de fonctions dites de Dini-Bessel, présentant certaines analogies avec les fonctions cosinus.

On les utilise donc dans la 3^e partie où l'on calcule un ensemble d'écrans à 2, 3 et 4 termes, tant circulaires que rectilinéaires, qui constituent, à apodisation donnée, les plus clairs de leur catégorie. Cette clarté maximum croît avec le nombre de termes de l'écran. L'apodisation part, suivant les cas, de la 1^{re}, de la 2^e ou de la 3^e frange normale, et s'étend jusqu'à l'infini. Sa valeur moyenne varie, dans chaque série, de façon continue depuis la valeur extrême qu'elle prend pour l'écran limite, jusqu'à la valeur 1 correspondant à l'écran de transparence uniforme. C'est ainsi qu'on obtient, dans une série d'écrans circulaires à 2 termes, tous les taux d'apodisation entre 900 et 1. L'utilisation de 3 termes permet, à apodisation égale, de perdre 2 fois moins de lumière. On peut proposer, pour les cas courants, un écran circulaire à 3 termes dont l'apodisation moyenne, à partir du troisième anneau, est de 125 avec une transmission totale de 0,4 ; indiquons qu'avec des écrans rectilinéaires, à 4 termes, on peut, en se limitant à une apodisation de 100, atteindre une transmission de 0,6.

Les figures de diffraction des principaux de ces écrans ont été représentées. Leurs coefficients peuvent se lire instantanément sur des courbes, en fonction de l'apodisation. Leur forme est variable : ils peuvent comporter plusieurs minima de transparence, parfois même un minimum central.

Certaines vérifications expérimentales accompagnent cet exposé. Elles ont été faites soit par photométrie photographique, soit à l'aide du système enregistreur photoélectrique, dont est équipé le grand spectroscopie de Bellevue. Elles montrent le manque de luminosité des procédés d'apodisation par éclairage cohérent (altération des images lorsqu'on donne à la source un diamètre apparent normal) et indiquent enfin les performances d'un écran rectilinéaire fabriqué au laboratoire par évaporation sous vide.

INTRODUCTION

On sait que lorsque les dimensions d'un objet sont très faibles, son image à travers un système optique n'est pas une image « géométrique », c'est-à-dire qu'elle ne correspond pas point par point à l'objet. Généralement, autour d'une région de concentration lumineuse — ou *corps* de l'image — s'étend un large domaine de faible éclaircissement qui constitue les *pieds* de l'image. D'ailleurs, l'éclaircissement maximum dans le corps de l'image est inférieur à l'éclaircissement que la luminance B de l'objet, la transparence τ du système et la géométrie de la projec-

tion permettraient d'attendre : l'éclairement « géométrique » $E = B \Omega \tau$ proportionnel à l'angle solide Ω sous lequel est vue, du centre de l'image, la pupille du système, n'est nulle part atteint.

Cette perte d'éclairement au centre et cet étalement de l'image entraînent des diminutions de contraste souvent fort gênantes.

Nous voudrions, après avoir rappelé la théorie du phénomène, proposer et discuter certains moyens propres à réduire ces deux défauts.

L'apodisation. — On appelle couramment « *apodisation* » l'opération par laquelle on atténue les pieds de l'image. Nous proposerons une gamme de solutions pour l'apodisation de deux types principaux d'images.

Les applications de l'apodisation. — Les principales applications de l'apodisation se rapportent en effet :

1^o) aux images de *points* qu'on rencontre, par exemple, en Astronomie et en Microscopie. Les pupilles *circulaires* des télescopes et microscopes produisent, autour de ces images, des anneaux de diffraction indésirables. Ces anneaux sont particulièrement intenses dans les dispositifs qui comportent une occultation centrale de la pupille, cas que nous n'aborderons d'ailleurs pas ici ;

2^o) aux images de *fentes* longues, de largeur réglable, propres à la Spectroscopie. Ces images — ou raies — sont entourées de franges, gênantes dans les recherches d'isotopes faibles ou dans les études des pieds *naturels* des raies. C'est au cours de telles recherches que P. Jacquinet s'est intéressé à la diffraction et a conçu le projet de munir le grand spectroscopie de Bellevue d'un dispositif apodisant. La pupille de sortie est souvent, dans les spectroscopes, de forme rectangulaire (face d'un prisme) : l'apodisation des images de fente à travers une pupille rectangulaire tiendra donc une place importante dans ce travail.

Pour apodiser ces deux types d'images, nous proposerons deux types d'écrans pupillaires :

1^o) pour les images de *points*, des écrans à isopaques (lignes d'égale densité optique) circulaires, que nous appellerons, pour abrégé, des ÉCRANS CIRCULAIRES ;

2^o) pour les images de *fentes*, des écrans rectangulaires à isopaques rectilignes, que nous appellerons des ÉCRANS RECTILINÉAIRES.

Ces écrans sont évidemment utilisables dans des conditions plus larges que celles auxquelles ils sont spécialement adaptés, mais l'étude de leurs autres applications déborderait le cadre de ce travail (citons, par exemple, leur application à l'observation de *plages étendues*, ou celles qui pourraient dériver d'une propriété secondaire : l'*augmentation de la profondeur de foyer*).

Les recherches antérieures sur l'apodisation. — 1) *L'apodisation des images de points données par les pupilles circulaires.* Straubel s'est intéressé le premier (1934 [1a] et surtout 1935 [1b]) à ce problème. Il propose dans un important

mémoire, assez peu connu, certaines fonctions de répartition d'amplitudes pupillaires se prêtant bien à la recherche d'un optimum de la concentration lumineuse dans la figure de diffraction et il calcule complètement une série d'écrans répondant à ce critère d'apodisation. Malheureusement, seuls trois de ses écrans sont réalisables, les autres ayant une densité optique *infinie* sur les bords. Ces écrans sont assez sombres, puisqu'ils absorbent 70 % de la lumière, et Straubel n'indique pas leur figure de diffraction (dont le calcul est d'ailleurs un peu pénible à cause des fonctions choisies). Toutefois, cette étude, très intéressante, pourrait être complétée par les méthodes que nous indiquerons. On peut regretter qu'elle n'ait pas eu plus de diffusion.

La question est ensuite reprise, plus de dix ans après, par P. M. Duffieux et G. Lansraux qui préconisent la même méthode que Straubel [2, 3] et établissent des théorèmes généraux reliant les facteurs de transmission pupillaire à la lumière diffractée lointaine [4, 5], ainsi que certaines équivalences entre les deux problèmes d'apodisation des images de points et de fentes. Dès 1946 [2, 3], le calcul de certains écrans apodisants est annoncé, mais ils n'ont pas encore été publiés ⁽¹⁾.

Citons encore la réalisation en 1944 par A. Couder d'un premier écran apodisant à bords dégradés, à l'aide d'une lentille plan concave absorbante, de transmission d'amplitudes $T(r) = e^{-kr^2}$ [6].

Parallèlement se développait l'étude, par des spectroscopistes, des images de fentes, au double point de vue théorique et expérimental.

2) *L'apodisation des images de fentes données par les pupilles rectangulaires.* Dès 1939, A. Couder et P. Jacquinet, cherchant à résoudre des satellites proches d'une raie intense, proposaient un moyen d'éliminer la diffraction instrumentale qui les gênait, en réduisant la fente du spectroscopie à un point et en plaçant sur l'objectif un diaphragme en losange [7]. Or, le problème de l'apodisation par un diaphragme est en étroit rapport avec le problème de l'apodisation par un écran absorbant rectilinéaire. On montre, en effet, qu'un diaphragme de contour $A(x)$ produit, parallèlement à l'axe des x , la même répartition d'intensités diffractées qu'un écran rectangulaire de transmission d'amplitudes $T(x) = A(x)$, éclairé par une fente longue ; l'avantage de l'écran sur le diaphragme est justement de permettre l'emploi commode d'une fente-objet.

C'est pourquoi P. Jacquinet entreprit, à partir de 1945, avec un groupe d'élèves (P. Boughon, B. Dossier en 1945-1946, puis B. Dossier ensuite) une étude systématique des meilleures fonctions $T(x)$ à propriétés apodisantes et des meilleurs moyens pratiques de les réaliser. Entre 1946 et 1950, plusieurs publications furent faites tant sur les écrans rectilinéaires absorbants (dont plusieurs séries furent calculées, ainsi que leurs figures de diffraction [8, 9]) que sur différents procédés interférentiels d'apodisation. Un écran absorbant rectilinéaire réalisé au labo-

⁽¹⁾ Depuis la rédaction du présent travail, Lansraux a publié (*Rev. Opt.*, t. 32, 1953, p. 475) certains résultats obtenus par une méthode qu'il avait annoncée dans sa thèse. La discussion a priori de cette méthode est faite dans la deuxième partie.

ratoire à l'aide d'un évaporateur de couches minces spécialement construit à cet effet, fut exposé à la Société française de Physique en 1949, dans un montage mettant en évidence ses qualités apodisantes. Les autres dispositifs furent également expérimentés [10].

En poursuivant ces recherches, certaines conditions générales régissant l'apodisation se sont dégagées. D'autre part, des prolongements des méthodes initiales se sont présentés, qui permettent

les uns, de traiter de façon entièrement parallèle les deux problèmes d'apodisation d'images de points et d'images de fentes,

les autres, de conditionner à priori une pupille non seulement d'après le degré d'apodisation désirable, mais encore en fonction d'une ou plusieurs autres exigences simultanées. C'est sur cet ensemble nouveau que repose le présent travail. Il comporte les parties suivantes :

Plan général. — I. *L'étude comparée des divers moyens dont on dispose pour apodiser, faite au double point de vue de l'efficacité et de l'économie de la lumière.*

L'économie maximum correspondrait aux écrans de phase (écrans transparents, de phase non uniforme, circulaires ou rectangulaires) : ils sont d'efficacité nulle ou médiocre. On passe alors aux dispositifs interférentiels (dispositifs rectilinéaires pour la spectroscopie) dont l'étude souligne l'importance de la notion de luminosité et sa complexité quand la source n'est pas infiniment fine et quand l'objet n'est pas parfaitement incohérent. Viennent enfin les écrans absorbants (rectilinéaires ou circulaires) qui, en conclusion, et un peu paradoxalement, *réunissent seuls* les caractères d'efficacité et de luminosité.

Cette partie se termine par un chapitre consacré à des vérifications expérimentales.

Les deuxième et troisième parties de ce travail sont consacrées au calcul effectif des *meilleurs* écrans absorbants, soit circulaires, soit rectilinéaires, c'est-à-dire, plus précisément, de ceux qui possèdent, à *apodisation donnée*, la *plus grande transparence*.

II. A cet effet, on propose, dans la deuxième partie, deux développements en série des fonctions d'amplitude pupillaire et diffractée, rectilinéaires et circulaires, qui présentent les avantages suivants :

1. L'amplitude diffractée se présente sous une forme particulièrement simple et suggestive : c'est le produit de l'amplitude « normale » par un facteur correctif rationnel, qui est l'inverse d'un « coefficient d'apodisation ».

2. Une analogie étroite s'y marque entre les figures de diffraction d'un *point* à travers une pupille circulaire et d'une *fente* à travers une pupille rectilinéaire.

3. Ils peuvent être utilisés pour le calcul de la figure de diffraction d'une pupille *arbitraire* mais surtout ils se prêtent bien aux recherches d'apodisation et à la détermination rapide de toutes les caractéristiques des écrans apodisants et de leurs figures de diffraction.

III. Dans la troisième partie, sont proposées et appliquées des méthodes pour l'amélioration systématique de l'apodisation (cas circulaire et rectilinéaire) et, à apodisation donnée, pour l'amélioration systématique de la luminosité de l'écran apodisant (ou de toute autre qualité importante relative soit à l'écran, soit à sa figure de diffraction). Les développements définis dans la deuxième partie sont utilisés, mais on aurait pu appliquer les mêmes méthodes, à de légères variantes près, soit aux fonctions de Straubel, soit à certains autres systèmes de fonctions qu'on pourrait ultérieurement proposer. C'est un travail qui, pour les fonctions de Straubel, devrait être fait et permettrait des comparaisons intéressantes. Cette partie se termine par l'exposé des résultats et par des courbes qui permettent de trouver instantanément les coefficients d'un écran dont on s'est fixé à priori le degré d'apodisation et la transparence.

GÉNÉRALITÉS CONCERNANT LES FIGURES DE DIFFRACTION ET LES IMAGES

I. FIGURES DE DIFFRACTION

1. Rappel des conventions et notations relatives à l'intégrale de diffraction

1. **Figure de diffraction principale.** — A la sortie d'un objectif sans aberration, éclairé par un point Q voisin de l'axe optique ⁽²⁾, la surface d'onde Σ est une sphère, dont le centre Q' reçoit des vibrations *en phase* ; elles s'y ajoutent arithmétiquement, produisant en ce point Q', dit conjugué-image de Q, une concentration de lumière maximum. C'est dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par Q' qu'on observe la *figure de diffraction principale*, celle qui possède le point d'éclairement maximum.

2. **Défauts de mise au point : figures de diffraction secondaires.** — Dans les plans parallèles voisins, non seulement le maximum d'éclairement se trouve abaissé, mais l'expérience montre, dans le cas des objectifs parfaits de transparence uniforme, que l'intensité *relative* des pieds, même lointains, augmente : il y a désapodisation. Cette propriété n'est pas absolument évidente, surtout elle ne saurait être généralisée d'emblée aux objectifs parfaits *de transparence non uniforme*, pour lesquels les résultats expérimentaux manquent encore. C'est pourquoi nous incluons dans notre étude les *figures de diffraction secondaires* des plans extrafocaux.

3. **Figures d'aberrations.** — D'une façon plus générale, on peut créer volontairement, dans un dessin d'apodisation, certaines figures d'aberrations, en garnissant la pupille d'écrans transparents d'épaisseur non uniforme (écrans de

⁽²⁾ Nous nous placerons, dans tout ce travail, dans les conditions de Gauss et n'étudierons que la diffraction au voisinage de l'axe optique.

phase). Ces écrans altèrent la forme de la surface d'onde Σ , de sorte qu'on ne retrouve en aucun point l'éclairement maximum qui caractérisait l'image stigmatique, dite « géométrique ». Mais cet abaissement de l'éclairement maximum des différentes figures de diffraction n'implique rien concernant l'intensité relative de leurs pieds ; on peut donc se proposer de déterminer des répartitions pupillaires de phases qui posséderaient un pouvoir apodisant.

Naturellement, ces figures de diffraction secondaires et d'aberrations ne nous intéresseront que dans la mesure où la perte d'éclairement central demeurera faible ; les surfaces d'onde génératrices Σ' , à la sortie de la pupille, ne devront donc s'écarter que faiblement de la surface sphérique Σ correspondant à la figure de diffraction principale.

4. **Figures de diffraction à l'infini.** — Les profils des figures de diffraction — sinon leurs dimensions — étant indépendants de la convergence du système, on peut imaginer qu'on règle dans chaque cas cette convergence de façon à observer ces différentes figures dans un plan fixe. On peut disposer de même du plan de l'objet, ce qui permet de les rejeter l'un et l'autre à l'infini.

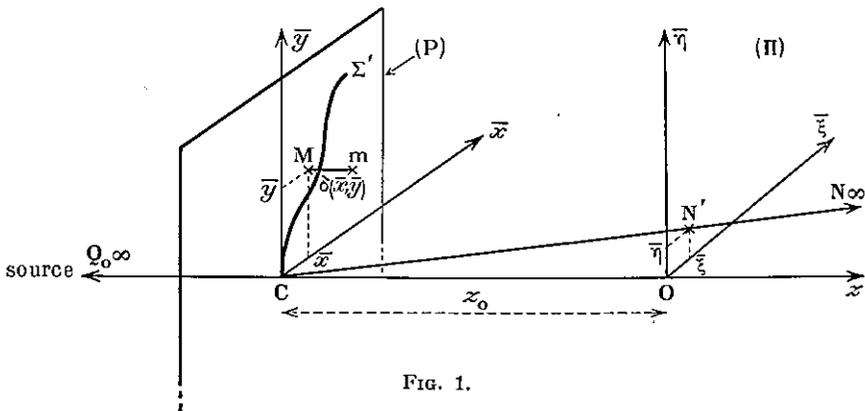


FIG. 1.

Soit alors (P) une pupille, $C\bar{x}$ et $C\bar{y}$ ⁽³⁾ deux axes rectangulaires dans son plan, formant avec Cz un trièdre de référence (fig. 1). La pupille (P) peut être garnie d'écrans absorbants ou d'écrans de phase. Dans le premier cas, la surface d'onde pupillaire créée par le point Q_0 à l'infini sur l'axe Cz se confond avec le plan (P). Dans le second cas, elle s'en écarte, en chaque point (\bar{x}, \bar{y}) de quantités $\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{Mm}$.

Les différents types de figures de diffraction précédemment définis correspondent aux formes suivantes de l'écart δ :

1^o) *Figures de diffraction principales.*

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma. \quad (\alpha, \beta, \gamma = \text{Ctes})$$

⁽³⁾ Nous utilisons ici des lettres surlignées, afin de réserver les lettres sans surcharge à certaines coordonnées réduites qui nous serviraient presque exclusivement par la suite.

Ces écarts, linéaires en \bar{x} et \bar{y} , n'ayant aucune influence sur le *profil* de la figure de diffraction sont négligeables.

2°) *Figures de défocalisation ou figures de diffraction secondaires.*

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = k(\bar{x}^2 + \bar{y}^2). \quad (k = \text{Cte}).$$

3°) *Figures d'aberrations.*

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) \neq k(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma.$$

Ces écarts correspondent à des écrans de phase qui ne sont stigmatiques pour aucun plan.

Nous repérerons le point courant N de ces figures par les cosinus directeurs $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ ⁽³⁾ relativement à $C\bar{x}$ et $C\bar{y}$ de la direction CN (fig. 1). $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ pourront aussi représenter les coordonnées *réduites* de la projection optique N' du point N sur un plan (II) de cote z_0 quelconque [axes $O\bar{\xi}$ et $O\bar{\eta}$ dans (II) parallèles à $C\bar{x}$ et $C\bar{y}$ dans (P) ; unité de longueur z_0].

5. Amplitude pupillaire complexe. Amplitude diffractée complexe. Equations de transformation fondamentales. — Il est commode de noter l'état vibratoire en chaque point $M(\bar{x}, \bar{y})$ de la pupille à l'aide de l'amplitude complexe $A(\bar{x}, \bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\varphi(\bar{x}, \bar{y})}$, où $a(\bar{x}, \bar{y})$ représente l'amplitude de la vibration au point M et $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, la différence de phase $2\pi\delta(\bar{x}, \bar{y})/\lambda$ entre les vibrations en M dans (P) et en m dans Σ' (fig. 1).

Les vibrations $A(\bar{x}, \bar{y})$ parviennent au point $N(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ à l'infini avec des différences de phase

$$\theta(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{2\pi}{\lambda} (\bar{x} \bar{\xi} + \bar{y} \bar{\eta}).$$

Leur résultante est représentable, à une constante près, par la *fonction d'amplitude diffractée complexe*

$$\mathcal{A}_b(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \int_{\text{pupille}} a(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\varphi(\bar{x}, \bar{y})} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} (\bar{x} \bar{\xi} + \bar{y} \bar{\eta})} d\bar{x} d\bar{y} \quad (\text{formule scalaire de Stokes}),$$

ou encore

$$(1) \quad \mathcal{A}_b(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \int_{\text{pupille}} A(\bar{x}, \bar{y}) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} (\bar{x} \bar{\xi} + \bar{y} \bar{\eta})} d\bar{x} d\bar{y} = \alpha(\bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{i\psi(\bar{\xi}, \bar{\eta})}.$$

Si l'on étend les limites de l'intégrale à l'infini (en posant $A(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0$ en dehors du domaine pupillaire) et si l'on prend la longueur d'onde λ pour unité de mesure dans le plan de la pupille, la transformation $A(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \mathcal{A}_b(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ s'identifie à la *transformation réciproque de Fourier* [11]

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_b(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\bar{x}, \bar{y}) e^{-2\pi i(\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\eta})} d\bar{x} d\bar{y}, \\ A(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_b(\bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{2\pi i(\bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\eta})} d\bar{\xi} d\bar{\eta}. \end{cases}$$

6. **Amplitudes pupillaires et diffractées fonctions d'une seule variable.** — 1) *Amplitudes* $A(\bar{r})$, $\mathcal{A}(\bar{\rho})$ à répartitiones circulaires. Supposons qu'une pupille circulaire reçoive une onde pupillaire dont l'amplitude $A(\bar{r})$ soit fonction seulement du rayon polaire pupillaire \bar{r} . Par raison de symétrie, la répartition de l'amplitude diffractée dans le plan de l'infini est aussi circulaire. La transformation de diffraction prend alors la forme simplifiée, indiquée par Straubel [1] :

$$(3) \quad \mathcal{A}(\bar{\rho}) = 2\pi \int_{\bar{r}=0}^{\infty} A(\bar{r}) J_0(2\pi\bar{r}\bar{\rho}) \bar{r} d\bar{r}.$$

Remarquons qu'il est possible d'échanger dans cette formule les fonctions $A(\bar{r})$ et $\mathcal{A}(\bar{\rho})$. L'équation (3) et sa réciproque

$$(4) \quad A(\bar{r}) = 2\pi \int_{\bar{\rho}=0}^{\infty} \mathcal{A}(\bar{\rho}) J_0(2\pi\bar{r}\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho}$$

se déduisent des équations de Fourier (2) par un passage en coordonnées polaires.

2) *Amplitudes* $A(\bar{x})$, $\mathcal{A}(\bar{\xi})$ à répartitiones rectilinéaires. La figure de diffraction d'une fente objet fine, infiniment longue, parallèle à $\bar{C}y$, ne comporte, comme on sait, aucune variation d'éclairement parallèlement à sa grande dimension ; l'éclairement $\mathcal{E}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ est une fonction de $\bar{\xi}$ seul : $\mathcal{E}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \equiv \mathcal{E}(\bar{\xi})$.

Les lignes d'égal éclairement étant des droites $\mathcal{E}(\bar{\xi}) = \text{Cte}$, nous dirons, que la répartition de l'éclairement est *rectilinéaire*.

Le calcul de cette fonction $\mathcal{E}(\bar{\xi})$ se simplifie beaucoup dans un cas particulier, celui où la pupille est rectangulaire et où son éclairement est lui-même une fonction rectilinéaire $E(\bar{x})$. On montre [9, 10] que l'éclairement dû à la fente entière est dans ce cas proportionnel à l'intensité $\mathcal{J}(\bar{\xi}) = \mathcal{A}(\bar{\xi}, 0)$. $\mathcal{A}^*(\bar{\xi}, 0)$ produite, sur l'axe $\bar{\eta} = 0$, par l'élément de fente qui s'y projette géométriquement.

Si donc cet élément se réduit à un point Q_0 (fente-objet infiniment fine) ou à un segment Q_0 « cohérent » créant sur la pupille une onde d'amplitude $A_{Q_0}(\bar{x})$, on a simplement

$$(5) \quad \mathcal{A}(\bar{\xi}, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{Q_0}(\bar{x}) e^{-i2\pi\bar{x}\bar{\xi}} d\bar{x}.$$

On est donc ramené, comme dans le cas des pupilles circulaires [formule (3)], à une *transformation à une variable* (*).

Les répartitiones rectilinéaires présentent un grand intérêt en spectroscopie. Si l'axe de dispersion du spectroscope coïncide avec $O\bar{\xi}$, il suffit d'apodiser la figure

(*) Le problème se complique si l'élément Q_0 n'est que partiellement cohérent, ou s'il est tout à fait incohérent, c'est-à-dire si la source — qui peut être distincte de l'objet — a des dimensions non négligeables parallèlement à $C\bar{x}$. Nous reviendrons là-dessus dans l'étude des images correspondant à des sources larges.

de diffraction de l'élément Q_0 de la fente pour bénéficier sur l'ensemble de la fente de tout l'accroissement de contraste correspondant.

7. Coordonnées réduites. Fonctions réduites. — Il nous sera commode de rapporter les coordonnées linéaires \bar{x} ou \bar{r} , dans le plan de la pupille, aux nombres

$$\frac{\bar{a}}{2} = \frac{a}{2\lambda} \quad \text{ou} \quad \bar{R} = \frac{R}{\lambda}$$

qui mesurent, en longueurs d'onde, la demi-largeur ou le rayon de la pupille. Nous désignerons par x et r les nouvelles coordonnées réduites

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{a}/2} = \frac{2\bar{x}\lambda}{a}, \quad r = \frac{\bar{r}}{\bar{R}} = \frac{\bar{r}\lambda}{R}.$$

On a $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq r \leq 1$.

Nous rapporterons de même les variables $\bar{\xi}$ ou $\bar{\rho}$ à la distance angulaire $\varepsilon_0 = \lambda/a$ ou $\lambda/2R$ qui sépare les zéros de la figure de diffraction de la pupille rectangulaire uniforme de largeur a ou de largeur $2R$, en posant

$$\xi = \frac{\bar{\xi}}{\varepsilon_0} = \frac{\bar{\xi}a}{\lambda} = \bar{\xi}\bar{a} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0} = \frac{2\bar{\rho}R}{\lambda} = 2\bar{\rho}\bar{R}.$$

Nous appellerons ε_0 : *unité angulaire optique*; ξ ou ρ représente le nombre d'unités optiques contenues dans $\bar{\xi}$ ou dans $\bar{\rho}$.

Avec ces nouvelles variables, les équations (3) et (5) deviennent

$$(6) \quad \mathcal{A}(\rho) = 2\pi \bar{R}^2 \int_0^1 A(r) \mathbf{J}_0(\pi r \rho) r dr,$$

$$\mathcal{A}(\xi) = \frac{\bar{a}}{2} \int_{-1}^{+1} A(x) e^{-i\pi x \xi} dx.$$

Dans la majeure partie de ce travail, relative à l'étude des *profils* des figures de diffraction, il nous suffira de connaître des quantités *proportionnelles* aux amplitudes diffractées, soit $k\mathcal{A}(\xi)$ ou $k\mathcal{A}(\rho)$.

Nous pourrions donc remplacer dans les équations (6) les amplitudes pupillaires $A(r)$, $A(x)$ — qui ne sont d'ailleurs jamais directement fournies par l'expérience — par des fonctions de module maximum égal à 1, c'est-à-dire par des fonctions complexes dont le module s'identifie au facteur réel de transmission d'amplitudes de la pupille. D'autre part, on pourra disposer, dans le système (6), des coefficients constants de façon à simplifier certains calculs. C'est ainsi que nous adopterons parfois les formes suivantes des équations (6) :

$$(7) \quad \mathcal{A}(\rho) = \pi \int_0^1 A(r) \mathbf{J}_0(\pi r \rho) r dr, \quad \mathcal{A}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} A(x) e^{-i\pi x \xi} dx$$

ou

$$(8) \quad \mathcal{A}(\rho) = 2 \int_0^1 A(r) \mathbf{J}_0(\pi r \rho) r dr, \quad \mathcal{A}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A(x) e^{-i\pi x \xi} dx.$$

On verrait, en se ramenant à des transformations de Fourier, que les fonctions liées par les équations (7) vérifient le théorème de Plancherel :

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} A(r) A^*(r) r dr = \int_0^{+\infty} \mathcal{A}(\rho) \mathcal{A}^*(\rho) \rho d\rho,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) A^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}(\xi) \mathcal{A}^*(\xi) d\xi,$$

qui jouera un rôle important dans la suite.

Quant aux équations (8), elles permettent de représenter par l'*unité* le maximum maximum de l'amplitude ou de l'intensité qu'on obtient, au centre de la figure de diffraction ($\xi = 0$ ou $\rho = 0$), avec la pupille uniforme (\mathcal{E}_0) de transmission maximum.

Elles donnent, en effet, pour $A(x) \equiv 1$ ou $A(r) \equiv 1$,

$$\mathcal{A}(0)_{(\mathcal{E}_0) \text{ circul.}} = 2 \int_0^1 r dr = 1, \quad \mathcal{A}(0)_{(\mathcal{E}_0) \text{ rectil.}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dx = 1.$$

Cette convention est la plus commode lorsqu'on compare entre elles plusieurs figures de diffraction.

2. Relations de symétrie et apodisation

Nous avons déjà cité les figures d'amplitudes pupillaires *circulaires* dont la symétrie se transporte aux figures de diffraction correspondantes. Nous voudrions indiquer, de même, certaines relations de symétrie qui lient les figures *rectilinéaires* d'amplitudes pupillaires et diffractées et marquer leurs répercussions possibles sur l'apodisation.

Nous nous servirons, dans ce paragraphe, d'une représentation classique et commode des fonctions complexes $A(x)$ et $\mathcal{A}(\xi)$. Nous formerons un trièdre trirectangle avec l'axe de la variable, un axe réel et un axe imaginaire. Une fonction complexe se représentera, dans ce système, par un vecteur ayant pour composantes les parties réelle et imaginaire de la fonction. C'est ainsi qu'on figurera, par exemple, les fonctions $A(x)$ et $\mathcal{A}(\xi)$ (fig. 2 et 3).

1. **Étude des symétries des figures de diffraction des fonctions $A(x)$ réelles** [$A(x) = a(x)$, $\varphi(x) \equiv 0$]. — 1) $a(x)$ est quelconque. La transformée, par l'intégrale de diffraction, d'une fonction $a(x)$ réelle est une fonction $\mathcal{A}(\xi)$ généralement complexe, dont la courbe représentative admet l'axe réel pour axe de symétrie. On a, en effet,

$$\mathcal{A}(\xi) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \cos \pi x \xi dx}_{\substack{\sigma(\xi) = \sigma(-\xi) \\ \text{fonction paire}}} - i \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \sin \pi x \xi dx}_{\substack{\theta(\xi) = -\theta(-\xi) \\ \text{fonction impaire}}}$$

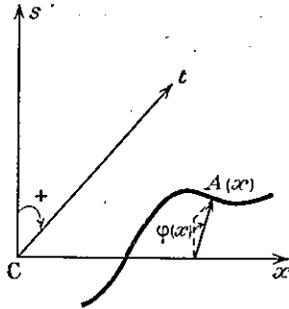


FIG. 2. — Cx, axe des abscisses pupillaires ; Cs, axe réel ; Ct, axe imaginaire.

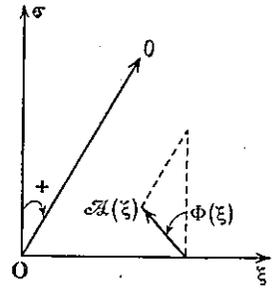


FIG. 3. — Oxi, axe des abscisses de la figure de diffraction ; Osigma, axe réel ; Otheta, axe imaginaire.

$$\left\{ \begin{aligned} A(x) &= a(x) e^{i\varphi(x)} = \underbrace{a(x) \cos \varphi(x)}_{s(x)} + i \underbrace{a(x) \sin \varphi(x)}_{l(x)} \\ \operatorname{tg} \varphi(x) &= \frac{l(x)}{s(x)} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}(\xi) &= a(\xi) e^{i\Phi(\xi)} = \sigma(\xi) + i \theta(\xi) \\ \operatorname{tg} \Phi(\xi) &= \frac{\theta(\xi)}{\sigma(\xi)} \end{aligned} \right.$$

Il en résulte bien, pour $\mathcal{A}(\xi)$, la symétrie indiquée (fig. 4).

Les modules de $\mathcal{A}(\xi)$ et de $\mathcal{A}(-\xi)$ étant égaux, l'intensité $\mathcal{J}(\xi) = \mathcal{A}(\xi) \mathcal{A}^*(\xi)$ est une *fonction paire*, présentant au centre un maximum ou un minimum :

$$\mathcal{J}(0) = \mathcal{A}(0) \mathcal{A}^*(0) = \mathcal{A}^2(0) = \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) dx \right]^2.$$

Si $a(x)$ est partout positive sur la pupille (en particulier si c'est un écran absorbant qui commande l'amplitude pupillaire) $\mathcal{A}(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) dx$ est un maximum absolu (fig. 5).

Si $a(x)$ peut prendre des valeurs des deux signes (cas de certaines répartitions interférentielles d'amplitudes pupillaires), l'intégrale $\mathcal{A}(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) dx$ ne constitue pas nécessairement, par rapport à tout $\mathcal{A}(\xi)$, un maximum (fig. 6).

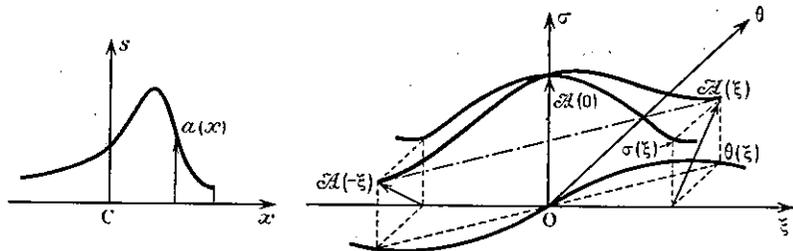


FIG. 4. — Répartition pupillaire réelle $A(x) \equiv a(x)$ et figure de diffraction associée $\mathcal{A}(\xi)$.

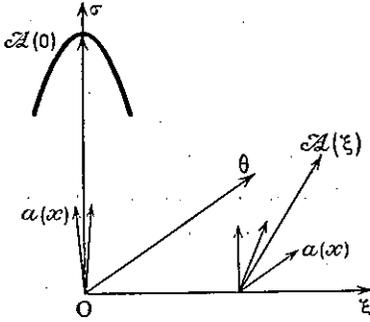


FIG. 5. — Fonction pupillaire $a(x)$ partout positive : $A(\xi)$ est la somme de vibrations $a(x)$

{ toutes en phase pour $\xi = 0$ } $A(0)$ est réelle
 { en désaccord de phase pour $\xi \neq 0$. } $A(0)$ est un max. absolu

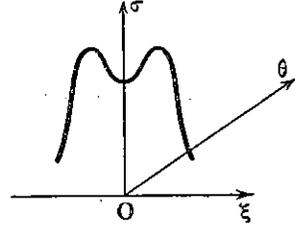


FIG. 6. — Fonction pupillaire $a(x)$ non partout positive : $A(0)$ ne constitue pas nécessairement un maximum.

2) $a(x)$ est pair. Si maintenant la fonction $a(x)$ est elle-même paire, la fonction $A(\xi)$ devient réelle, ce qui ne peut naturellement pas se distinguer sur la courbe représentative de $J(\xi) = A(\xi) A^*(\xi)$. Toutefois, il est possible de montrer que les fonctions $a(x)$ paires fournissent les meilleures solutions pour l'apodisation. Soit, en effet, une fonction $a(x)$ sans parité définie. Nous allons lui associer une fonction $a_0(x)$ paire, dont il sera possible de prouver la supériorité (fig. 7). Cette fonction, c'est $a_0(x) = a(x) + a(-x)$.

Sa transformée $A_0(\xi)$ est la fonction réelle suivante :

$$A_0(\xi) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) e^{-i\pi x \xi} dx}_{A(\xi)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(-x) e^{-i\pi x \xi} dx}_{\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) e^{i\pi x \xi} dx = A^*(\xi)}$$

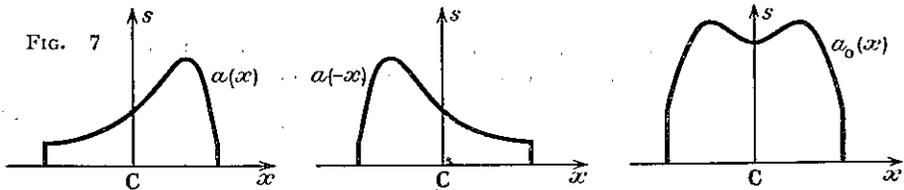
soit $A_0(\xi) = A(\xi) + A^*(\xi)$.

Au centre de la figure $A_0(0) = 2 A(0)$. Mais, en tout autre point, on a

$$|A_0(\xi)| = |A(\xi) + A^*(\xi)| \leq 2 |A(\xi)|$$

D'où

$$\frac{|A_0(\xi)|}{|A_0(0)|} \leq \frac{|A(\xi)|}{|A(0)|} \quad \text{et} \quad \frac{J_0(\xi)}{J_0(0)} \leq \frac{J(\xi)}{J(0)}$$



On peut en conclure que la figure de diffraction de la fonction paire $a_0(x)$ est *moins large* que la figure de diffraction de $a(x)$ et que ses pieds sont moins intenses. De plus, l'intensité centrale est augmentée, c'est-à-dire qu'on a un gain de *luminosité*, de *résolution* et d'*apodisation*. Les fonctions $a(x)$ réelles que nous étudierons dans la suite seront donc uniquement des *fonctions paires*.

2. Etude des symétries des figures de diffraction des fonctions pupillaires complexes $A(x) = a(x) e^{i\varphi(x)}$. — 1) $a(x)$ étant une fonction réelle paire, il est facile de voir que la transformée de $a(x) e^{i\varphi(x)}$ est une fonction généralement complexe, sans parité définie.

Si la fonction $\varphi(x)$ est impaire, sa transformée devient réelle, mais n'acquiert aucun caractère de parité, donc \mathcal{J} non plus.

Par contre, si $\varphi(x)$ est paire, les deux composantes de $\mathcal{A}_b(\xi)$ deviennent paires et la courbe gauche $\mathcal{A}_b(\xi)$ est symétrique par rapport au plan $O\theta\sigma$.

$$\mathcal{A}_b(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \underbrace{a(x) \cos \varphi(x)}_{\substack{\text{fonct. réelle paire} \\ \text{à transformée réelle paire } \sigma(\xi)}} e^{-i\pi x \xi} dx + \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} \underbrace{a(x) \sin \varphi(x)}_{\substack{\text{fonct. réelle paire} \\ \text{à transformée réelle paire } \theta(\xi)}} e^{-i\pi x \xi} dx$$

d'où :

$$\mathcal{A}_b(\xi) = \underbrace{\sigma(\xi)}_{\text{f. paire}} + i \underbrace{\theta(\xi)}_{\text{f. paire}}$$

$\mathcal{A}_b(\xi)$ et $\mathcal{A}_b(-\xi)$ ayant même module, la fonction $\mathcal{J}(\xi)$ est paire. C'est à ce cas [$\varphi(x)$, fonction paire] que nous nous tiendrons, car une absence de symétrie dans la figure de diffraction $\mathcal{J}(\xi)$ n'est pas, en général, souhaitable. L'intensité centrale $\mathcal{J}(0)$ est alors soit un *maximum* soit un *minimum relatif*. Mais, de toutes façons, cette intensité $\mathcal{J}(0) = \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) e^{i\varphi(x)} dx \right] \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) e^{-i\varphi(x)} dx \right]$ demeure inférieure à l'intensité centrale $\mathcal{J}_0(0) = \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a(x) dx \right]^2$ qui correspondrait à une pupille *réelle*, de même amplitude positive $a(x)$.

2) Nous n'avons pas envisagé l'hypothèse $a(x)$ impaire : on verrait facilement qu'elle n'apporte aucune solution favorable. En effet, si $\varphi(x)$ est paire, la transformée de $a(x) e^{i\varphi(x)}$ a deux composantes impaires. $\mathcal{J}(\xi)$ est donc pair, mais avec un minimum central nul. Et si $\varphi(x)$ est impaire, $\mathcal{A}_b(\xi)$ est imaginaire pure, sans parité définie. Ces deux cas sont évidemment à rejeter.

Ces remarques nous guideront dans l'étude des possibilités d'apodisation par les écrans pupillaires de phase ou d'absorption.

3. Éléments caractéristiques des figures de diffraction. Coefficients d'apodisation. Largeur

Nous caractériserons le *profil* d'une figure de diffraction en définissant son *taux d'apodisation*, ainsi que la *largeur* de sa partie centrale, largeur dont dépend le *pouvoir de résolution* de la pupille associée.

1. **Taux d'apodisation d'une figure de diffraction.** — Soient $J_0(\xi) = \mathcal{A}_0(\xi) \mathcal{A}_0^*(\xi)$ une figure de référence ⁽⁵⁾ et $J(\xi) = \mathcal{A}(\xi) \mathcal{A}^*(\xi)$ une figure dont nous cherchons à définir « le taux d'apodisation par rapport à $J_0(\xi)$ ».

On peut considérer ce taux comme une fonction $K(\xi)$ de l'abscisse ou comme un coefficient égal à la valeur moyenne de l'apodisation sur un intervalle donné (coefficient moyen \mathcal{M}).

1) *La fonction d'apodisation $K(\xi)$.* C'est le rapport de l'intensité relative des pieds dans la figure de référence et dans la figure $J(\xi)$.

$$(10) \quad K(\xi) = \frac{J_0(\xi)/J_0(0)}{J(\xi)/J(0)}.$$

Nous considérerons souvent aussi l'inverse de $K(\xi)$, c'est-à-dire le rapport des contrastes « centre-pieds » dans la figure de référence et dans la figure apodisée $J(\xi)$.

$$K^{-1}(\xi) = \frac{J_0(0)/J_0(\xi)}{J(0)/J(\xi)}.$$

La figure est *apodisée* dans les régions où l'on a $K(\xi) > 1$ ou $K^{-1}(\xi) < 1$. Toutefois, ces rapports n'ont une signification utile qu'aux abscisses ξ_m des maxima correspondants des deux courbes (les zéros, par contre, sont sans intérêt ; pour eux d'ailleurs $K(\xi)$ et $K^{-1}(\xi)$ ne sont pas toujours définis).

Comme les maxima correspondants de $J(\xi)$ et de $J_0(\xi)$ peuvent être légèrement décalés, nous substituerons à ces figures des courbes régulières passant par leurs sommets (nous les appellerons, improprement, des enveloppes). C'est finalement à partir de ces enveloppes que nous calculerons $K(\xi)$ et $K^{-1}(\xi)$.

La *figure de référence* est généralement la figure de diffraction $J_0(\xi) = \sin^2 \pi \xi / \pi^2 \xi^2$ de la pupille uniforme rectilinéaire ou $J_0(\rho) = 4 [J_1(\pi\rho)/\pi\rho]^2$ de la pupille uniforme circulaire.

Mais il arrivera aussi que nous choisissons une *autre* figure de référence ; dans l'étude des écrans de phase, par exemple, nous comparerons les pupilles « complexes » $A(x) = a(x) e^{i\varphi(x)}$ aux pupilles « réelles » $A_0(x) = a(x)$.

2) *Les coefficients d'apodisation moyenne \mathcal{M} .* On peut définir plusieurs coefficients distincts correspondant chacun à cette notion d'apodisation moyenne sur un intervalle ξ_1, ξ_2 ou ρ_1, ρ_2 . Pratiquement, nous utiliserons les trois suivants :

Coefficient $\mathcal{M}(\mathcal{F})$. La définition la plus simple de \mathcal{M} consisterait à l'égaliser à la valeur moyenne de $K(\xi)$ ⁽⁶⁾ ou de $K(\rho)$ sur l'intervalle ξ_1, ξ_2 ou ρ_1, ρ_2 choisi ; on aurait, par exemple

⁽⁵⁾ Les définitions de ce paragraphe s'appliqueraient sans modification aux figures de diffraction des pupilles circulaires ; il suffirait de remplacer la variable ξ par ρ .

⁽⁶⁾ $K(\xi)$ est naturellement défini ici à partir des figures $J(\xi)$ et $J_0(\xi)$ elles-mêmes et non à partir de leurs enveloppes.

$$\mathbb{M} = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} K(\xi) d\xi}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Mais nous verrons qu'il est plus commode de poser

$$(11) \quad \mathbb{M} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} K^{-1}(\xi) d\xi} \quad \text{ou} \quad \mathbb{M} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\int_{\rho_1}^{\rho_2} K^{-1}(\rho) d\rho}.$$

Nous désignerons ce coefficient moyen par $\mathbb{M}(\mathcal{F})$ et appellerons *facteur de pieds* \mathcal{F} son inverse.

Le coefficient $\mathbb{M}(\mathcal{F})$ et le facteur \mathcal{F} n'existent que sur un intervalle tel que

$$K^{-1}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = \mathcal{J}_0(0) \mathcal{J}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) / \mathcal{J}(0) \mathcal{J}_0\left(\frac{\xi}{\rho}\right)$$

demeure partout fini. Il faut donc exclure de cet intervalle les zéros de $\mathcal{J}_0\left(\frac{\xi}{\rho}\right)$ qui n'appartiendraient pas aussi à $\mathcal{J}\left(\frac{\xi}{\rho}\right)$. Ce facteur est d'un emploi très commode dans les calculs d'écrans pupillaires apodisants mais, comme nous le préciserons plus tard, il n'est pas toujours utilisable.

Coefficient $\mathbb{M}(\mathcal{D})$. On peut aussi définir le taux d'apodisation moyenne à partir du *facteur de dispersion* $\mathcal{D}(\xi_1)$ ou $\mathcal{D}(\rho_1)$: c'est le rapport, à l'énergie totale, de l'énergie dispersée dans l'intervalle $|\xi| \geq |\xi_1|$ ou $\rho \geq \rho_1$

$$(12) \quad \mathcal{D}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} \mathcal{J}(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(\xi) d\xi} \quad \text{ou} \quad \mathcal{D}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} \mathcal{J}(\rho) \rho d\rho}{\int_0^{+\infty} \mathcal{J}(\rho) \rho d\rho}.$$

Pour les pupilles uniformes, on a

$$(13) \quad \mathcal{D}_0(\xi_1) = 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Si } 2\pi\xi_1 - \frac{\sin^2 \pi \xi_1}{\pi \xi_1} \right\}, \quad \mathcal{D}_0(\rho_1) = \mathcal{J}_0^2(\pi \rho_1) + \mathcal{J}_1^2(\pi \rho_1).$$

Le taux d'apodisation moyenne $\mathbb{M}(\mathcal{D})$, sur l'intervalle $|\xi| \geq |\xi_1|$ ou $\rho \geq \rho_1$, est donc

$$(14) \quad \mathbb{M}(\mathcal{D}_{\xi_1}) = \frac{\mathcal{D}_0(\xi_1)}{\mathcal{D}(\xi_1)} \quad \text{ou} \quad \mathbb{M}(\mathcal{D}_{\rho_1}) = \frac{\mathcal{D}_0(\rho_1)}{\mathcal{D}(\rho_1)}.$$

C'est par ce facteur que Straubel définit l'apodisation moyenne des écrans circulaires qu'il calcule ; Lansraux [3] l'a aussi proposé ; nous l'avons enfin utilisé pour certains écrans rectilinéaires.

Coefficient $\mathbb{M}(\mathcal{L})$. On peut enfin considérer un *facteur d'étalement* $\mathcal{L}(\xi_1)$ ou $\mathcal{L}(\rho_1)$, sur les intervalles $|\xi| \geq |\xi_1|$ ou $\rho \geq \rho_1$, respectivement

$$(15) \quad \mathcal{L}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} \mathcal{J}(\xi) d\xi}{\mathcal{J}(0)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} \mathcal{J}(\rho) \rho d\rho}{\mathcal{J}(0)}.$$

On remarquera que, pour les *pupilles uniformes*, les expressions des facteurs \mathfrak{D}_0 et \mathfrak{L}_0 s'identifient à une constante près. Les formules (7) et (9) donnent, en effet, pour le cas circulaire par exemple,

$$\mathfrak{J}(0) = \pi^2 \left[\int_0^1 A(r) r dr \right]^2 \quad \text{mais, puisque } A(r) \equiv 1,$$

$$\pi^2 \left[\int_0^1 A(r) r dr \right]^2 = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 A^2(r) r dr = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \mathfrak{J}(\rho) \rho d\rho,$$

d'où
$$\mathfrak{L}_0(\rho_1) = \frac{2}{\pi^2} \mathfrak{D}_0(\rho_1).$$

Pour les pupilles non uniformes, par contre, les expressions de $\mathfrak{J}(0)$ et de l'énergie totale diffèrent, de sorte que les facteurs \mathfrak{D} et \mathfrak{L} sont vraiment distincts.

Le taux d'apodisation moyenne $\mathfrak{A}b(\mathfrak{L})$ sera

$$(16) \quad \mathfrak{A}b(\mathfrak{L}_{\xi_1}) = \frac{\mathfrak{L}_0(\xi_1)}{\mathfrak{L}(\xi_1)} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A}b(\mathfrak{L}_{\rho_1}) = \frac{\mathfrak{L}_0(\rho_1)}{\mathfrak{L}(\rho_1)}.$$

Nous verrons plus loin comment on calcule ces coefficients quand l'intensité $\mathfrak{J}(\xi)$ appartient à certains types particuliers de fonctions. Cela nous amènera à préciser quel est, suivant les cas, le plus commode d'entre eux.

2. Largeur d'une figure de diffraction et pouvoir de résolution théorique de la pupille associée. — C'est relativement aux objets de dimensions négligeables qu'une pupille possède son pouvoir de résolution maximum, puisque les images sont alors réduites à des figures de diffraction, et possèdent des dimensions minima. On donne le nom de *pouvoir de résolution théorique* R à ce pouvoir de résolution limite.

1) *Cas de la pupille rectangulaire uniforme.* Dans le cas d'une pupille rectangulaire de transparence uniforme, le pouvoir de résolution théorique R prend le nom de *pouvoir intrinsèque* R_0 . A R_0 correspond la *limite de résolution intrinsèque* définie par la règle de Lord Rayleigh : « Les figures de diffraction de deux points sont juste séparables quand le centre de l'une coïncide avec le premier zéro de l'autre. » La limite de résolution intrinsèque, égale à la distance des deux points qu'on sépare, vaut donc, en unités réduites, $\Delta\xi = 1$. Il est commode de rattacher cette limite de résolution à la « largeur » de la figure de diffraction. Il suffit de convenir qu'on mesurera cette largeur entre les points symétriques P_1 et P_2 d'écartement $\Delta\xi = 1$ (fig. 8). Les ordonnées réduites de ces points étant

$$\frac{\mathfrak{J}(P_1)}{\mathfrak{J}(0)} = \frac{\mathfrak{J}(P_2)}{\mathfrak{J}(0)} = 0,405,$$

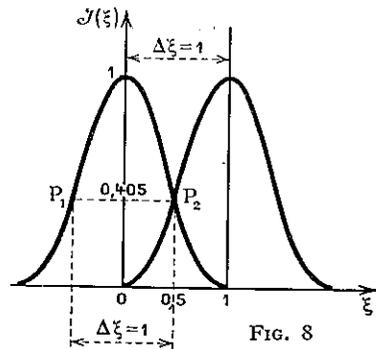


FIG. 8

on peut dire que « la *limite de résolution* de la pupille rectangulaire uniforme est égale à la *largeur* $\Delta\xi$ de sa figure de diffraction, prise entre les deux points symétriques P_1 et P_2 d'ordonnée réduite 0,405 ».

2) *Cas des pupilles apodisantes*. Nous étendrons cette règle (qui égale à $\Delta\xi_{0,405}$ aussi bien la largeur de la figure de diffraction de la pupille rectangulaire uniforme que sa limite de résolution) à toutes les figures possédant, au centre, un profil grossièrement semblable à celui de $J_0(\xi) = \sin^2 \pi\xi/\pi^2\xi^2$. Ce sera pratiquement le cas pour toutes les figures apodisées que nous considérerons (?).

La largeur $\Delta\xi$ ainsi définie et le pouvoir de résolution théorique associé R sont liés aux grandeurs correspondantes $\Delta\xi_0 = 1$ et R_0 , relatives à la pupille uniforme, par l'égalité

$$(17) \quad \frac{R}{R_0} = \frac{\Delta\xi_0}{\Delta\xi} = \frac{1}{\Delta\xi}.$$

II. IMAGES

Les figures de diffraction, dont il a été question jusqu'à présent, résultent d'un phénomène interférentiel ayant son origine en *un* point de la source. L'étendue géométrique du faisceau lumineux correspondant est infiniment petite. Il en va de même du flux transporté, donc aussi de l'éclairement de ces figures. En pratique toutefois, on peut observer des images qui diffèrent fort peu de figures de diffraction, mais les dimensions requises pour la source sont si faibles que l'éclairement obtenu est toujours une très petite fraction de l'éclairement dit « géométrique ».

Il est un cas où cette circonstance est particulièrement gênante, celui du spectroscope où il est souvent utile de disposer, au centre des raies, d'un éclairement se rapprochant de l'éclairement maximum ⁽⁸⁾ que puisse donner la source utilisée. Aussi emploie-t-on, comme on sait, non pas des fentes de largeur négligeable, qui donneraient cependant les images les plus fines et le meilleur pouvoir de résolution, mais des fentes dont la largeur angulaire, par rapport au centre de la pupille, peut dépasser l'unité optique $\varepsilon_0 = \lambda/a$ (c'est-à-dire dont l'image géométrique serait plus large qu'une frange de diffraction normale). Mais les répartitions d'éclairement ainsi obtenues dans le plan d'observation ne sont plus assimilables à de simples figures de diffraction. Nous leur réserverons le nom d' « images de diffraction » ou simplement d'images.

L'éclairement, en chaque point d'une image, correspond à l'intégration des *intensités* qu'y crée, par diffraction, chacun des points, incohérents entre eux, de la source. Celle-ci peut d'ailleurs être distincte de l'objet ; il s'agit généralement alors de l'image d'un objet « partiellement cohérent ».

(?) Nous ne demanderons, au surplus, à cette définition générale de la limite de résolution que de nous fournir un *classement* des différentes pupilles, semblable, dans l'ensemble, à celui que procurerait le calcul des limites de résolution exactes.

(8) ou « géométrique ».

Nous chercherons des solutions à l'apodisation des images de fentes larges (fentes de spectroscopes) pour différents dispositifs d'éclairage, soit incohérent, soit partiellement cohérent, de ces fentes.

Qualités caractéristiques des images

Nous caractériserons les images par les qualités suivantes : *éclairage au centre* $\xi(0)$, *largeur* et *taux d'apodisation*. A l'éclairage central $\xi(0)$ et à la largeur d'image, nous ferons correspondre deux qualités liées à la géométrie du système optique (source incluse) : la *luminosité* et le *pouvoir séparateur*.

1. **Eclairage central $\xi(0)$. Luminosité du système optique.** — L'éclairage absolu $\xi(\xi)$ d'une image ne peut pas être fourni par les calculs dont nous venons de rappeler le principe, puisqu'ils portent, non sur les valeurs *absolues* des amplitudes pupillaires (qui ne constituent d'ailleurs pas des données expérimentales immédiates) mais sur les fonctions de *transmission* $A(x)$ ou $A(r)$ qui leur sont seulement *proportionnelles*.

Les données qu'on utilise en réalité pour le calcul des éclairagements absolus concernent la luminance B de la source, les caractéristiques géométriques du dispositif de projection et la transparence pupillaire totale

$$\tau = \frac{\int_{-1}^{+1} A^2(x) dx}{\int_{-1}^{+1} dx} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A^2(x) dx,$$

tous facteurs se rattachant à l'éclairage de l'image géométrique $E_G = B \Omega \tau$, où Ω est l'angle solide sous lequel la pupille est vue du centre de l'image.

A $\tau = 1$ correspond l'éclairage *maximum* $E_0 = B \Omega$ qu'on puisse obtenir avec le système utilisé.

Cet éclairage E_G , ou flux Φ par unité de la surface éclairée S , est obtenu chaque fois que l'énergie répartie se concentre dans le domaine de l'image géométrique. C'est donc en faisant correspondre, dans ce cas *limite*, l'éclairage calculé à E_G que l'on obtient, pour tous les cas, des valeurs absolues et que l'on se rattache aux données photométriques. Nous éviterons toutefois la mention explicite de ces dernières, en calculant toujours des rapports d'éclairage $\xi(\xi)/E_G$ ou $\xi(\xi)/E_0$.

Nous définirons la *luminosité* du système comme proportionnelle à l'éclairage absolu $\xi(0)$ obtenu au centre $\xi = 0$ de l'image. Rappelons que tant que cet éclairage n'atteint pas l'éclairage géométrique, il dépend des *dimensions* de la source utilisée. C'est pourquoi nous considérerons ces dimensions comme des caractéristiques géométriques fondamentales du système.

Nous poserons :

$$(18) \quad \frac{L}{L_G} = \frac{\xi(0)}{E_G}, \quad \frac{L}{L_0} = \frac{\xi(0)}{E_{G \max}} = \frac{\xi(0)}{E_0}.$$

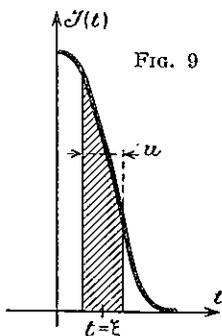


FIG. 9

L_0 correspond à la *luminosité intrinsèque* de la pupille. C'est la luminosité qu'elle possède quand sa transparence est uniforme et qu'elle est éclairée par une source incohérente de très grandes dimensions (en fait, une source dont les dimensions correspondent à deux unités optiques donne déjà à la pupille une luminosité très voisine de la luminosité intrinsèque).

L_G correspond à la *luminosité géométrique* qui diffère de L_0 si τ est inférieur à 1 ($L_G = \tau L_0$).

1) *Cas d'un objet parfaitement incohérent.* Nous allons rappeler rapidement comment on calcule ces luminosités, dans le cas le plus simple, celui d'un objet lumineux par lui-même, c'est-à-dire parfaitement incohérent.

On sait que, dans ce cas, les figures de diffraction correspondant aux différents points de la source se déduisent les unes des autres par simple *translation*; ξ_i désignant l'abscisse de l'image géométrique du point courant Q_i de la source et $\xi_2 - \xi_1 = u$ la largeur réduite de cette source, l'éclairement résultant dans le plan image est proportionnel à

$$(19) \quad \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathcal{J}(\xi - \xi_i) d\xi_i = \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} \mathcal{J}(t) dt,$$

où $\mathcal{J}(t)$ désigne la fonction d'intensité diffractée correspondant au point $Q_0(\xi_i = 0)$ sur l'axe optique.

L'éclairement est donc *proportionnel à l'aire d'une tranche de largeur u , centrée en ξ , du domaine délimité par $\mathcal{J}(t)$ et l'axe des t* (fig. 9). C'est ici l'application aux pupilles rectilinéaires et aux images de fentes du théorème bien connu du « solide de diffraction ».

On obtient E_G en faisant tendre u vers l'infini, d'où

$$\frac{E_G(\xi)}{E_G} = \frac{\int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} \mathcal{J}(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(t) dt}.$$

L'intégrale au dénominateur est égale, d'après le théorème de Plancherel, à $\int_{-1}^{+1} A^2(x) dx$, c'est-à-dire encore à 2τ , d'où

$$(20) \quad \frac{E_G(\xi)}{E_G} = \frac{1}{2\tau} \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} \mathcal{J}(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{E_G(\xi)}{E_0} = \frac{1}{2} \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} \mathcal{J}(t) dt.$$

On en tire ⁽⁹⁾

$$(21) \quad \frac{L}{L_c} = \frac{1}{2\tau} \int_{-u/2}^{u/2} \mathcal{J}(t) dt$$

$$\text{et} \quad \frac{L}{L_0} = \frac{1}{2} \int_{-u/2}^{u/2} \mathcal{J}(t) dt.$$

2) *Cas d'un objet partiellement cohérent.* Quand l'éclairage de l'objet n'est pas parfaitement incohérent, le calcul d'une fonction \mathcal{F} proportionnelle à l'éclairement de l'image est moins simple. Rappelons d'abord la méthode classique [12].

Soit Q_i le point « courant » de la source et q_i la variable définissant sa position.

La détermination d'un point particulier $[\xi_0, \mathcal{F}(\xi_0)]$ de la fonction $\mathcal{F} = k \mathcal{E}(\xi)$ suppose

a) le tracé, à un facteur près, de $\mathcal{J}_{\xi_0}(q_i)$ [fig. 10] représentant les contributions des Q_i à l'éclairement de ξ_0 et

b) le calcul de l'aire de cette courbe entre les limites Q_1 et Q_2 de la source.

En répétant ces opérations pour un nombre suffisant de points $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, on jalonne la courbe $k \mathcal{E}(\xi)$ qu'on peut ensuite tracer par interpolations. C'est ainsi que nous avons procédé dans différents cas d'éclairage partiellement cohérent. Nous les décrirons plus loin et préciserons sur chaque exemple comment on passe finalement de \mathcal{F} à l'éclairement absolu $\mathcal{E}(\xi)$ et à la luminosité L .

Signalons encore une méthode, due à Hopkins, et qui permettra sans doute des calculs moins laborieux. Hopkins [13] définit pour chacun des points de l'objet un facteur de cohérence complexe ⁽¹⁰⁾, fonction de la position de ce point et d'un paramètre lié à la grandeur et à la position de la source. Les intégrations sur la source incohérente se trouvent ainsi précéder les intégrations relatives à l'objet et à la pupille cohérents ou semi-cohérents. Hopkins se propose d'appliquer ce procédé à différents cas d'objets transparents semi-cohérents dont le plus simple serait évidemment celui de la fente d'un spectroscopie ⁽¹¹⁾.

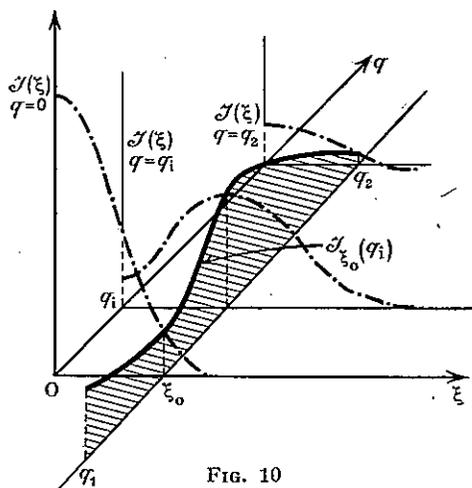


FIG. 10

⁽⁹⁾ P. M. Duffieux [4] a montré que l'éclairement dans l'image d'une source large incohérente pouvait aussi se calculer comme la transformée de Fourier d'une fonction $F(x, y)$ correspondant à une pupille énergétique fictive. Dans le cas d'une pupille apodisante rectilinéaire et d'une fente-source, il nous a paru aussi simple de procéder par la méthode d'intégration classique.

⁽¹⁰⁾ Zernike [14] avait déjà introduit un facteur réel de ce type.

⁽¹¹⁾ Note ajoutée à l'impression : L'article de Hopkins cité plus haut vient d'être complété par un nouvel article [15] où différents exemples d'application de sa méthode sont donnés.

2. **Largeur d'image. Pouvoir de résolution du système optique.** — Comme dans le cas des figures de diffraction, la *largeur d'image* (fig. 11) est donnée par la distance entre les deux points d'ordonnée réduite 0,405, et le *pouvoir de résolution* R par l'égalité $R/R_0 = 1/\Delta \xi_{0,405}$.

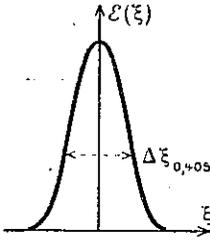


FIG. 11. — Image de diffraction.

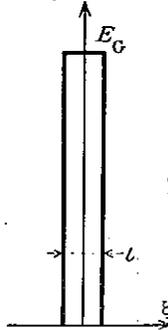


FIG. 12. — Image géométrique.

Nous considérerons parfois aussi un *pouvoir de résolution géométrique* R_G qui correspondra à l'image géométrique fictive de la fente-objet, de largeur l (fig. 12), soit $R_G/R_0 = 1/l$ et $R/R_G = l/\Delta \xi_{0,405}$.

3. **Taux d'apodisation.** — La fonction d'apodisation $K(\xi)$ se définit sur une image comme sur une figure de diffraction (cf. p. 21). Les coefficients moyens $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ sont généralement ici sans intérêt.

PREMIÈRE PARTIE

ETUDE DES DIFFÉRENTS PROCÉDÉS PERMETTANT DE MODIFIER L'AMPLITUDE COMPLEXE SUR LA PUPILLE EN VUE DE L'APODISATION

COMPARAISON DE CES PROCÉDÉS, AU REGARD DE L'EFFICACITÉ (POUVOIR APODISANT) ET DE L'ÉCONOMIE DE LA LUMIÈRE. ÉCRANS DE PHASE. DISPOSITIFS INTERFÉRENTIELS. ÉCRANS ABSORBANTS

I. Écrans de phase

Apodisation des figures de diffraction

L'étude des écrans de phase consiste à rechercher si une fonction pupillaire complexe, de module 1, $A(x) = \cos \varphi(x) + i \sin \varphi(x)$ ou $A(r) = \cos \varphi(r) + i \sin \varphi(r)$ peut posséder, relativement à la fonction uniforme $A_0(x) \equiv 1$ ou $A_0(r) \equiv 1$, un pouvoir apodisant.

Plus généralement, on peut chercher à comparer une fonction complexe quelconque

$$A(x) = a(x) e^{i\varphi(x)} \text{ ou } A(r) = a(r) e^{i\varphi(r)}$$

à la fonction réelle de même amplitude $A_0(x) = a(x)$ ou $A_0(r) = a(r)$.

L'efficacité, au regard de l'apodisation, d'un terme de phase, $e^{i\varphi(x)}$ ou $e^{i\varphi(r)}$, permettrait un cumul éventuel de propriétés apodisantes [celles de $a(x)$ ou $a(r)$, et celles de $\varphi(x)$ ou $\varphi(r)$] sans perte corrélative sur la transparence pupillaire. D'après ce que nous avons vu précédemment, ce problème se ramène à la comparaison des figures de diffraction focales

$$A_0(\xi) = \int_{-1}^{+1} a(x) e^{-i\pi x \xi} dx \quad \text{ou} \quad A_0(\rho) = \int_0^1 a(r) J_0(\pi r \rho) r dr$$

d'un objectif parfait, de transmission d'amplitudes $a(x)$ ou $a(r)$, à ses figures de défocalisation et d'aberrations

$$A(\xi) = \int_{-1}^{+1} a(x) e^{i\varphi(x)} e^{-i\pi x \xi} dx \quad \text{ou} \quad A(\rho) = \int_0^1 a(r) e^{i\varphi(r)} J_0(\pi r \rho) r dr.$$

Des considérations sur la répartition de l'énergie dans différentes régions de la figure de diffraction vont nous montrer la supériorité à peu près générale des figures focales et l'effet désapodisant de la défocalisation ou des aberrations, quelles qu'elles soient, donc l'impossibilité d'employer, en apodisation, les écrans de phase.

1. La répartition de l'énergie dans la figure de diffraction, critère d'apodisation.

— Soit $J_0(\xi)$ la figure de référence, correspondant à la pupille réelle $a(x)$ et $J(\xi)$ la figure de diffraction de la pupille complexe $a(x) e^{i\varphi(x)}$ que nous désirons apodiser.

Nous considérerons, dans la figure de diffraction $J(\xi)$, trois régions :

a) La région centrale sera la région dans laquelle $J(\xi)$ reste inférieur à $J_0(\xi)$ (fig. 13).

Nous savons (p. 70) qu'au centre de la figure, on a $J(0) < J_0(0)$. Cette inégalité est donc aussi vérifiée dans toute une région voisine du centre, région limitée par les points d'intersection, d'abscisses $\pm \xi_c$, des courbes $J(\xi)$ et $J_0(\xi)$.

b) La région lointaine. Nous la définirons comme une région dans laquelle les maxima secondaires peuvent être évalués à l'aide d'une formule d'approximation que nous établirons. La plus petite abscisse ξ_L à partir de laquelle cette formule est applicable dépend de l'erreur relative qu'on tolère, et évidemment aussi des fonctions $J(\xi)$ qu'on considère. La région lointaine sera, par définition, la région des $\xi > \xi_L$.

c) La région intermédiaire s'étend entre ces deux régions extrêmes. Elle constitue, dans sa totalité ou dans sa plus grande partie, la région où l'apodisation est utile.

L'énergie diffractée sur l'ensemble de ces trois régions est, pour les deux pupilles, identique, puisqu'elle est égale à l'énergie transmise par ces pupilles, laquelle ne dépend que de l'amplitude réelle $a(x)$.

Soient $E_{oc}, E_c; E_{oi}, E_i; E_{ol}, E_L$ les énergies réparties dans chacune de ces trois régions, pour les figures $J_0(\xi)$ et $J(\xi)$ respectivement.

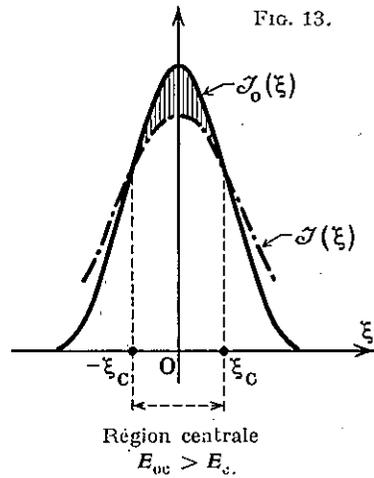


FIG. 13.

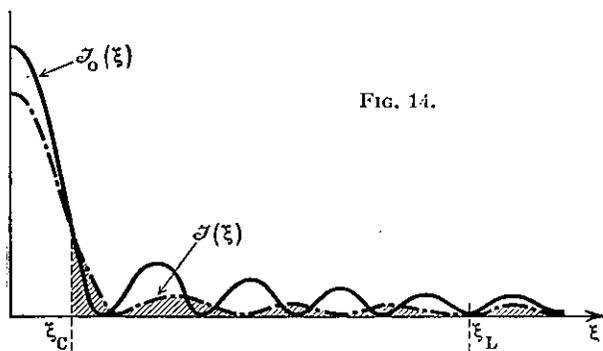


FIG. 14.

Région intermédiaire; $J(\xi)$ est apodisée

$$\text{si l'on a } \frac{E_{01} - E_1}{E_{01}} > \frac{J_0(0) - J(0)}{J_0(0)}$$

On a $E_{0c} > E_c$; un excédent d'énergie $E_{0c} - E_c$ se répartit donc dans la région intermédiaire et dans la région lointaine de $J(\xi)$. Or, pour que la région intermédiaire soit, en moyenne, apodisée, il faut que l'on ait (fig. 14) $E_{01} > E_1$ et même, plus précisément,

$$\frac{E_{01} - E_1}{E_{01}} > \frac{J_0(0) - J(0)}{J_0(0)},$$

inégalité qui exprime que le facteur d'étalement \mathcal{L}_1 de $J(\xi)$ est inférieur au facteur \mathcal{L}_0 de $J_0(\xi)$. Mais cette condition équivaut à

$$(22) \quad E_L - E_{0L} > E_{0c} - E_c + \frac{J_0(0) - J(0)}{J_0(0)} E_{01}.$$

L'apodisation dans la région intermédiaire supposerait donc une accumulation d'énergie dans la région lointaine. Celle-ci devrait en effet recevoir l'équivalent :

- 1°) d'une part, de l'écart inévitable entre les énergies centrales $E_{0c} - E_c$,
- 2°) d'autre part, d'une fraction de l'énergie intermédiaire E_{01} , fraction supérieure à la variation relative $\frac{J_0(0) - J(0)}{J_0(0)}$ de l'intensité centrale.

Nous allons étudier les régions lointaines et centrales des figures J et J_0 , afin d'obtenir, sur les variations d'énergie $\Delta E_L = E_L - E_{0L}$ et $\Delta E_c = E_{0c} - E_c$ que produit le terme de phase, quelques indications comparatives.

En ce qui concerne la région lointaine, on doit à P. M. Duffieux [4], et, plus récemment, à G. Lansraux [16] quelques théorèmes relatifs à la décroissance asymptotique de l'intensité diffractée (12) :

« Pour une pupille dont l'amplitude marginale est un infiniment petit d'ordre μ , l'intensité décroît comme $\mathcal{F}(\pi\xi)/(\pi\xi)^{2\mu+2}$, $\mathcal{F}(\pi\xi)$ étant une fonction dont on sait seulement qu'elle reste finie quand ξ tend vers l'infini. »

(12) Cf. aussi van Kampen [17].

Il est évidemment indispensable pour, sinon évaluer, du moins borner l'énergie correspondante, d'obtenir sur $\mathfrak{F}(\pi \xi)$, sur ses maxima en particulier, quelques renseignements. C'est ce que nous allons chercher par une autre méthode.

Elle nous fournira une relation asymptotique entre les fonctions d'amplitude pupillaire et diffractée. Nous examinerons séparément le cas des pupilles rectilinéaires (paires) et celui des pupilles circulaires, et nous entrerons dans quelques détails, l'étude de la région lointaine pouvant présenter un intérêt propre.

2. Expression asymptotique de l'intensité diffractée. — 1. Cas des pupilles à bords non noirs. — 1) Pupilles rectilinéaires. Relation asymptotique entre $A(x)$ et $\mathfrak{A}(\xi)$. — Nous supposons que les dérivées première $A'(x)$ et seconde $A''(x)$ de l'amplitude pupillaire complexe sont partout finies sur le domaine de la pupille. Il est alors possible d'intégrer par parties, deux fois consécutives, la fonction

qui, dans $\mathfrak{A}(\xi)$, figure sous le signe \int :

$$\mathfrak{A}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A(x) e^{-i\pi x \xi} dx.$$

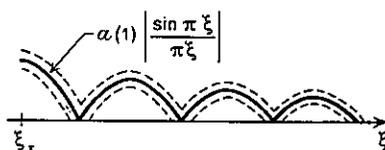


FIG. 15. — Région lointaine de la figure de diffraction.

Il vient d'abord

$$\mathfrak{A}(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{A(x) e^{-i\pi x \xi}}{-i\pi \xi} \right]_{x=-1}^{x=+1} + \frac{1}{2 i \pi \xi} \int_{-1}^{+1} A'(x) e^{-i\pi x \xi} dx$$

puis

$$\mathfrak{A}(\xi) = A(1) \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} + \frac{1}{2 i \pi \xi} \left\{ \left[\frac{A'(x) e^{-i\pi x \xi}}{-i\pi \xi} \right]_{-1}^{+1} + \frac{1}{i \pi \xi} \int_{-1}^{+1} A''(x) e^{-i\pi x \xi} dx \right\}.$$

Les deux composantes de $A(x) = a(x) \cos \varphi(x) + i a(x) \sin \varphi(x)$ étant, dans le cas d'un écran apodisant, des *fonctions paires*, les composantes de $A'(x)$ sont impaires, et

$$(23) \quad \mathfrak{A}(\xi) = A(1) \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} + \frac{1}{\pi^2 \xi^2} \left\{ A'(1) \cos \pi \xi - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A''(x) e^{-i\pi x \xi} dx \right\}.$$

fonction complexe $F(\xi)$

Limites supérieures et inférieures du module de $\mathfrak{A}(\xi)$. On a donc

$$24) \quad \left| |A(1)| \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right| - \frac{|F(\xi)|}{\pi^2 \xi^2} \right| \ll |\mathfrak{A}(\xi)| \ll |A(1)| \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right| + \frac{|F(\xi)|}{\pi^2 \xi^2}.$$

Mais la fonction $F(\xi)$ reste finie quand ξ tend vers l'infini. En la remplaçant par une borne supérieure b (par exemple, par $b = |A'(1)| + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |A''(x)| dx$), on obtient :

$$\left| |A(1)| \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right| - \frac{b}{\pi^2 \xi^2} \right| \ll |\mathfrak{A}(\xi)| \ll |A(1)| \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right| + \frac{b}{\pi^2 \xi^2}.$$

On a d'autre part $|A(1)| = a(1)$, amplitude réelle, positive ⁽¹³⁾ de l'écran, sur ses bords $x = \pm 1$.

Définition de la « région lointaine ». Lorsque ξ tend vers l'infini, $b/\pi^2\xi^2$ devient négligeable devant les maxima $a(1)/\pi\xi$ de la fonction $a(1)\sin\pi\xi/\pi\xi$.

Soit ξ_L l'abscisse à partir de laquelle on a

$$\frac{b}{\pi^2\xi_L^2} < \frac{1}{10} \frac{a(1)}{\pi\xi_L}, \quad \xi_L = \frac{10b}{\pi a(1)}.$$

Nous conviendrons que ξ_L marque le début de la région « lointaine ». Traçons dans cette région (fig. 15) la courbe $a(1) \left| \frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi} \right|$ et marquons, de part et d'autre, les limites $\left| a(1) \left| \frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi} \right| \pm \frac{b}{\pi^2\xi^2} \right|$ entre lesquelles l'extrémité de $|A(\xi)|$ s'insère.

Dans cette région lointaine :

1°) Les maxima de $|A(\xi)|$ sont donnés, à moins de 0,1 près en valeur relative, par $|A_M(\xi)| = a(1)/\pi\xi$. L'erreur relative diminue d'ailleurs, quand on s'éloigne

du centre, proportionnellement à $1/\pi\xi$, car on a $\frac{\Delta A_M}{A_M} < \frac{b}{a(1)} \frac{1}{\pi\xi}$.

Ainsi donc les maxima de $|A(\xi)|$ dépendent quasi uniquement de l'amplitude réelle sur les bords de la pupille ; la répartition pupillaire des phases ne leur apporte qu'un terme correctif négligeable.

2°) Dans la région des minima, par contre, le terme $b/\pi^2\xi^2$ devient terme principal. De ce fait, la région des minima subit l'influence des termes de phase, comme aussi de la répartition réelle $a(x)$ dans son ensemble. Cette influence peut se traduire par le déplacement des zéros ou par leur disparition. Nous aurons en effet l'occasion d'expliquer dans la suite que les valeurs de $A(k)$, entier) correspondent aux termes du spectre de Fourier de la fonction d'amplitude pupillaire $A(x)$, analysée dans le domaine fini $-1 \leq x \leq 1$: tout terme non nul du spectre s'insère donc à la place d'un zéro normal. Plus précisément

a) si $A(x)$ est réelle, les zéros se trouvent simplement déplacés. Nous supposons en effet toujours que $A(x)$ est paire, sa transformée $A(\xi)$ est alors aussi réelle. Nous venons de voir que ses maxima et minima sont ceux de la fonction $a(1)\sin\pi\xi/\pi\xi$, qui est alternativement positive et négative. $A(\xi)$ s'annule donc, sinon aux points $\xi = k$, du moins en leur voisinage ; il y a simplement déplacement des zéros, déplacement qui, d'ailleurs, est d'autant plus faible qu'on s'éloigne davantage sur l'axe des ξ . Finalement, la courbe $A(\xi)$ dans son ensemble diffère assez peu, pour $\xi > \xi_L$, de la sinusoïde amortie $\sin\pi\xi/\pi\xi$.

b) Si $A(x)$ est complexe, les zéros disparaissent généralement. Si, au contraire, $A(x)$ est une fonction complexe, $A(\xi)$ est complexe elle aussi, c'est-à-dire que le

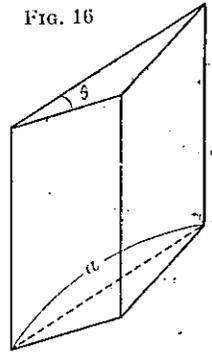
⁽¹³⁾ Nous excluons le cas où $a(1)$ serait négatif car $a(x)$ devrait alors s'annuler en un point ; or un écran continu dont la transmission d'amplitudes s'annulerait en un point serait irréalisable par dépôt de couches absorbantes.

vecteur $\mathcal{A}(\xi)$ passe du vecteur $\mathcal{A}\left(k + \frac{1}{2}\right) = A(1) \frac{\sin \pi \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)}$ au vecteur opposé $\mathcal{A}\left(k + \frac{3}{2}\right) = A(1) \frac{\sin \pi \left(k + \frac{3}{2}\right)}{\pi \left(k + \frac{3}{2}\right)}$ par une rotation continue autour de

l'axe des ξ qui ne l'astreint point à s'annuler. En fait, les courbes d'intensité diffractée relatives à des écrans pupillaires de phase ne présentent généralement pas la série des zéros que donnent les écrans réels : elles affectent, dans la région lointaine, la forme de fonctions $a^2(1) \sin^2 \pi \xi / \pi^2 \xi^2$ dont les creux se trouveraient comblés, mais s'évideraient de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne du centre. Cet aspect se rencontre, par exemple, dans les figures de défocalisation, soit de la pupille uniforme ordinaire, soit de toute autre pupille réelle.

L'EXEMPLE DU BIPRISME PUPILLAIRE. Pour fixer des ordres de grandeur, nous allons donner un exemple simple de répartition pupillaire complexe $A(x)$, celle qui correspond à un biprisme d'angle θ , d'arête parallèle à la fente-objet (fig. 16).

FIG. 16



On a
$$A(x) = \begin{cases} e^{+i\pi\gamma x} & \text{pour } -1 \leq x \leq 0 \\ e^{-i\pi\gamma x} & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

la constante γ étant proportionnelle à l'angle θ du biprisme.

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= (n-1) \theta \frac{a}{\lambda} & , & \text{ } a \text{ est la largeur de la pupille,} \\ & & & n \text{ est l'indice de réfraction,} \\ \gamma &= (n-1) \frac{\theta}{\varepsilon_0} & , & \text{ } \varepsilon_0 = \lambda/a \text{ est l'unité angulaire optique.} \end{aligned} \right.$$

Déterminons γ pour que l'abaissement de l'intensité centrale $\mathcal{J}(0)$, relativement à l'intensité $\mathcal{J}_0(0) = 1$ que donnerait la pupille uniforme, ne dépasse pas, par exemple, 0,2.

L'amplitude diffractée est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{i\pi\gamma x} e^{-i\pi x \xi} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i\pi\gamma x} e^{-i\pi x \xi} dx, \end{aligned}$$

d'où
$$\mathcal{A}(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{i\pi\gamma x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i\pi\gamma x} dx.$$

On obtient, pour $\mathcal{J}(0)$, tous calculs faits :

$$\mathcal{J}(0) = \frac{\sin^2 \frac{\pi \gamma}{2}}{\frac{\pi^2 \gamma^2}{4}} \quad (\text{fig. 17}).$$

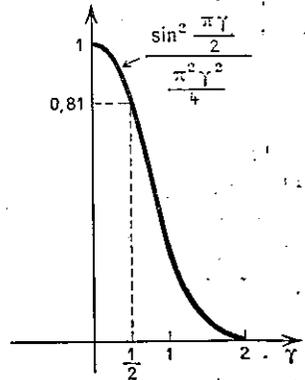


FIG. 17

1. On vérifie bien, tout d'abord, que l'intensité au centre de la figure de diffraction d'un biprisme est, quel que soit l'angle du biprisme, inférieure à l'intensité $\mathfrak{J}_0(0) = 1$ de la pupille réelle de même transparence. Elle varie comme la fonction de diffraction $\sin^2 u/u^2$, c'est-à-dire qu'elle décroît très rapidement à partir de $\gamma = 1/2$, valeur pour laquelle on a $\mathfrak{J}(0) = \frac{\sin^2(\pi/4)}{\pi^2/16} = 0,81$.

2. Nous prendrons donc $\gamma = 1/2$ et nous chercherons, sur cet exemple, l'abscisse ξ_L qui définit la région lointaine.

L'intensité diffractée est

$$\mathfrak{J}(\xi) = \mathfrak{A}_b(\xi) \mathfrak{A}_s^*(\xi) = \frac{\xi^2 \sin^2 \pi \xi - \xi \sin \pi \xi + 0,25 \cos^2 \pi \xi + 0,25}{\pi^2 (\xi^2 - 0,25)^2}$$

d'où, pour $\sin \pi \xi = 1$, c'est-à-dire pour $\xi = k + \frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{J}\left(k + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{\pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right\}.$$

$\xi_L = k_L + \frac{1}{2}$ est tel qu'on puisse confondre $\mathfrak{J}\left(k + \frac{1}{2}\right)$ avec $1/\pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$ sans que l'erreur relative dépasse 0,2 (puisque, par définition de ξ_L , l'erreur correspondante sur \mathfrak{A} ne doit pas dépasser 0,1).

On trouve $k_L = 5$, $\xi_L = 5,5$, ce qui montre que la région « lointaine » commence, en réalité, à faible distance du centre de la figure (14).

3. *Etudions maintenant les points* $\sin \pi \xi = 0$, c'est-à-dire $\xi = k$.

On trouve que

$$a) \quad \mathfrak{J}(k) = \frac{1}{2\pi^2 k^4} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)^{-2} \simeq \frac{1}{2\pi^2 k^4} \left(1 + \frac{1}{2k^2}\right).$$

On vérifie que les valeurs de $\mathfrak{J}(k)$ sont les carrés des modules des termes du spectre de $A(x)$.

b) $\mathfrak{J}(\xi)$ ne possède point de zéros; il faudrait en effet pour cela que la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathfrak{A}_b(\xi)$ s'annulent simultanément; or

$$\mathfrak{A}_b(\xi) = \frac{-0,5 \cos \pi \xi - 1(0,5 - \xi \sin \pi \xi)}{\pi(\xi^2 - 0,25)}.$$

On voit bien que les zéros de $\cos \pi \xi$ n'annulent point la partie imaginaire $0,5 - \xi \sin \pi \xi$.

Les propositions générales que nous venons d'établir pour les pupilles rectilinéaires se vérifient donc bien dans le cas du biprisme. Nous allons passer maintenant à l'étude des pupilles circulaires.

(14) Si l'on avait calculé ξ_L à partir de la borne b utilisée dans le raisonnement général ($b = |A'(1)| + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |A''(x)| dx = \gamma\pi + \gamma^2\pi^2 = 4$) on aurait trouvé $\xi_L = 12,5$, évaluation par excès.

2) Pupilles circulaires $A(r)$. Relation asymptotique entre $A(r)$ et $\mathcal{A}(\rho)$. — Nous supposons encore que $A'(r)$ et que $A''(r)$ demeurent finies sur toute la pupille, et nous intégrerons par parties l'équation

$$\mathcal{A}(\rho) = 2 \int_0^1 A(r) J_0(\pi r \rho) r dr.$$

Il vient, en considérant $J_0(\pi r \rho) r dr$ comme la différentielle de $r J_1(\pi r \rho)/\pi \rho$,

$$\mathcal{A}(\rho) = 2 \left[A(r) r \frac{J_1(\pi r \rho)}{\pi \rho} \right]_0^1 - \frac{2}{\pi \rho} \int_0^1 A'(r) J_1(\pi r \rho) r dr$$

puis, $J_1(\pi r \rho) dr$ étant la différentielle de $-J_0(\pi r \rho)/\pi \rho$,

$$(25) \quad \mathcal{A}(\rho) = A(1) \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} + \frac{1}{\pi^2 \rho^2} \times 2 \underbrace{\left\{ A'(1) J_0(\pi \rho) - \int_0^1 \frac{d}{dr} [r A'(r)] J_0(\pi r \rho) dr \right\}}_{\text{Fonction complexe } F(\rho)}$$

Limites supérieure et inférieure du module de $\mathcal{A}(\rho)$. On voit que $F(\rho)$ demeure bornée quand ρ tend vers l'infini et l'on peut écrire, en posant

$$b = 2 |A'(1)| + 2 \int_0^1 \left| \frac{d}{dr} [r A'(r)] \right| dr, \quad |A(1)| = a(1),$$

$$(26) \quad \left| a(1) \left| \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \right| - \frac{b}{\pi^2 \rho^2} \right| \leq |\mathcal{A}(\rho)| \leq \left| a(1) \left| \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \right| + \frac{b}{\pi^2 \rho^2} \right|.$$

Région lointaine. Nous la définirons encore par la condition que $b/\pi^2 \rho^2$ soit négligeable devant les maxima de $a(1) \left| \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \right|$. Ces derniers correspondent sensiblement aux maxima de $J_1(\pi \rho)$, dès que $\pi \rho$ dépasse une quinzaine d'unités, c'est-à-dire dès la 5^e frange normale.

Ces maxima ne sont pas d'amplitude constante mais décroissent proportionnellement à $1/\sqrt{\pi \rho}$. On sait que l'on a

$$|J_{1\max}(\pi \rho)| > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi \rho}}$$

le signe $>$ se transformant en signe $=$ lorsque ρ tend vers l'infini.

Pour que $b/\pi^2 \rho^2$ soit inférieur à la dixième partie de $a(1) \left| \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \right|$ il suffit donc que l'on ait

$$\frac{b}{\pi^2 \rho^2} \leq \frac{1}{10\sqrt{\pi}} \frac{a(1)}{\pi \rho} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \rho}}$$

c'est-à-dire que l'on prenne

$$\rho > \rho_L = \frac{12,5 b^2}{a^2(1)}.$$

Dans la région lointaine ainsi délimitée, on retrouve les propriétés indiquées à propos des pupilles rectilinéaires :

1°) Les maxima de $\mathcal{A}(\rho)$ sont déterminés, à un terme correctif négligeable près, par l'amplitude réelle sur les bords de la pupille.

2°) Dans la région des minima, le profil de la fonction $\mathcal{A}(\rho)$ est au contraire sous l'influence des termes de phase et de la répartition réelle $a(r)$ dans son ensemble. Les zéros sont généralement déplacés si $A(r)$ est réelle, ils sont supprimés (minima non noirs) si $A(r)$ est complexe.

2. **Cas des pupilles à bords noirs.** — Nous avons supposé jusqu'ici que l'amplitude réelle $a(1)$ sur les bords de la pupille n'était pas nulle. C'est le seul cas important dans la pratique, car la densité optique d'une couche absorbante ne saurait sans discontinuité atteindre une valeur infinie. Il est vrai qu'on peut réaliser des minima nuls d'amplitude pupillaire à l'aide de dispositifs interférentiels. Mais nous verrons que ces derniers n'apodisent que des faisceaux d'étendue très faible, ce qui restreint beaucoup leurs applications. Nous passerons donc rapidement sur le cas des pupilles à bords noirs, que nous considérerons comme un cas limite, dont l'étude est un peu formelle.

Le développement (23) de $\mathcal{A}(\xi)$ se réduit, lorsque son premier terme est nul, à

$$\mathcal{A}(\xi) = A'(1) \frac{\cos \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} - \frac{1}{2 \pi^2 \xi^2} \int_{-1}^{+1} A''(x) e^{-i \pi x \xi} dx.$$

Nous supposons que $A'(1)$ n'est pas nul et que $A'''(x)$ est partout bornée sur le domaine de la pupille. On peut alors effectuer une nouvelle intégration par parties qui donne

$$\mathcal{A}(\xi) = A'(1) \frac{\cos \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} - \frac{1}{2 \pi^2 \xi^2} \left\{ \left(\frac{A''(x) e^{-i \pi x \xi}}{-i \pi \xi} \right)_{-1}^{+1} + \frac{1}{i \pi \xi} \int_{-1}^{+1} A'''(x) e^{-i \pi x \xi} dx \right\}.$$

Comme $A''(1) = A''(-1)$, il vient :

$$\mathcal{A}(\xi) = A'(1) \frac{\cos \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} - \frac{1}{\pi^3 \xi^3} \left\{ A''(1) \sin \pi \xi - \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} A'''(x) e^{-i \pi x \xi} dx \right\}.$$

fonction $F(\xi)$ bornée

On montrerait, comme ci-dessus, que l'on a

$$\left| \sqrt{A'(1) A'^*(1)} \frac{|\cos \pi \xi|}{\pi^2 \xi^2} - \left| \frac{b}{\pi^3 \xi^3} \right| \right| \leq |\mathcal{A}(\xi)| \leq \sqrt{A'(1) A'^*(1)} \frac{|\cos \pi \xi|}{\pi^2 \xi^2} + \left| \frac{b}{\pi^3 \xi^3} \right|,$$

b désignant une borne supérieure de $\sqrt{F(\xi) F^*(\xi)}$; on peut prendre, par exemple,

$$b = |A''(1)| + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |A'''(x)| dx.$$

Quant à $\sqrt{A'(1) A'^*(1)}$, c'est simplement la valeur au point $x = 1$ de la dérivée de l'amplitude réelle $a(x)$. On a en effet

$$A'(x) = e^{i\varphi(x)} [a'(x) + i \varphi'(x) a(x)],$$

d'où

$$A'(1) A'^*(1) = a'^2(1) + \varphi'^2(1) a^2(1);$$

mais, puisque $a(1) = 0$, $A'(1) A'^*(1)$ se réduit à $a'^2(1)$.

Conclusion. L'intensité des maxima lointains ne dépend que de la dérivée de l'amplitude réelle, sur les bords de la pupille ; elle est indépendante, soit de la fonction d'amplitude $a(x)$ dans son ensemble, soit de la répartition $\varphi(x)$ des phases.

D'autre part, les maxima sont déplacés, ils ont lieu pour $\xi = k$ au lieu de $\xi = k + 1/2$ et leur loi de décroissance est ξ^2 fois plus rapide que pour les pupilles à bords non noirs.

Les courbes des figures 18 et 19 relatives à des pupilles $A(x) = \cos \pi x/2$ ou $A(x) = \sin \pi x/\pi x$ (répartitions interférentielles) mettent bien en évidence le déplacement des maxima, qui est sensible même à faible distance du centre.

On montrerait encore que si la fonction $A(x)$ est réelle, la courbe $\mathcal{J}(\xi)$ diffère peu de la sinusoïde amortie $a'^2(1) \cos^2 \pi \xi / \pi^4 \xi^4$, tandis que si $A(x)$ est complexe, $\mathcal{J}(\xi)$ s'écarte de cette sinusoïde dans la région des minima, lesquels ne sont généralement pas noirs.

D'une façon générale, on pourrait établir, de proche en proche, la relation

$$(27) \quad \mathcal{J}(\xi) = A(1) \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} + A'(1) \frac{\cos \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} - A''(1) \frac{\sin \pi \xi}{\pi^3 \xi^3} - A'''(1) \frac{\cos \pi \xi}{\pi^4 \xi^4} + \dots$$

$$+ (-1)^k A^{(2k)}(1) \frac{\sin \pi \xi}{\pi^{2k+1} \xi^{2k+1}} + (-1)^k A^{(2k+1)}(1) \frac{\cos \pi \xi}{\pi^{2k+2} \xi^{2k+2}} + \dots$$

qui, pour chaque valeur de $\sin \pi \xi$, fournit une série asymptotique susceptible de représenter \mathcal{J} (arc sin $\pi \xi$). On en conclurait, en particulier, que si $A^{(n)}$ représente la première dérivée de $A(x)$ qui ne soit pas nulle sur les bords, il existe une région lointaine dans laquelle $\mathcal{J}(\xi)$ est représentable, au voisinage de ses maxima, par

$$[a^{(n)}(1)]^2 \frac{\cos^2 \pi \xi}{\sin^2 \pi \xi} \frac{1}{\pi^{2(n+1)} \xi^{2(n+1)}}$$

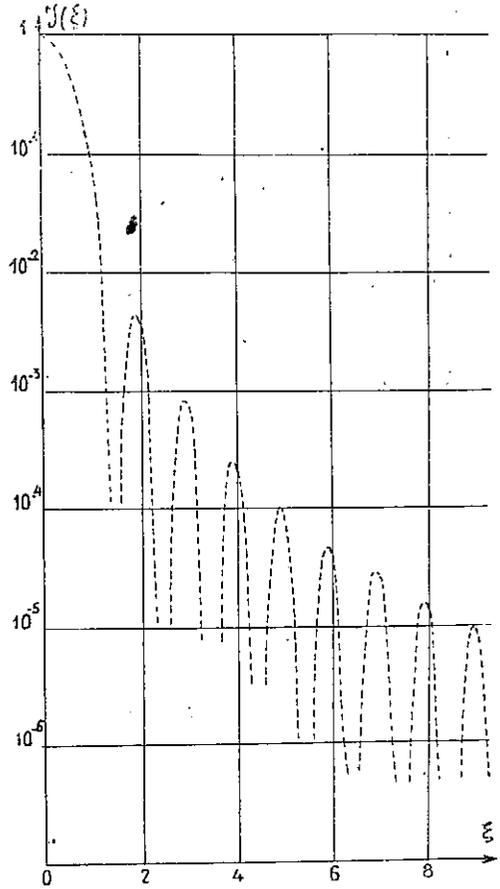


FIG. 18.— Figure de diffraction de $A(x) = \cos(\pi x/2)$; $A(1) = 0$, $A'(1) \neq 0$. Les maxima ont lieu pour $\xi_m \approx k$.

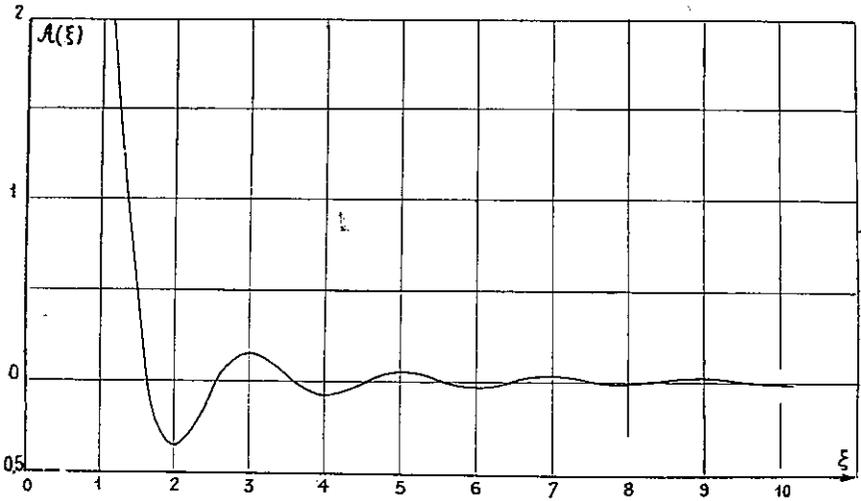


FIG. 19. — Figure de diffraction de $A(x) = \sin \pi x / \pi x$;
 $A(1) = 0$, $A'(1) \neq 0$; $\xi_M \sim k$.

Connaissant le comportement des fonctions $J(\xi)$ dans la région lointaine, nous pouvons maintenant évaluer, au moins approximativement, l'énergie E_L et sa variation ΔE_L en présence d'un terme pupillaire de phase.

3. Evaluation de l'énergie répartie dans la région lointaine. — 1. Pupilles rectilinéaires. — 1) Pupilles réelle $A_0(x) \equiv 1$ et complexes $A(x) = e^{i\varphi(x)}$ de transparence uniforme.

Pour la pupille réelle $A_0(x)$, on a

$$\frac{E_{0L}}{E_{tot}} = 2 \int_{\xi_L}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} d\xi = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\text{Si } 2\pi\xi_L - \frac{\sin^2 \pi \xi_L}{\pi \xi_L} \right].$$

Pour	$\xi_L = 5,$	on a	$\frac{E_{0L}}{E_{tot}} = 0,02$
	$\xi_L = 10,$		$\frac{E_{0L}}{E_{tot}} = 0,01$
	$\xi_L = 20,$		$\frac{E_{0L}}{E_{tot}} = 0,005$

Pour les pupilles complexes correspondantes $A(x) = e^{i\varphi(x)}$, l'énergie lointaine peut se trouver augmentée. Mais on évalue facilement une limite supérieure de cet accroissement ΔE_L .

La région lointaine est en effet ainsi définie (fig. 20) que $J(\xi)$ s'y trouve toute entière au-dessous de la courbe $1,2/\pi^2 \xi^2$ (15). Mais l'aire limitée par cette courbe et

l'axe des ξ se rattache facilement à E_{OL} : elle est sensiblement double de l'aire de la sinusoïde amortie $1,2 \sin^2 \pi \xi / \pi^2 \xi^2$, c'est-à-dire qu'elle diffère peu de $2,4 E_{OL}$. On a donc $E_L < 2,4 E_{OL}$ et $\Delta E_L \ll 1,4 E_{OL}$.

Il s'agit là d'une estimation très grossière. Il est en réalité fort probable que l'énergie répartie dans la région lointaine de $J(\xi)$ se mesure plutôt par un nombre inférieur à l'aire de la sinusoïde amortie $1,2 \sin^2 \pi \xi / \pi^2 \xi^2$, ce qui ferait tomber $\Delta E_L / E_{OL}$ à moins de 0,2.

D'après les ordres de grandeur de $E_{OL} / E_{tot.}$ fournis ci-dessus, on conclut que l'accroissement éventuel de l'énergie lointaine, dû à la présence du terme pupillaire de phase $\varphi(x)$ est, à partir de $\xi_L = 5$, de l'ordre de 1/1 000 ou, au plus, de 1/100 de l'énergie totale.

2) Pupilles réelle $A_0(x) = a(x)$ et complexes $A(x) = a(x)e^{i\varphi(x)}$ de transparence non uniforme.

Les conclusions précédentes s'étendent au cas des pupilles de transparence non uniforme. On verrait facilement

1°) que, pour la pupille réelle $A_0(x) = a(x)$, le rapport $E_{OL} / E_{tot.}$ est plus faible encore que pour la pupille uniforme, car ⁽¹⁵⁾

$$\frac{E_{OL}}{E_{tot.}} \simeq \frac{E_{OL \text{ unif.}} \times a^2(1)}{E_{tot. \text{ unif.}} \times \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a^2(x) dx}$$

Or $\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} a^2(x) dx$, valeur moyenne du carré de l'amplitude pupillaire, est supérieure à $a^2(1)$, du moins dans le cas des pupilles apodisantes ;

2°) que le rapport $\Delta E_L / E_{tot.}$, représentant la variation relative de l'énergie lointaine quand on passe d'une pupille réelle à une pupille complexe de même transparence est inférieur à $E_{OL} / E_{tot.}$. L'ordre de grandeur de $\Delta E_L / E_{tot.}$ ne dépasse donc généralement pas 0,001.

2. Pupilles circulaires. — L'énergie lointaine est proportionnelle à l'intégrale

$$\int_{\rho_L}^{\infty} J(\rho) \rho \, d\rho. \text{ Les conclusions sont semblables.}$$

⁽¹⁵⁾ Les maxima de $J(\xi)$ diffèrent en effet, dans cette région, des maxima $1/\pi\xi$ de $J_0(\xi) = \sin \pi \xi / \pi \xi$ de moins de 0,1 en valeur relative.

⁽¹⁶⁾ La figure $J_0(\xi)$ ne s'écarte en effet que peu, dans la région lointaine, de la sinusoïde amortie $a^2(1) \sin^2 \pi \xi / \pi^2 \xi^2$. L'énergie E_{OL} correspond donc au produit par $a^2(1)$ de l'aire de la courbe $\sin^2 \pi \xi / \pi^2 \xi^2$, c'est-à-dire à $a^2(1) E_{OL \text{ unif.}}$. Quant au rapport des énergies $E_{tot.} / E_{tot. \text{ unif.}}$, il est égal au rapport des transparences totales des deux pupilles, c'est-à-dire à $0,5 \int_{-1}^{+1} a^2(x) dx$.

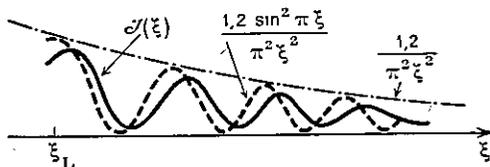


FIG. 20. — Région lointaine de la figure de diffraction.

4. **Conclusions relatives à l'apodisation dans la région intermédiaire.** — A la différence de la région lointaine, la région centrale est très sensible aux termes de phase. La concentration de lumière qui la caractérise est due, lorsque la pupille est réelle, à l'accord de phase des vibrations qui s'y composent. Un faible terme de phase peut donc provoquer, en même temps qu'un abaissement, de l'ordre de 10 à 20 % par exemple, de l'intensité maximum, une variation de l'énergie accumulée dans la région centrale, de l'ordre de 1 ou plusieurs dixièmes de l'énergie totale.

Nous venons de voir que, dans les mêmes conditions, l'énergie lointaine s'accroissait mais de quantités généralement inférieures au centième ou même au millième de l'énergie totale ⁽¹⁷⁾.

Il y a donc accumulation d'énergie dans la région intermédiaire, alors que l'apodisation dans cette région exigerait une diminution d'énergie, supérieure en valeur relative à la diminution de l'intensité centrale $J(0)$.

Cette désapodisation *moyenne* pourrait toutefois ne pas exclure une certaine apodisation locale, dans le cas surtout où la région intermédiaire serait très étendue. Nous avons vu, dans l'exemple particulier du biprisme, que, pour un terme de phase produisant un abaissement de 20 % de $J(0)$, la région intermédiaire prenait fin aux environs de $\xi = 5$; elle est donc étroite et l'apodisation est inexistante. La région intermédiaire s'élargit généralement quand l'intensité centrale s'abaisse; il y a là, au point de vue de l'apodisation, deux effets *contradictaires* qui ne laissent habituellement aucune possibilité d'apodisation.

Ces considérations générales montrent, en tous cas, la difficulté du problème de l'apodisation par les écrans de phase.

Elles éclairent aussi le mécanisme de l'apodisation par les écrans *réels* et relie leur pouvoir apodisant au fait même de l'absorption. Comme les écrans de phase, les écrans réels produisent en effet, par rapport à la figure de diffraction de l'écran uniforme, une *diminution de l'énergie centrale*. Mais cette diminution n'est pas nécessairement compensée par un accroissement équivalent de l'énergie intermédiaire, car l'énergie *totale* n'est plus constante.

Nous admettrons donc dans la suite que les écrans de phase sont peu propres à l'apodisation et n'étudierons plus que des fonctions pupillaires *réelles* $a(x)$.

II. Répartitions pupillaires interférentielles

1. Apodisation des figures de diffraction

Nous venons de voir qu'étant donnée la fonction pupillaire réduite $A_0(x) \equiv 1$, il était plus avantageux, pour l'apodiser, d'affaiblir localement son module, que de lui adjoindre un terme de phase. C'est ce que nous avons traduit en disant

⁽¹⁷⁾ On ne peut naturellement donner, sur le rapport des variations de l'énergie centrale et de l'énergie lointaine, que des indications très vagues et un peu arbitraires, tant qu'on ne précise pas la fonction de phase $\varphi(x)$ qui en est responsable. Les nombres ci-dessus ne sont donc destinés qu'à un grossier classement des phénomènes.

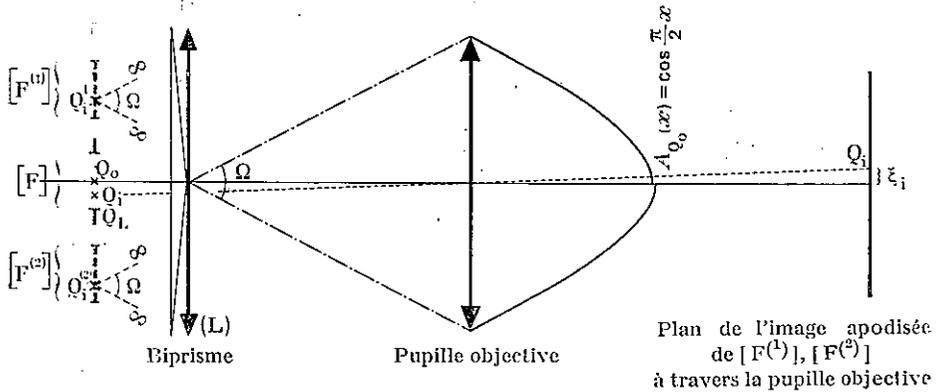


FIG. 21. — *Biprisme*. Le biprisme donne, de la fente-source [F] (largeur réduite u) deux images virtuelles $[F^{(1)}]$ et $[F^{(2)}]$. C'est l'ensemble de ces deux images qui constitue l'objet ; l'objet est donc formé par la juxtaposition de couples de points cohérents $Q_i^{(1)}$ $Q_i^{(2)}$ images d'un même point Q_o de [F]. Les figures d'amplitudes, créées par les interférences à l'infini de chacun de ces couples, sont ramenées sur la pupille par la lentille (L). Certaines conditions géométriques doivent être remplies pour que la pupille appartienne au champ d'interférences de tous les couples-objets. Ces conditions ont été indiquées dans l'article déjà cité [10], où sont également développés les calculs de la fonction d'images.

que l'absorption favorisait l'apodisation. Mais les variations du module de l'amplitude réduite $A(x)$ peuvent s'obtenir parfois sans aucune absorption. C'est le cas lorsqu'on crée sur la pupille des répartitions *interférentielles* d'amplitudes. Les possibilités d'apodisation se trouvent alors assez limitées, car les répartitions pupillaires interférentielles qu'on peut commodément créer sont de types peu nombreux ; ce sont des sinusôides $A(x) = \cos(kx + \alpha)$ ou encore des fonctions de diffraction $A(x) = \sin(kx + \alpha)/(kx + \alpha)$ limitées au domaine $-1 \leq x \leq 1$ de la pupille ⁽¹⁸⁾.

Nous avons examiné, dans un article détaillé [10], deux dispositifs correspondant à ces types de répartition et utilisables dans les spectroscopes : le biprisme de fente et le système d'éclairage, dit — improprement — cohérent, de la fente-objet. L'objet est constitué, dans le premier cas, par la double image d'une fente incohérente à travers le biprisme ; dans le second cas, l'objet est une fente éclairée par une source à l'infini. Dans les deux cas, on peut considérer que la répartition d'amplitudes sur l'objet résulte de la superposition de systèmes d'interférences : l'éclairage de l'objet n'est donc pas parfaitement incohérent (fig. 21 et 22). Le facteur k est déterminé par l'angle du biprisme ou par la largeur l de la fente « cohérente », le facteur α par la position du point-source. On montre que les répartitions pupillaires apodisantes sont $\cos(\pi x/2)$ dans le premier cas, et $\sin \pi x/\pi x$

⁽¹⁸⁾ On pourrait éventuellement aussi réaliser des répartitions *circulaires* interférentielles. Mais les conclusions générales (négatives), que nous allons développer sur l'apodisation par interférences dans le cas des pupilles rectilinéaires, s'étendraient évidemment au cas des pupilles circulaires.

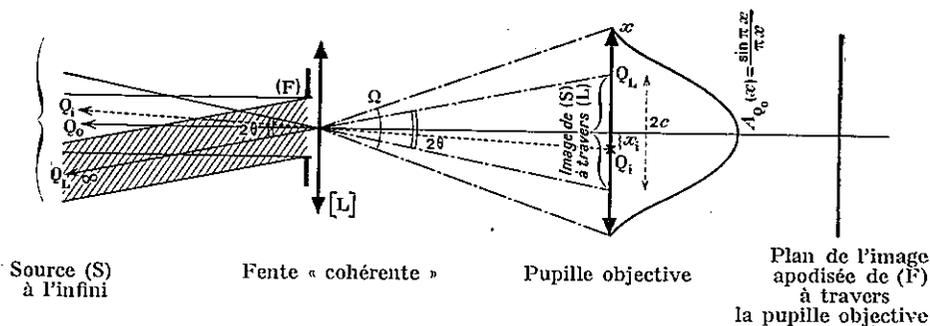


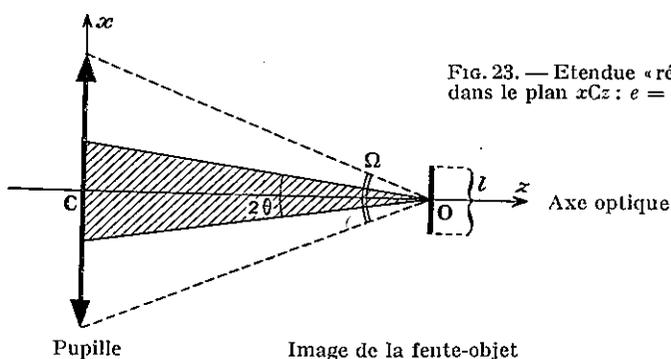
FIG. 22. — Dispositif d'éclairage « cohérent » de la fente objet (F) par une source infiniment éloignée. L'onde cohérente, qu'envoie sur l'objet chacun des points Q_i de la source, est diffractée par la fente (de largeur réduite l). Les figures de diffraction à l'infini des différents points Q_i de la source sont projetées sur l'objectif par une lentille de fente [L] (le dispositif revient donc à projeter la source incohérente (S) sur la pupille). La figure de diffraction du point Q_0 sur l'axe inscrit son arche centrale dans l'objectif si $l = 2$. La répartition correspondante d'amplitude pupillaire, $A_{Q_0}(x) = \sin \pi x / \pi x$ (où $-1 \leq x \leq 1$), est une répartition apodisante.

dans le second. Elles exigent donc $\alpha = 0$ ce qui, dans les deux cas, correspond au point-source sur l'axe optique. Mais lorsque le point-source s'écarte de l'axe optique, le module de l'amplitude pupillaire se modifie.

C'est ici une différence essentielle entre les procédés d'apodisation par absorption pupillaire et par interférences : dans le procédé par absorption, le module de la fonction pupillaire $A(x)$ est commandé par la seule transparence de la pupille et demeure invariable quand change la position du point-source. La position du point-source n'a de répercussion que sur le terme de phase, terme du premier degré en x , qui produit, comme on sait, une simple translation de la figure de diffraction $\mathcal{A}_b(\xi)$. Dans les procédés par interférences, la position du point-source peut ou non, suivant les cas, se marquer dans l'amplitude pupillaire par un terme de phase correspondant à une translation de la figure de diffraction (le biprisme et la fente « cohérente » diffèrent à cet égard). Mais, dans tous les cas, la position du point-source constitue l'un des facteurs déterminants du module de l'amplitude pupillaire ; elle a donc une répercussion sur le profil de la figure de diffraction $\mathcal{A}_b(\xi)$.

Pour permettre une étude plus précise de ces procédés d'apodisation, il nous faut convenir d'un mode de repérage des points de la source qui conserve dans tous les cas une signification comparable.

1. **Repérage des points de la source.** — Sur les figures 21 et 22 qui rappellent les caractéristiques des dispositifs du biprisme de fente et de la fente « cohérente », on remarque que la source est située :
 pour le biprisme, dans le plan de l'objet, c'est-à-dire dans le plan conjugué de l'image par rapport à la pupille,
 pour la fente « cohérente », dans le plan conjugué de la pupille par rapport à la fente-objet.



Il est donc naturel de repérer la position d'un point Q_i de la source : pour le *biprisme*, par l'abscisse ξ_i de l'image géométrique que la pupille en donnerait en l'absence de biprisme. C'est cette même variable qui sert généralement en éclairage direct incohérent (et notamment dans les dispositifs utilisant une pupille apodisante absorbante). pour la fente « cohérente », par l'abscisse x_i , dans le plan de la pupille, de l'image géométrique du point Q_i à travers la fente ⁽¹⁹⁾.

Mais ces abscisses, relatives à des plans différents (plan-image ou plan pupillaire) ne sauraient, dans une comparaison des différents procédés, servir, sans précaution, de termes de référence. Pour éviter toute difficulté, nous situerons les points de la source en nous rapportant à l'étendue géométrique des faisceaux utilisés ; la source étant supposée de luminance invariable, un faisceau d'étendue donnée, transporte, dans tous les cas, le même flux lumineux. Nous définirons donc la position d'un point de la source en supposant qu'il marque le bord d'un faisceau centré dont nous indiquerons l'étendue.

Étendue réduite dans le plan xCz. Dans le cas des pupilles rectilinéaires, qu'on utilise toujours avec des fentes-objets très longues, l'étendue du faisceau admis est constante dans le sens Cy . On peut donc caractériser le faisceau à l'aide seulement de ce que nous appellerons, un peu improprement, l'étendue réduite dans le plan xCz . Nous l'exprimerons par le produit de la largeur réduite ⁽²⁰⁾ l de la fente-objet (mesurée sur son image géométrique à travers la pupille) par l'angle d'ouverture 2θ des rayons que chacun des points de cette fente envoie dans le plan xCz (mesuré, lui aussi, dans l'espace image) [fig. 23].

$$e = l \times 2\theta.$$

Expressions particulières de l'étendue. a) *Cas de l'éclairage incohérent* (procédé par absorption). Les rayons émis par chacun des points de la fente couvrent toute

⁽¹⁹⁾ c'est-à-dire par l'abscisse de la projection conique de Q_i sur la pupille, le centre de la fente jouant le rôle de centre de projection.

⁽²⁰⁾ Rappelons que l , de même que les abscisses ξ dans le plan de l'image, ne sont pas des longueurs mais des nombres, liés à l'unité optique $e_0 = \lambda/a$ (cf. p. 16). Il en va de même pour la largeur réduite u de la source dans le cas du biprisme.

la pupille. Ω étant l'angle d'ouverture de la pupille, on a simplement $2\theta = \Omega$ et $e = l \times \Omega$.

Un point-source $Q_L(\xi_L)$ est au bord d'un faisceau d'étendue e si

$$2\xi_L = l = e/\Omega.$$

b) *Cas du biprisme.* On a encore $2\theta = \Omega$ et l est la largeur de l'objet. Comme l'objet n'est autre que la double image de la source à travers le biprisme, on a $l = 2u$, u désignant la largeur réduite de la source (mesurée, comme nous l'avons dit plus haut, sur son image géométrique à travers la pupille)

$$e = 2u \times \Omega.$$

Un point source $Q_L(\xi_L)$ est au bord du faisceau centré d'étendue e si

$$2\xi_L = u = e/2\Omega.$$

c) *Cas de la fente « cohérente ».* On n'a pas nécessairement, dans ce cas, $2\theta = \Omega$. L'angle 2θ des rayons géométriques issus de chaque point de la fente est égal au diamètre apparent de la source vue de la fente ; nous désignerons par $2c$ (fig. 22) la largeur réduite de l'image de la source sur la pupille ; c est un nombre, compris entre 0 et 1 que nous appellerons coefficient de « couverture pupillaire »⁽²¹⁾. Cela étant, on a $2\theta = c\Omega$, d'où $e = lc\Omega$. Un point source $Q_L(x_L)$ est au bord du faisceau centré d'étendue e si $x_L = c = e/l\Omega$.

2. Modification de la répartition d'amplitudes pupillaires résultant d'un changement de position du point-source. — Comme nous l'avons rappelé plus haut chaque point Q de la source crée sur la pupille une répartition $A_Q(x)$ distincte. Nous allons déterminer les répartitions $A_{Q_0}(x)$ et $A_{Q_L}(x)$ correspondant respectivement au centre Q_0 et à un point marginal Q_L d'une fente-source envoyant sur la pupille un faisceau d'étendue moyenne. Pour définir une étendue moyenne, nous nous référerons aux largeurs de fente les plus couramment employées en éclairage incohérent et nous comparerons l'évolution de $A_Q(x)$ quand Q passe de Q_0 à Q_L , pour les systèmes interférentiels d'une part, et pour les systèmes absorbants qui leur sont équivalents d'autre part. Nous prendrons pour exemples :

1° Un écran pupillaire absorbant, dont le facteur de transmission d'amplitudes est $T(x) \equiv A_{Q_0}(x) = \cos(\pi x/2)$ ⁽²²⁾ et un biprisme d'angle tel que la répartition pupillaire pour le point-source sur l'axe optique soit $A_{Q_0}(x) = \cos(\pi x/2)$.

2° Un écran pupillaire absorbant dont le facteur de transmission d'amplitudes est $T(x) = \sin \pi x/\pi x$ ⁽²²⁾ et une fente « cohérente » de largeur $l = 2$ telle que la répartition pupillaire pour le point-source sur l'axe soit $A_{Q_0}(x) = \sin \pi x/\pi x$.

1) *Comparaison écran absorbant-biprisme.* Nous emploierons dans les deux cas un faisceau d'étendue réduite $e = \Omega$.

⁽²¹⁾ Le nombre c , de même que les abscisses x dans le plan de la pupille, représente le rapport de deux longueurs. Rappelons que la longueur de référence adoptée page 16 correspond à la demi-largeur $a/2$ de la pupille.

⁽²²⁾ Cet écran est fictif, car une transmission $T = 0$ pour $|x| = 1$ est pratiquement irréalisable (densité optique infinie).

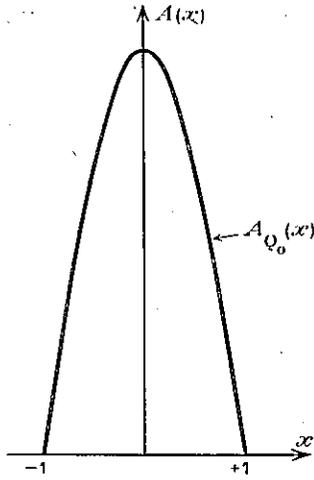


FIG. 24.

$$A_{Q_0}(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$$

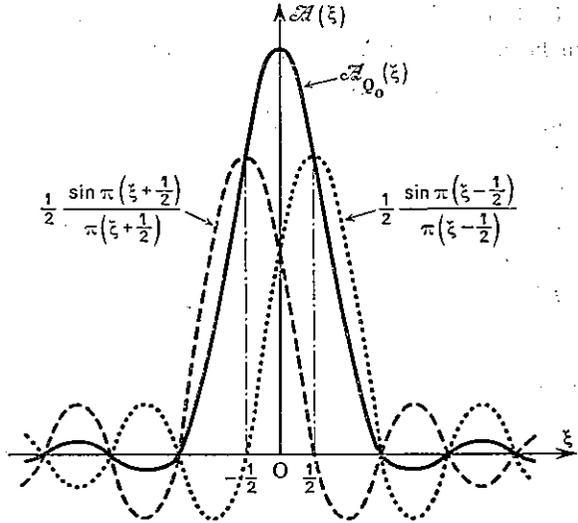


FIG. 25.

$$A_{Q_0}(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \pi(\xi + \frac{1}{2})}{\pi(\xi + \frac{1}{2})} + \frac{\sin \pi(\xi - \frac{1}{2})}{\pi(\xi - \frac{1}{2})} \right\}$$

Répartition apodisée

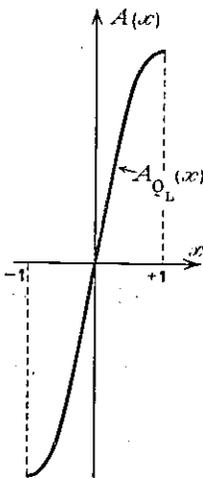


FIG. 26.

1) L'amplitude réelle $a_{Q_L}(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ est complémentaire

de $a_{Q_0}(x) \equiv A_{Q_0}(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$.

2) La phase n'est pas uniforme.

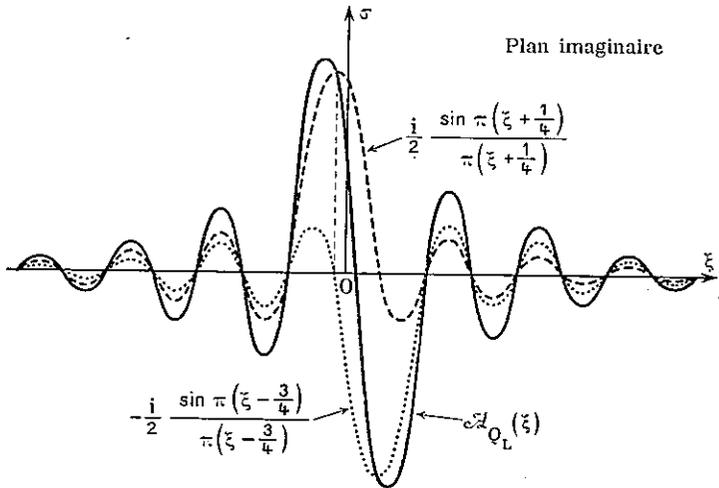


FIG. 27.

De $A_{Q_0}(\xi)$ à $A_{Q_L}(\xi)$, le changement de profil est considérable. Il est dû à la modification de l'amplitude pupillaire réelle $a(x)$.

Le centre de la figure ($\xi = \frac{1}{4}$) correspondant à une amplitude nulle, la désapodisation est ici maximum.

Cette étendue correspond, dans le cas de l'écran absorbant, à une fente-source de largeur réduite $l = 2\xi_L = 1$ et, dans le cas du biprisme, à une source de largeur $u = 2\xi_L = 1/2$.

a) Répartitions $A_{Q_0}(x)$ et $\mathcal{A}_{Q_0}(\xi)$ correspondant au point Q_0 sur l'axe. Elles sont naturellement identiques pour le biprisme et pour l'écran absorbant. On en a représenté l'allure générale sur les figures 24 et 25.

b) Répartitions $A_{Q_L}(x)$ et $\mathcal{A}_{Q_L}(\xi)$ correspondant au bord (Q_L) du faisceau d'étendue $e = \Omega$.

b₁) *Biprisme*. Les répartitions $A_{Q_0}(x)$ et $\mathcal{A}_{Q_0}(\xi)$ se changent en ⁽²³⁾

$$A_{Q_L}(x) = \sin \frac{\pi x}{2} e^{i \frac{\pi}{4} x} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{Q_L}(\xi) = \frac{i}{2} \left\{ \frac{\sin \pi \left(\xi + \frac{1}{4} \right)}{\pi \left(\xi + \frac{1}{4} \right)} - \frac{\sin \pi \left(\xi - \frac{3}{4} \right)}{\pi \left(\xi - \frac{3}{4} \right)} \right\}$$

dont l'allure générale est représentée sur les figures 26 et 27.

b₂) *Ecran absorbant*. Les répartitions $A_{Q_0}(x)$ et $\mathcal{A}_{Q_0}(\xi)$ se changent en

$$A_{Q_L}(x) = \cos \frac{\pi x}{2} e^{i \frac{\pi}{2} x} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{Q_L}(\xi) = \mathcal{A}_{Q_0} \left(\xi - \frac{1}{2} \right).$$

L'amplitude réelle $a(x) = \cos(\pi x/2)$ reste ici inchangée et $\mathcal{A}_0(\xi)$ conserve le même profil.

2) *Comparaison écran absorbant-fente « cohérente » (de largeur $l = 2$)*.

A) Nous emploierons d'abord le même faisceau que précédemment, d'étendue réduite $e = \Omega$; cette étendue correspond, dans le dispositif de la fente « cohérente », à une source de largeur $2c = 2x_L = 2/l = 1$. Avec l'écran absorbant, rappelons que la source a pour largeur $2\xi_L = 1$.

a) Répartitions $A_{Q_0}(x)$ et $\mathcal{A}_{Q_0}(\xi)$ correspondant au point Q_0 sur l'axe. Elles sont, encore identiques pour l'écran absorbant et pour le dispositif de la fente « cohérente ». On en a représenté l'allure générale sur les figures 28 et 29.

b) Répartitions $A_{Q_L}(x)$ et $\mathcal{A}_{Q_L}(\xi)$ correspondant au bord Q_L du faisceau d'étendue $e = \Omega$.

b₁) *Dispositif de la fente « cohérente »*. Les répartitions $A_{Q_0}(x)$ et $\mathcal{A}_{Q_0}(\xi)$ se changent.

$$\text{en } ^{(24)} A_{Q_L}(x) = \frac{\sin \pi \left(x - \frac{1}{2} \right)}{\pi \left(x - \frac{1}{2} \right)} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{Q_L}(\xi) = \int_{-1}^{+1} A_{Q_L}(x) e^{-i\pi x \xi} dx,$$

répartition complexe dont on trouvera l'expression développée dans l'article [10] déjà cité.

⁽²³⁾ Pour les démonstrations des formules données, cf. l'article [10] déjà cité.

⁽²⁴⁾ Pour les démonstrations de ces résultats, conférer l'article [10] déjà cité.

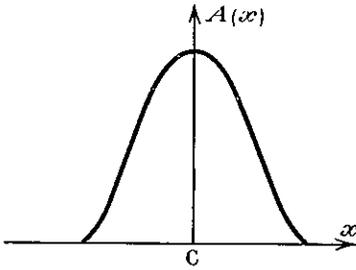


FIG. 28.

$$A_{Q_0}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

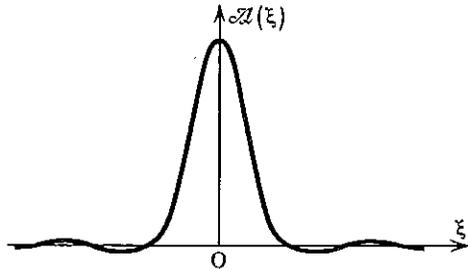


FIG. 29.

$$A_{Q_0}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi(\xi-1)}^{\pi(\xi+1)} \frac{\sin t}{t} dt \quad (24)$$

Figure apodisée. Elle a été enregistrée expérimentalement (cf. fig. 37).

L'allure générale de \$A_{Q_L}(x)\$ et du module \$\alpha(\xi)\$ de \$A_{Q_L}(\xi)\$ est représentée sur les figures 30 et 31.

b) *Ecran absorbant.* Les répartitions \$A_{Q_0}(x)\$ et \$A_{Q_0}(\xi)\$ se changent, par contre simplement en

$$A_{Q_L}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} e^{i \frac{\pi}{2} x} \quad \text{et} \quad A_{Q_L}(\xi) = A_{Q_0}\left(\xi - \frac{1}{2}\right).$$

B) Avec le faisceau précédemment utilisé, l'image de la source, dans le dispositif de la fente « cohérente », ne couvre que la moitié de la pupille (*c*, coefficient de couverture pupillaire = 1/2). Tout se passe donc comme si le faisceau géométrique maximum que la pupille peut recevoir se trouvait diaphragmé. Nous allons considérer maintenant un faisceau d'étendue double $e = 2 \Omega$ couvrant complètement la pupille. Il correspondra, dans le cas de l'écran absorbant, à une source de largeur $2 \xi_L = 2$ et, dans le cas du dispositif de la fente cohérente, à une source de largeur $2x_L = 2$.

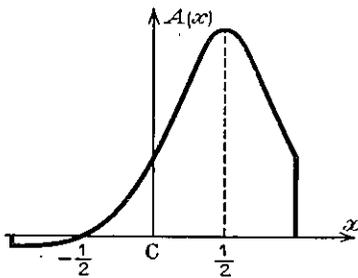


FIG. 30.

$$A_{Q_L}(x) = \frac{\sin \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)}{\pi \left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

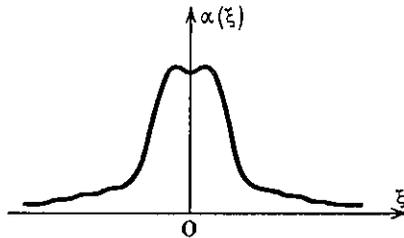


FIG. 31. — On remarque un fort élargissement du corps de la figure et une désapodisation très marquée.

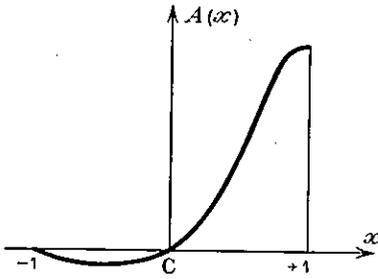


FIG. 32.

$$A_{Q_L}(x) = \frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)}$$

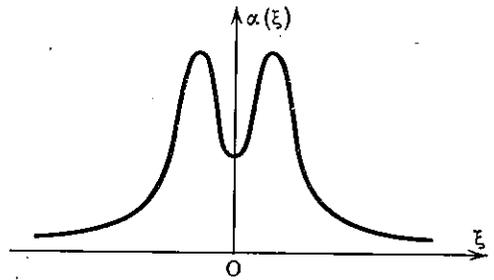


FIG. 33.

« Renversement » accentué au centre. Très forte désapodisation⁽²⁵⁾. Cette figure a été enregistrée expérimentalement (cf. fig. 36).

Alors que la *translation* de la figure de diffraction se trouve ainsi simplement doublée dans le cas de l'éclairage incohérent, sa *déformation* s'accroît fortement dans le cas de l'éclairage cohérent. On obtient en effet les figures d'amplitude pupillaire et diffractée ci-dessus (fig. 32 et 33).

Conclusion. Cette rapide évolution, dans le cas de l'éclairage non incohérent, des profils des figures de diffraction qui se *désapodisent* pour de très faibles changements de position du point source, nous laisse prévoir que, pour apodiser des *images* correspondant à des sources *étendues*, il faudra soumettre les sources à des servitudes de dimensions particulièrement sévères. De fait, nous allons voir que les *largeurs critiques* des sources sont si petites que l'éclairage de l'image ne peut dépasser une faible fraction de l'éclairage géométrique limite.

2. Apodisation des « images »

Nous nous proposons de chercher ici dans quelle mesure un dispositif, conçu pour apodiser la figure de diffraction correspondant au *point-source* sur l'axe, conserve son *efficacité* quand la source s'*élargit*. Cet élargissement est nécessaire pour obtenir un *éclairage non nul* dans l'image.

Nous évaluerons l'éclairage absolu en le rattachant à l'éclairage géométrique maximum E_0 (cf. p. 25). Nous pourrions déterminer ainsi, pour chaque largeur u de la source, la luminosité du dispositif et nous donnerons, en regard de cette *luminosité*, les *caractéristiques* (taux d'apodisation, largeur) du *profil* de la figure $\mathcal{E}(\xi)$.

1. *Etude du profil de la figure d'éclairage* dans le cas du biprisme et de la « fente cohérente ».

Pour le calcul d'une fonction \mathcal{F} proportionnelle à l'éclairage de l'image, on se reportera aux indications données p. 27 et à l'article déjà cité [9]. Une telle fonction permet de connaître les éclairagements *relatifs* $\mathcal{E}(\xi)/\mathcal{E}(0)$ en tous les points de l'image.

⁽²⁵⁾ Pour des données numériques, on se reportera à l'article déjà cité [10].

TABLEAU I
A. — *Biprisme*

Largeur réduite de la fente-source u	Apodisation $K(\xi)$									Largeur de l'image de diffraction $\Delta\xi_{0,405}$	Luminosité réduite L_i/L_0
	$K(2)$	$K(3)$	$K(4)$	$K(5)$	$K(6)$	$K(7)$	$K(8)$	$K(9)$			
	0	4	9	16	25	36	50	68	95		
0,10	3,3	7	10	13	17	19	21	25	1,35	0,16	
0,15	2,7	5	6,5	7,5	8	9,3	10	10,2	1,38	0,23	
0,25	1,6	2,2	2,5	2,5	2,7	2,8	3	3,3	1,5	0,37	

B. — *Fente « cohérente » de largeur réduite $l = 2$*

Coefficient de couverture pupillaire c	Apodisation $K(\xi)$									Largeur de l'image de diffraction $\Delta\xi_{0,405}$	Luminosité réduite L_i/L_0
	$K(2)$	$K(3)$	$K(4)$	$K(5)$	$K(6)$	$K(7)$	$K(8)$	$K(9)$			
	0	8	20	39	55	80	118	151	193		
0,2	5	9	13	13,5	14	17	17,5	18	1,46	0,27	
0,4	2,7	3,6	4,2	4,3	—	4,6	4,8	—	1,54	0,52	
0,6	1,6	1,8	2,1	—	—	—	2,2	—	1,66	0,71	
0,8	1	1,1	1,3	—	—	—	—	1,36	1,8	0,83	
1	0,8	0,85	0,96	—	—	—	—	0,98	1,9	0,9	
Pupille uniforme, conditions « normales », c'est-à-dire $l = 1,2$ (cf. p. 57).	1	—	—	—	—	—	—	—	1,4	0,84	

On trouvera, dans le tableau I, les valeurs, pour plusieurs largeurs de source, de la fonction d'apodisation $K(\xi) = \frac{\xi_0(\xi)/\xi_0(0)}{\xi(\xi)/\xi(0)}$ pour les 10 premiers maxima secondaires de $\xi(\xi)$.

La largeur de l'image $\Delta\xi_{0,405}$ est également indiquée.

2. Etude de l'éclairement absolu de la figure de diffraction et de la luminosité du dispositif.

1) Calcul de ξ/E_c et ξ/E_0 . Nous avons rappelé (p. 25) que la détermination de l'éclairement absolu $\xi(\xi)$ exigeait qu'on rattache la fonction calculée \mathcal{F} à l'éclairement géométrique, c'est-à-dire à l'éclairement qu'on obtient quand l'énergie diffractée est constante dans le domaine de l'image géométrique et nulle en dehors.

Nous avons effectué le raccord entre \mathcal{F} et ξ (p. 26) dans le cas où la source se confond avec l'objet (éclairage *incohérent*). Nous allons l'établir maintenant dans le cas du biprisme et de la « fente cohérente ».

1^o) *Biprisme*. Soit θ l'angle du biprisme. Pour $\theta = 0$, le biprisme se confond avec un dispositif d'éclairage parfaitement *incohérent* de l'objet. Un simple passage à la limite permet donc de tarer l'éclairement dans le cas général (θ quelconque).

2^o) *Fente « cohérente » de largeur réduite* $l = 2$. Le diamètre de la source peut être défini ici à l'aide de l'angle 2θ sous lequel on la voit du centre de la fente-objet; a désignant, comme toujours, la largeur de la pupille, soit $k \xi_{a,2\theta}(\xi) = \mathcal{F}_{a,2\theta}(\xi)$ une fonction *proportionnelle*, dans un rapport inconnu k , à la fonction d'éclairement absolu. On voit sans peine que les conditions de l'éclairement géométrique se trouveraient remplies si, l et θ demeurant inchangés, on faisait tendre la largeur a de la pupille vers l'infini. On a donc

$$\frac{\xi_{a,2\theta}(\xi)}{E_c} = \frac{\mathcal{F}_{a,2\theta}(\xi)}{\mathcal{F}_{\infty,2\theta}(\xi)}.$$

L'éclairement géométrique E_c qui sert ici de référence n'est d'ailleurs pas égal à l'éclairement intrinsèque E_0 ou éclairement géométrique maximum que puisse fournir la pupille d'ouverture Ω , mais seulement à $2\theta E_0/\Omega = c E_0$. Le faisceau géométrique utilisé ne s'appuie en effet que sur cette fraction de la pupille qui se trouve couverte par l'image de la source à travers la fente ⁽²⁶⁾ [fig. 34].

Finalement

$$\frac{\xi(\xi)}{E_0} = c \frac{\xi(\xi)}{E_c} = c \frac{\mathcal{F}_{a,2\theta}(\xi)}{\mathcal{F}_{\infty,2\theta}(\xi)}.$$

(c = coefficient de couverture pupillaire).

⁽²⁶⁾ L'étendue de ce faisceau $e = l \times 2\theta$, indépendante de la largeur de la pupille, reste invariable et finie quand a tend vers l'infini. Ce qui change seulement, dans cette hypothèse, c'est la quantité de lumière *diffractée* reçue par la pupille. A la limite, la lumière diffractée passe entièrement; c'est alors que l'image de la fente-objet devient une image géométrique dont l'éclairement est proportionnel à l'étendue géométrique du faisceau admis.

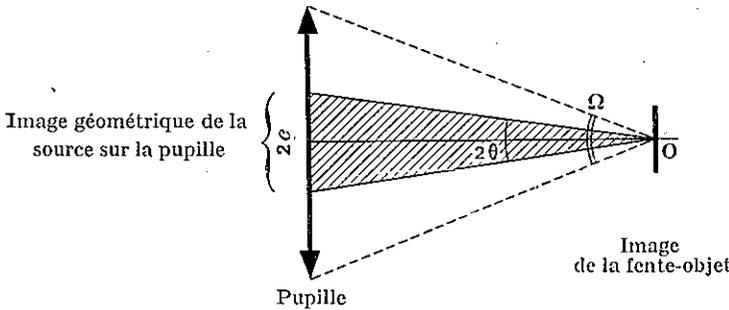


FIG. 34.

2) *Luminosité des dispositifs.* Nous avons appelé (p. 26) luminosité réduite, le rapport

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\xi(0)}{E_0} = \frac{\xi(0)}{E_c} \times \frac{L_c}{L_0}.$$

Pour le biprisme, on a $L_c/L_0 = \tau = 1$. Pour la fente « cohérente » : $L_c/L_0 = c$, coefficient de couverture pupillaire.

Quand c est plus petit que 1, la luminosité géométrique du dispositif « cohérent » correspond à celle d'un dispositif absorbant de transparence $\tau = c$. On réunira ces formules en écrivant

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\xi(0)}{E_c} \times \tau \times c.$$

Les luminosités L/L_0 figurent dans le tableau I, pour différentes largeurs u de source (biprisme) ou pour différents coefficients de couverture pupillaire (fente cohérente). Ce tableau est extrait d'une publication antérieure [10].

3. **Conclusions.** — 1) *Apodisation.* Elle décroît quand la luminosité croît. Cette décroissance est très rapide.

Avec le biprisme, l'apodisation n'est déjà plus que de l'ordre de 2 quand la luminosité atteint seulement 0,4.

Avec la fente cohérente, elle n'est plus que de l'ordre de 4, pour une luminosité de 0,5.

Nous verrons que, pour des luminosités du même ordre, les écrans absorbants procurent, en éclairage incohérent, des apodisations beaucoup plus considérables.

2) *Pouvoir de résolution et luminosité.* Le tableau IB, relatif à la fente cohérente, met en évidence une propriété remarquable qui a été souvent signalée (par van Cittert [12] notamment) :

La largeur de l'image réellement obtenue est inférieure à la largeur de l'image géométrique (fictive) de l'objet.

La luminosité réelle est par suite plus grande que la luminosité géométrique.

Ceci explique, en particulier, qu'on ait pu préconiser l'emploi d'une fente cohérente pour augmenter le pouvoir de résolution.

En réalité, la fente « cohérente » ne présente, sur la fente incohérente, aucune supériorité du point de vue du pouvoir de résolution, au contraire même.

Les tableaux II et III montrent en effet qu'à égalité de flux reçu (c'est-à-dire pour des faisceaux d'égale étendue géométrique) une pupille de transparence uniforme donne très généralement des images plus larges en éclairage « cohérent » qu'en éclairage incohérent. Il ne faut faire exception que pour un faisceau d'étendue réduite 2Ω , correspondant dans les deux cas à une fente-objet de largeur 2, et à la pleine couverture de la pupille. Dans tous les autres cas, le pouvoir de résolution et la luminosité du dispositif « cohérent » sont plus faibles que ceux du dispositif « incohérent ».

Si des apparences inverses ont été constatées, c'est

1° qu'on effectuait les comparaisons à fentes d'égales largeurs et non à égalité de flux reçu. Or, dans un spectroscope, la largeur de la fente est ajustable à volonté. La seule servitude véritable est celle que définit l'étendue de faisceau disponible, étendue qui se trouve généralement imposée par les caractéristiques géométriques de la source et du système dispersif utilisé ;

2° c'est aussi que l'image en éclairage incohérent, prise pour référence, se trouvait élargie par des aberrations, dont l'effet était insensible en éclairage « cohérent », à cause du faible coefficient de couverture pupillaire (équivalant à une diaphragmation). Cette différence de comportement aux aberrations des deux sortes de dispositifs a déjà été signalée par Mr Croze [18].

En résumé, l'éclairage interférentiel de la pupille (par biprisme ou fente « cohérente ») ne présente, ni au regard de l'apodisation, ni au regard de la résolution, de propriétés bien remarquables. Nous allons par contre établir certaines propriétés des pupilles absorbantes, qui les distinguent profondément des pupilles à répartitions interférentielles, et les rendent beaucoup plus aptes à l'apodisation des images de points ou de fentes de dimensions non nulles.

3. Vérifications expérimentales

J'ai groupé dans les paragraphes suivants un ensemble d'expériences qui illustrent quelques-uns des précédents résultats.

Ce sont des enregistrements photométriques d'images de fentes obtenues avec le système enregistreur photoélectrique dont est équipé le grand spectroscope de Bellevue [16]. Le dispositif photométrique est à double faisceau, équilibré par servo-mécanisme.

Le faisceau A, ou *faisceau de mesure*, a une étendue géométrique constante et une intensité variable ; il est en effet défini par la pupille de l'objectif et par une fente exploratrice qui balaye l'image à étudier.

Le faisceau B, ou *faisceau de compensation*, a une intensité constante et une étendue géométrique variable ; il s'appuie en effet d'une part sur une image de la source (filament d'une lampe Philora), d'autre part sur une lentille L devant l'ou-

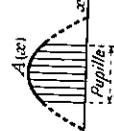
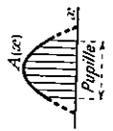
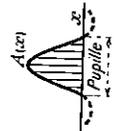
TABLEAU II. — Pouvoir de résolution et luminosité en éclairage partiellement cohérent (fente de largeur $l = 2$).
 Comparaison avec l'éclairage incohérent, pour des flux identiques

Etendue réduite $e = Lc/\Omega$	Coef- ficient de couver- ture pupill. c	Largeur réd. de l'image géom. l	R_G/R_0	$L_G/L_0 = c$	Largeur de l'image de dif- fraction $\Delta\xi_{0,405}$	R/R_G	L/L_G	R/R_0	L/L_0	$R/R_0 \times L/L_0$	Remarques
Cohérent 0	0	2	0,5	0	1,42	1,4	0	0,7	0	0	$R/R_G > 1$ mais $R_G = 0,5 R_0$ seulement
Incohérent 0	1	0	∞	1	1	0	0	1	0	0	$\Delta\xi$ cohérent $> \Delta\xi$ incohérent
Cohérent 0,4 Ω	0,2	2	0,5	0,2	1,46	1,36	1,35	0,68	0,27	0,19	$R/R_G > 1, L/L_G > 1$ mais $R_G = 0,5 R_0$ et $L_G = 0,2 L_0$ seulement
Incohérent 0,4 Ω	1	0,4	2,5	1	1,04	0,38	0,39	0,96	0,39	0,37	$R/R_G < 1, L/L_G < 1$ mais $R_G = 2,5 R_0$ d'où (R/R_G) coh. $< (R/R_G)$ incoh. et (L/L_0) cohérent $< (L/L_0)$ incoh.
Cohérent 0,8 Ω	0,4	2	0,5	0,4	1,54	1,3	1,3	0,65	0,52	0,34	<i>id.</i>
Incohérent 0,8 Ω	1	0,8	1,25	1	1,16	0,69	0,67	0,86	0,67	0,576	<i>id.</i>
Cohérent 1,2 Ω	0,6	2	0,5	0,6	1,66	1,2	1,2	0,60	0,71	0,42	<i>id.</i>
Incohérent 1,2 Ω	1	1,2	0,83	1	1,43	0,844	0,84	0,7	0,84	0,59	Maximum du produit $(R/R_0) \times (L/L_0)$ en écl. incohérent, il se produit pour $l = 1,2 \left\{ \begin{array}{l} L/L_0 = 0,84 \\ R/R_0 = 0,7 \end{array} \right.$
Cohérent 1,6 Ω	0,8	2	0,5	0,8	1,82	1,1	1,03	0,55	0,83	0,46	$\Delta\xi$ cohérent $\sim \Delta\xi$ incohérent
Incohérent 1,6 Ω	1	1,6	0,62	1	1,85	0,865	0,89	0,54	0,89	0,48	Les pouvoirs de résolution et les lumino- sités s'équivalent
Cohérent 2 Ω	1	2	0,5	1	1,9	1,04	0,94	0,52	0,94	0,49	L'éclairage « cohérent » prend ici un léger avantage ; si l'on a besoin de dépasser une luminosité de 0,89, il faut recourir de préférence à l'éclairage « cohérent » ; la luminosité s'accroît plus vite, et le pouvoir de résolution diminue moins vite.
Incohérent 2 Ω	1	2	0,5	1	2,22	0,9	0,9	0,45	0,90	0,405	

Excepté pour le faisceau d'étendue réduite 2Ω , la largeur $\Delta\xi_{0,405}$ de l'image en éclairage « cohérent » est supérieure à la largeur de l'image en éclairage incohérent, la luminosité L/L_0 et le pouvoir de résolution R/R_0 sont plus faibles.

TABLEAU III. — Pouvoir de résolution et luminosité en éclairage cohérent vrai (source de très faible diamètre apparent $2\theta = \epsilon \Omega$)
 Comparaison avec l'éclairage incohérent, pour une étendue de faisceau réduite $\epsilon = \Omega/10$, identique dans les deux cas.

Etendue réduite $\epsilon = \Omega/10$	ϵ	t (Im. géom.)	R_G/R_0	$L_G/L_0 = \epsilon$	$\Delta \xi_{0,405}$ (Im. de diff.)	R/R_G	L/L_G	R/R_0	L/L_0	$R \times L / R_0 \times L_0$	Remarques
Eclairage incohérent	$\frac{\Omega}{10}$	0,1	10	1	1	0,1	0,1	1	0,1	0,1	
Eclairage cohérent vrai	$\frac{\Omega}{10}$	2	0,5	0,05	1,43	1,4	0,07	0,70	0,07	0,05	Malgré l'apodisation, la luminosité n'est pas plus élevée en écl. coh., car l'image est 1,43 fois plus large qu'en écl. incoh.
		1,5	0,67	0,066	1,17	1,2	0,079	0,85	0,079	0,072	$\Delta \xi$ coh. $< L_{\text{géom.}}^2 / L_G > 1$ mais $L_G = 0,066 L_0$. De plus, perte de lumière diffractée en dehors de la pupille.
		1	1	0,1	1,06	0,94	0,76	0,94	0,76	0,0715	$\Delta \xi$ coh. est à peine supérieur à $\Delta \xi$ incohér. et à l'geom. Mais la luminosité reste très faible à cause de la lumière qui, par diffraction, se trouve rejetée en dehors de la pupille.



Pour de plus faibles largeurs de la fente « cohérente », la luminosité décroît rapidement, la lumière diffractée en dehors de la pupille augmentant beaucoup.

La largeur $\Delta \xi$ de l'image, en échange cohérent vrai, reste supérieure à la largeur $\Delta \xi = 1$ en éclairage incohérent.

Ce tableau a été dressé pour compléter les résultats du tableau II. On pouvait en effet penser que l'infériorité du dispositif par éclairage cohérent de la fente provenait de sa réalisation imparfaite : l'éclairage ne serait en effet véritablement cohérent que si le coefficient de couverture pupillaire était nul ou très faible. Les résultats du tableau III relatifs à une étendue de faisceau $\Omega/10$ et à des coefficients ϵ compris entre 0,05 et 0,1 montrent que le pouvoir de résolution R/R_0 et la luminosité L/L_0 sont, dans ce cas encore, inférieurs aux mêmes quantités en éclairage incohérent. Il faut toutefois remarquer, au bénéfice de l'éclairage cohérent, qu'il permet de réaliser, avec plus de commodité, les très faibles étendues de faisceaux qui procurent les pouvoirs de résolution élevés ; la limitation du faisceau en éclairage incohérent ne peut s'obtenir que par la fermeture de la fente, dont les défauts deviennent alors rapidement gênants.

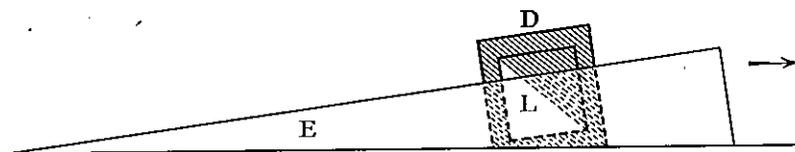


FIG. 35. — La lentille diaphragmée L du faisceau de compensation et le couteau équilibrer E. D, diaphragme triangulaire.

verture triangulaire de laquelle glisse un couteau (fig. 35). C'est le mouvement de ce couteau, commandé par servomécanisme, qui assure à tout instant l'équilibre des deux faisceaux.

Les déplacements (agrandis) de la fente exploratrice du faisceau A s'inscrivent sur l'axe des ξ du papier d'enregistrement ; on enregistre sur l'axe perpendiculaire les déplacements du couteau équilibrer E.

Etant donnée la forme triangulaire du diaphragme D, la surface découverte de la lentille L varie comme le carré des déplacements du couteau E ; on mesure donc, non pas les intensités du faisceau A, mais leurs racines carrées, c'est-à-dire les valeurs absolues des *amplitudes* ⁽²⁷⁾. La précision est ainsi augmentée dans les régions de faible éclaircissement.

1. Caractéristiques numériques du dispositif. — *Source* : raie verte du mercure ($\lambda = 5\,460 \text{ \AA}$) donnée par une lampe Philora alimentée en courant continu.

Pupille rectangulaire de largeur $a = 8 \text{ cm}$ (objectif du grand spectroscopie, diaphragmé).

Ouverture du faisceau : $\Omega = a/f = 8/900 = 0,009$ ($f =$ longueur focale de l'objectif).

Unité linéaire optique : $e_0 = \epsilon_0 f = \lambda/\Omega = 0,546 \times 900/8 = 61 \mu$.

Cette unité optique, qui correspond à une interfrange, couvre 11 mm sur l'enregistrement. La largeur de ce dernier est telle qu'on puisse enregistrer 11 franges normales de part et d'autre du maximum central.

L'axe des amplitudes a 18 cm de long. Le rapport entre les maxima et minima simultanément enregistrables peut d'ailleurs être augmenté ; il suffit pour cela d'accroître l'intensité relative des pieds à l'aide d'un filtre absorbant étalonné qu'on interpose, en cours d'enregistrement, dans le faisceau B. On est seulement limité par la sensibilité des cellules.

Le maximum de contraste que l'appareil pouvait enregistrer dans les conditions que nous venons d'indiquer était de l'ordre de 10 000.

2. Enregistrements montrant les figures de diffraction (région centrale) en éclairage cohérent : (1) lorsque la source se projette au centre de l'objectif, (2)

⁽²⁷⁾ L'appareil comporte un jeu de diaphragmes de formes variées permettant d'enregistrer directement non pas seulement $|A(\xi)|$ mais, par exemple, $\log J(\xi)$ ou d'autres fonctions liées à l'intensité à mesurer.

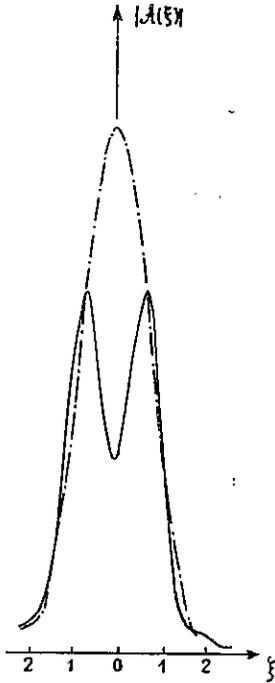


FIG. 36. — Figures de diffraction d'une fente « cohérente » de largeur 2 quand la source, très fine, forme son image — ···· — au centre de la pupille, — sur l'un des bords de la pupille (reproduction d'enregistrements photoélectriques).

lorsqu'elle se projette sur l'un de ses bords. — Les enregistrements de la figure 36 correspondent à l'éclairage cohérent par un faisceau dont le coefficient de couverture pupillaire est très faible ($c \approx 0,01$). La fente-objet a une largeur de deux unités optiques. On obtient, dans ces conditions, si la source est parfaitement centrée, la figure de diffraction de $A(x) = \sin \pi x / \pi x$ [$-1 \leq x \leq 1$], dont le profil central est un profil normal, à maximum au centre.

Si, par contre, la source fine est légèrement décentrée, de sorte que son image à travers la lentille de fente se fasse sur le bord du diaphragme pupillaire, la figure de diffraction s'altère au point de présenter un minimum central très accentué (figure en traits pleins).

3. Enregistrements montrant la diminution de l'apodisation, en éclairage cohérent, par élargissement de la source. — Les enregistrements de la figure 37 montrent :

1°) l'apodisation qu'on obtient avec la source fine ($c = 0,01$) précédemment utilisée,

2°) la diminution rapide de cette apodisation quand on élargit la source jusqu'à couvrir, de son image, la presque totalité de la pupille (coefficients de couverture : $c = 0,2 ; 0,4 ; 0,7$). La figure de référence correspond à la figure de diffraction en éclairage normal incohérent⁽²⁸⁾. On a égalé, à l'aide d'écrans absorbants appropriés, placés sur le faisceau A, les amplitudes centrales de ces différentes figures de diffraction : les taux d'apodisation (en amplitudes) sont alors simplement donnés par le rapport des pieds.

Les carrés de ces rapports sont en moyenne conformes à ceux du tableau II.

On constate que, lorsque la couverture pupillaire atteint 0,7, l'apodisation devient déjà négligeable.

III. Ecrans absorbants

Nous avons vu

1°) que les écrans de phase ne permettaient pas d'apodiser les figures de diffraction,

2°) que les dispositifs interférentiels du biprisme et de la fente cohérente pou-

(²⁸) avec une fente-objet de largeur réduite 1.

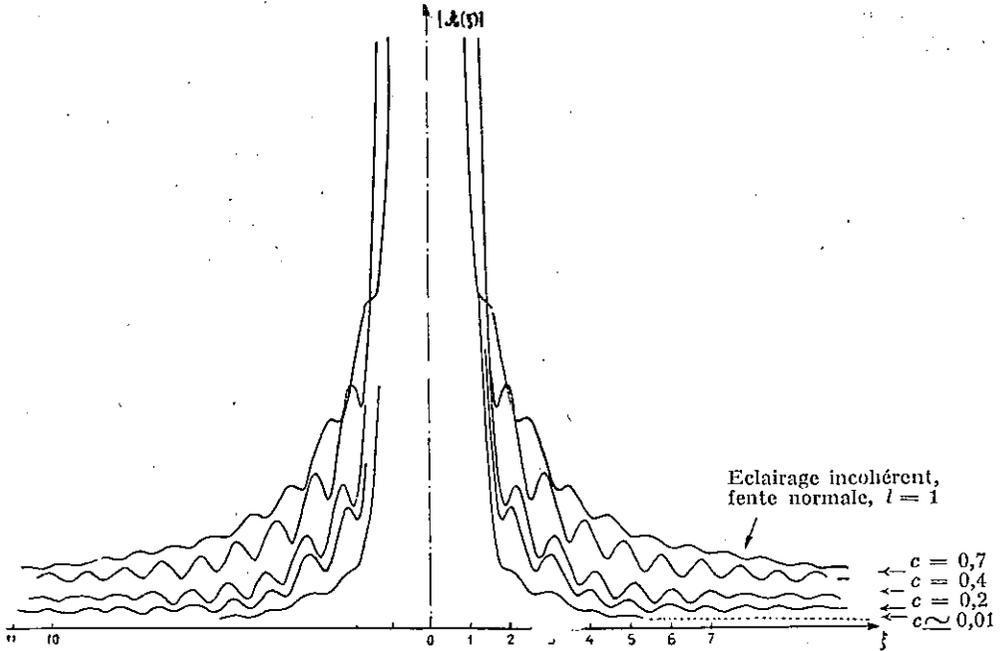


FIG. 37. — Altération de l'image d'une fente-objet « cohérente » par élargissement de la source (d'après des enregistrements photoélectriques). Pour une « couverture pupillaire » de 0,7, l'apodisation est déjà négligeable.

vaient apodiser la figure de diffraction d'un point *particulier* mais, beaucoup moins bien, celle des points voisins de sorte que l'efficacité de ces dispositifs disparaissait quand on élargissait la source.

Nous allons étudier maintenant *les écrans absorbants*.

1. Apodisation des figures de diffraction

Nous avons déjà eu l'occasion de rappeler que ces écrans, en éclairage incohérent, permettaient d'apodiser *également* les figures de diffraction de *tous* les points de la source (conservation du profil de la figure de diffraction).

2. Apodisation des images de fentes

Nous allons préciser les conséquences de cette propriété, relativement à l'apodisation des images d'objets de dimensions non nulles. Nous nous placerons tout d'abord dans le cas des images de fentes à travers une pupille rectilinéaire.

1. **Conditions « normales » d'utilisation des pupilles absorbantes.** — Nous avons rappelé (cf. p. 26) qu'en éclairage incohérent l'éclairement au centre de l'image atteignait presque l'éclairement *maximum* dès que l'image géométrique de la source couvrait l'arche centrale de la figure de diffraction.

Si la pupille est uniforme, cela correspond à $l = 2$ et l'éclairement $E(0)$ obtenu vaut $0,90 E_G = 0,90 E_0$.

Si la pupille est une pupille apodisante, l'arche centrale de sa figure de diffraction se trouve généralement élargie. L'éclairement $E(0)$ correspondant s'approche davantage encore de l'éclairement géométrique. Par exemple, pour un écran

$A(x) = 0,742 + 0,3027 \cos \pi x - 0,0447 \cos 2\pi x$, la fente dont la largeur correspond à celle de l'arche centrale procure un éclairement $E(0) = 0,96 E_0$.

Il est donc inutile d'utiliser des fentes plus larges que l'arche centrale. Pratiquement même, on a souvent intérêt à limiter davantage la largeur de la fente, afin d'obtenir une image plus fine et un meilleur pouvoir de résolution. Ce dernier diminuant à mesure qu'on élargit la fente, on obtient le meilleur compromis en adoptant une largeur de fente qui rende *maximum* le produit luminosité \times résolution.

Si l'on dépasse cette largeur, qu'on appelle *largeur normale*, on perd davantage sur la résolution qu'on ne gagne sur la luminosité [20].

Pour la pupille uniforme, la largeur normale de fente est voisine de 1 (1,2 exactement).

La luminosité correspondante, ou luminosité normale, vaut $0,84 L_0$ et le pouvoir de résolution vaut $0,70 R_0$ (L_0, R_0 : luminosité et pouvoir de résolution intrinsèques définis p. 26 et 23).

Pour une pupille apodisante, la largeur normale est généralement voisine de la largeur à mi-hauteur de la figure de diffraction et la luminosité correspondante est de l'ordre de $0,8 L_G = 0,8 \times \tau L_0$. Quant au pouvoir de résolution, il n'est pas abaissé de plus de 20 à 30 % par rapport au pouvoir de résolution théorique défini par l'inverse de la largeur de la figure de diffraction (p. 24).

Nous retiendrons simplement ceci : en éclairage incohérent, les conditions normales d'utilisation des pupilles permettent d'atteindre environ les $8/10$ de l'éclairement géométrique, proportionnel à la transparence de ces pupilles, sans perdre plus de 20 à 30 % du pouvoir de résolution théorique (lequel est toujours inférieur à R_0 , pouvoir de résolution intrinsèque de la pupille uniforme, à cause de l'élargissement des figures de diffraction des pupilles apodisantes).

2. L'apodisation dans les conditions « normales ». — Ces conditions « normales » ont été définies en fonction du pouvoir de résolution inversement proportionnel à la largeur des images. Il s'agit maintenant de chercher si elles constituent, en ce qui concerne l'apodisation, des conditions favorables, c'est-à-dire si elles permettent d'apodiser les images au même degré que la figure de diffraction de la pupille considérée. Nous allons voir qu'il en va bien ainsi.

1) Un élargissement modéré de la source produit, en éclairage incohérent, un effet d'apodisation.

A) Considérons d'abord la pupille uniforme.

Il est facile de montrer que l'image à travers cette pupille, d'une fente de largeur normale a des pieds moins intenses que la figure de diffraction de cette pupille.

Autrement dit, l'élargissement de la fente-source de $l = 0$ à $l = 1$ ou $1,2$ provoque, à soi seul, un phénomène d'apodisation, alors que c'est une désapodisation très marquée qui se produit, dans les mêmes conditions, en éclairage cohérent.

Soit, en effet, $J(\xi) = \sin^2 \pi \xi / \pi^2 \xi^2$ la fonction d'intensité diffractée de cette pupille. L'intensité relative du n^{e} maximum $J(n,5)/J(0)$ est représentée, sur la figure 38, par le rapport des segments NN'/OO' .

Donnons maintenant à la fente la largeur 1 : l'éclairement relatif du n^{e} maximum $\xi(n,5)/\xi(0)$ représente le rapport de l'aire de l'arche de centre N à la portion $(-1/2, +1/2)$ de l'arche centrale. Mais l'arche de centre N peut être représentée par la fonction $J(n,5) \sin^2 \pi \xi$ de période 1, tandis que l'arche centrale, qui s'étend sur deux interfranges, s'écarte notablement de la fonction $J(0) \cos^2 \pi \xi$ (fig. 38).

On a donc

$$\frac{\xi(n,5)}{\xi(0)} < \frac{J(n,5) \int_n^{n+1} \sin^2 \pi \xi d\xi}{J(0) \int_{-1/2}^{1/2} \cos^2 \pi \xi d\xi} = \frac{J(n,5)}{J(0)},$$

$$\text{soit } \frac{\xi(n,5)}{\xi(0)} < \frac{J(n,5)}{J(0)}.$$

L'image d'une fente de largeur 1 est apodisée par rapport à la figure de diffraction d'une fente infiniment fine.

B) Considérons maintenant le cas d'une pupille apodisante absorbante. — Sa figure de diffraction $J(\xi)$ est généralement caractérisée par une arche centrale un peu élargie, mais surtout « gonflée », avec un maximum plus aplati.

Les pieds, surtout lointains, affectent encore souvent, nous l'avons montré, la forme de pseudosinusoides, de période 1. Si donc nous élargissons la fente jusqu'à la valeur 1, le même raisonnement que précédemment montre que les pieds de l'image s'abaissent par rapport à ceux de la figure de diffraction :

« L'apodisation est non seulement maintenue, mais augmentée ». C'est bien ce que montre la figure 39.

2) Limites extrêmes de la largeur de la source. On verrait facilement que, pour les pupilles apodisantes, ces résultats subsistent pour des largeurs de fente-source un peu supérieures à 1.

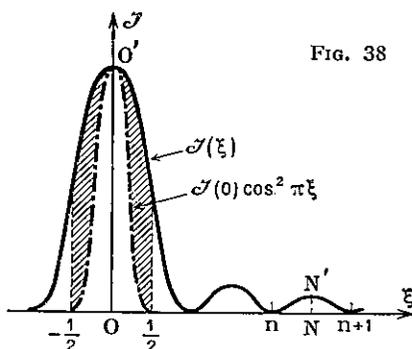


FIG. 38

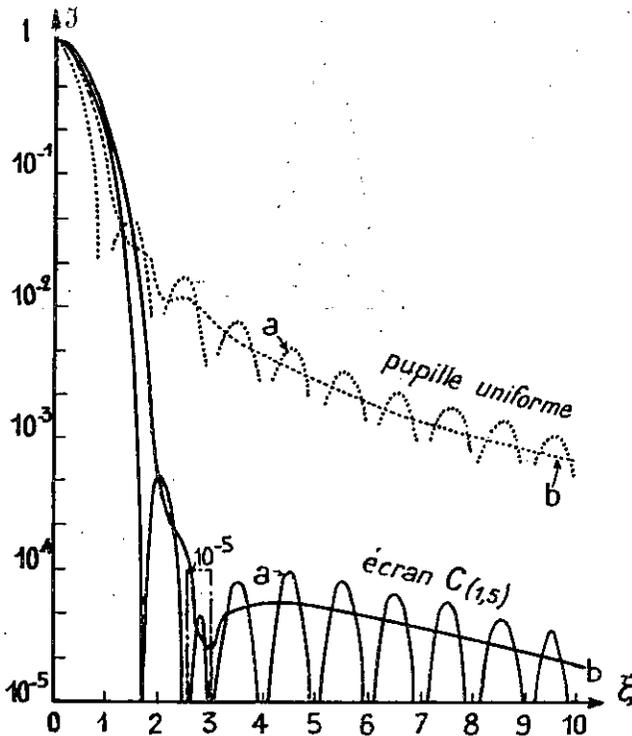


FIG. 39. — Figures montrant l'effet d'apodisation que produit, en éclairage incohérent, l'élargissement de la source :

..... Cas d'une pupille uniforme.

— Cas d'un écran apodisant, dit C(1,5)

$$A(x) = 0,5804 + \\ + 0,4448 \cos \pi x \\ - 0,0252 \cos 2 \pi x.$$

a) La fente-source est infiniment fine. b) La fente-source a pour largeur réduite l'unité.

On peut, sans perdre sur l'apodisation, atteindre environ la largeur à mi-hauteur (ou à 0,405) de la figure de diffraction de ces pupilles, c'est-à-dire leur largeur normale, pourvu, toutefois, que cette largeur ne dépasse pas 1,5 environ [9].

Enfin ces résultats subsistent, bien que le raisonnement soit un peu plus compliqué à cause de la symétrie de révolution du solide de diffraction, dans le cas des pupilles circulaires éclairées par une fente.

En résumé, il suffit, pour apodiser une image spectroscopique en éclairage incohérent, d'apodiser la figure de diffraction de la pupille. On conserve en effet le bénéfice de cette apodisation avec des fentes assez larges pour que l'éclairage central de l'image atteigne les 8/10 environ de l'éclairage géométrique, proportionnel à la transparence de la pupille.

C'est donc au problème de l'apodisation des figures de diffraction des pupilles absorbantes que nous nous consacrerons exclusivement dans la suite.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE DES CRITÈRES POUR LA DÉTERMINATION
D'ÉCRANS ABSORBANTS APODISANTS.
EXPRESSION MATHÉMATIQUE DE CES CRITÈRES

I. Choix d'un critère d'apodisation

Contrairement aux dispositifs interférentiels, les dispositifs d'apodisation par *absorption* permettent de réaliser une répartition d'amplitudes pupillaires *arbitraire* ⁽²⁹⁾. Il faut donc, pour orienter les choix, disposer de certains *critères d'apodisation*.

Le critère le plus simple correspond à cette notion empirique que les pieds de la figure de diffraction sont dus à la *discontinuité* de l'amplitude sur les bords de la pupille. Les « pieds » doivent donc s'atténuer si la transmission de la pupille décroît régulièrement du centre aux bords. On peut, suivant ce principe, « essayer » diverses fonctions $A(x)$ ou $A(r)$ qu'on se donne à priori [2].

On obtient toutefois de meilleurs résultats en se rapportant à *certaines relations mathématiques précises* entre la fonction d'amplitude pupillaire $A(x)$ et la fonction d'amplitude diffractée $\mathcal{A}_b(\xi)$ ⁽³⁰⁾.

C'est la transformation de Fourier qui constitue évidemment, entre ces deux fonctions, la relation fondamentale. Cette transformation étant *réci-proque*, il semble, à première vue, qu'on pourrait imposer à la figure de diffraction un profil à priori et trouver, en fonction de ce profil, la pupille associée. Mais il n'en est rien : la transformée de Fourier d'une fonction $\mathcal{A}_b(\xi)$ *arbitraire* est définie sur $-\infty \leq x \leq +\infty$; elle ne peut donc généralement représenter une fonction d'amplitude pupillaire $A(x)$ qui ne doit différer de zéro que sur le domaine *limité* de la pupille.

Mais si l'on ne peut fixer à $\mathcal{A}_b(\xi)$ une détermination complète à priori, au moins peut-on se donner cette fonction sous forme d'une combinaison à *coefficients arbitraires* de n fonctions $\varphi_0(\xi), \varphi_1(\xi), \dots, \varphi_p(\xi), \dots, \varphi_{n-1}(\xi)$ transformées de fonctions $f_0(x), f_1(x), \dots, f_p(x), \dots, f_{n-1}(x)$, nulles pour $|x| > 1$.

⁽²⁹⁾ sous la réserve, toutefois, que $A(x)$ ou $A(r)$ ne s'annule en aucun point (Cf. p. 36).
⁽³⁰⁾ ou $\mathcal{A}_b(\rho)$... Dans tout ce chapitre, on pourra constamment substituer $A(r)$ à $A(x)$ et $\mathcal{A}_b(\rho)$ à $\mathcal{A}_b(\xi)$.

On aura
$$A_n(\xi) = c_0 \varphi_0(\xi) + \dots + c_{n-1} \varphi_{n-1}(\xi),$$
avec
$$\varphi_p(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_p(x) e^{-i\pi x \xi} dx. \quad [\text{cf. formule (8)}]$$

Déterminer un écran apodisant appartenant à la famille d'écrans $A_n(x) = c_0 f_0(x) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(x)$ revient alors à *déterminer les valeurs privilégiées* des paramètres c_p (ou « coefficients » de l'écran) qui satisfont à un critère d'apodisation bien choisi.

Nous allons en indiquer quelques-uns et discuter de leur efficacité.

1. Critère reposant sur l'espacement des zéros dans la figure de diffraction. —

Il semble, à première vue, qu'on puisse apodiser une figure $J(\xi)$, sur un intervalle $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ donné, *en resserrant ses zéros*. Si l'écran $A(x)$ appartient à la famille

$$A_n(x) = c_0 f_0(x) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(x),$$

on peut choisir à priori les abscisses de $n-1$ zéros (ξ_1, \dots, ξ_{n-1}), tout en imposant à l'amplitude centrale $A(0)$ de la figure de diffraction de ne point s'abaisser de plus de 20 % par exemple. Cela conduit à un système de n équations linéaires

$$\begin{cases} A(\xi_1) = c_0 \varphi_0(\xi_1) + \dots + c_{n-1} \varphi_{n-1}(\xi_1) = 0 \\ \dots \\ A(\xi_{n-1}) = c_0 \varphi_0(\xi_{n-1}) + \dots + c_{n-1} \varphi_{n-1}(\xi_{n-1}) = 0 \\ A(0) = c_0 \varphi_0(0) + \dots + c_{n-1} \varphi_{n-1}(0) = 0,8 \end{cases}$$

qu'il suffit de résoudre par rapport aux n coefficients c_0, \dots, c_{n-1} .

Ce critère est généralement médiocre, pour les raisons suivantes :

1°) La multiplication des zéros n'entraîne pas automatiquement *l'abaissement des maxima*, qui, seule, compte ;

2°) La multiplication des zéros sur un intervalle donné s'accompagne généralement d'une *désapodisation proche*, qui est d'autant plus gênante que

3°) l'intervalle apodisé est nécessairement *étroit* (l'apodisation d'un intervalle *étendu* — correspondant, par exemple, à une *dizaine* d'interfranges — s'obtiendrait très péniblement par cette méthode).

Ce critère a été choisi par G. Lansraux pour le calcul d'un écran apodisant [16]. Il semble que cet écran ne contredise point les remarques générales ci-dessus, autant qu'on en puisse juger par un dessin à petite échelle (linéaire) de la figure de diffraction (aucune équation, ni tableau de nombre n'est fourni). La région apodisée correspond à un interfrange normal seulement ⁽³¹⁾.

2. Critère relatif à la décroissance asymptotique de la fonction d'amplitude diffractée. —

Nous avons vu (p. 37) que la décroissance asymptotique de $J(\xi)$ s'effectuait proportionnellement à $1/(\pi\xi)^{2p+2}$, où p désigne l'indice de la première

⁽³¹⁾ Note ajoutée à l'impression. Un nouvel article de G. Lansraux vient de paraître, qui contient plusieurs illustrations de cette méthode [21]. L'intervalle apodisé correspond à un demi-interfrange.

dérivée $A^{(p)}(x)$ de l'amplitude pupillaire $A(x)$ qui ne soit pas nulle sur les bords [l'indice zéro correspondant à $A^{(0)}(x) \equiv A(x)$].

Il en résulte que pour des répartitions $A(x)$ telles que

$$A(1) = A^{(1)}(1) = A^{(2)}(1) = \dots = A^{(p-1)}(1) = 0,$$

la convergence de $J(\xi)$ est $2p$ fois plus rapide que pour des répartitions à bords clairs [$A(1) \neq 0$] et, en particulier, que pour la répartition uniforme $A_0(x) \equiv 1$.

Aussi a-t-on proposé de telles fonctions pour l'apodisation [5, 8].

Mais le critère d'apodisation ainsi défini n'est pas bon, car

- a) il conduit à des pupilles à bords opaques, donc irréalisables (cf p. 36),
- b) son efficacité est limitée à la région lointaine de la figure de diffraction ; d'ailleurs, l'apodisation qu'il y crée, étant fonction croissante de ξ , finit toujours par prendre des valeurs inutilement élevées ; or, à énergie totale constante, un excès d'apodisation dans une région ne s'obtient qu'au détriment des autres. C'est ainsi que, par l'application de ce critère, la région voisine du centre peut se trouver fort mal apodisée. Mieux vaut en somme réduire l'intensité diffractée lointaine dans un rapport constant. C'est ce que permettent de faire, comme nous allons le rappeler, les pupilles à bords clairs.

Soit en effet $K(\xi)$ la fonction d'apodisation, égale au rapport des contrastes fournis en chaque point ξ par la pupille apodisante \mathcal{A} d'une part et par une pupille uniforme \mathcal{A}_0 d'autre part. Nous la calculerons, comme à la page 24, à partir de l'expression des maxima $J_M(\xi)$ et $J_{0M}(\xi)$ des deux figures. Il vient (cf. pages 20 et 37) :

$$K(\xi) = \frac{J(0)}{J_M(\xi)} \Big/ \frac{J_0(0)}{J_{0M}(\xi)} = \frac{\left(0,5 \int_{-1}^{+1} A(x) dx\right)^2}{[A^{(p)}(1)]^2 : (\pi \xi)^{2p+2}} \Big/ \frac{1}{1 : \pi^2 \xi^2},$$

$$K(\xi) = \frac{\left(0,5 \int_{-1}^{+1} A(x) dx\right)^2}{[A^{(p)}(1)]^2} \times (\pi \xi)^{2p} = k (\pi \xi)^{2p}.$$

Cette formule montre :

1°) Qu'une apodisation suffisante de la région lointaine peut s'obtenir avec $p = 0$ (pupille à bords clairs) en donnant à k une valeur élevée. Cette constante représente alors le carré du quotient de l'amplitude moyenne sur la pupille par l'amplitude sur les bords. Nous verrons cette constante prendre, dans de nombreux exemples, des valeurs supérieures à 10, 100, ou même 1 000.

2°) Que, si l'apodisation fournie par une pupille à bords noirs surpasse toujours, à partir d'une valeur de ξ suffisamment grande, l'apodisation donnée par une quelconque pupille à bords clairs, il n'en va, en revanche, pas nécessairement ainsi dans une importante région intermédiaire de la figure de diffraction. Soient, en effet, une pupille à bords clairs, de constante caractéristique k_0 et une pupille

à bords opaques de constante k , telles qu'on ait $k_0 > k$. Il est facile de voir que, pour $(\pi \xi)^{2p} < k_0/k$ c'est la pupille à bords clairs qui procure l'apodisation maximum.

En résumé, il semble que les pupilles à bords noirs ne présentent aucune supériorité décisive sur les pupilles à bords clairs. Ce sont donc ces dernières, seules pratiquement réalisables, que nous considérerons en principe dans la suite.

3. Critère proposé par P. M. Duffieux, combinant les deux précédents [12]. — Ce critère présenterait l'avantage de fournir, par récurrence, à partir d'une solution médiocre, une suite ininterrompue de solutions meilleures.

J'indiquerai son principe sur un cas particulier, où il prend une forme simple, et transcrirai les formules de Duffieux dans le système de notations adopté ici.

Soit une pupille rectilinéaire $A(x)$ paire : elle est formée de deux parties symétriques, où nous supposerons que $A(x)$ varie de façon continue ; Duffieux les appelle des *liserés* par opposition aux *paliers* ou plateaux $A(x) = \text{Cte}$. La pupille que nous considérons ici n'admet pas de palier, elle se réduit à un liseré négatif (de $x = -1$ à $x = 0$) et à un liseré positif (de $x = 0$ à $x = +1$) [fig. 40].

Supposons en outre que chacun de ces liserés admette son point médian (d'abscisse $x_1 = -1/2$ ou $x_2 = +1/2$) pour centre de symétrie. De tels liserés, que Duffieux dénomme *isotropes*, ont des propriétés plus simples que les autres ⁽³²⁾.

Duffieux remarque que la pupille $A(x)$ peut être rattachée à deux pupilles auxiliaires simples, jouant un rôle important dans le calcul de l'intensité diffractée :

1°) Une *pupille de base*, d'amplitude uniforme égale à l'amplitude maximum de $A(x)$. Cette pupille a pour limites les *milieux* des liserés négatif et positif ; quand $A(x)$ ne comporte point de palier, la largeur de la pupille de base est donc *moitié* de la largeur de la pupille originale $A(x)$. Sa fonction de diffraction que nous appellerons *fonction de base* $J_b(\xi)$ est

$$J_b(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi / 2}{(\pi \xi / 2)^2} ;$$

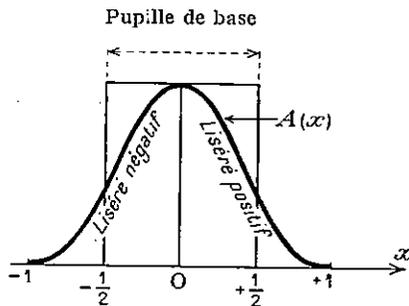


FIG. 40

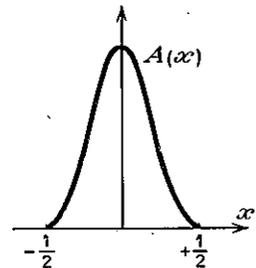


FIG. 41. — Pupille caractéristique d'un liseré isotrope.

⁽³²⁾ Notons que les pupilles à liserés isotropes ont une transparence *nulle* sur les bords.

2^o) Une *pupille caractéristique* du profil des liserés : son amplitude est liée, d'une façon qu'il est inutile de préciser ici, à la dérivée de la fonction $A(x)$ le long du liseré négatif. Sa largeur est celle d'un liseré. Si $A(x)$ n'admet point de palier, la pupille caractéristique occupe, comme la pupille de base, la moitié du domaine pupillaire original (fig. 41).

Nous appellerons sa fonction de diffraction, *fonction caractéristique* $J_c(\xi)$; c'est une fonction réelle si le liseré est isotrope.

Duffieux montre que l'intensité $J(\xi)$ diffractée par la pupille $A(x)$ s'exprime simplement par le produit $J_n(\xi) J_c(\xi)$

$$J(\xi) = J_n(\xi) J_c(\xi) = \frac{\sin^2 \frac{\pi \xi}{2}}{\left(\frac{\pi \xi}{2}\right)^2} J_c(\xi)$$

et qu'une formule de même type s'applique aux cas plus généraux suivants :

- 1) le liseré n'est pas *isotrope*,
- 2) la pupille n'est pas *rectilinéaire*, mais *circulaire*.

Voici les conséquences importantes qu'il en tire ; elles reposent sur la distinction, dans $J(\xi)$, de deux sortes de facteurs :

a) des *facteurs de structure*, analogues au facteur $\sin^2(\pi\xi/2)$, qui fournissent les zéros de $J(\xi)$;

b) des *facteurs de convergence ou de puissance*, analogues au facteur $(\pi\xi/2)^{-2}$. Ce sont des puissances négatives de ξ qui assurent la décroissance générale de la lumière diffractée.

Ceci posé, la formule $J(\xi) = J_n(\xi) J_c(\xi)$ exprime que $A(x)$ cumule les zéros et les facteurs de puissance de ses deux pupilles auxiliaires ; $A(x)$ est donc apodisée par rapport à la pupille *uniforme* de base.

La formule montre en outre qu'on peut *utiliser* $A(x)$ pour définir une solution encore meilleure : si nous choisissons, en effet, $J(\xi)$ comme fonction caractéristique d'une nouvelle pupille, cette pupille possèdera tous les facteurs de structure et de convergence de $A(x)$, joints à ceux de sa propre pupille uniforme de base. D'où la règle de récurrence indiquée par Duffieux :

« Toute pupille connue peut être utilisée pour définir une nouvelle pupille à liseré où la décroissance générale de la lumière diffractée sera plus rapide et où le nombre des zéros sera plus élevé, la nouvelle pupille cumulant les facteurs de puissance et les zéros de cette première pupille et de sa pupille de base ».

Discussion. — Nous allons discuter cette proposition qui, en ce qui concerne le cumul des zéros, ne nous paraît pas exacte. L'erreur viendrait, semble-t-il, de ce que le problème de l'apodisation ne se pose que par rapport à la pupille normale $A_0(x)$, de mêmes dimensions que $A(x)$ et non par rapport à la pupille de base, toujours moins large (exactement deux fois moins large, si la pupille est sans palier). Nous allons montrer que l'écartement des zéros, dans les figures de diffraction correspondant à $A_0(x)$ et à $A(x)$, est, en moyenne, le même.

Soit, en effet, d'une façon générale, L la largeur de la pupille de base, l la largeur de la pupille caractéristique [égale à la largeur d'un liseré de $A(x)$], L_0 la largeur commune de la pupille $A(x)$ et de la pupille $A_0(x)$ uniforme. On a $L + l = L_0$.

On peut admettre que

l'intervalle *moyen des zéros* est, dans la figure $J_n(\xi)$, proportionnel à $1/L$,

» » dans la figure $J_c(\xi)$, proportionnel à $1/l$,

» » dans la figure $J_0(\xi)$, proportionnel à $1/L_0$.

Soit \mathcal{O} un certain domaine de la figure de diffraction, de largeur d , dans lequel nous nous proposons de « compter » les zéros.

Dans \mathcal{O} , $J_n(\xi)$ possède kdL zéros, $J_c(\xi)$ possède kdl zéros, $J(\xi)$ possède, d'après la formule de Duffieux, $kdL + kdl$ zéros, $J_0(\xi)$ possède kdL_0 zéros ($k = \text{Cte}$).

Mais $kd(L + l) = kdL_0$, de sorte que le nombre total des zéros est le même pour $J(\xi)$ et $J_0(\xi)$.

Application à une pupille sans palier. — Nous vérifierons ce résultat dans le cas particulier où le palier de $A(x)$ est de largeur nulle.

$$\text{On a alors } J_0(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} = \cos^2 \frac{\pi \xi}{2} \frac{\sin^2 \frac{\pi \xi}{2}}{\left(\frac{\pi \xi}{2}\right)^2} = \cos^2 \frac{\pi \xi}{2} J_n(\xi)$$

$$\text{et } J(\xi) = J_c(\xi) J_n(\xi).$$

Les zéros de $J_0(\xi)$ et de $J(\xi)$ correspondent donc d'une part aux zéros de $J_n(\xi)$, d'autre part à ceux des fonctions $\cos^2(\pi \xi/2)$ et $J_c(\xi)$, fonctions dont les périodes ou les pseudo-périodes sont égales. Ces fonctions peuvent se relier en effet à deux pupilles dont les largeurs sont les mêmes, puisqu'elles s'égalent à la largeur d'un liseré.

En conclusion, « une pupille à liserés présente, en règle générale, des zéros de même écartement moyen que la pupille uniforme de mêmes dimensions »⁽³³⁾. La règle de récurrence de Duffieux ne peut donc être appliquée, en ce qui concerne les zéros. Elle peut servir à augmenter la convergence de $J(\xi)$, mais nous avons déjà signalé les inconvénients que cela présentait (pupilles à bords noirs).

4. Critère relatif aux coefficients d'apodisation moyenne. — Nous avons défini (p. 22) trois facteurs correspondant à l'intensité moyenne des pieds sur un intervalle donné, à savoir

un facteur de dispersion \mathcal{D} (valant \mathcal{D}_0 pour la pupille uniforme),

un facteur d'étalement \mathcal{L} (» \mathcal{L}_0 » »),

un facteur de pieds \mathcal{P} (» $\mathcal{P}_0 = 1$ » »).

L'apodisation *moyenne* d'un écran correspond aux inégalités

⁽³³⁾ à moins, naturellement, d'un conditionnement spécial du liseré produisant, comme nous l'avons montré plus haut, une certaine accumulation *locale* de zéros. Mais Duffieux traite du cas *général*.

$$(28) \quad \mathfrak{D} < \mathfrak{D}_0, \quad \mathfrak{L} < \mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{F} < \mathfrak{F}_0.$$

Soit $A_n(x) = c_0 f_0(x) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(x)$ une famille d'écrans parmi lesquels nous désirons faire choix d'un ou de plusieurs écrans A apodisés. L'application de l'une des inégalités (28) fournira de tels écrans, pourvu que nous sachions exprimer les facteurs $\mathfrak{D}, \mathfrak{L}$ ou \mathfrak{F} en fonction des coefficients c_p de l'écran « courant » de la famille.

Mais la détermination des facteurs de dispersion, d'étalement ou de pieds de la *figure de diffraction* suppose que nous sachions d'abord calculer cette dernière.

Comme nous l'avons vu, on a

$$\mathfrak{A}_n(\xi) = c_0 \varphi_0(\xi) + \dots + c_{n-1} \varphi_{n-1}(\xi).$$

Mais cette expression ne sera pratiquement utilisable que si les fonctions de base $\varphi_p(\xi)$ qui y figurent [transformées des $f_p(x)$] se présentent sous forme algébrique ou transcendante simple.

Ce sont de telles fonctions $f_p(x), f_p(r)$ et leurs conjuguées $\varphi_p(\xi), \varphi_p(\rho)$ que nous allons maintenant définir.

Ces fonctions se prêtent d'ailleurs à d'autres applications que l'apodisation. On peut, en effet, utiliser leurs combinaisons, finies ou non, pour représenter une pupille *arbitraire* et sa figure de diffraction. Nous nous placerons dans cette perspective plus générale et traiterons maintenant du calcul de $\mathfrak{A}(\xi)$ ou $\mathfrak{A}(\rho)$ en fonction des coefficients d'un développement en série convergent de $A(x)$ ou $A(r)$.

**II. Développements en série des fonctions d'amplitude diffractée $\mathfrak{A}(\xi), \mathfrak{A}(\rho)$.
Modes et conditions de convergence.**

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(x) = c_0 f_0(x) + \dots + c_p f_p(x) + \dots, \quad (n, \text{ indice fini ou non}) \\ A_n(r) = c_0 f_0(r) + \dots + c_p f_p(r) + \dots, \end{array} \right.$$

un développement en série convergent de $A(x)$ ou $A(r)$ suivant un système de fonctions de base

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x), \dots, f_p(x), \dots \text{ avec } f_p(x) \equiv 0 \text{ pour } |x| > 1, \\ f_0(r), \dots, f_p(r), \dots \text{ avec } f_p(r) \equiv 0 \text{ pour } r > 1. \end{array} \right.$$

Soit $\mathfrak{A}_n(\xi)$ ou $\mathfrak{A}_n(\rho)$ le développement associé

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_n(\xi) = c_0 \varphi_0(\xi) + \dots + c_p \varphi_p(\xi) + \dots \\ \mathfrak{A}_n(\rho) = c_0 \varphi_0(\rho) + \dots + c_p \varphi_p(\rho) + \dots \end{array} \right.$$

les bases φ_p étant les transformées, par l'intégrale de diffraction, des f_p ⁽³⁴⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x) \cos \pi x \xi dx \quad [f_p(x) \text{ fonction } \textit{paire}] \\ \varphi_p(\rho) = \pi \int_0^{+\infty} f_p(r) J_0(\pi r \rho) r dr. \end{array} \right.$$

⁽³⁴⁾ Nous prenons ici les transformations de diffraction sous la forme (7) qui permet une application commode du théorème de Plancherel (p. 16).

Si $A(x)$ ou $A(r)$ s'identifie à son développement limité à l'ordre n , sa transformée $\mathcal{A}_b(\xi)$ ou $\mathcal{A}_b(\rho)$ ne diffère évidemment pas de $\mathcal{A}_{b_n}(\xi)$ ou de $\mathcal{A}_{b_n}(\rho)$. Par contre si le développement de $\mathcal{A}_b(x)$ comporte un nombre infini de termes, il n'est pas certain a priori que le développement associé $\mathcal{A}_{b_n}(\xi)$ ou $\mathcal{A}_{b_n}(\rho)$ converge et que sa somme soit égale à $\mathcal{A}_b(\xi)$ ou à $\mathcal{A}_b(\rho)$. Mais il en va heureusement ainsi pour certains modes de convergence que la transformation de diffraction « conserve ».

1. Convergence en moyenne. — 1. Distance en moyenne. Normes et produits scalaires. — Les fonctions d'amplitude $A(x)$ ou $A(r)$ sont des fonctions bornées, continues sur le domaine de la pupille, ou n'admettant que des points de discontinuité de première espèce. La différence de deux de ces fonctions $A_1(x) - A_2(x)$ ou $A_1(r) - A_2(r)$ jouit évidemment des mêmes propriétés, ainsi que son carré, qui est donc intégrable sur le domaine fini D de la pupille. Or, on peut se servir de cette intégrale

$$\delta^2 = \int_{-1}^{+1} [A_1(x) - A_2(x)]^2 dx \quad \text{ou} \quad \delta^2 = \int_0^{+1} [A_1(r) - A_2(r)]^2 r dr$$

pour définir une *distance en moyenne* δ sur D de ces fonctions.

On voit que la distance en moyenne ainsi introduite correspond, dans le cas des pupilles rectilinéaires à la définition couramment adoptée ⁽³⁵⁾, tandis qu'en ce qui concerne les pupilles circulaires, il s'agit d'une distance généralisée, ou *distance en moyenne, relativement à r*.

D'ailleurs ces intégrales de distance sont liées à d'autres intégrales :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} [A_1(x) - A_2(x)]^2 dx &= \int_{-1}^{+1} A_1^2(x) dx + \\ &+ \int_{-1}^{+1} A_2^2(x) dx - 2 \int_{-1}^{+1} A_1(x) A_2(x) dx \\ \int_0^{+1} [A_1(r) - A_2(r)]^2 r dr &= \int_0^{+1} A_1^2(r) r dr + \\ &+ \int_0^{+1} A_2^2(r) r dr - 2 \int_0^{+1} A_1(r) A_2(r) r dr \end{aligned} \right.$$

$\int_D A_1^2(x) dx$ ou $\int_D A_2^2(x) dx$ étant habituellement appelées « normes » de $A_1(x)$ ou de $A_2(x)$, nous dirons par analogie que $\int_D A_1^2(r) r dr$ ou $\int_D A_2^2(r) r dr$ sont les *normes relativement à r* de $A_1(r)$ ou de $A_2(r)$. Enfin, $\int_D A_1(x) A_2(x) dx$

⁽³⁵⁾ C'est la métrique habituelle de l'espace linéaire des fonctions généralement continues sur D .

est un *produit scalaire* de $A_1(x)$ par $A_2(x)$. Nous dirons donc que $\int_D A_1(r) A_2(r) r dr$ est un *produit scalaire relativement à r* de $A_1(r)$ par $A_2(r)$ ⁽³⁶⁾.

D'ailleurs, ces normes et ces produits scalaires généralisés se confondent avec les normes et les produits scalaires au sens habituel des fonctions $\sqrt{r} A_1(r)$ et $\sqrt{r} A_2(r)$.

Ces définitions se transportent sans difficulté aux fonctions d'amplitude diffractée, bien que leur domaine soit infini. Nous savons en effet que la transformation de diffraction « conserve » les énergies, c'est-à-dire les normes, simples ou généralisées,

$$\begin{cases} N [A(x)] = \int_{-1}^{+1} A^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^2(\xi) d\xi = N [\mathcal{A}(\xi)] \\ N_r [A(r)] = \int_0^1 A^2(r) r dr = \int_0^{+\infty} \mathcal{A}^2(\rho) \rho d\rho = N_\rho [\mathcal{A}(\rho)] \end{cases}$$

Mais un « opérateur » qui conserve les normes, conserve aussi les produits scalaires. Nous répéterons ici, à propos des produits scalaires généralisés, la démonstration qu'on donne habituellement de cette propriété pour les produits scalaires simples. Soient donc $\mathcal{A}_1(\rho)$ et $\mathcal{A}_2(\rho)$ les transformées de deux fonctions $A_1(r)$ et $A_2(r)$.

On a

$$\begin{aligned} [A_1(r), A_2(r)]_r &= \int_0^1 A_1(r) A_2(r) r dr \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 [A_1(r) + A_2(r)]^2 r dr - \int_0^1 A_1^2(r) r dr - \int_0^1 A_2^2(r) r dr \right\} \\ [A_1(r), A_2(r)]_r &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{+\infty} [\mathcal{A}_1(\rho) + \mathcal{A}_2(\rho)]^2 \rho d\rho - \int_0^{+\infty} \mathcal{A}_1^2(\rho) \rho d\rho - \int_0^{+\infty} \mathcal{A}_2^2(\rho) \rho d\rho \right\} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathcal{A}_1(\rho) \mathcal{A}_2(\rho) \rho d\rho \\ [A_1(r), A_2(r)]_r &= [\mathcal{A}_1(\rho), \mathcal{A}_2(\rho)]_\rho \end{aligned}$$

Enfin cette conservation des normes entraîne la convergence en moyenne, *simultanée*, des développements des fonctions d'amplitude pupillaire et d'amplitude diffractée ; l'écart moyen entre chaque fonction d'amplitude pupillaire $A(x)$ [ou $A(r)$] et son développement — supposé convergent — étant, à tous les ordres, égal à l'écart des fonctions d'amplitude diffractée correspondantes, l'annulation de l'un entraîne celle de l'autre. En particulier pour $A(r)$ et $\mathcal{A}(\rho)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [A(r) - A_n(r)]^2 r dr = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} [\mathcal{A}(\rho) - \mathcal{A}_n(\rho)]^2 \rho d\rho = 0.$$

⁽³⁶⁾ Nous noterons la norme de $A(x)$, $N[A(x)]$, et la norme relativement à r de $A(r)$ $N_r[A(r)]$. Nous noterons de même le produit scalaire de $A_1(x)$ par $A_2(x)$, $[A_1(x), A_2(x)]$ et le produit scalaire relativement à r de $A_1(r)$ par $A_2(r)$, $[A_1(r), A_2(r)]_r$.

Ceci correspond, rappelons-le, à la convergence en moyenne au sens habituel de $\sqrt{r} A_n(r)$ vers $\sqrt{r} A(r)$ et de $\sqrt{\rho} \mathcal{A}_n(\rho)$ vers $\sqrt{\rho} \mathcal{A}(\rho)$.

2. Systèmes de fonctions orthonormées. — Nous dirons que des fonctions $f_0(x), \dots, f_p(x)$ ou $f_0(r), \dots, f_p(r)$ sont deux à deux orthogonales si leurs produits scalaires — simples ou généralisés — sont nuls.

Nous dirons qu'elles sont normées si leur norme — simple ou généralisée — est égale à l'unité.

Ce qui précède montre que les systèmes φ_p , associés aux systèmes f_p , soit

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_0(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} f_0(x) \cos \pi x \xi \, dx, \quad \dots, \quad \varphi_p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} f_p(x) \cos \pi x \xi \, dx, \quad \dots \\ \varphi_0(\rho) &= \pi \int_0^1 f_0(r) J_0(\pi r \rho) r \, dr, \quad \dots, \quad \varphi_p(\rho) = \pi \int_0^1 f_p(r) J_p(\pi r \rho) r \, dr, \quad \dots \end{aligned} \right.$$

sont également orthonormés.

3. Approximation en moyenne, à l'ordre n , d'une fonction, à l'aide d'un système orthonormé. — On dit généralement qu'une combinaison linéaire $A_n(x)$ de n fonctions $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$

$$A_n(x) = c_0 f_0(x) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(x) \quad (c_i, \text{coefficients})$$

constitue une approximation en moyenne de $A(x)$, si ses coefficients sont choisis de telle façon que la distance en moyenne de $A(x)$ à $A_n(x)$ soit *minimum*.

Parallèlement nous dirons que

$$A_n(r) = c_0 f_0(r) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(r)$$

constitue une approximation en moyenne de $A(r)$ si ses coefficients sont tels que la norme, *relativement à r* , de $A(r) - A_n(r)$, c'est-à-dire $\int_0^1 [A(r) - A_n(r)]^2 r \, dr$, soit *minimum*.

On montre que si les fonctions $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$ constituent un système orthonormé, les coefficients d'une approximation en moyenne de $A(x)$ sont simplement donnés par les produits scalaires de $A(x)$ et de chacune de ces « bases »

$$c_p = \int_{-1}^{+1} A(x) f_p(x) \, dx.$$

Ces coefficients particuliers sont dits *les composantes* de $A(x)$ ⁽³⁷⁾.

On montrerait de même que les produits scalaires *généralisés*

$$c_p = \int_0^1 A(r) f_p(r) r \, dr$$

constituent, pour $A(r)$, les *composantes* d'une approximation en moyenne *relativement à r* ⁽³⁸⁾.

⁽³⁷⁾ par analogie avec l'espace vectoriel rapporté à une base de vecteurs unitaires orthogonaux.

⁽³⁸⁾ La démonstration peut être calquée sur celle qui concerne les approximations en moyenne ordinaires. Cf., par exemple, A. LICHTNEROWICZ, Algèbre et Analyse linéaires [22].

La transformation de diffraction, conservant les produits scalaires, conserve à ces coefficients le caractère de *composantes* ; ils deviennent les composantes de l'approximation en moyenne de $\mathcal{A}_b(\xi)$ ou de $\mathcal{A}_b(\rho)$ à l'aide du système orthonormé $\varphi_p(\xi)$ ou $\varphi_p(\rho)$. La distance en moyenne

$$\delta^2 = N[\mathcal{A}_b(\xi) - \mathcal{A}_n(\xi)] \quad \text{ou} \quad \delta_p^2 = N_p[\mathcal{A}_b(\rho) - \mathcal{A}_n(\rho)]$$

est donc plus faible qu'avec toute autre combinaison des $\varphi_p(\xi)$ ou des $\varphi_p(\rho)$. Elle est plus faible, notamment, que si l'on avait approché $A(x)$ ou $A(r)$ à l'aide d'une combinaison des $f_p(x)$ ou $f_p(r)$ *n* fois sécante [c'est-à-dire passant en *n* points de $A(x)$ ou $A(r)$].

4. Systèmes orthonormés complets. — La suite des approximations en moyenne successives (c'est-à-dire pour un nombre croissant de fonctions du système orthonormé choisi) d'une fonction $A(x)$ ou $A(r)$ converge toujours en moyenne.

Et il existe certains systèmes $f_p(x)$ ou $f_p(r)$, dits *systèmes complets*, tels que la fonction $A_{\text{lim}}(x)$ ou $A_{\text{lim}}(r)$, vers laquelle la suite $A_n(x)$ ou $A_n(r)$ converge, ne diffère point de la fonction originale $A(x)$ ou $A(r)$ ⁽²⁹⁾. Les systèmes transformés $\varphi_p(\xi)$ ou $\varphi_p(\rho)$ sont alors nécessairement complets, eux aussi, *relativement aux fonctions de diffraction*. C'est naturellement à de tels systèmes que nous aurons recours.

5. Décroissance des écarts moyens successifs entre une fonction et ses approximations. — Tant que l'écart moyen entre une fonction et ses approximations ne s'est point annulé, il décroît régulièrement avec *n*, ne demeurant que très exceptionnellement stationnaire pour deux ordres successifs. C'est là un nouveau caractère intéressant des développements en question. Le raisonnement qui le fait apparaître interviendra souvent par la suite.

Soit A_n l'approximation de A à l'ordre *n*. On peut considérer A_n comme une combinaison d'ordre $n + 1$, \bar{A}_{n+1} , dont le $(n+1)^{\text{e}}$ coefficient serait nul. Mais généralement, la $(n + 1)^{\text{e}}$ *composante* de A n'est pas nulle, de sorte que \bar{A}_{n+1} ne s'identifie pas à l'approximation en moyenne A_{n+1} . Or, à l'ordre $n + 1$, et par constitution, A_{n+1} correspond à un écart minimum sur A . Ainsi $\bar{A}_{n+1} \equiv A_n$ ne peut que s'écarter davantage de A que A_{n+1} .

6. Limitation de la pupille. — Les fonctions d'amplitude pupillaire $A(x)$ constituent, sur $-\infty < x < +\infty$ ou sur $0 < r < +\infty$ un ensemble *particulier* de fonctions, l'ensemble des fonctions nulles en dehors du domaine de la pupille. Il suffit donc, pour qu'un système de bases f_p soit complet par rapport à cet ensemble de fonctions, qu'il le soit sur $-1 \leq x \leq +1$, ou sur $0 \leq r \leq +1$, quitte à prolonger ce système par des fonctions nulles en dehors de ce domaine.

Le système associé $\varphi_p(\xi)$ ou $\varphi_p(\rho)$ ne saurait alors être complet sur $-\infty < \xi < +\infty$, ou sur $0 < \rho < +\infty$, relativement à un ensemble *arbitraire* de fonctions : on ne peut

⁽²⁹⁾ Cf., par exemple, A. LICHTNEROWICZ, Algèbre et Analyse linéaires [22]. Les démonstrations s'étendent facilement au cas de la convergence *relativement à r*.

approcher « complètement » avec son aide qu'une fonction $\mathcal{A}(\rho)$ ou $\mathcal{A}(\xi)$ dont la transformée par l'intégrale réciproque de diffraction est nulle en dehors de $-1 \leq x \leq +1$ ou de $0 \leq r \leq +1$. Le système des $\varphi_p(\xi)$ ou des $\varphi_p(\rho)$ n'est donc complet que par rapport aux transformées des « fonctions de pupilles ».

Nous donnerons dans la suite des exemples de tels systèmes. Les développements de $A(x)$ ou de $A(r)$ obtenus grâce à eux convergent d'ailleurs, non seulement en moyenne, mais aussi au sens de la convergence ponctuelle ordinaire et même, pourvu que $A(x)$ ou $A(r)$ soient des fonctions continues, au sens de la convergence uniforme.

2. Convergence uniforme. — Dans ce dernier cas, on peut affirmer que les développements des fonctions associées $\mathcal{A}(\xi)$ ou $\mathcal{A}(\rho)$ convergent eux-mêmes uniformément.

La « conservation » par la transformation de diffraction de la convergence uniforme utilise simplement le fait que les noyaux intégraux $\cos \pi x \xi$ ou $J_0(\pi r \rho)$ sont bornés sur tout l'intervalle d'intégration.

III. Développements de $A(x)$ en série de Fourier et de $A(r)$ en série de Dini-Bessel.

Développements associés de $\mathcal{A}(\xi)$ et de $\mathcal{A}(\rho)$

Nous proposerons, dans ce chapitre, deux exemples de systèmes de fonctions $f_p(x)$ et $f_p(r)$ pouvant servir au développement des fonctions de transparence $A(x)$ et $A(r)$. Ces systèmes présentent, nous le verrons, d'étroites analogies.

1. Pupilles rectilinéaires. — Le premier exemple est celui du développement de $A(x)$ en série de Fourier sur l'intervalle $-1 \leq x \leq +1$. Nous rappellerons brièvement le principe de ce développement qui a déjà été signalé et utilisé dans une publication antérieure [9].

Il fait appel au système suivant, orthonormé sur $-\infty < x < +\infty$ et complet relativement aux fonctions $A(x)$ paires et nulles en dehors de l'intervalle $-1 \leq x \leq +1$, fonctions seules intéressantes en apodisation (cf. p. 19) :

$$\begin{cases} f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} & , & f_1(x) = \cos \pi x & , & \dots & , & f_p(x) = \cos p\pi x & \text{ pour } -1 \leq x \leq 1 \\ f_0(x) = 0 & , & f_1(x) = 0 & , & \dots & , & f_p(x) = 0 & \text{ pour } |x| > 1 \end{cases}$$

Le système associé, orthonormé sur $-\infty < \xi < +\infty$, est

$$\begin{cases} \varphi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \pi x \xi \, dx = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \\ \varphi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \cos \pi x \cos \pi x \xi \, dx = -\sqrt{2} \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} \\ \dots \\ \varphi_p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \cos p \pi x \cos \pi x \xi \, dx = (-1)^p \sqrt{2} \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \frac{\xi^2}{\xi^2 - p^2} \end{cases}$$

Les composantes c_0, \dots, c_p du développement de $A(x)$ suivant les fonctions $f_p(x)$ sont données par

$$c_p = \int_{-1}^{+1} A(x) f_p(x) dx = \int_{-1}^{+1} A(x) \cos p \pi x dx.$$

A l'approximation en moyenne, à l'ordre n , de $A(x)$

$$A_n(x) = c_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + c_1 \cos \pi x + \dots + c_{n-1} \cos (n-1) \pi x,$$

correspond l'approximation en moyenne, au même ordre, de $\mathcal{A}(\xi)$

$$\mathcal{A}_n(\xi) = c_0 \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \left\{ 1 - \frac{c_1}{c_0} \sqrt{2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} + \dots + (-1)^n \frac{c_{n-1}}{c_0} \sqrt{2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - (n-1)^2} \right\}.$$

Sous cette forme, le calcul de l'amplitude diffractée est particulièrement facile ; il se réduit à l'évaluation du produit par

$$K^{-1/2}(\xi) = 1 - \frac{c_1}{c_0} \sqrt{2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} + \dots + (-1)^n \frac{c_{n-1}}{c_0} \sqrt{2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - (n-1)^2}$$

— c'est-à-dire par une simple combinaison de fractions rationnelles — de la fonction de diffraction $c_0 \sin \pi \xi / \pi \xi$, caractéristique d'une pupille de transparence uniforme (40).

1. Convergence des développements au sens de la convergence ponctuelle. — La suite des approximations en moyenne de $A(x)$ converge, en tous les points de l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, vers

$$\frac{1}{2} \left\{ A(x-0) + A(x+0) \right\} \quad \text{ou vers } A(-1+0) \text{ si } x = -1, \quad \text{ou vers } A(1-0) \text{ si } x = 1$$

pourvu que

- 1) $A(x)$ soit à variations bornées,
- 2) qu'elle n'admette que des points de discontinuité de première espèce.

Toutes ces conditions sont toujours vérifiées.

En outre, cette convergence est uniforme si $A(x)$ est continue. Dans ces conditions, on peut affirmer que $\mathcal{A}_n(\xi)$ converge uniformément vers $\mathcal{A}(\xi)$.

2. Relation entre la fonction de diffraction et les composantes de la fonction de transparence. — Soit $\mathcal{A}(\xi)$ l'amplitude diffractée, avec un coefficient tel que son maximum absolu (pour $\xi = 0$ et $A(x) \equiv 1$) vaille l'unité (cf. form. 8)

$$\mathcal{A}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A(x) \cos \pi x \xi dx.$$

$$^{(40)} \text{ On a } K(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi^2 \xi^2} ; K(\xi) \text{ représente donc la fonction d'apodisation définie page 21.}$$

La composante c_p de $A(x)$ est donnée par

$$c_p = \int_{-1}^{+1} A(x) \cos p \pi x \, dx = 2 \mathcal{A}_b(p) \quad \text{pour } p > 0$$

$$\text{et par } c_0 = \int_{-1}^{+1} A(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \sqrt{2} \mathcal{A}_b(0) \quad \text{pour } p = 0$$

On pouvait s'attendre à ce résultat. En effet, à cause du choix particulier que nous avons fait des fonctions f_p , bases de développement pour $A(x)$, les coefficients c_p constituent les termes du spectre *discontinu* de $A(x)$, analysé dans le domaine *fini* $-1 \leq x \leq +1$. Mais $\mathcal{A}_b(\xi)$ représente le spectre continu de $A(x)$, analysé dans le domaine $-\infty < x < +\infty$. Or, c'est une propriété bien connue [11] que le spectre discontinu d'une fonction constitue une sélection de points de son spectre continu (fig. 42).

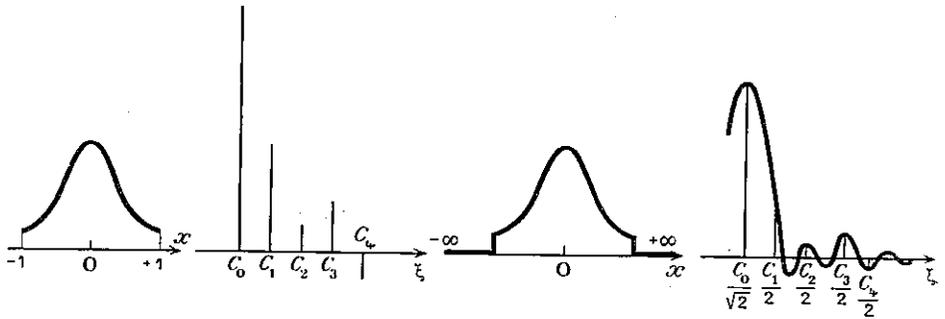


FIG. 42.

$A(x)$	Spectre discontinu de $A(x)$	$A(x)$	$\mathcal{A}_b(\xi)$
$-1 \leq x \leq +1$	[composantes de l'amplitude pupillaire $A(x)$]	$-\infty < x < +\infty$	Spectre continu de $A(x)$ [amplitude diffractée]

Remplaçons maintenant $A(x)$ et $\mathcal{A}_b(\xi)$ par leurs approximations en moyenne $A_n(x)$ et $\mathcal{A}_{bn}(\xi)$. $A_n(x)$ analysé sur le domaine fini $-1 \leq x \leq +1$ admet un spectre discontinu dont les termes d'ordre $p \leq n-1$ sont égaux aux termes de même indice de $A(x)$, ceux d'ordre supérieur étant nuls. Analysé sur $-\infty < x < +\infty$, il admet $\mathcal{A}_{bn}(\xi)$ pour spectre continu.

On a donc

$$\mathcal{A}_{bn}(p) = \frac{c_p}{2} \quad \text{pour } 0 < p \leq n-1 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{bn}(p) = 0 \quad \text{pour } p > n-1,$$

$$\mathcal{A}_{bn}(0) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \quad \text{pour } p = 0.$$

Remarquons que, pour la *pupille de transparence uniforme*, tous les coefficients autres que c_0 sont nuls, ce qui confère à $\mathcal{A}_b(\xi)$ une suite bien connue de zéros équidistants. C'est la seule pupille jouissant de cette propriété. Toutefois une pupille à *spectre limité* possèdera, dans sa figure de diffraction, une infinité de zéros

qui lui seront, à partir d'un certain rang, communs avec la pupille uniforme. Une pupille à *spectre illimité*, au contraire, présentera généralement un *déplacement des zéros*.

2. **Pupilles circulaires.** — Comparons les formules donnant l'amplitude diffractée dans le cas linéaire et dans le cas circulaire

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} A(x) \cos \pi x \xi \, dx, \\ \mathcal{A}(\rho) &= \pi \int_0^1 A(r) J_0(\pi r \rho) r \, dr. \end{aligned} \right.$$

Le noyau intégral $\cos \pi x \xi$ est remplacé dans $\mathcal{A}(\rho)$ par $J_0(\pi r \rho)$ en même temps que l'élément différentiel dx devient $r \, dr$. Or, nous venons de calculer les amplitudes diffractées $\varphi_p(\xi)$ pour des fonctions $f_p(x) = \cos p \pi x$, et, plus généralement, nous aurions su le faire pour $f(x) = \cos kx$, c'est-à-dire pour des fonctions ayant la forme du noyau $\cos \pi \xi x$. Considérons donc, par analogie, des fonctions $f_k(r) = J_0(kr)$ de même type que le noyau $J_0(\pi r \rho)$. L'intégrale de diffraction correspondante appartient à un type d'intégrales que, depuis Lommel, on sait calculer ⁽⁴¹⁾.

1. **Calcul de l'intégrale de diffraction pour $f_k(r) = J_0(kr)$.** — Indiquons brièvement comment se calcule l'intégrale de Lommel d'ordre zéro

$$\mathcal{A}_k(\rho) = \pi \int_0^1 J_0(kr) J_0(\pi r \rho) r \, dr.$$

Par définition, $J_0(r)$ est une fonction $f(r)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + f = 0.$$

$J_0(kr)$, que j'appellerai $y(r)$, vérifie donc l'équation

$$\frac{1}{k^2} \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{k^2 r} \frac{dy}{dr} + y = 0,$$

ou encore

$$(29) \quad r \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{dy}{dr} + k^2 r y = 0.$$

De même, $J_0(\pi r \rho)$, que j'appellerai $z(r)$, vérifie l'équation

$$(30) \quad r \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{dz}{dr} + \pi^2 \rho^2 r z = 0.$$

⁽⁴¹⁾ D'une façon générale, une intégrale de Lommel d'ordre ν est de la forme

$$I = \int_0^w J_\nu(k \omega) J_\nu(l \omega) \omega \, d\omega, \quad \text{où } J_\nu(\omega) \text{ représente la fonction de Bessel d'ordre } \nu.$$

Nous saurions calculer l'intégrale

$$A_{\rho}(\rho) = \pi \int_0^t J_0(kr) J_0(\pi r \rho) r dr = \pi \int_0^t y z r dr$$

si l'élément $y z r dr$ s'y présentait comme une différentielle exacte. Or, on peut le mettre sous cette forme en soustrayant membre à membre les équations (29) et (30) après les avoir multipliées, la première par z , et la seconde par y

$$zr \frac{d^2 y}{dr^2} - ry \frac{d^2 z}{dr^2} + z \frac{dy}{dr} - y \frac{dz}{dr} + y z r (k^2 - \pi^2 \rho^2) = 0$$

ou

$$(31) \quad y z r = \frac{1}{\pi^2 \rho^2 - k^2} \frac{d}{dr} \left\{ r \left(z \frac{dy}{dr} - y \frac{dz}{dr} \right) \right\}.$$

Remplaçons maintenant y par $J_0(kr)$, z par $J_0(\pi r \rho)$, multiplions par πdr l'équation (31) et intégrons-la membre à membre entre 0 et t :

$$A_{\rho}(\rho) = \pi \int_0^t J_0(kr) J_0(\pi r \rho) r dr = \frac{\pi t}{\pi^2 \rho^2 - k^2} \left\{ J_0(\pi \rho t) \left(\frac{d J_0(kr)}{dr} \right)_{r=t} - J_0(kt) \left(\frac{d J_0(\pi \rho r)}{dr} \right)_{r=t} \right\}$$

mais $\frac{d J_0(w)}{dw} = -J_1(w)$ et $\frac{d J_0(kw)}{dw} = -k J_1(w)$, d'où

$$(32) \quad A_{\rho}(\rho) = \frac{\pi t}{\pi^2 \rho^2 - k^2} \left\{ \pi \rho J_0(kt) J_1(\pi \rho t) - k J_0(\pi \rho t) J_1(kt) \right\}.$$

Enfin, pour $t = 1$,

$$(33) \quad A_{\rho}(\rho) = \pi \int_0^1 J_0(kr) J_0(\pi r \rho) r dr = \frac{\pi}{\pi^2 \rho^2 - k^2} \left[\pi \rho J_0(k) J_1(\pi \rho) - k J_0(\pi \rho) J_1(k) \right] \quad (42).$$

Cette formule utilise, comme fonctions de Bessel, les seules fonctions fondamentales J_0 et J_1 , dont il existe des tables complètes.

Pourtant, elle peut encore se simplifier, pourvu que k prenne certaines valeurs privilégiées. On peut en effet annuler soit $J_0(k)$ en égalant k à l'une des racines positives k_p de $J_0(w) = 0$, soit $J_1(k)$ en égalant k à l'une des racines positive ou nulle λ_p de $J_1(w) = 0$.

Les fonctions $J_0(k_p r)$ et $J_0(\lambda_p r)$ donnent naissance, comme nous allons le voir, à deux systèmes différents de développements de $A(r)$. Le second $J_0(\lambda_p r)$ constitue le correspondant exact du système rectilinéaire $\cos p \pi x$. Comme c'est, de beaucoup, le plus important, nous l'étudierons en premier.

(42) En remplaçant $\pi \rho$ par un paramètre l , on obtient la formule (33 bis) qui nous servira dans la suite.

$$(33 \text{ bis}) \quad \int_0^1 J_0(kr) J_0(lr) r dr = \frac{1}{l^2 - k^2} \left[l J_0(k) J_1(l) - k J_0(l) J_1(k) \right].$$

1) Le système $J_0(\lambda_p r)$ est orthogonal relativement à r , sur l'intervalle $0 \leq r \leq 1$. — Soit le système de fonctions :

$$J_0(\lambda_0 r) \equiv J_0(0) = 1, J_0(\lambda_1 r), \dots, J_0(\lambda_p r), \dots$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les racines, positives et nulle, de $J_1(\omega) = 0$.

Pour montrer qu'il est orthogonal, il suffit de calculer les produits scalaires $\int_0^1 J_0(\lambda_p r) J_0(\lambda_q r) r dr$ à l'aide de l'équation (33 bis) où l'on posera $k = \lambda_p$, $l = \lambda_q$; on trouve

$$[J_0(\lambda_p r), J_0(\lambda_q r)]_r = \frac{1}{\lambda_q^2 - \lambda_p^2} [\lambda_q J_0(\lambda_p) J_1(\lambda_q) - \lambda_p J_0(\lambda_q) J_1(\lambda_p)] = 0$$

puisque $J_1(\lambda_q) = J_1(\lambda_p) = 0$.

2) Le système $J_0(\lambda_p r)$ peut être normé relativement à r sur l'intervalle $0 \leq r \leq 1$. — Nous calculerons la norme de $J_0(\lambda_p r)$ par un passage à la limite :

$$N_r [J_0(\lambda_p r)] = \int_0^1 J_0(\lambda_p r) J_0(\lambda_p r) r dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 J_0(\lambda_p r) J_0[(\lambda_p + \varepsilon) r] r dr.$$

L'équation (33 bis), où l'on pose $k = \lambda_p$, $l = \lambda_p + \varepsilon$ donne

$$N_r [J_0(\lambda_p r)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{(\lambda_p + \varepsilon) J_0(\lambda_p) J_1(\lambda_p + \varepsilon)}{(\lambda_p + \varepsilon)^2 - \lambda_p^2} \right\},$$

$$N_r [J_0(\lambda_p r)] \sim \frac{\lambda_p J_0(\lambda_p) \varepsilon J_1'(\lambda_p)}{2 \varepsilon \lambda_p}.$$

Mais, d'après une formule de récurrence, classique dans la théorie des fonctions de Bessel,

$$\varepsilon J_1'(\lambda_p) = -J_1(\lambda_p) + \varepsilon J_0(\lambda_p) = \varepsilon J_0(\lambda_p), \quad \text{d'où}$$

$$N_r [J_0(\lambda_p r)] = \frac{J_0^2(\lambda_p)}{2}.$$

Le système suivant est donc orthonormé, relativement à r , sur $0 \leq r \leq 1$:

$$(34) \quad \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_0)} J_0(\lambda_0 r) = \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_1)} J_0(\lambda_1 r), \dots, \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_p)} J_0(\lambda_p r), \dots$$

En prolongeant ces fonctions par des fonctions nulles de 1 à $+\infty$, on obtient un système orthonormé sur $0, +\infty$.

Le système associé $\varphi_p(\rho)$ sera donc, lui aussi, orthonormé relativement à ρ sur $0, +\infty$.

3) Le système orthonormé associé $\varphi_p(\rho)$. — On a, d'après la formule (33), ⁽⁴³⁾

⁽⁴³⁾ Excepté pour $\varphi_0(\rho)$, il serait très difficile de calculer directement les normes de ces fonctions ou leurs produits scalaires deux à deux. C'est leur liaison avec les fonctions $f_p(r)$ qui nous permet d'affirmer que leurs normes sont égales à 1 et leurs produits scalaires à 0. On peut

$$\begin{aligned} \varphi_0(\rho) &= \pi \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_0)} \int_0^1 J_0(\lambda_0 r) J_0(\pi \rho r) r dr = \pi \sqrt{2} \frac{J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_0^2}{\pi^2}} \\ (35) \qquad \qquad \qquad &= \pi \sqrt{2} \frac{J_1(\pi \rho)}{\pi \rho}, \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$\varphi_p(\rho) = \pi \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_p)} \int_0^1 J_0(\lambda_p r) J_0(\pi \rho r) r dr = \pi \sqrt{2} \frac{J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}}$$

2. **Les approximations en moyenne de $A(r)$ à l'aide des fonctions $f_p(r)$.** — Les composantes c_p d'une approximation en moyenne de $A(r)$ seront données par

$$c_p = \int_0^1 A(r) f_p(r) r dr = \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_p)} \int_0^1 A(r) J_0(\lambda_p r) r dr.$$

Finalement

$$A_n(r) = \frac{c_0 \sqrt{2}}{J_0(\lambda_0)} J_0(\lambda_0 r) + \dots + c_{n-1} \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_{n-1})} J_0(\lambda_{n-1} r).$$

Il suffit alors de poser

$$(36) \qquad b_p = \frac{c_p \sqrt{2}}{J_0(\lambda_p)} = \frac{2 \int_0^1 A(r) J_0(\lambda_p r) r dr}{J_0^2(\lambda_p)}$$

pour reconnaître dans $A_n(r)$ un développement de $A(r)$ suivant une série assez particulière, du groupe des séries de « *Dini-Bessel* ». Watson [14] désigne ainsi les séries

$$\sum b_p J_\nu(l_p x),$$

l_p étant racine (positive ou nulle) de l'équation

$$f(w) = w J'_\nu(w) + H J_\nu(w) = 0 \qquad , H = \text{Cte.}$$

Mais cette équation se réduit à $f(w) = w J_{\nu+1}(w) = 0$ si $H = -\nu$, et à $w J_1(w) = 0$ si, de surcroît, $\nu = 0$. Pour que cette série $\sum b_p J_\nu(l_p x)$ constitue le développement d'une fonction $A(x)$, il faut, dit Watson [23], que ses coefficients b_p soient liés à $A(x)$ par la relation

$$b_p = \frac{2 l_p^2 \int_0^1 A(x) J_\nu(l_p x) x dx}{(l_p^2 - \nu^2) J_\nu^2(l_p) + l_p^2 J_\nu'^2(l_p)}.$$

ainsi ajouter à la liste de Watson une collection de nouvelles intégrales définies évaluables portant sur des fonctions de Bessel. On a, d'après l'expression de $\varphi_p(\rho)$ donnée par les formules (35),

$$2 \int_0^1 \frac{J_1^2(\pi \rho) \rho^3 d\rho}{\left(\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}\right) \left(\rho^2 - \frac{\lambda_q^2}{\pi^2}\right)} = \delta_{pq} \qquad \delta_{pq} \begin{cases} = 0 \text{ si } p \neq q \\ = 1 \text{ si } p = q. \end{cases}$$

Pour $\nu = 0$, $l_p = \lambda_p$ et $J'_0(\lambda_p) = -J_1(\lambda_p) = 0$. On retrouve donc bien la formule (36) ⁽⁴⁴⁾.

3. *Les approximations en moyenne de $\mathcal{A}_b(\rho)$ à l'aide des fonctions $\varphi_p(\rho)$.* — L'expression de $\mathcal{A}_b(\rho)$ est étroitement analogue à celle de $\mathcal{A}_b(\xi)$. On trouve en effet

$$\mathcal{A}_b(\rho) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p \varphi_p(\rho) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p \pi \sqrt{2} \frac{J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \times \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}},$$

$$\mathcal{A}_b(\rho) = \pi \frac{c_0}{\sqrt{2}} \frac{2J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \left[1 + \frac{c_1}{c_0} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_1^2}{\pi^2}} + \dots + \frac{c_{n-1}}{c_0} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_{n-1}^2}{\pi^2}} \right].$$

$K^{-1/2}(\rho)$

L'amplitude diffractée par une pupille de transparence uniforme, $2 J_1(\pi \rho)/\pi \rho$, y est facteur d'une série de fractions rationnelles $K^{-1/2}(\rho)$, simplement liée à la fonction d'apodisation $K(\rho)$ définie page 21.

4. *Convergence des développements au sens de la convergence ponctuelle.* — Watson [23] a exposé la théorie de la convergence des fonctions de Dini-Bessel, qui est tout à fait analogue à la théorie des séries de Fourier. On trouve que $A_n(r)$ converge en tous les points de l'intervalle $0 \leq r \leq 1$ vers $[A(r-0) + A(r+0)]/2$ ou vers $A(0+0)$ si $r = 0$, ou vers $A(1-0)$ si $r = 1$ pourvu que

1) $A(r)$ soit à variations bornées et que $\int_0^1 A(r) \sqrt{r} dr$ existe,

2) qu'elle n'admette que des points de discontinuité de première espèce.

Toutes ces conditions sont toujours vérifiées par les fonctions d'amplitude $A(r)$.

En outre, cette convergence est uniforme si $A(r)$ est continue. Dans ces conditions, nous avons vu que $\mathcal{A}_b(\rho)$ convergeait uniformément vers $\mathcal{A}_b(\rho)$.

5. *Relation entre la fonction de diffraction $\mathcal{A}_b(\rho)$ et les composantes de la fonction d'amplitude pupillaire $A(r)$.* — Soit $\mathcal{A}_b(\rho)$ l'amplitude diffractée, avec un coefficient tel que son maximum absolu [pour $\rho = 0$ et $A(r) \equiv 1$] vaille l'unité [cf. form. (8)].

$$\mathcal{A}_b(\rho) = 2 \int_0^1 A(r) J_0(\pi r \rho) r dr.$$

Or, on a
$$c_p = \int_0^1 A(r) \sqrt{2} \frac{J_0(\lambda_p r)}{J_0(\lambda_p)} r dr = \frac{1}{\sqrt{2} J_0(\lambda_p)} \mathcal{A}_b\left(\frac{\lambda_p}{\pi}\right).$$

⁽⁴⁴⁾ Cette série particulière de Dini-Bessel semble n'avoir jamais été utilisée. Mais on peut citer un développement de la même famille qui a été employé par Fourier dans le problème de la propagation de la chaleur dans un cylindre circulaire rayonnant. Il posait $\nu = 0$ et H était le rapport de deux conductibilités thermiques. Dini fit, en 1880, une étude mathématique générale de la convergence, au sens ordinaire, de ces développements.

Les composantes de $A(r)$ constituent donc, à des facteurs simples près, une collection de points équidistants de $\mathcal{A}_n(\rho)$. Ces points se situent à l'emplacement $\rho = \lambda_p/\pi$ des zéros de $J_1(\pi\rho)$. L'analogie avec les spectres de Fourier, discontinu et continu, de $A(x)$ est évidente.

Remplaçons maintenant $A(r)$ et $\mathcal{A}_n(\rho)$ par leurs approximations en moyenne $A_n(r)$ et $\mathcal{A}_n(\rho)$. Les composantes de $A_n(r)$ sont nulles à partir du rang n et sont égales, pour $p \leq n-1$, aux composantes de même rang de $A(r)$. Comme $\mathcal{A}_n(\rho)$ est lié à $A_n(r)$ par la même relation que $\mathcal{A}_n(\rho)$ à $A(r)$, on a

$$\mathcal{A}_n\left(\frac{\lambda_p}{\pi}\right) = \sqrt{2} J_0(\lambda_p) c_p \text{ pour } p \leq n-1, \quad \mathcal{A}_n\left(\frac{\lambda_p}{\pi}\right) = 0 \text{ pour } p > n-1.$$

La fonction d'amplitude pupillaire uniforme $A(r) \equiv 1$ étant proportionnelle à la première des fonctions de base $f_0(r) = \sqrt{2}$, est nécessairement orthogonale à toutes les autres bases. Elle n'admet donc qu'une seule composante c_0 différente de zéro. On a, pour sa figure de diffraction,

$$\mathcal{A}_n(0) = \sqrt{2} c_0, \quad \mathcal{A}_n\left(\frac{\lambda_p}{\pi}\right) = 0.$$

C'est la suite bien connue des zéros de la figure de diffraction de la pupille circulaire uniforme. On voit ainsi que la figure de diffraction d'une pupille à nombre limité n de composantes possède une infinité de zéros en commun avec cette figure de diffraction « normale », mais qu'une pupille à nombre illimité de composantes présente généralement un déplacement des zéros.

6. *Le système de développement $J_0(k_p r)$, où k_p constitue l'une des racines positives de $J_0(w) = 0$.* — On pourrait faire de ce système une étude entièrement parallèle à celle qui a été faite pour le système $J_0(\lambda_p r)$. On constaterait qu'il peut s'identifier à un développement de $A(r)$ suivant ce que Watson [23] appelle une *série de Fourier-Bessel*

$$A(r) = a_1 J_0(k_1 r) + a_2 J_0(k_2 r) + \dots + a_n J_0(k_n r) + \dots$$

$$\text{avec } a_p = \frac{2 \int_0^1 A(r) J_0(k_p r) r dr}{J_1^2(k_p)}$$

Mais ce développement présente une singularité au point $r = 1$: il est identiquement nul, quels que soient les coefficients. Aussi ne peut-il représenter complètement dans l'intervalle $0 \leq r \leq 1$ que les fonctions d'amplitude pupillaire s'annulant sur les bords. Cette restriction posée, il converge en tout point vers $A(r)$ ou vers sa valeur moyenne et cette convergence est uniforme pourvu que $A(r)$ soit continue. Dans ce dernier cas, le développement associé $\mathcal{A}_n(\rho)$ converge non seulement en moyenne, mais encore uniformément vers $\mathcal{A}_n(\rho)$. L'expression de $\mathcal{A}_n(\rho)$ s'obtient enfin par application de la formule (33 bis) relative à l'intégrale de Lommel. Il est commode de poser

$$b_p = k_p J_1(k_p) a_p.$$

Il vient alors

$$A_n(\rho) = -\frac{J_0(\pi \rho)}{\pi} \left\{ \frac{b_1}{\rho^2 - \frac{k_1^2}{\pi^2}} + \dots + \frac{b_p}{\rho^2 - \frac{k_p^2}{\pi^2}} + \dots \right\}$$

On constate que $A_n(\rho)$ (en admettant que n soit fini) décroît, au loin, plus rapidement que pour les pupilles à bords non opaques. Les maxima de $A_n(\rho)$ admettent en effet l'expression asymptotique

$$A_{n, \max}(\rho) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \frac{\sum_1^n b_p}{\rho^2},$$

pourvu que $\sum_1^n b_p = \sum_1^n k_p J_1(k_p) a_p = \left[-\frac{d}{dr} A(r) \right]_{r=1}$ soit différent de 0,

alors que nous avons trouvé avec l'autre mode de développement qui, seul, peut s'appliquer aux pupilles à bords transparents :

$$A_{n, \max}(\rho) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho}} \times \frac{\sum_0^{n-1} c_p}{\rho}, \quad \text{pour } \sum_0^{n-1} c_p \neq 0.$$

Pour $\sum_0^{n-1} c_p = A(1) = 0$ (pupille à bords opaques), le développement de Dini-Bessel, fournirait, comme le développement de Fourier-Bessel, une décroissance des maxima en $1/\rho^2 \sqrt{\rho}$ au moins.

On remarque aussi le déplacement des maxima qui, dans la figure de diffraction de la pupille à bords noirs ⁽⁴⁵⁾, occupent la position des zéros de la figure de diffraction de la pupille à bords non noirs.

Ces résultats sont conformes aux propriétés générales de l'amplitude diffractée lointaine que nous avons établies dans la première partie.

L'analogie du système $J_0(k_p r)$ serait donné, dans le cas des pupilles rectilinéaires par le système

$$\cos \frac{\pi}{2} x, \quad \cos \frac{3\pi}{2} x, \dots, \quad \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} x, \dots,$$

système orthogonal et normalisable, mais présentant la particularité que toutes les bases s'annulent pour $x = \pm 1$.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces systèmes qui sont de peu d'intérêt puisque, comme nous l'avons déjà signalé, il est impossible de réaliser des pupilles à bords réellement noirs, sauf par des méthodes interférentielles, dont l'efficacité, au regard de l'apodisation, se limite aux très faibles étendues de faisceaux.

7. Autre système de développement. — Il existe, dans le cas des pupilles circulaires, une autre possibilité de développement. Straubel a signalé le premier [1] que, pour des fonctions

⁽⁴⁵⁾ La dérivée de l'amplitude pupillaire était supposée non nulle sur les bords.

$$f_p(r) = p(1 - r^2)^{p-1}$$

l'intégrale de diffraction s'égalait, tous calculs faits, à l'expression .

$$(37) \quad \varphi_p(\rho) = 2^p p! \frac{J_p(\pi \rho)}{(\pi \rho)^p}.$$

Osterberg et Wilkins [24] ont donné de cette formule une démonstration particulièrement simple. Ils ont montré en effet que l'intégrale

$$\varphi_p(\rho) = 2 \int_0^1 p(1 - r^2)^{p-1} J_0(\pi r \rho) r dr$$

s'identifiait, par le changement de notation $r = \sin \alpha$, à une intégrale de Sonine [23]

$$\int_0^{\pi/2} 2p J_0(\pi \rho \sin \alpha) \sin \alpha \cos^{2p-1} \alpha d\alpha$$

dont la valeur s'exprime par la formule (37).

Ces fonctions ont donné lieu à des recherches sur l'apodisation (Straubel [1], Lansraux [16]), sur l'augmentation du pouvoir de résolution (Osterberg et Wilkins [25]) et à des calculs de figures d'aberrations, de défocalisation (Lansraux [26]). Les nouvelles fonctions $J_0(\lambda_p r)$ permettent de traiter tous ces problèmes ; avant de développer l'étude particulière de l'apodisation, je voudrais marquer très rapidement ce qui distingue les deux groupes de fonctions et quels services nouveaux peuvent rendre les fonctions $J_0(\lambda_p r)$ dans les calculs de figures de diffraction de pupilles arbitraires.

Calculs de figures de diffraction. — Lansraux a cherché à développer la fonction d'amplitude pupillaire à l'aide des bases $(1 - r^2)^{p-1}$. Il a remarqué que le développement de MacLaurin d'une fonction $A(r^2)$ arbitraire, par rapport à la variable r^2 et au voisinage du point $r^2 = 1$, se présente comme une combinaison de fonctions $(1 - r^2)^{p-1}$.

Mais le développement de MacLaurin n'est pas utilisable dans la généralité des cas car

a) il n'existe que si les dérivées de tous ordres de $A(r^2)$ sont finies sur l'intervalle $0 < r^2 \leq 1$ [la fonction $A(r^2) = \sqrt{1 - r^2}$, par exemple, ayant une dérivée, $dA(r^2)/d(r^2)$ infinie pour $r^2 = 1$ n'est pas développable en série de Mac Laurin],

b) quand il existe, il ne converge pas nécessairement et ne peut donc toujours représenter la fonction génératrice. On ne possède pas de critère général simple de convergence. L'étude du « reste » R_n montre seulement que la convergence est assurée pour les fonctions dont les dérivées de tous ordres restent, dans tout l'intervalle, inférieures à un nombre fixe M ⁽⁴⁶⁾.

⁽⁴⁶⁾ Ces restrictions correspondent à une remarque qui figurait dans une publication antérieure [28]. Elles ne visent, bien entendu, que le développement de MacLaurin, et non pas certains développements *en moyenne* qu'on peut aussi définir, comme nous le précisons ci-après, à partir des bases $(1 - r^2)^{p-1}$.

Lorsqu'il converge il peut, par contre, rendre de grands services. Le calcul des coefficients se ramène à un calcul de *dérivées* au point $r^2 = 1$; il est donc généralement plus facile que celui des coefficients du développement de Fourier, ou de Dini-Bessel, qui suppose une *intégration*. C'est ainsi que Lansraux a pu l'utiliser pour le calcul de figures de défocalisation [$A(r^2) = e^{ikr^2}$] ou pour la figure de diffraction de l'écran absorbant de Couder [$A(r^2) = e^{-kr^2}$] ou encore pour certaines figures d'aberration.

Lorsque le développement de Mac Laurin n'existe ou ne converge pas, on peut le remplacer par un développement *en moyenne*, sur l'intervalle $-1 \leq r \leq +1$ de la fonction paire $A(|r|)$ à l'aide du système des fonctions $f(r) = (1 - r^2)^{p-1}$. Ce système, identifiable au système des puissances paires de r , est complet sur cet intervalle, par rapport à l'ensemble des fonctions paires, mais les bases $f_p(r) = (1 - r^2)^{p-1}$ ne sont pas orthonormales. Le calcul des composantes c_p de $A(|r|)$ par la formule générale $c_p = \int_{-1}^{+1} A(|r|) f_p(r) dr$ nécessitera donc une orthonormalisation préalable des bases $f_p(r)$.

Je voudrais signaler encore un autre mode d'utilisation des fonctions $J_0(\lambda_p r)$ ou $(1 - r^2)^{p-1}$. Le calcul classique de la fonction d'amplitude diffractée utilise une méthode d'interpolation : Cotes, Conrady remplacent la fonction sous le signe \int par un polynôme voisin (n fois sécant). Lansraux [26 b] a proposé la variante suivante : il remplace la fonction $A(r^2)$ [et non pas $A(r^2)J_0(\pi r \rho) r$] par une forme linéaire, n fois sécante, des fonctions $(1 - r^2)^{p-1}$ et il calcule l'intégrale de diffraction correspondante. Mais cette méthode peut en réalité s'appliquer avec d'autres bases que les fonctions $(1 - r^2)^{p-1}$, auxquelles il est seulement demandé ici de se prêter au calcul de l'intégrale de diffraction. On verrait en particulier que les fonctions $J_0(\lambda_p r)$ sont, dans ce cas, *très commodes*. L'avantage de ces méthodes d'interpolation (surtout sous la forme indiquée par Lansraux) est leur extrême rapidité. Malheureusement, elles ont un certain caractère d'empirisme : on n'est pas assuré de réduire régulièrement les écarts entre les fonctions et leurs approximations en augmentant le nombre de leurs points communs et l'on ne sait pas d'avance, pour chaque fonction, quel nombre de points communs il est le plus avantageux de choisir.

Je me contenterai de ces indications brèves sur les applications possibles des fonctions $J_0(\lambda_p r)$ au calcul de fonctions de diffraction arbitraires, pour en revenir à l'apodisation qui constitue ici mon but principal de recherches.

IV. Application des développements de Fourier et de Dini-Bessel à l'apodisation

Les fonctions $f_p(x)$, $\varphi_p(\xi)$ et $f_p(r)$, $\varphi_p(\rho)$ de Fourier et de Dini-Bessel se prêtent à la détermination commode et rapide des principales caractéristiques des écrans

apodisants et de leurs figures de diffraction ; l'expression de ces caractéristiques figure dans les tableaux IV et V.

Nous indiquerons aussi comment on peut calculer les coefficients moyens d'apodisation $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, $\mathcal{M}(\mathcal{L})$, $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ quand on utilise ces développements.

1. Expression des caractéristiques de la pupille en fonction des coefficients d'un écran de Fourier ou de Dini-Bessel. — Voir tableau IV.

TABLEAU IV

PUPILLE RECTILINÉAIRE	PUPILLE CIRCULAIRE
$A(x) = c_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + c_1 \cos \pi x + \dots + c_{n-1} \cos (n-1) \pi x$	$A(r) = c_0 \sqrt{2} + c_1 \sqrt{2} \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \dots + c_{n-1} \sqrt{2} \frac{J_0(\lambda_{n-1} r)}{J_0(\lambda_{n-1})}$
Dérivée, maxima, minima de $A(x)$	Dérivée, maxima, minima de $A(r)$
$A'(x) = -c_1 \pi \sin \pi x - \dots - c_{n-1} (n-1) \pi \sin (n-1) \pi x$	$A'(r) = -c_1 \sqrt{2} \frac{\lambda_1}{J_0(\lambda_1)} J_1(\lambda_1 r) \dots - c_{n-1} \sqrt{2} \frac{\lambda_{n-1}}{J_0(\lambda_{n-1})} J_1(\lambda_{n-1} r)$
$A'(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ (au centre)}$ $\text{pour } x = \pm 1 \text{ (sur les bords)}$ et en des points dépendant de c_1, \dots, c_{n-1} .	$A'(r) = 0 \text{ pour } r = 0 \text{ (au centre)}$ $\text{pour } r = 1 \text{ (sur les bords)}$ et en des points dépendant de c_1, \dots, c_{n-1} .
Valeur au centre	Valeur au centre
$A(0) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{c_1}{c_0} \sqrt{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{c_0} \sqrt{2} \right]$	$A(0) = c_0 \sqrt{2} \left[1 + \frac{c_1}{c_0} \frac{1}{J_0(\lambda_1)} + \dots + \frac{c_{n-1}}{c_0} \frac{1}{J_0(\lambda_{n-1})} \right]$
Posons	Posons
$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \frac{c_1}{c_0} \sqrt{2}, \dots, \alpha_{n-1} = \frac{c_{n-1}}{c_0} \sqrt{2}$	$\beta_0 = 1, \beta_1 = \frac{c_1}{c_0}, \dots, \beta_{n-1} = \frac{c_{n-1}}{c_0}$
$A(0) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \sum_0^{n-1} \alpha_p$	$A(0) = c_0 \sqrt{2} \sum_0^{n-1} \frac{\beta_p}{J_0(\lambda_p)}$
Valeur sur les bords	Valeur sur les bords
$A(1) = A(-1) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \sum_0^{n-1} (-1)^p \alpha_p$	$A(1) = c_0 \sqrt{2} \sum_0^{n-1} \beta_p$
Transmission pupillaire totale	Transmission pupillaire totale
$T = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A^2(x) dx$	$T = 2 \int_0^1 A^2(r) r dr$
$T = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} c_p^2$	$T = 2 \sum_0^{n-1} c_p^2$

2. Expression des caractéristiques de la figure de diffraction ⁽⁴⁷⁾ en fonction des coefficients d'un écran de Fourier ou de Dini-Bessel. — Voir tableau V.

TABLEAU V

PUPILLE RECTILINÉAIRE	PUPILLE CIRCULAIRE
$\mathcal{A}(\xi) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \left\{ 1 - \frac{c_1}{c_0} \sqrt{2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} + \dots \right\}$ $= \frac{c_0}{\sqrt{2}} \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \left\{ 1 - \alpha_1 \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} + \dots + \right.$ $\left. + (-1)^p \alpha_p \frac{\xi^2}{\xi^2 - p^2} + \dots \right\}$	$\mathcal{A}(\rho) = c_0 \sqrt{2} \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \left\{ 1 + \frac{c_1}{c_0} \frac{\rho^2}{\frac{\lambda_1^2}{\pi^2}} + \dots \right\}$ $= c_0 \sqrt{2} \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \left\{ 1 + \beta_1 \frac{\rho^2}{\frac{\lambda_1^2}{\pi^2}} + \dots + \right.$ $\left. + \beta_p \frac{\rho^2}{\frac{\lambda_p^2}{\pi^2}} + \dots \right\}$
<p>Pour l'écran uniforme :</p> $c_0 = \sqrt{2}, \quad A_0(x) = c_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv 1$ $\mathcal{A}_0(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$ <p>Amplitude au centre</p> $\mathcal{A}(0) = \frac{c_0}{\sqrt{2}}$ <p>Amplitude à l'infini</p> $\mathcal{A}(\infty) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \left\{ 1 - \alpha_1 + \dots + \right.$ $\left. + (-1)^p \alpha_p + \dots \right\}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\mathcal{A}(\infty) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} A(1)$ </div> <p>Fonction d'apodisation $K(\xi) = \frac{\mathcal{J}_0(\xi)/\mathcal{J}_0(0)}{\mathcal{J}(\xi)/\mathcal{J}(0)}$</p> $K^{-1}(\xi) = \left\{ 1 - \alpha_1 \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} + \dots + \right.$ $\left. + (-1)^p \alpha_p \frac{\xi^2}{\xi^2 - p^2} + \dots \right\}^2$ $K^{-1}(\infty) = \left[\sum_0^{n-1} (-1)^p \alpha_p \right]^2 = \frac{A^2(1)}{\mathcal{J}(0)}$ $K^{-1}(\infty) = \frac{A^2(1)}{\left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A(x) dx \right]^2} = \frac{2 A^2(1)}{c_0^2}$	<p>Pour l'écran uniforme :</p> $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_0(r) = c_0 \sqrt{2} \equiv 1$ $\mathcal{A}_0(\rho) = \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho}$ <p>Amplitude au centre</p> $\mathcal{A}(0) = c_0 \sqrt{2}$ <p>Amplitude à l'infini</p> $\mathcal{A}(\infty) = c_0 \sqrt{2} \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \left\{ 1 + \beta_1 + \dots + \right.$ $\left. + \beta_p + \dots \right\}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\mathcal{A}(\infty) = \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} A(1)$ </div> <p>Fonction d'apodisation $K(\rho) = \frac{\mathcal{J}_0(\rho)/\mathcal{J}_0(0)}{\mathcal{J}(\rho)/\mathcal{J}(0)}$</p> $K^{-1}(\rho) = \left\{ 1 + \beta_1 \frac{\rho^2}{\frac{\lambda_1^2}{\pi^2}} + \dots + \beta_p \frac{\rho^2}{\frac{\lambda_p^2}{\pi^2}} + \dots \right\}^2$ $K^{-1}(\infty) = \left[\sum_0^{n-1} \beta_p \right]^2 = \frac{A^2(1)}{\mathcal{J}(0)}$ $K^{-1}(\infty) = \frac{A^2(1)}{\left[2 \int_0^1 A(r) r dr \right]^2} = \frac{A^2(1)}{2 c_0^2}$

⁽⁴⁷⁾ L'amplitude diffractée sera calculée dorénavant à partir de la forme (8) de l'intégrale de diffraction afin d'obtenir, pour la pupille uniforme, une amplitude diffractée centrale $\mathcal{A}(0)$ égale à l'unité.

3. Expression du coefficient d'apodisation moyenne $\mathbb{A}(\mathbb{D})$, $\mathbb{A}(\mathbb{L})$ ou $\mathbb{A}(\mathbb{F})$ en fonction des coefficients d'un écran de Fourier, de Dini-Bessel ou de Straubel. —

1. Rappel des définitions concernant les taux d'apodisation moyenne $\mathbb{A}(\mathbb{D})$, $\mathbb{A}(\mathbb{L})$ ou $\mathbb{A}(\mathbb{F})$. — Soit $M_1 M_2 \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{matrix} \right.$ ou $M_1 + \infty \left\{ \begin{matrix} \xi_1 + \infty \\ \rho_1 + \infty \end{matrix} \right.$ l'intervalle sur lequel nous désirons apodiser la fonction $\mathbb{J}(\xi)$ ou $\mathbb{J}(\rho)$.

Nous avons défini p. 21 et 22 trois coefficients différents d'apodisation moyenne.

$\mathbb{A}(\mathbb{D}) = \frac{\mathbb{D}_0(M_1)}{\mathbb{D}(M_1)} \quad (48)$	Facteurs de dispersion	$\mathbb{D}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} \mathbb{J}(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{J}(\xi) d\xi}$	pour un écran rectilinéaire
		$\mathbb{D}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} \mathbb{J}(\rho) \rho d\rho}{\int_0^{+\infty} \mathbb{J}(\rho) \rho d\rho}$	pour un écran circulaire
$\mathbb{A}(\mathbb{L}) = \frac{\mathbb{L}_0(M_1)}{\mathbb{L}(M_1)}$	Facteurs d'étalement	$\mathbb{L}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} \mathbb{J}(\xi) d\xi}{\mathbb{J}(0)}$	pour un écran rectilinéaire
		$\mathbb{L}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} \mathbb{J}(\rho) \rho d\rho}{\mathbb{J}(0)}$	pour un écran circulaire
$\mathbb{A}(\mathbb{F}) = \frac{\mathbb{F}_0(M_1, M_2)}{\mathbb{F}(M_1, M_2)}$	Facteurs de pieds	$\mathbb{F}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} K^{-1}(\xi) d\xi}{\xi_2 - \xi_1}$	pour un écran rectilinéaire
		$\mathbb{F}(\rho_1, \rho_2) = \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} K^{-1}(\rho) d\rho}{\rho_2 - \rho_1}$	pour un écran circulaire

$K^{-1}(\xi)$ $K^{-1}(\rho)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inverse de la fonction} \\ \text{d'apodisation} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} K(\xi) = \frac{\mathbb{J}_0(\xi)/\mathbb{J}_0(0)}{\mathbb{J}(\xi)/\mathbb{J}(0)} \\ K(\rho) = \frac{\mathbb{J}_0(\rho)/\mathbb{J}_0(0)}{\mathbb{J}(\rho)/\mathbb{J}(0)} \end{array} \right\}$
---------------------------------	--	--

2. Expression des taux d'apodisation moyenne et des facteurs \mathbb{D} , \mathbb{L} , \mathbb{F} en fonction des coefficients d'un écran pupillaire. — Le facteur \mathbb{D} ayant été utilisé par Straubel pour le calcul d'écrans circulaires absorbants, nous donnerons les expressions de \mathbb{D} , \mathbb{L} , \mathbb{F} non seulement dans les systèmes de Fourier et de Dini-Bessel, mais aussi dans le système de Straubel $f_p(r) = p(1 - r^2)^{p-1}$. Les tableaux VI et VII sont relatifs aux facteurs \mathbb{D} et \mathbb{L} . On y lit

(48) L'indice 0 se rapporte, comme d'habitude, à la figure de référence $\mathbb{J}_0(\xi)$ ou $\mathbb{J}_0(\rho)$ de la pupille uniforme rectilinéaire ou circulaire.

TABEAU VI. — FACTEUR DE DISPERSION \mathcal{D}

	Calcul de \mathcal{D}	Expression des constantes e_{pq}	Remarques
Ecrans rectilinéaires	$\mathcal{D}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} [\sum c_p \varphi_p(\xi)]^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} [\sum c_p \varphi_p(\xi)]^2 d\xi} = \frac{\sum e_{pq}(\xi_1) c_p c_q}{\sum e_{pq}(0) c_p c_q}$	<p>Bases de Fourier</p> $f_{pq}(x) = \cos p \pi x \rightarrow \varphi_p(\xi) = (-1)^p \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \frac{\xi^2}{\xi^2 - p^2}$ $e_{pq}(\xi_1) = (-1)^{p+q} \frac{2}{\pi^2} \int_{\xi_1}^{+\infty} \frac{\xi^2 \sin^2 \pi \xi}{(\xi^2 - p^2)(\xi^2 - q^2)} d\xi$ $e_{pq}(0) = \frac{1}{2} \delta_{pq} \quad \left. \begin{array}{l} = 0 \text{ si } p \neq q \\ = 1/2 \text{ si } p = q \end{array} \right\} \quad (49)$	<p>1°) <i>Forme algébrique de $\mathcal{D}(\xi_1)$ et de $\mathcal{D}(\rho_1)$</i> : $\mathcal{D}(\xi_1)$ et $\mathcal{D}(\rho_1)$ se présentent comme le quotient de deux formes quadratiques des coefficients c_p de l'écran.</p> <p>2°) <i>Intégrabilité des constantes e_{pq}</i> :</p> <p>a) <i>Ecrans rectilinéaires</i> : Nous avons montré [9] qu'avec les bases de Fourier, ils s'expriment à l'aide de sin et de cos intégraux.</p> <p>b) <i>Ecrans circulaires</i> :</p> <p>Avec les bases de <i>Straubel</i> [1], ils se calculent à l'aide des fonctions de Bessel d'ordre $p-1, p, q-1, q$.</p> <p>Avec les bases de <i>Dini-Bessel</i>, par contre, on ne sait actuellement pas calculer les intégrales des constantes e_{pq}; il faut recourir à des procédés mécaniques ou graphiques.</p>
	<p>avec</p> $e_{pq}(\xi_1) = 2 \int_{\xi_1}^{+\infty} \varphi_p(\xi) \varphi_q(\xi) d\xi$	<p>1) <i>Bases de Dini-Bessel</i></p> $f_p(r) = \frac{\sqrt{2}}{J_0(\lambda_p)} J_0(\lambda_p r) \rightarrow$ $\rightarrow \varphi_p(\rho) = \sqrt{2} \frac{2 J_1(\pi \rho)}{\pi \rho} \frac{\rho^2}{\rho^2 - (\lambda^2/\pi^2)}$ $e_{pq}(\rho_1) = \frac{8}{\pi^2} \int_{\rho_1}^{+\infty} \frac{\rho^3 J_1^2(\pi \rho)}{\left(\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}\right) \left(\rho^2 - \frac{\lambda_q^2}{\pi^2}\right)} d\rho$ $e_{pq}(0) = \frac{4}{\pi^2} \delta_{pq} \quad (49)$	<p>(49) Les constantes $e_{pp}(0) = 2 \int_0^{+\infty} \varphi_p^2(\xi) d\xi$ ou $e_{pp}(0) = \int_0^{+\infty} \varphi_p^2(\rho) \rho d\rho$ constituent les normes des fonctions $\varphi_p(\xi)$ ou $\varphi_p(\rho)$ respectivement. Ces normes ne sont pas égales à 1, alors pourtant que les fonctions $f_p(x)$ ou $f_p(r)$ conjuguées des fonctions φ_p sont normalisées.</p> <p>Cela tient à notre convention [cf. note (47)] d'écrire l'intégrale de diffraction sous la forme (8).</p>
Ecrans circulaires	$\mathcal{D}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} [\sum c_p \varphi_p(\rho)]^2 \rho d\rho}{\int_0^{+\infty} [\sum c_p \varphi_p(\rho)]^2 \rho d\rho} = \frac{\sum e_{pq}(\rho_1) c_p c_q}{\sum e_{pq}(0) c_p c_q}$	<p>2) <i>Bases de Straubel</i></p> $f_p(r) = p(1-r^2)^{p-1} \rightarrow \varphi_p(\rho) = 2^p p! \frac{J_p(\pi \rho)}{(\pi \rho)^p}$ $e_{pq}(\rho_1) = 2^p + q! \int_{\rho_1}^{+\infty} \frac{J_q(\pi \rho)}{(\pi \rho)^{p+q}} \rho d\rho$	
	<p>avec</p> $e_{pq}(\rho_1) = \int_{\rho_1}^{+\infty} \varphi_p(\rho) \varphi_q(\rho) \rho d\rho$		

TABLEAU VII. — FACTEUR D'ÉTALEMENT \mathcal{J}

Calcul de \mathcal{J}	Expression des constantes e_{pq}	Remarques
<p>Écrans rectilinéaires</p> $\mathcal{J}(\xi_1) = \frac{2 \int_{\xi_1}^{+\infty} [\sum_p c_p(\xi)]^p d\xi}{\mathcal{J}(0)}$ <p>Avec les bases de Fourier (cf. p. 85) $\mathcal{J}(0) = \frac{c_0^2}{2}$, d'où</p> $\mathcal{J}(\xi_1) = \frac{2 \sum_{pq} e_{pq}(\xi_1) c_p c_q}{c_0^2} = \sum_{pq} e_{pq}(\xi_1) \alpha_p \alpha_q$ <p>avec $\alpha_0 = 1, \dots, \alpha_p = \frac{c_p \sqrt{2}}{c_0}$</p>	<p>Mêmes constantes e_{pq} au numérateur que pour le facteur de dispersion.</p>	<p>Forme algébrique du facteur d'étalement : Avec les bases de Fourier ou de Dini-Bessel le facteur d'étalement se réduit à une forme quadratique simple des coefficients c_p/c_0.</p> <p>Avec les bases de Straubel, par contre, le facteur d'étalement, comme précédemment le facteur de dispersion, s'exprime par le quotient de deux formes quadratiques des coefficients c_p de l'écran.</p>
<p>Écrans circulaires</p> $\mathcal{J}(\rho_1) = \frac{\int_{\rho_1}^{+\infty} [\sum_p \rho_p(\rho)]^p \rho d\rho}{\mathcal{J}(0)}$ <p>Avec les bases de Dini-Bessel (cf. p. 85) : $\mathcal{J}(0) = 2c_0^2$ d'où</p> $\mathcal{J}(\rho_1) = \frac{\sum_{pq} e_{pq}(\rho_1) c_p c_q}{2c_0^2}$ $\mathcal{J}(\rho_1) = \frac{1}{2} \sum_{pq} e_{pq}(\rho_1) \beta_p \beta_q$ <p>avec $\beta_0 = 1, \dots, \beta_p = \frac{c_p}{c_0}$</p> <p>Avec les bases de Straubel : $\mathcal{J}(0) = [\sum c_p]^2$</p> $\mathcal{J}(\rho_1) = \frac{\sum_{pq} e_{pq}(\rho_1) c_p c_q}{[\sum c_p]^2}$	<p>Id.</p>	

qu'avec les bases de Straubel, \mathfrak{D} et \mathfrak{L} s'expriment tous deux par le quotient de deux formes quadratiques des coefficients c_p de l'écran,

qu'avec les bases de Fourier ou de Dini-Bessel, l'expression de \mathfrak{L} se réduit à une forme quadratique simple de ces coefficients. Cette circonstance facilite beaucoup, nous le verrons, la recherche d'une apodisation maximum. Aussi peut-on recommander, dans le cas de ces bases, de définir le taux d'apodisation moyenne par $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ plutôt que par $\mathfrak{M}(\mathfrak{D})$.

En fait, si nous avons calculé plusieurs séries d'écrans rectilinéaires de Fourier à l'aide du coefficient $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ [9], en revanche nous n'avons pas calculé de cette façon nos écrans circulaires de Dini-Bessel. C'est que les constantes e_{pq} , dont $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$ [comme aussi d'ailleurs $\mathfrak{M}(\mathfrak{D})$] dépend, s'expriment par des intégrales, portant sur des fonctions de Bessel, qui ne paraissent pas se ramener à des quadratures algébriques. Il faudra, pour les déterminer, recourir aux machines à intégrer modernes.

C'est pour éviter, de façon provisoire, ces intégrations un peu longues, que nous avons utilisé le coefficient $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$. Mais ce coefficient ne peut être employé dans des conditions aussi générales que $\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$.

Conditions restrictives pour l'emploi du coefficient d'apodisation $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$. — Le facteur de pieds, $\mathfrak{F}(\xi_1, \xi_2)$ ou $\mathfrak{F}(\rho_1, \rho_2)$, qui sert à définir $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ est

$$\mathfrak{F}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{J_0(0)}{J_0(\xi)} \frac{J(\xi)}{J_0(\xi)} d\xi \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{J_0(0)}{J_0(\rho)} \frac{J(\rho)}{J_0(\rho)} d\rho.$$

1°) Nous allons montrer d'abord qu'il n'est utilisable qu'avec les bases de Fourier ou de Dini-Bessel. Il n'existe en effet que sur un intervalle où $J(\xi)/J_0(\xi)$ est partout défini. Pour que cet intervalle dépasse un interfrange normal (qui serait insuffisant pour une apodisation efficace), il faut que $J(\xi)$ ou $J(\rho)$ s'y annule en même temps que $J_0(\xi)$ ou $J_0(\rho)$. Or, nous savons (p. 74 et 80) qu'aux zéros $\xi_p = p$ ou $\rho_p = \lambda_p/\pi$ de $J_0(\xi)$ ou de $J_0(\rho)$ correspondent, pour $J(\xi)$ et $J(\rho)$, les termes de la décomposition de $A(x)$ ou de $A(r)$ en série de Fourier ou de Dini-Bessel. Si donc cette décomposition se limite à n termes [écran dépendant des n premières bases $\cos p \pi x$ ou $J_0(\lambda_p r)$], toutes les racines supérieures à $n-1$ ou à λ_{n-1}/π de $J(\xi)$ [ou $J(\rho)$] et de $J_0(\xi)$ [ou $J_0(\rho)$] coïncident.

Le facteur de pieds d'un écran à deux termes peut donc être défini sur un intervalle quelconque d'origine $\xi_1 > 1$ ou $\rho_1 > \lambda_1/\pi$, celui d'un écran à trois termes sur un intervalle quelconque d'origine $\xi_1 > 2$ ou $\rho_1 > \lambda_2/\pi$, etc.

Par contre, un écran de Straubel, qui possède un spectre de Dini-Bessel illimité, ne se prête généralement pas au calcul du facteur de pieds.

2°) Comme les facteurs \mathfrak{D} et \mathfrak{L} , le facteur de pieds \mathfrak{F} peut être défini sur un intervalle infiniment étendu $M_1, \dots + \infty$ de la figure de diffraction. Toutefois sa valeur cesse, dans ce cas, de dépendre de l'abscisse du point M_1 . $\mathfrak{F}(M_1, M_2)$ repré-

sente en effet la valeur moyenne, sur l'intervalle $M_1 M_2$, de l'inverse $K^{-1}(M)$ de la fonction d'apodisation. Or on sait (cf. p. 85) que cette fonction tend vers une constante quand M s'éloigne à l'infini. La valeur moyenne de $K^{-1}(M)$ ne peut différer, sur un intervalle infiniment étendu, de sa valeur limite, de sorte qu'on a simplement $\lim_{M_2 \rightarrow \infty} \mathfrak{F}(M_1 M_2) = K^{-1}(\infty)$. Le facteur $\mathfrak{F}(M_1 \infty)$ ne caractérise donc,

en réalité, que la région la plus lointaine de la figure de diffraction. Or, dans le cas général, on ne s'intéresse pas exclusivement aux franges d'ordre très élevé. On est ainsi amené à considérer non pas le facteur $\mathfrak{F}(M_1 \infty)$, mais des facteurs $\mathfrak{F}(M_1 M_2)$ relatifs à des intervalles finis.

On remarquera d'ailleurs qu'en donnant à ces intervalles une étendue de l'ordre d'une dizaine d'interfranges, on peut apodiser non seulement la région intermédiaire, mais encore la région lointaine de la figure de diffraction. Car cette étendue suffit généralement pour que l'extrémité M_2 de l'intervalle appartienne à ce domaine extrême de la figure de diffraction où les maxima d'intensité ne dépendent que de la transparence marginale de l'écran ; si donc cette transparence est telle qu'elle assure l'apodisation des dernières franges de l'intervalle $M_1 M_2$ choisi, elle ne peut qu'apodiser du même coup toute la région lointaine.

Expression du facteur \mathfrak{F} et du coefficient d'apodisation moyenne $\mathfrak{A}b(\mathfrak{F})$. — L'intérêt du facteur de pieds est d'être très facile à calculer, qu'il s'agisse d'écrans rectilinéaires ou circulaires. Il s'exprime en effet (cf. p. 73 et 79) par une série de fractions rationnelles, portant sur les coefficients d'écran réduits :

$$\alpha_0 = 1, \dots, \alpha_p = \frac{c_p \sqrt{2}}{c_0}, \dots \quad (\text{écrans rectilinéaires})$$

ou $\beta_0 = 1, \dots, \beta_p = \frac{c_p}{c_0}, \dots \quad (\text{écrans circulaires}).$

On a

$$K^{-1}(\xi) = \frac{J_0(0)}{J_0(\xi)} \frac{J(\xi)}{J_0(\xi)} = \left[1 - \alpha_1 \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} + \dots + (-1)^p \alpha_p \frac{\xi^2}{\xi^2 - p^2} + \dots \right]^2,$$

$$K^{-1}(\rho) = \frac{J_0(0)}{J_0(\rho)} \frac{J(\rho)}{J_0(\rho)} = \left[1 + \beta_1 \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_1^2}{\pi^2}} + \dots + \beta_p \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}} + \dots \right]^2.$$

Par suite,

$$\mathfrak{F}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} K^{-1}(\xi) d\xi = \sum_0^{n-1} \alpha_p \alpha_q \varepsilon_{pq}(\xi_1, \xi_2),$$

$$\mathfrak{F}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} K^{-1}(\rho) d\rho = \sum_0^{n-1} \beta_p \beta_q \varepsilon_{pq}(\rho_1, \rho_2),$$

les constantes $\epsilon_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ et $\epsilon_{pq}(\rho_1, \rho_2)$ étant données par les intégrales *rationnelles*

$$\epsilon_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \frac{(-1)^{p+q}}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - p^2} \frac{\xi^2}{\xi^2 - q^2} d\xi,$$

$$\epsilon_{pq}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_q^2}{\pi^2}} d\rho.$$

En conclusion, le facteur \mathcal{E} présente pour les calculs d'écrans les mêmes avantages que le facteur \mathcal{L} (forme quadratique simple des coefficients de l'écran), mais il est beaucoup plus facile à déterminer (les ϵ_{pq} s'intègrent simplement).

On trouvera dans les tableaux VIII et IX plusieurs séries de constantes e_{pq} ou ϵ_{pq} relatives à ces trois facteurs et se rapportant soit à des écrans rectilinéaires, soit à des écrans circulaires.

Connaissant maintenant l'expression générale des facteurs \mathcal{D} , \mathcal{L} et \mathcal{E} nous sommes à même de chercher les écrans c_p qui leur confèrent

soit les valeurs minima,

soit, simplement, des valeurs choisies *inférieures* à \mathcal{D}_0 , \mathcal{L}_0 , \mathcal{E}_0 , constantes de dispersion, de pieds ou d'étalement des écrans uniformes de référence.

TABLEAU VIII (50)

Coefficients $e_{pq}(\xi_1)$, relatifs au facteur de dispersion, pour des écrans rectilinéaires à 2 et 3 termes

$e_{pq}(\xi_1)$ Intervalle d'apodisation	e_{00}	e_{01}	e_{02}	e_{11}	e_{12}	e_{22}
$\xi_1 = 0,5, \xi_2 = \infty$	0,251 230 7	-0,041 613 5	0,009 268 7	0,490 076 0	0,001 608 9	0,499 537 5
$\xi_1 = 1, \xi_2 = \infty$	0,048 588 3	-0,086 725 7	0,019 323 0	0,323 839 5	0,003 279 9	0,497 766 6
$\xi_1 = 1,5, \xi_2 = \infty$	0,034 454 2	-0,060 151 0	0,036 136 5	0,109 320 1	-0,039 784 2	0,476 242 5
$\xi_1 = 2, \xi_2 = \infty$	0,025 030 3	-0,038 661 9	0,068 111 2	0,060 018 4	-0,110 213 9	0,304 474 8
$\xi_1 = 2,5, \xi_2 = \infty$	0,020 421 3	-0,030 659 5	0,040 652 2	0,046 173 1	-0,062 201 5	0,090 964 6
$\xi_1 = 3, \xi_2 = \infty$	0,016 794 8	-0,024 667 3	0,028 440 8	0,036 270 5	-0,042 000 4	0,049 460 9

(50) Ce tableau de coefficients $e_{pq}(\xi_1)$ diffère du tableau des $E_{pq}(\xi_1)$ donné à la page 56 de la publication antérieure [9] déjà citée. Mais il existe une relation simple entre ces deux séries de coefficients. Les E_{pq} ont été en effet calculés en utilisant, pour la transformation $f_p(x) \rightarrow \varphi_p(\xi)$, la forme (7) et non la forme (8) de l'intégrale de diffraction. L'emploi de cette forme (7) conduirait à multiplier par 2 tous les nombres du tableau VIII. D'autre part, les constantes $E_{pq}(\xi_1)$ ne se rapportent pas à l'énergie dispersée sur les parties $-\infty, \dots -\xi_1$ et $\xi_1, \dots +\infty$ de la figure de diffraction, mais à son complément, l'énergie *centrale* répartie entre $-\xi_1$ et $+\xi_1$. On a donc

$$\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} J(\xi) d\xi = \int_{-\xi_1}^{+\xi_1} \sum_1^{n-1} [c_p \varphi_p(\xi)]^2 d\xi = \sum_1^{n-1} E_{pq}(\xi_1) c_p c_q$$

d'où l'on tire

$$E_{pq}(\xi_1) = 2 e_{pq}(0) - 2 e_{pq}(\xi_1)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} E_{pp}(\xi_1) = 1 - 2 e_{pp}(\xi_1) & \text{pour } p = q \\ E_{pq}(\xi_1) = -2 e_{pq}(\xi_1) & \text{pour } p \neq q \end{cases}$$

TABLEAU IX

Coefficients ε_{pq} (ρ_1, ρ_2), relatifs au facteur de pieds,
pour des écrans circulaires à 2 et 3 termes ;
pour des écrans rectilinéaires à 2, 3 et 4 termes.

$\varepsilon_{pq}(\rho_1, \rho_2)$										
Intervalle d'apodisation	ε_{00}	ε_{01}	ε_{02}	ε_{11}	ε_{12}	ε_{22}				
Ecrans circulaires $\rho_1 = \frac{\lambda_3}{\pi}, \rho_2 = \frac{\lambda_{13}}{\pi}$ C_{3-13}	1	1,037 014	1,151 012	1,076 599	1,199 474	1,353 814				
$\varepsilon_{pq}(\xi_1, \xi_2)$										
Intervalle d'apodisation	ε_{00}	ε_{01}	ε_{02}	ε_{03}	ε_{11}	ε_{12}	ε_{13}	ε_{22}	ε_{23}	ε_{33}
Ecrans rectilinéaires $\xi_1 = 3, \xi_2 = 13$ C_{3-13}	1	1,026 949 82	1,129 928 29	1,055 305 69	1,164 254 44	1,299 134 86				
Ecrans rectilinéaires $\xi_1 = 3,5, \xi_2 = 13,5$ $D_{3,5-13,5}$	1	-1,021 968 33	1,100 078 98	-1,316 944 66	1,044 783 91	-1,126 115 87	1,353 816 70	1,219 819 69	-1,490 437 21	1,924 967 44

TROISIÈME PARTIE

I. Généralités sur les calculs d'écrans pour l'apodisation moyenne d'un intervalle donné de la figure de diffraction

On peut.

1°) chercher le maximum de l'apodisation moyenne que peut fournir, sur un intervalle déterminé ($\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ ou $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$), une famille d'écrans à n termes,

2°) étudier les écrans qui correspondent à des taux d'apodisation inférieurs au maximum.

La méthode des maxima d'apodisation moyenne a été utilisée par Straubel pour ses calculs d'écrans circulaires [1b]. Lansraux l'a aussi proposée [3]. Elle a enfin servi à la détermination de plusieurs séries d'écrans rectilinéaires [9].

L'étude des écrans de taux non maximum semble, par contre, n'avoir pas encore été faite. Nous verrons qu'elle complète utilement la méthode des maxima en permettant notamment d'imposer à l'écran plusieurs conditions simultanées.

Notation des écrans. — Nous appellerons *rang* d'une famille d'écrans (ou d'un écran de cette famille) le nombre de fonctions de base dont elle dépend.

Nous désignerons les écrans par des majuscules romaines pour les écrans rectilinéaires, rondes pour les écrans circulaires.

Le *rang dans l'alphabet* de ces majuscules correspondra au nombre de termes c'est-à-dire au *rang* de l'écran. C'est ainsi que A ou \mathcal{A} désigneront des écrans *uniformes*, ou écrans à 1 terme, B ou \mathcal{B} désigneront des écrans à 2 termes, etc.

En *indices*, nous marquerons les *limites de l'intervalle d'apodisation* choisi. C_{3-13} représente, par exemple, un écran rectilinéaire apodisé entre $\xi_1 = 3$ et $\xi_2 = 13$, c'est-à-dire entre le 3^e et le 13^e zéro de la figure normale. Par analogie, C_{3-13} désignera un écran circulaire apodisé entre le 3^e et le 13^e zéro normal, c'est-à-dire entre $\rho_1 = \lambda_3/\pi$ et $\rho_2 = \lambda_{13}/\pi$.

II. Détermination des maxima d'apodisation dans une famille d'écrans à n termes

Le maximum d'apodisation moyenne, sur un intervalle donné, correspond au minimum, sur cet intervalle, d'un facteur \mathcal{D} , \mathcal{I} ou \mathcal{F} (cf. p. 86). Les calculs diffèrent suivant qu'on utilise un facteur s'exprimant par le quotient de deux formes

quadratiques des coefficients de l'écran ou un facteur s'exprimant par une forme quadratique simple.

Un facteur du premier type (facteur de dispersion, par exemple) conduit à des calculs particulièrement pénibles.

1. **Emploi du facteur \mathfrak{D} .** — Je rappellerai brièvement la méthode (la seule qu'ait employée Straubel) ; on a

$$\mathfrak{D}(\rho_1) = \frac{\sum c_p c_q e_{pq}(\rho_1)}{\sum c_p c_q e_{pq}(0)} = \frac{f(c_p, c_q)}{g(c_p, c_q)}.$$

$\mathfrak{D}(\rho_1)$ est stationnaire lorsqu'on a $g df - f dg = 0$.

Mais, pour l'écran correspondant, on a $f/g = \mathfrak{D}_{\min}(\rho_1)$, donc

$$f - \mathfrak{D}_{\min} dg = 0 \quad \text{ou} \quad d[f - \mathfrak{D}_{\min} g] = 0.$$

Nous écrirons donc que les dérivées partielles, par rapport aux coefficients c_p , de la forme quadratique

$$f - \mathfrak{D}_{\min} g \equiv \sum c_p c_q \{ e_{pq}(\rho_1) - \mathfrak{D}_{\min} e_{pq}(0) \}$$

sont nulles. Soient E_{pq} les coefficients de cette forme (qui ne sont *pas numériques*, puisque \mathfrak{D}_{\min} est une *inconnue*),

$$E_{pq} = e_{pq}(\rho_1) - \mathfrak{D}_{\min} e_{pq}(0).$$

On devra résoudre par rapport aux coefficients c_p le système linéaire homogène

$$(25) \quad \begin{cases} c_0 E_{00} + \dots + c_p E_{0p} + \dots + c_{n-1} E_{0, n-1} = 0 \\ \dots \\ c_0 E_{n-1,0} + \dots + c_p E_{n-1,p} + \dots + c_{n-1} E_{n-1, n-1} = 0 \end{cases}$$

L'écran cherché est une solution non banale de ce système homogène de n équations à n inconnues. Pour lui, par conséquent, le déterminant du système s'annule ;

$$\Delta = \begin{vmatrix} E_{00} & \dots & E_{0p} & \dots & E_{0, n-1} \\ \dots & & & & \\ E_{n-1,0} & \dots & E_{n-1,p} & \dots & E_{n-1, n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $E_{pq} = e_{pq}(\rho_1) - \mathfrak{D} e_{pq}(0)$, l'équation $\Delta = 0$ est de degré n par rapport à \mathfrak{D} ; le facteur de dispersion minimum \mathfrak{D}_{\min} , caractéristique de l'écran cherché, est la *plus petite racine positive de cette équation*.

La valeur de \mathfrak{D}_{\min} , portée dans l'expression des E_{pq} , transforme le système (25) en un système à coefficients *numériques* résoluble par rapport aux inconnues c_p . Remarquons que \mathfrak{D}_{\min} doit être déterminé avec précision (Straubel donne, par exemple, 5 chiffres significatifs), sous peine de fausser les E_{pq} et le système entier des équations dont on tire les coefficients c_p .

2. **Emploi du facteur de pieds.** — Nous allons voir que l'emploi du facteur de pieds ou de tout facteur s'exprimant par une *forme quadratique simple* des inconnues c_p , ne soumet pas le calcul des c_p à la détermination préalable de \mathfrak{D}_{\min} et à la résolution précise d'une équation de degré n .

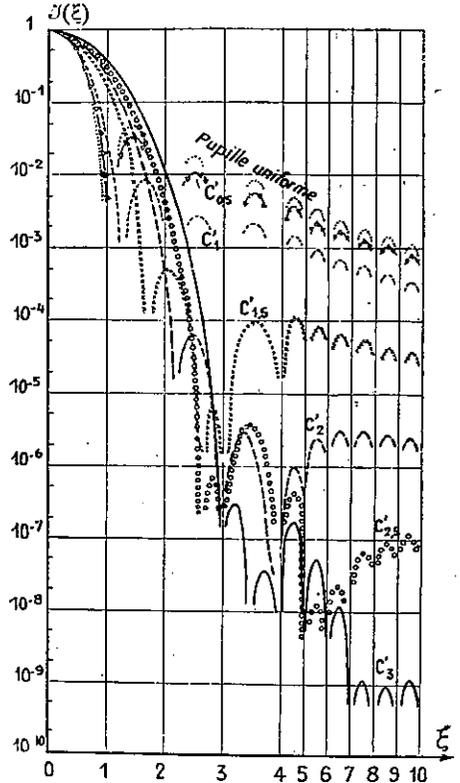
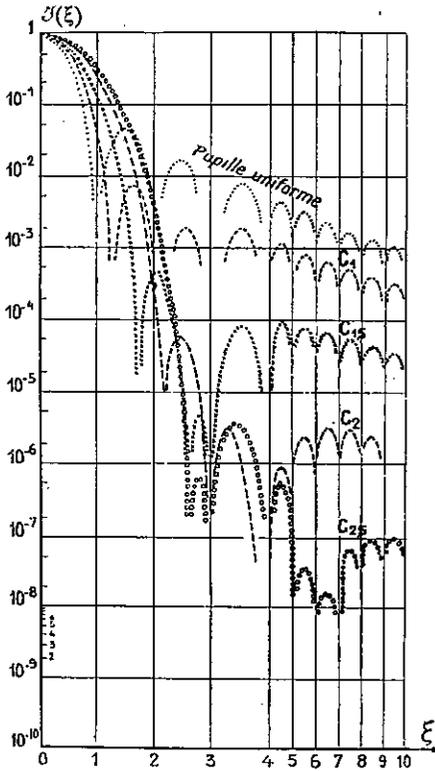


FIG. 43. — Figures de diffraction de la famille d'écrans rectilinéaires C éclairés par une fente infiniment fine. Facteurs de dispersion minima pour les intervalles $|\xi| > 1$, $|\xi| > 1,5$, $|\xi| > 2$, $|\xi| > 2,5$ respectivement.

FIG. 44. — Figures de diffraction de la famille d'écrans rectilinéaires C' éclairés par une fente infiniment fine. Facteurs d'étalement minima pour les intervalles $|\xi| > 0,5$, $|\xi| > 1$, $|\xi| > 1,5$, $|\xi| > 2$, $|\xi| > 2,5$, $|\xi| > 3$ respectivement.

L'échelle des intensités est logarithmique ; l'échelle des ξ , linéaire, a été contractée dans le rapport 2/5 à partir de $\xi = 4$. En pointillé, la figure de diffraction de la pupille uniforme est donnée à titre de comparaison.

La ressemblance des figures de diffraction de ces deux séries d'écrans est d'ailleurs frappante, comme le montrent les courbes des figures 43 et 44 extraites d'une publication antérieure [9].

Quant au facteur de pieds, nous ne l'avons utilisé qu'à partir de $\xi_1 = 3$. Il paraît donner (tableau XI) une apodisation moyenne $\mathcal{A}b(\mathcal{D})$ un peu supérieure à celle que définit le facteur d'étalement (écrans B' et C').

TABLEAU XI

Origine de l'intervalle d'apodisation	$\xi_1 = 3$			
Ecrans	B'_3	B_{3-13} (facteur de pieds)	C'_3	C_{3-13} (facteur de pieds)
$\mathcal{A}b(\mathcal{D})$	1 320	1 500	48 200	65 610

Les résultats restent toutefois du même ordre.

En conclusion, ces exemples montrent que les facteurs d'étalement et de pieds, que nous avons introduits pour les simplifications considérables qu'ils apportent dans le calcul des écrans apodisants, définissent d'aussi bons écrans que le facteur de dispersion. Il semble donc qu'on aurait intérêt à les employer de préférence, surtout lorsqu'on utilise les bases de Dini-Bessel. Nous avons déjà expliqué pourquoi nous n'avons encore utilisé dans ce cas que le seul facteur de pieds.

2. Influence du choix des bases. — Ce choix comporte deux degrés :

- a) choix du système de base ;
- b) dans un système donné, choix des bases particulières qui serviront à former l'écran.

a) *Le choix du système* est pratiquement très limité, puisque les bases doivent se prêter au calcul de l'intégrale de diffraction. Pour les écrans circulaires, on peut adopter le système de Straubel ou le système de Dini-Bessel. Il y aurait lieu de calculer plusieurs séries parallèles de figures de diffraction correspondant à ces deux systèmes. Straubel n'ayant point donné celles des écrans qu'il a déterminés, la comparaison n'est pas actuellement possible. Il est vraisemblable que les figures seraient assez différentes, les fonctions de base ayant des profils très dissemblables ; ceci se marque, par exemple, dans le détail suivant : le bord $r = 1$ de l'écran correspond à un *maximum* des fonctions $J_0(\lambda_p r)$ tandis qu'il constitue un *zéro* pour toutes les fonctions de Straubel $(1 - r^2)^{p-1}$, la première ($p = 1$), ou pupille uniforme, exceptée.

b) *Le choix des bases*, à l'intérieur d'un système donné, est soumis à quelques règles.

1) La base qui correspond à la *pupille uniforme* doit nécessairement figurer dans le développement de $A(x)$ ou de $A(r)$.

Cela résulte, *pour les fonctions de Straubel*, du fait, qui vient d'être signalé, qu'un écran $A(r)$ où ne figurerait point la base d'indice $p = 1$, posséderait une *densité optique infinie* sur les bords et serait donc irréalisable. C'est la raison qui rend inutilisables la plupart des écrans calculés par Straubel.

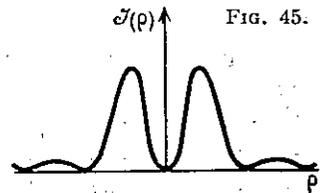
Avec les fonctions de *Fourier* ou de *Dini-Bessel*, la pupille uniforme correspond à l'indice 0 [$f_0(x) = \cos 0 x \equiv 1$, $f_0(r) = J_0(0r) \equiv 1$]. Cette base f_0 doit figurer explicitement dans le développement $A_n(x)$ ou $A_n(r)$ de tout écran apodisant car en annulant son coefficient c_0 , on annulerait aussi (fig. 45) l'intensité $J(0)$ au centre de la figure de diffraction ; on a en effet (cf. p. 95)

$$J(0) = c_0^2/2 \quad \text{ou} \quad J(0) = 2 c_0^2$$

rectil. circul.

Une telle figure, même apodisée, n'est pas souhaitable en général.

2) La seconde règle indique *dans quelles conditions* le choix d'un nombre croissant de



bases peut conduire à une *augmentation systématique* de l'apodisation maximum.

Elle suppose qu'on range les bases $f_p(x)$ ou $f_p(r)$ dans un ordre *déterminé* (par indices croissants, par exemple) et qu'on convienne de classer les écrans par familles correspondant aux *deux premières* bases, puis aux 3, 4, ..., p, ... premières bases et ainsi de suite. Chaque famille de rang p *contient* la famille de rang inférieur et constitue un *sous-ensemble* de la famille de rang supérieur : nous dirons que les familles *s'emboîtent*. *L'intérêt d'un tel classement est que le taux maximum d'apodisation dans les diverses familles ne peut que croître avec le rang.*

L'écran *optimum* de rang p est en effet aussi un écran de rang $p + 1$, avec un coefficient c_{p+1} nul. Il est donc surclassé par l'écran optimum de rang $p + 1$ à moins que, très exceptionnellement, ils ne s'identifient. L'apodisation augmente donc d'ordre en ordre ; elle ne pourrait demeurer, à partir d'un certain rang r_0 , stationnaire que si l'écran dont les propriétés constituent, dans l'intervalle choisi, un optimum *absolu* pouvait se représenter par un développement *limité* du type choisi ; la méthode ci-dessus fournirait alors cet écran.

Cette augmentation systématique de l'apodisation est essentiellement liée à l'*emboîtement* des familles successives que nous considérons. Cet emboîtement assurerait de même l'amélioration régulière de toute autre qualité dont on chercherait un *optimum*. Nous en verrons des exemples dans la suite.

3. Les variations de l'apodisation sur l'intervalle $\xi > \xi_1$ ou $\rho > \rho_1$ pour lequel on cherche à conditionner au mieux l'écran. — 1) *Nécessité de considérer plusieurs intervalles différents.* — La méthode employée ne détermine qu'un optimum du taux *moyen* de l'apodisation sur l'intervalle qui sert au conditionnement de l'écran. Elle ne permet donc pas de prévoir

1° l'étendue exacte du domaine qui se trouvera réellement apodisé,

2° la *répartition* $K(\xi)$ de l'apodisation (en particulier, la position de ses maxima ou minima).

On ne peut donc trouver l'écran le mieux adapté à un problème donné qu'en comparant de nombreuses figures de diffraction correspondant à un choix étendu de valeurs de ξ_1 ou de ρ_1 .

Etat de la question. a) *Ecrans rectilinéaires.* — Des calculs et des tracés de figures de diffraction [9] ont été faits pour un très grand nombre d'intervalles ($\xi_1 = 0,5 - 1,5 - 2 - 2,5 - 3$, valeurs auxquelles nous ajouterons bientôt 3,5).

b) *Ecrans circulaires.* — L'étude en est encore très incomplète.

Straubel a choisi 3 valeurs de ρ_1 allant de λ_1/π , abscisse du premier zéro de la figure normale, jusqu'à l'abscisse l/π du premier maximum secondaire normal (l est la première racine de $J_2(v) = 0$). Mais seuls peuvent être retenus (densités marginales finies) les écrans qu'il propose pour $\rho_1 = \lambda_1/\pi$.

Les nouveaux écrans circulaires que nous calculerons correspondent à $\rho_1 = \lambda_3/\pi$, c'est-à-dire à l'abscisse du troisième zéro de la figure normale. Nous donnerons les figures de diffraction des principaux d'entre eux.

De cette étude incomplète, il semble possible, en s'aidant de certaines analogies entre écrans rectilinéaires et circulaires, de dégager quelques conclusions :

Les résultats sont médiocres quand ξ_1 ou ρ_1 ne dépassent pas l'abscisse du premier zéro ($\xi_1 \leq 1$, $\rho_1 \leq \lambda_1/\pi$) ; *l'apodisation est alors faible et croît très lentement avec le rang de l'écran.*

Voici par exemple l'apodisation moyenne maximum pour un certain nombre d'écrans rectilinéaires et circulaires :

Origine de l'intervalle d'apodisation	$\xi_1 = 0,5$		$\xi_1 = 1$		$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\pi}$ (Ecrans calculés par Straubel)		
	$B'_{0,5}$	$C'_{0,5}$	B_1	C_1	B_1	C_1	\mathcal{O}_1
Ecrans							
$\mathcal{A}b(\mathcal{D})$	1,02	1,02	2,06	2,37	4,46	4,945	4,948

L'apodisation $K(\xi)$ à l'endroit des maxima ($\xi = k + 0,5$) est plus forte que ne le laisserait supposer le coefficient moyen $\mathcal{A}b(\mathcal{D})$ mais demeure médiocre ; on a par exemple,

Ecran B_1 }	ξ	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	8,5	9,5	∞	
	$K(\xi)$	14,7	3,8	3,3	3,1	3	2,9	2,88	2,87	
Ecran C_1 }	ξ	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	9,5	∞
	$K(\xi)$	7,15	8,35	4,55	4,17	4	3,7	3,64	3,64	3,56

Nous allons voir que ces taux d'apodisation sont largement dépassés, *sur les premières franges mêmes*, lorsqu'on donne à ξ_1 ou à ρ_1 des valeurs plus élevées. C'est ainsi qu'en plaçant ξ_1 ou ρ_1 sur le premier maximum secondaire normal ($\xi_1 = 1,5$ ou $\rho_1 = l/\pi$) on trouve les taux moyens suivants :

Origine de l'intervalle d'apodisation	$\xi_1 = 1,5$		$\rho_1 = \frac{l}{\pi}$ (1 ^{er} Max. second. normal)	
	$B_{1,5}$	$C_{1,5}$	$C_{1,5}$	Ecran de Straubel (irréalisable, la base correspondant à $p = 1$ n'étant pas utilisée).
Ecrans				
$\mathcal{A}b(\mathcal{D})$	37,5	59	19,8	

L'apodisation moyenne se trouve multipliée par 20 à 25 dans le cas des écrans rectilinéaires et par 4 dans le cas des circulaires.

Et voici, pour l'écran rectilinéaire $C_{1,5}$, la répartition $K(\xi)$ de cette apodisation

ξ	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	∞
$K(\xi)$	10	1 000	100	50	37	33	30	26,6

L'apodisation que crée, sur les trois premières franges, l'écran $C_{1,5}$ est, nous le voyons, beaucoup plus marquée que celle de l'écran C_1 .

Voici même un écran B_2 plus efficace que les écrans B_1 ou C_1 dès la toute première frange :

ξ	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	∞
$K(\xi)$	24,4	135	23 700	617	312	232	198	180	166	130

En conclusion, l'apodisation réellement obtenue *déborde souvent l'intervalle pour lequel l'écran a été conditionné*. Les plus fortes apodisations sur la première frange et sur ses voisines s'obtiennent en choisissant des intervalles distants d'une unité et demie, au moins, du centre de l'image. Ce sont ces intervalles que nous considérerons exclusivement dans la suite.

2) *Manque de souplesse de la méthode des maxima dans les intervalles $\xi_1 > 1$ et $\rho_1 > \lambda_1/\pi$* . — Si, dans ces intervalles, l'efficacité de la méthode augmente beaucoup, elle perd, par contre, toute souplesse. *D'un intervalle à l'autre ou, dans un même intervalle, d'un rang au suivant*, l'apodisation croît par « sauts » de grande amplitude :

Ecrans	Rectilinéaires						Circulaires	
	B ₂	C ₂	B' _{2,5}	C' _{2,5}	B' ₃	C' ₃	C ₃₋₁₃	C' ₃₋₁₃
Apodisation moy. $\mathbb{A}b(\mathbb{D})$..	282	↗ 843	469	↗ 8 913	1 320	↗ 48 200	900	↗ 36 400

Dans les intervalles précédents, l'écran était insuffisamment apodisé (écran rectilinéaire C₁, $\mathbb{A}b(\mathbb{D}) = 2,4$; écran circulaire C₁, $\mathbb{A}b(\mathbb{D}) = 4,9$). On passe maintenant, sans intermédiaires, à des apodisations trop élevées. Et comme l'apodisation s'obtient aux dépens de la transparence de l'écran, on perd inutilement de la lumière.

Ecrans	Rectilinéaires			Circulaires	
	C ₁	C ₂	C' ₃	C ₁ (de Straubel)	C ₃₋₁₃
Transmission totale réduite T.....	0,60	↘ 0,36	↘ 0,3	0,32	↘ 0,11

Puisque, dans ces intervalles, les *maxima* d'apodisation dépassent les limites utiles, il y a lieu de chercher à apodiser *moins* afin de *gagner*, si possible, sur la *clarté de l'écran*.

Nous allons donc étudier maintenant les écrans auxquels on impose un taux d'apodisation *inférieur au maximum*.

III. Choix d'un écran, d'apodisation donnée, dans une famille d'écrans à n termes

1. **Ce choix peut satisfaire une ou plusieurs exigences nouvelles.** — *La détermination d'un écran, d'apodisation inférieure au maximum, comporte plusieurs solutions*. Nous raisonnerons, pour simplifier, sur l'exemple précis d'une famille d'écrans circulaires à 3 termes :

$$A(r) = c_0 \sqrt{2} \left\{ 1 + \beta_1 \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \beta_2 \frac{J_0(\lambda_2 r)}{J_0(\lambda_2)} \right\},$$

où $\beta_1 = c_1/c_0$, $\beta_2 = c_2/c_0$, c_0, c_1, c_2 étant les coefficients de l'écran « courant » de la famille.

Le facteur de pieds de ces écrans, sur l'intervalle $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, est

$$\mathfrak{F}(\rho_1, \rho_2) = \varepsilon_{11}\beta_1^2 + \varepsilon_{22}\beta_2^2 + 2 \varepsilon_{12}\beta_1\beta_2 + 2 \varepsilon_{10}\beta_1 + 2 \varepsilon_{20}\beta_2 + \varepsilon_{00},$$

avec
$$\varepsilon_{pq} = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_p^2}{\pi^2}} \cdot \frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{\lambda_q^2}{\pi^2}} d\rho.$$

L'écran uniforme ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) appartient à la famille, son facteur de pieds est $\mathfrak{F}_0 = \varepsilon_{00} = 1$.

Soit à déterminer un écran apodisé E_i , de facteur de pieds $\mathfrak{F}_i < \mathfrak{F}_0 = \varepsilon_{00}$. Les coefficients β_1, β_2 de cet écran vérifient l'équation $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i$, c'est-à-dire

$$(26) \quad \varepsilon_{11} \beta_1^2 + \dots + \varepsilon_{00} - \mathfrak{F}_i = 0.$$

Dans un espace à trois dimensions, rapporté à un système d'axes rectangulaires, $O\beta_1, O\beta_2, O\mathfrak{F}$, cette équation définit l'intersection du paraboléoïde

$$(27) \quad \varepsilon_{11} \beta_1^2 + \dots + \varepsilon_{00} - \mathfrak{F} = 0.$$

par le plan

$$(28) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i.$$

L'intersection est réelle pourvu que \mathfrak{F}_i soit supérieur à la cote du plan tangent $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\min}$ (fig. 46). Nous retrouvons ainsi l'écran d'apodisation maximum E_M , auquel nous nous intéressons dans la méthode précédente : c'est l'écran « de contact » entre le paraboléoïde (27) et la famille de plans parallèles $\mathfrak{F} = \text{Cte}$. *Cet écran est unique.*

Mais c'est, par contre, une infinité d'écrans que l'équation d'intersection (26) fait correspondre à toute valeur supérieure du facteur de pieds.

Toutefois si ces écrans E_i ont même facteur de pieds, ils diffèrent à tous autres égards. Parmi eux, un choix nouveau est donc possible, mettant en jeu une autre qualité q de l'écran ou de sa figure de diffraction.

Supposons d'abord, pour simplifier, que cette qualité soit reliée aux coefficients de l'écran par une équation du premier degré

$$q = b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3$$

(qualité « linéaire ») et soit q_j l'une de ses valeurs.

Ceux des écrans E_i qui possèdent la qualité q_j correspondent aux points d'intersection de la conique d'apodisation (26) par la droite Δ du plan $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i$:

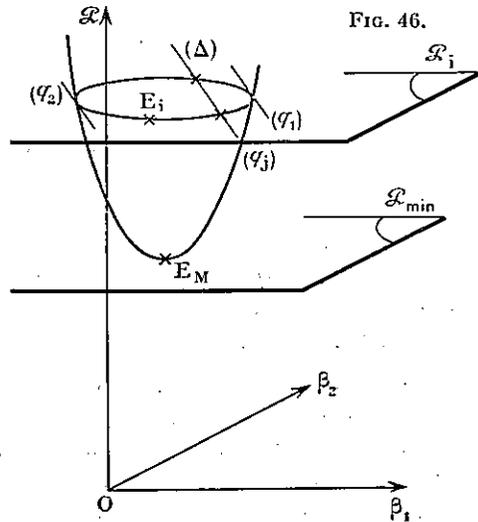


FIG. 46.

$$(29) \quad b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 - q_j = 0$$

Lorsque q_j varie, cette droite se déplace parallèlement à elle-même. Ses points de contact avec la conique (26) définissent deux valeurs limites q_1 et q_2 de q pour les écrans E_i . On peut alors

soit choisir *un* de ces deux écrans limites (par exemple, si q représente la clarté de l'écran, prendre $q = q_{\max}$),

soit donner à q une valeur intermédiaire q_j :

$$q_{\min} < q_j < q_{\max}$$

La droite $\Delta(q_j)$ définit alors *deux* écrans entre lesquels un dernier choix est possible : il se fera en fonction d'une nouvelle qualité r .

C'est ainsi que la sélection d'un écran à *trois* termes, dépendant de deux coefficients β_1, β_2 peut mettre en jeu trois critères successifs distincts (apodisation, qualité q , qualité r).

Le même raisonnement, appliqué à une famille d'écrans de rang n conduirait aux conclusions suivantes :

1) L'écran d'apodisation maximum correspond au point de contact de la quadrique Q_n (paraboloïde à n dimensions) :

$$Q_n \equiv \varepsilon_{11} \beta_1^2 + \dots + \varepsilon_{n-1, n-1} \beta_{n-1}^2 + 2 \varepsilon_{12} \beta_1 \beta_2 + \dots + 2 \varepsilon_{n-2, n-1} \beta_{n-2} \beta_{n-1} + \dots + 2 \varepsilon_{10} \beta_1 + \dots + 2 \varepsilon_{n-1, 0} \beta_{n-1} + \varepsilon_{00} - \mathcal{F} = 0$$

avec la famille de plans parallèles $\mathcal{F} = \text{Cte}$.

2) \mathcal{F}_{\min} étant la cote du plan tangent, tout plan de cote supérieure $\mathcal{F}_i > \mathcal{F}_{\min}$ coupe Q_n suivant une quadrique Q_{n-1} ; les points de Q_{n-1} représentent des écrans E_i admettant \mathcal{F}_i pour facteur de pieds.

3) Si q est une qualité, fonction linéaire des coefficients $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ de l'écran

$$q = b_1 \beta_1 + \dots + b_{n-1} \beta_{n-1} + b_n,$$

tout écran E_i tel que q prenne la valeur q_j appartient à la quadrique Q_{n-2} , intersection de Q_{n-1} par le « plan »

$$b_1 \beta_1 + \dots + b_{n-1} \beta_{n-1} + b_n - q_j = 0$$

4) On peut ainsi, par des « intersections » successives, imposer à l'écran E_i un ensemble de $n-1$ qualités « linéaires », dont les valeurs sont prises entre des limites qu'on sait déterminer (contacts de quadriques et de plans). Ce nombre s'abaisse à $p < n-1$ si l'on a décidé de conférer à la qualité de rang p sa valeur *optimum* (écran « de contact »).

5) On pourrait, de la même façon, s'intéresser à des qualités q non linéaires, mais le problème se complique vite ; pour une qualité, fonction du second degré des coefficients, ce n'est plus à un « plan » à n dimensions, mais à une quadrique que l'on a affaire. Aussi devra-t-on, pour conjuguer cette qualité q avec l'apodisation \mathcal{F} , déterminer l'intersection de deux quadriques.

6) La méthode est encore applicable si la fonction caractéristique des pieds s'exprime non plus par une forme quadratique simple des coefficients β , mais par le quotient de deux formes quadratiques (cas du facteur de dispersion ou du facteur d'étalement, avec les fonctions de Straubel). Soit, par exemple, \mathcal{D}_{\min} le minimum du facteur de dispersion \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \frac{\sum e_{pq}(\rho_1) c_p c_q}{\sum e_{pq}(0) c_p c_q} = \frac{\sum e_{pq}(\rho_1) \beta_p \beta_q}{\sum e_{pq}(0) \beta_p \beta_q}$$

avec $\beta_p = c_p/c_0$ et $\beta_0 = 1$.

Les écrans E_i correspondant à une valeur \mathcal{D}_i de \mathcal{D} supérieure à \mathcal{D}_{\min} appartiennent à la quadrique

$$Q_{n-1} \equiv \sum e_{pq}(\rho_1) \beta_p \beta_q - \mathcal{D}_i \sum e_{pq}(0) \beta_p \beta_q = 0.$$

Entre eux un choix peut donc intervenir, qui se fera par les mêmes procédés que ci-dessus.

2. **Quelques exemples de qualités « linéaires ».** — *Amplitude diffractée réduite en un point M_0 .* L'exemple le plus simple de qualité « linéaire » q est fourni par l'amplitude réduite $\mathcal{A}(\rho_0)/\mathcal{A}(0)$ en un point $M_0(\rho_0)$ de la figure de diffraction. On a

$$(30) \quad q = \frac{\mathcal{A}(\rho_0)}{\mathcal{A}(0)} = \frac{2 \int_1(\pi\rho_0)}{\pi\rho_0} \left[1 + \beta_1 \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - \frac{\lambda_1^2}{\pi^2}} + \beta_2 \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - \frac{\lambda_2^2}{\pi^2}} \right]$$

expression se présentant comme une forme linéaire des coefficients β_p de l'écran : $b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3$ (47).

Clarté de l'écran. Nous allons relier une qualité linéaire q à la clarté de l'écran.

Nous ne désignerons pas par « clarté » le coefficient de transmission de l'écran

$$T = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A^2(x) dx \quad \text{ou} \quad T = 2 \int_0^1 A^2(r) r dr,$$

car T , fonction du deuxième degré des coefficients de l'écran, donnerait lieu, comme nous l'avons montré, à des calculs trop pénibles. Nous préférons identifier la clarté à la somme des amplitudes pupillaires

(47) On pourra donc imposer à la fois, à un écran, la valeur *moyenne* \mathcal{E}_i de son facteur de pieds sur un intervalle déterminé ρ_1, ρ_2 de la figure de diffraction et la valeur q_0 de l'amplitude réduite en un point particulier ρ_0 de cette figure.

Le choix de q_0 sera libre entre les limites q_1 et q_2 correspondant aux deux tangentes à Q_{n-1} [Cf. 2) p. 102] qui appartiennent à la famille de droites parallèles d'équation (30).

En particulier, si q_1 et q_2 sont de signes contraires, la droite $q = 0$ coupe la quadrique Q_{n-1} et l'on peut annuler l'amplitude réduite au point ρ_0 .

Si q_1 et q_2 sont de même signe, c'est celui de ces nombres dont la valeur absolue est la plus faible qui définira la figure de diffraction la plus apodisée au point ρ_0 .

C'est ici, on le voit, une adaptation du critère dit « des zéros ». En le conjuguant ainsi avec le critère du « facteur de pieds », il est vraisemblable qu'on évitera l'écueil qui consiste à n'apodiser que sur un intervalle de faible amplitude.

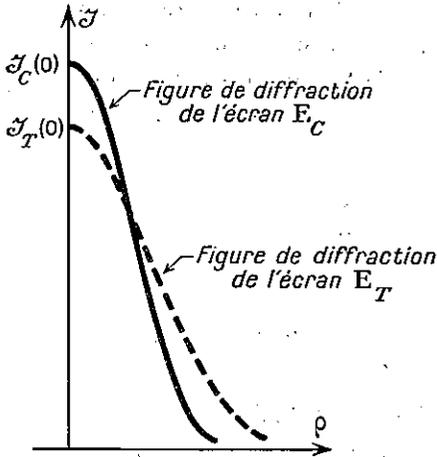


FIG. 47. — Pour l'écran E_C , $J(0)$ est maximum. Pour l'écran E_T , c'est l'énergie répartie dans la figure de diffraction (et principalement dans le « corps » de cette figure) qui est maximum. Conclusion : l'écran E_C est plus résolvant que l'écran E_T .

$$C = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A(x) dx$$

$$\text{ou } C = 2 \int_0^1 A(r) r dr.$$

Cette convention est justifiée par les considérations suivantes :

1) Sur la quadrique représentant les écrans d'une famille à n termes, le coefficient T peut passer par plusieurs maxima. Mais certains de ces maxima correspondent à des solutions indésirables ; ils fournissent des écrans à transmission d'amplitudes $A(x)$ ou $A(r)$ non partout positive, qui donnent à T , somme du carré des amplitudes, des valeurs élevées, tandis que C , somme algébrique de ces mêmes amplitudes, peut devenir très faible. En dehors même du fait que de tels écrans ne

seraient pas pratiquement réalisables (annulation de l'amplitude pupillaire en un ou plusieurs points), leurs figures de diffraction présentent généralement des caractéristiques peu intéressantes : minimum central et fort élargissement du « corps ». En recherchant les maxima de la clarté, nous écartons presque automatiquement les écrans dont la transmission d'amplitude n'est pas partout positive.

2) Dans les régions de la quadrique où la transmission d'amplitude des écrans garde, sur tout l'écran, un signe constant, les coefficients C et T varient, par contre, presque toujours dans le même sens. De sorte qu'en déterminant l'écran E_C de clarté maximum on s'approche généralement beaucoup de l'écran de transmission maximum E_T . S'il y a perte de transmission, elle n'est donc que légère. Par ailleurs, elle se trouve compensée par un gain sur la résolution. Cette propriété découle du fait que la clarté C , somme des amplitudes pupillaires, représente aussi l'amplitude au centre de la figure de diffraction ; dans la figure de diffraction de E_C , l'amplitude centrale est plus élevée que dans celle de E_T , tandis que l'énergie totale est moindre. En admettant, ce qui est raisonnable, que cette diminution d'énergie est surtout répartie dans le « corps », on voit que c'est la figure de l'écran E_C qui possède la plus faible largeur (fig. 47).

Expression de la clarté de l'écran (circulaire, à trois termes).

Rappelons qu'on a

$$(31) \quad A(r) = c_0 \sqrt{2} \left[1 + \beta_1 \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \beta_2 \frac{J_0(\lambda_2 r)}{J_0(\lambda_2)} \right],$$

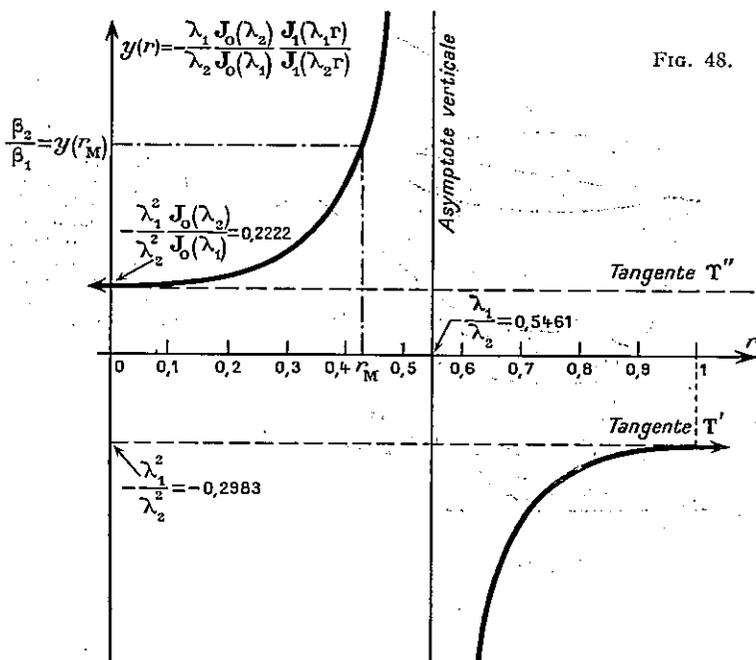


FIG. 48.

$$(32) \quad 2 \int_0^1 A(r) r dr = C = c_0 \sqrt{2},$$

L'équation (31) marque que le coefficient c_0 , dont dépend la clarté de l'écran, constitue dans $A(r)$ un facteur multiplicatif qui, laissant inchangé le *profil* de cette fonction, en fixe seulement la valeur absolue. Pour un profil déterminé (c'est-à-dire pour un ensemble de valeurs des coefficients β_1, β_2) nous choisirons naturellement toujours l'écran dont la transparence, au point r_M où elle est maximum, atteint l'unité : $A(r_M) = 1$. C'est cette condition qui fixe la valeur de c_0 et de la clarté. Nous avons

$$c_0 \sqrt{2} = C = \frac{1}{\left[1 + \beta_1 \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \beta_2 \frac{J_0(\lambda_2 r)}{J_0(\lambda_2)} \right]_{\max}}$$

Nous pouvons donc prendre pour qualité linéaire q , l'inverse de la clarté

$$(33) \quad q = \left[1 + \beta_1 \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \beta_2 \frac{J_0(\lambda_2 r)}{J_0(\lambda_2)} \right]_{\max}$$

Si le maximum de transparence de l'écran est au centre, cette formule se simplifie en

$$(34) \quad q = \left[1 + \frac{\beta_1}{J_0(\lambda_1)} + \frac{\beta_2}{J_0(\lambda_2)} \right]$$

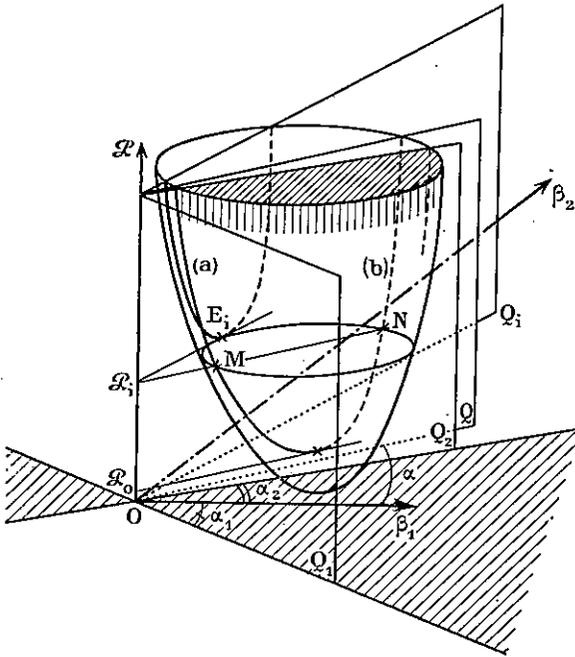


Fig. 49. — Les plans Q_1 ($\text{tg } \alpha_1 = -0,2983$) et Q_2 ($\text{tg } \alpha_2 = 0,2222$) délimitent, sur le paraboloid des écrans à 3 termes, la portion de surface correspondant aux écrans n'ayant de maximum de transparence qu'au centre.

Mais ce qui complique la recherche des écrans les plus clairs (ou écrans q_{\min}), c'est justement qu'il existe sur le paraboloid (27) $\varepsilon_{11} \beta_1^2 + \dots + \varepsilon_{00} - \mathcal{F} = 0$ des écrans dont le maximum n'est pas au centre de sorte que l'expression de q n'est pas invariable sur toute la surface du paraboloid.

La première question que nous nous poserons concernera donc la *Position des maxima (ou minima) de transparence d'un écran circulaire à 3 termes.*

Elle est donnée par

$$A'(r) = -\sqrt{2} c_0 \left[\beta_1 \lambda_1 \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \beta_2 \lambda_2 \frac{J_1(\lambda_2 r)}{J_0(\lambda_2)} \right] = 0.$$

Ces maxima (ou minima) correspondent donc à

$$1^o) \begin{cases} r = 0 & \text{centre et} \\ r = 1 & \text{bords} \end{cases} \quad \text{de l'écran}$$

$$2^o) \frac{\beta_2}{\beta_1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{J_0(\lambda_2)}{J_0(\lambda_1)} \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_1(\lambda_2 r)}.$$

Nous avons tracé, points par points (fig. 48), la courbe

$$y(r) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{J_0(\lambda_2)}{J_0(\lambda_1)} \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_1(\lambda_2 r)}.$$

Cette courbe nous permet de trouver facilement l'abscisse du maximum de transparence d'un écran de coefficients β_1, β_2 donnés : cette abscisse est en effet celle

du point d'intersection de $y(r)$ avec la parallèle à l'axe des r , d'ordonnée β_2/β_1 .

Nous constatons que la courbe $y(r)$ admet deux tangentes horizontales d'ordonnées

$$-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = -0,298\ 3 \quad \text{et} \quad -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{J_0(\lambda_2)}{J_0(\lambda_1)} = 0,222\ 2.$$

(tangentes T' et T'', fig. 48).

On en conclut que tous les écrans tels que β_2/β_1 soit compris entre $-0,298\ 3$ et $0,222\ 2$ n'admettent *aucun maximum ou minimum intermédiaire* : leur maximum de transparence est au centre. Ces écrans sont situés sur une *portion de surface* du paraboloidé comprise entre deux plans verticaux Q_1 et Q_2 (fig. 49). A ces écrans, la formule (34) est applicable pour la qualité q .

Les écrans possédant, au contraire, un maximum ou minimum intermédiaire, d'abscisse r_m , appartiennent, non à une portion de surface mais à *une ligne* (parabole), intersection du paraboloidé par le plan vertical Q (fig. 49) dont la pente $tg\alpha$ par rapport au plan $\beta_1 O \mathcal{F}$ est égale à $y(r_m)$.

3. Détermination des écrans qui, à apodisation donnée, possèdent la plus grande clarté. — 1°) *L'écran d'apodisation maximum*, sur l'intervalle

$$\rho_1 = \lambda_3/\pi \leq \rho \leq \rho_2 = \lambda_{13}/\pi,$$

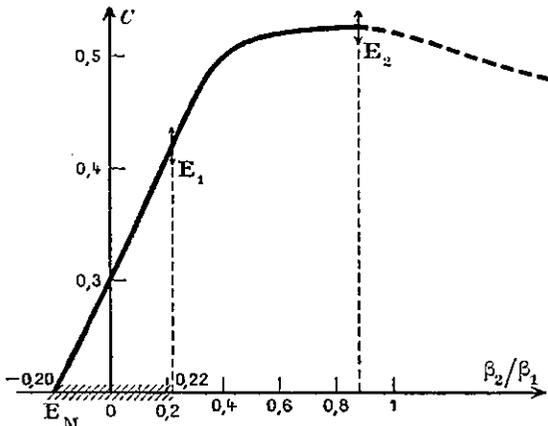
a été trouvé correspondre à $\beta_1 = -1,241\ 6$, $\beta_2 = 0,249\ 9$, d'où $\beta_2/\beta_1 = -0,200$. C'est donc un *écran à maximum au centre* et tous les écrans voisins sont aussi de ce type, en particulier les écrans les plus clairs correspondant à des facteurs de pieds \mathcal{F}_i un peu supérieurs au minimum. Nous déterminons ces écrans en

FIG. 50. — Courbe de la clarté maximum en fonction de β_2/β_1 pour des écrans circulaires à 3 termes, dont le taux d'apodisation moyen $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ décroît à partir de $\mathcal{M}(\mathcal{F})_{\max}$.

1°) de E_M à E_1 , on a $-0,200 \leq \beta_2/\beta_1 \leq 0,222$.

On est dans la région où *tous* les écrans du paraboloidé ont leur maximum au centre. La position du maximum étant *connue*, la détermination des écrans les plus clairs peut s'effectuer, dans cette région, par la méthode générale.

2°) Pour l'écran E_1 , à la frontière de la région précédente, on a $\frac{dC}{d(\beta_2/\beta_1)} > 0$; c'est une indication sur la façon dont se *prolonge* la courbe des clartés maxima. Elle « entre » maintenant dans la région définie par $\beta_2/\beta_1 > 0,222$. Les écrans correspondants n'ont plus leur maximum au centre. Pour leur détermination, cf. fig. 51.



3°) *en* E_2 , on a $dC/d(\beta_2/\beta_1) = 0$, avec $\beta_2/\beta_1 = 0,88$. C'est l'indication que la courbe des clartés maxima change ici de détermination. L'application, à partir de E_2 , des procédés de calcul du 2°) fournirait des écrans de clarté *décroissante* (en pointillé) [notamment des écrans de transparence *non* partout positive].

A partir de E_2 , les écrans de clarté maxima se situent sur une portion de parabole, intersection du paraboloidé des écrans à 3 termes, par le plan $\beta_2/\beta_1 = Cte = 0,88$ (fig. 51).

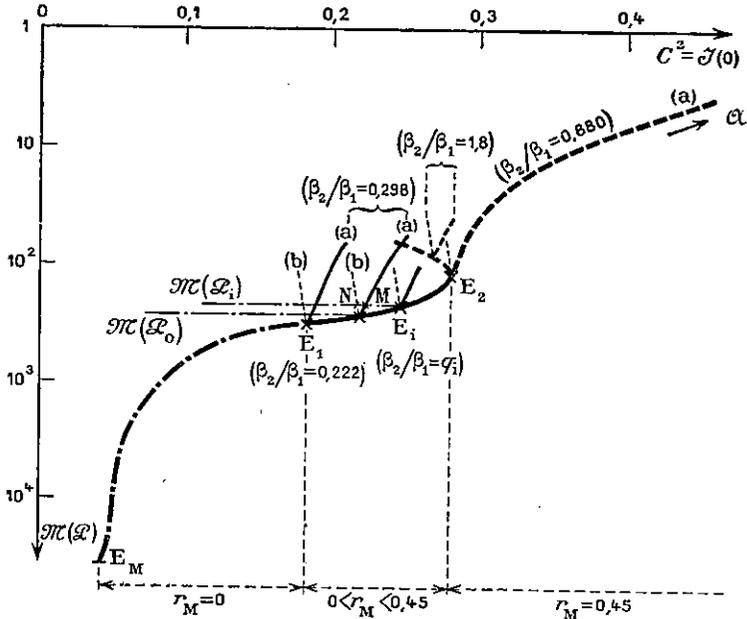


FIG. 51. — Courbe donnant C^2 (carré de la clarté maximum) en fonction du taux d'apodisation $\mathcal{A}b(\mathcal{F})$ et montrant que, de E_1 à E_2 , la courbe des clartés maxima se confond avec le lieu des écrans qui, dans les différentes familles $\beta_2/\beta_1 = \text{Cte}$, sont les écrans limites, d'apodisation maximum.

Soit, en effet, une famille d'écrans $\beta_2/\beta_1 = \text{Cte}$ (par exemple, $\beta_2/\beta_1 = 0,298$). Ils appartiennent à une parabole, intersection du paraboléide par le plan Q, tel que $\beta_2 = 0,298 \beta_1$ (fig. 49). Soit \mathcal{P}_0 la cote du sommet de cette parabole. Tout plan $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i > \mathcal{P}_0$ coupe la parabole en deux points M et N. M (de la branche (a), en traits pleins) est (fig. 51, ci-dessus) l'écran le plus clair tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ et $\beta_2/\beta_1 = 0,298$. Mais cette figure montre aussi, qu'à taux d'apodisation égal, l'écran M est surclassé par l'écran E_i . Cet écran E_i (fig. 49 et 51) est pour une certaine famille Q_i ($\beta_2/\beta_1 = \text{tg } \alpha_i$) un écran limite, apodisé au taux \mathcal{F}_i . Ceci signifie que la courbe des clartés maxima se confond, entre E_1 et E_2 , avec le lieu de ces écrans E_i d'apodisation maximum.

On voit aussi (fig. 51), qu'à partir de E_2 , la courbe des clartés maxima se confond avec la branche (a) de la parabole d'intersection du paraboléide des écrans à 3 termes par le plan $\beta_2/\beta_1 = 0,88$. Cette branche (a) passe par le point $\mathcal{A}(C^2 = 1, \mathcal{A}b(\mathcal{F}) = 1, \beta_1 = \beta_2 = 0)$ représentant la pupille circulaire uniforme.

Erratum. L'accolade placée sous ($\beta_2/\beta_1 = 0,298$) se rapporte aux deux branches (a) et (b) de l'intersection du paraboléide par le plan Q d'équation $\beta_2 = 0,298 \beta_1$. Remplacer $\beta_2/\beta_1 = g_i$ par $\beta_2/\beta_1 = \text{tg } \alpha_i$.

cherchant, comme nous l'avons expliqué plus haut, sur la conique des écrans E_i , apodisés au taux \mathcal{F}_i , le point de contact (q_{\min}) de la tangente à cette conique appartenant à la famille de droites parallèles

$$1 + \frac{\beta_1}{J_0(\lambda_1)} + \frac{\beta_2}{J_0(\lambda_2)} = g = \frac{1}{C}$$

a) *Ecrans à maximum central.* Nous obtenons ainsi toute une série d'écrans à maximum au centre, dont l'apodisation moyenne $\mathcal{A}b(\mathcal{F}) = \frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{F}} = \frac{1}{\mathcal{F}}$ va de 36 000 (écran E_M) à 320 (écran E_1) et la clarté de 0,203 (pour l'écran d'apodisation maximum) à 0,247 (pour l'écran E_1).

Ecrans circulaires à 2 termes β_{3-13} et à 3 termes C_{3-13} .

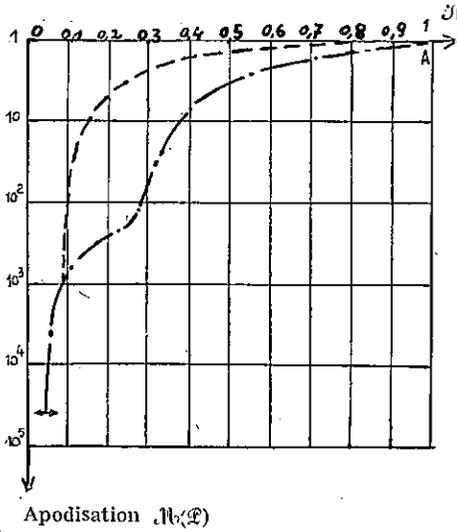


FIG. 52. — Courbes donnant le taux d'apodisation en fonction de $C^2 = J(0)$ pour les écrans de clarté maximum.

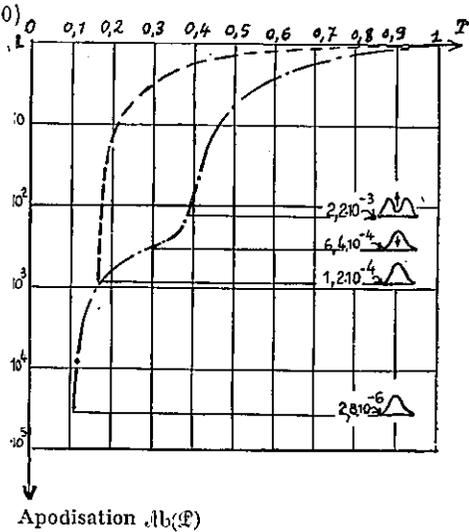


FIG. 53. — Courbes donnant, pour ces mêmes écrans, le taux d'apodisation en fonction de la transmission pupillaire totale

$$T = 2 \int_0^1 A^2(r) r dr.$$

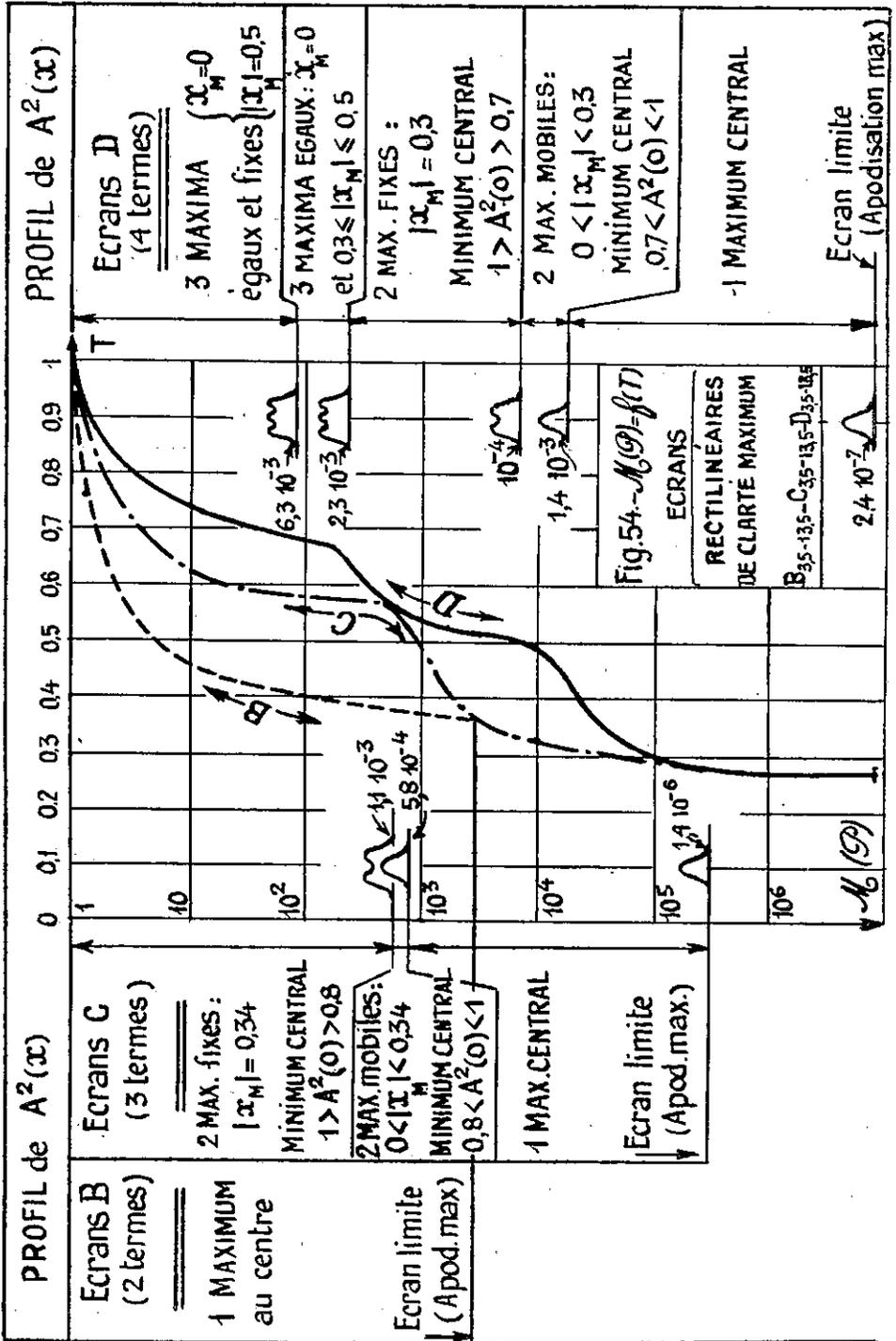
En ordonnées, le taux d'apodisation $\mathbb{A}(F)$ croît de haut en bas (échelle logarithmique). Le profil de la fonction de transmission $A^2(r)$ de quelques écrans est indiqué; on a marqué en particulier leur transmission marginale $A^2(1)$. Par exemple, le premier écran indiqué sur la figure 53 a un minimum au centre et une transmission marginale $A^2(1) = 2,2 \cdot 10^{-3}$.

L'écran limite, d'apodisation 320, correspond à $\beta_1 = -0,769 \ 8$, $\beta_2 = -0,171 \ 1$ d'où $\beta_2/\beta_1 = 0,222$.

Il est à la *frontière* de la région des écrans à maximum central (tangente T'' , fig. 48).

b) *Déplacement du maximum de transparence.* Pour trouver les écrans les plus clairs correspondant à des taux d'apodisation inférieurs à 320, nous nous laisserons guider par l'idée que sur la ligne qui représente, sur le paraboloidé, le lieu de tous les écrans cherchés, β_2/β_1 varie certainement de façon continue. Toutes les propriétés de ces écrans sont aussi des fonctions continues de β_2/β_1 . Or, de E_{31} à E_1 la clarté maximum n'a cessé de croître avec β_2/β_1 et la dérivée de cette fonction n'est ni nulle, ni infinie au point $\beta_2/\beta_1 = 0,222$ qui correspond à l'écran E_1 (fig. 50). Par conséquent, pour les écrans que nous cherchons, d'apodisation inférieure à 320, β_2/β_1 commence par continuer à croître : ces écrans n'ont donc plus leur maximum au centre.

Pour les déterminer, le plus simple est de couper le paraboloidé par des plans



$\beta_2/\beta_1 = \text{Cte}$ et de chercher, sur la conique obtenue, l'écran *limite*, d'apodisation maximum (cf. fig. 51 et sa légende).

On obtient ainsi toute une série d'écrans dont l'apodisation décroît de 320 à 125 (écran E_2) et dont la clarté C croît de 0,427 à 0,526.

c) *Ecrans ayant leur maximum de transparence au point $r_m = 0,45$.* L'écran E_2 , a son maximum de transparence au point $r_m = 0,45$. C'est un écran qui marque un maximum de la courbe $C = f(\beta_2/\beta_1)$ relative aux écrans limites (fig. 50). Pour lui on a $\beta_2/\beta_1 = 0,88$.

Pour les écrans *limites* qui correspondraient à des valeurs *supérieures* de β_2/β_1 , la clarté décroîtrait. C'est ce qu'on voit sur la figure 51, qui indique quel prolongement il faut donner à la courbe des clartés maxima : les écrans les plus clairs d'apodisation inférieure à 125 sont situés sur la ligne d'intersection du paraboloïde par le plan $\beta_2/\beta_1 = 0,88$.

Cette ligne coupe tout plan $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ en deux points. On choisit, de ces deux points, celui qui correspond à l'écran le plus clair.

On obtient ainsi la série d'écrans dont les apodisations vont de 125 à 1 et la clarté de 0,526 à 1. On retrouve ainsi l'écran uniforme comme écran limite.

Tous les écrans de cette dernière série ont leur maximum de transparence au point $r_m = 0,45$.

IV. Résultats

La même méthode a été appliquée à la détermination des écrans circulaires les plus clairs, à 2 termes, ainsi qu'à des écrans rectilinéaires à 4, 3 et 2 termes (les écrans à 4 termes affectent un plus grand nombre de formes que les écrans à 3 termes).

Elle a permis de tracer des courbes représentant la variation de l'apodisation en fonction soit du carré de la clarté, $C^2 = \mathcal{J}(0)$, soit de la transmission totale T pour les écrans les plus clairs de chaque catégorie considérée (fig. 52 à 54).

On trouvera (fig. 67 et 68) quelques exemples de courbes donnant les *coefficients* de ces écrans en fonction du taux d'apodisation et dans les tableaux XII à XVI les *principales caractéristiques* de plusieurs séries d'écrans.

On a déterminé enfin de nombreuses *figures de diffraction* (fig. 55 à 66) ⁽⁴⁸⁾.

⁽⁴⁸⁾ Conventions et notations adoptées dans le tracé des figures de diffraction. — Pour le « corps » de la figure (ξ ou $\rho < 1$ ou 1,2), l'échelle des intensités est linéaire.

Pour les « pieds » (à l'exception, parfois, des deux premiers), l'échelle est logarithmique.

Sont marqués en traits pleins : 1°) le corps de la figure apodisée et, quelquefois, la première frange ou le premier anneau ;

2°) les maxima des pieds de cette figure ;

3°) la fonction d'apodisation $K(\xi)$ ou $K(\rho)$. Une même courbe, en traits ininterrompus, représente cette fonction (échelle logarithmique verticale de droite, croissant de haut en bas) ou son inverse $K^{-1}(\xi)$ ou $K^{-1}(\rho)$ (échelle logarithmique verticale de gauche, croissant de bas en haut).

L'asymptote de cette fonction pour les valeurs infinies de ξ ou de ρ est marquée en traits mixtes.

Sont marqués en pointillés : le corps de la figure de référence (correspondant à une pupille uniforme, rectangulaire ou circulaire suivant les cas) et les maxima de ses pieds.

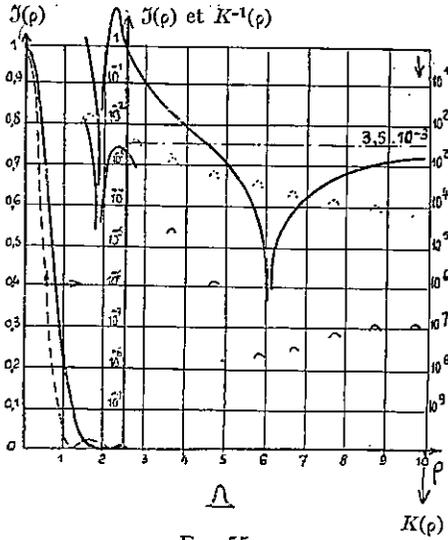


FIG. 55.

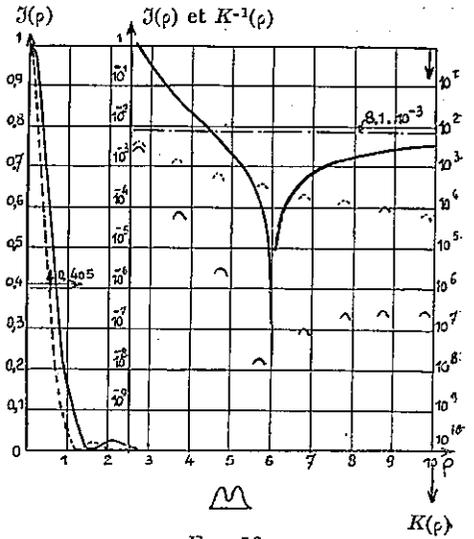


FIG. 56.

Ecrans circulaires à 3 termes $C_{3,13}$.
 Les trois figures correspondent à des apodisations moyennes décroissantes [$M_b(F) = 320, 125$ et 63] et à des transmissions pupillaires T croissantes [$T = 0,3, 0,39$ et $0,41$].
 Le profil de $A^2(r)$ pour l'écran correspondant est indiqué au-dessous de l'axe des ρ .

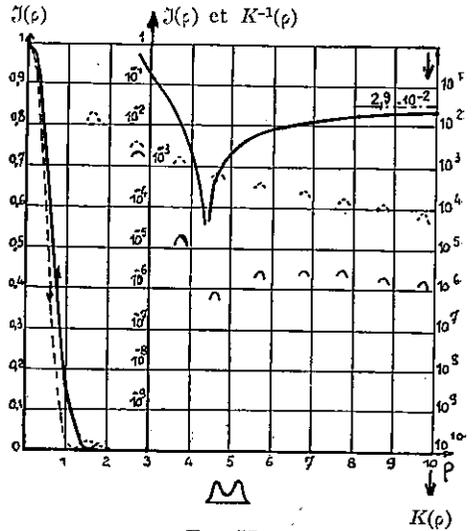


FIG. 57.

Conclusions. On constate sur les figures 52, 53 et 54 :

1°) que les écrans à 2 termes ne permettent guère d'augmenter la clarté fût-ce au prix d'un sacrifice sur l'apodisation : ils restent très sombres jusqu'à des taux d'apodisation de l'ordre de 5 ;

2°) mais que les écrans à 3 et à 4 termes fournissent, avec un gain de clarté considérable, les taux d'apodisation moyens donnés par les écrans à 2 termes. D'une

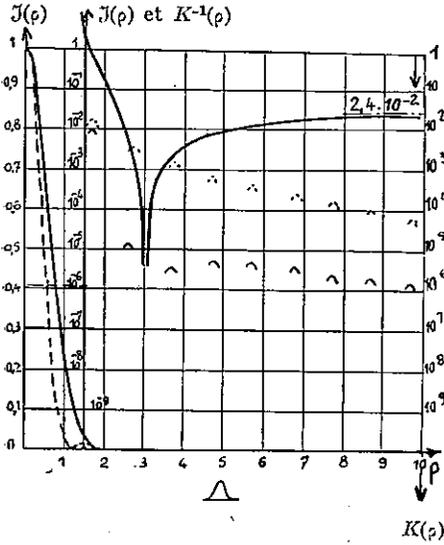


FIG. 58.

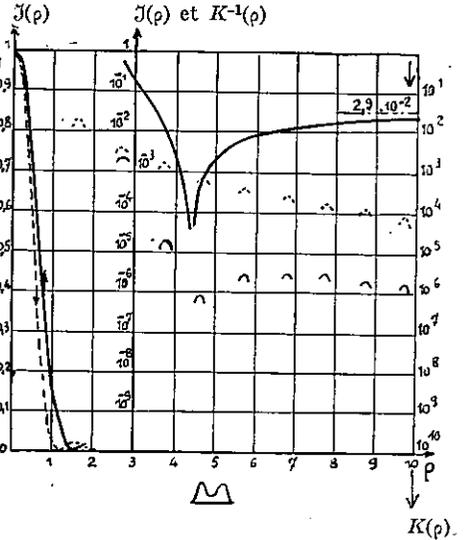


FIG. 59.

Comparaison des figures de diffraction d'un écran à 2 termes B_{3-13} de transparence $T = 0,18$ (fig. 58) et d'un écran à 3 termes C_{3-13} de transparence 0,41 (fig. 59) et de même apodisation moyenne $M(\mathcal{E}) = 63$. On remarquera que les profils des deux écrans sont très dissemblables.

façon générale, à apodisation donnée, la clarté de l'écran le plus clair croît avec le nombre de termes de l'écran, ce que nous avons laissé prévoir.

La transmission totale T fait de même ; l'utilisation de 3 termes au lieu de 2, la multiplie par 2, dans le cas des écrans circulaires, à partir d'une apodisation de 500.

Ces résultats sont assez intéressants pour qu'on utilise ultérieurement cette méthode sur d'autres intervalles d'apodisation et avec d'autres fonctions de base, les fonctions $p(1 - r^2)^{p-1}$ par exemple.

TABEAU XII

Caractéristiques numériques de quelques écrans circulaires à 2 termes B_{3-13} de clarté maximum

$$A(r) = c_0 \sqrt{2} \left[1 + \beta_1 \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} \right]$$

$M(\mathcal{E}) \dots$	$8,95 \cdot 10^2$	$3,14 \cdot 10^2$	$6,29 \cdot 10^1$	$3,14 \cdot 10^1$	6,29	3,14	1
$J(0) \dots$	0,087	0,093	0,104	0,113	0,168	0,24	1
$T_{\text{totale}} \dots$	0,168	0,171	0,178	0,184	0,224	0,282	1
$c_0 \sqrt{2} \dots$	0,294 84	0,304 61	0,322 51	0,336 42	0,409 69	0,489 07	1
$\beta_1 \dots$	-0,963 23	-0,919 46	-0,846 05	-0,794 43	-0,580 31	-0,420 75	0

TABLEAU XIII

Caractéristiques numériques de quelques écrans circulaires à 3 termes C_{3-13} de clarté maximum

$$A(r) = c_0 \sqrt{2} \left[1 + \beta_1 \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \beta_2 \frac{J_0(\lambda_2 r)}{J_0(\lambda_2)} \right]$$

$\lambda b(\mathcal{E}) \dots$	3,61.10 ⁴	6,29.10 ³	6,29.10 ²	3,19.10 ²	2,62.10 ²	2,04.10 ²	1,25.10 ²	6,29.10 ¹	3,14.10 ¹	6,29	3,14	1
$\mathcal{J}(0) \dots$	0,041	0,052	0,105	0,182	0,218	0,252	0,277	0,303	0,323	0,417	0,513	1
T_{totale}	0,108	0,121	0,191	0,296	0,342	0,378	0,392	0,407	0,419	0,482	0,554	1
$c_0 \sqrt{2}$	0,203 43	0,227 9	0,323 7	0,427 13	0,467 0	0,501 6	0,526 5	0,549 68	0,568 14	0,645 77	0,715 99	1
$\beta_1 \dots$	-1,241 65	-1,144 8	-0,906 8	-0,769 81	-0,721 87	-0,652 53	-0,483 92	-0,440 78	-0,408 99	-0,295 14	-0,213 43	0
$\beta_2 \dots$	0,249 90	0,163 4	-0,048 77	-0,171 11	-0,215 12	-0,276 67	-0,425 85	-0,387 89	-0,359 92	-0,250 73	-0,187 82	0

BRIGITTE DOSSIER

TABLEAU XIV

Caractéristiques numériques de quelques écrans rectilinéaires à 2 termes $B_{3,5-13,5}$ de clarté maximum

$$A(x) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} [1 - \alpha_1 \cos \pi x]$$

$\lambda b(\mathcal{E}) \dots$	2,86.10 ³	2.10 ³	10 ³	2.10 ²	10 ²	2.10 ¹	10 ¹	2	1
$\mathcal{J}(0) \dots$	0,255	0,259	0,262	0,274	0,282	0,323	0,359	0,604	1
T_{totale}	0,378	0,379	0,381	0,387	0,392	0,416	0,439	0,629	1
$\frac{c_0}{\sqrt{2}} \dots$	0,505 52	0,508 61	0,511 98	0,523 16	0,531 33	0,568 13	0,599 04	0,777 23	1
$\alpha_1 \dots$	0,978 16	0,966 14	0,953 2	0,911 44	0,882 05	0,760 16	0,669 33	0,286 62	0

TABLEAU XV

Caractéristiques numériques de quelques écrans rectilinéaires à 3 termes $C_{3,5-13,5}$ de clarté maximum

$$A(x) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} (1 - \alpha_1 \cos \pi x + \alpha_2 \cos 2 \pi x)$$

$M(\mathcal{F}) \dots$	$3,2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	10^5	$2 \cdot 10^4$	10^4	$2 \cdot 10^3$	$8,85 \cdot 10^2$	$5,9 \cdot 10^2$	$5,2 \cdot 10^2$	$1,42 \cdot 10^1$	$4,4$	$1,7$	1
$\mathcal{J}(0) \dots\dots$	$0,163$	$0,168$	$0,173$	$0,190$	$0,204$	$0,283$	$0,402$	$0,456$	$0,459$	$0,548$	$0,64$	$0,81$	1
$T_{\text{totale}} \dots$	$0,292$	$0,296$	$0,301$	$0,316$	$0,329$	$0,405$	$0,528$	$0,575$	$0,576$	$0,622$	$0,684$	$0,821$	1
$\frac{c_0}{\sqrt{2}} \dots$	$0,40399$	$0,4097$	$0,4156$	$0,4362$	$0,4520$	$0,5321$	$0,63404$	$0,67539$	$0,67747$	$0,74$	$0,8$	$0,9$	1
$\alpha_1 \dots\dots$	$1,23604$	$1,21807$	$1,20015$	$1,14115$	$1,09945$	$0,92644$	$0,76958$	$0,66543$	$0,62852$	$0,46385$	$0,33005$	$0,14669$	0
$\alpha_2 \dots\dots\dots$	$0,28925$	$0,2226$	$0,2060$	$0,1514$	$0,1128$	$-0,0472$	$-0,19239$	$-0,28931$	$-0,32339$	$-0,23866$	$-0,16982$	$-0,07547$	0

TABLEAU XVI

Caractéristiques numériques de quelques écrans rectilinéaires à 4 termes $D_{3,5-13,5}$ de clarté maximum

$$A(x) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} (1 - \alpha_1 \cos \pi x + \alpha_2 \cos 2 \pi x - \alpha_3 \cos 3 \pi x)$$

$M(\mathcal{F}) \dots$	$8,3 \cdot 10^6$	10^6	10^5	$1,64 \cdot 10^4$	$1,51 \cdot 10^4$	$7,05 \cdot 10^3$	$3,58 \cdot 10^2$	$2,24 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^2$	$8,37 \cdot 10^1$	$2,55 \cdot 10^1$	$2,48$	1
$\mathcal{J}(0) \dots\dots$	$0,141$	$0,153$	$0,187$	$0,312$	$0,322$	$0,369$	$0,49$	$0,533$	$0,564$	$0,592$	$0,640$	$0,810$	1
$T_{\text{totale}} \dots$	$0,270$	$0,283$	$0,317$	$0,455$	$0,469$	$0,5$	$0,606$	$0,647$	$0,672$	$0,682$	$0,708$	$0,826$	1
$\frac{c_0}{\sqrt{2}} \dots$	$0,376$	$0,391$	$0,433$	$0,558$	$0,56709$	$0,60790$	$0,7$	$0,73042$	$0,75126$	$0,76935$	$0,8$	$0,9$	1
$\alpha_1 \dots\dots\dots$	$1,3127$	$1,2701$	$1,1662$	$0,9496$	$0,93923$	$0,78208$	$0,62656$	$0,58570$	$0,53572$	$0,43345$	$0,36145$	$0,16064$	0
$\alpha_2 \dots\dots\dots$	$0,3319$	$0,2812$	$0,1582$	$-0,0997$	$-0,11367$	$-0,29903$	$-0,28469$	$-0,28227$	$-0,29613$	$-0,29834$	$-0,24878$	$-0,11057$	0
$\alpha_3 \dots\dots\dots$	$0,0179$	$0,007$	$-0,013$	$-0,0607$	$-0,11958$	$-0,09747$	$+0,02917$	$0,06565$	$0,09151$	$0,16468$	$0,13733$	$0,06103$	0

Figures de diffraction d'écrans rectilinéaires à 4 termes de clarté maximum.

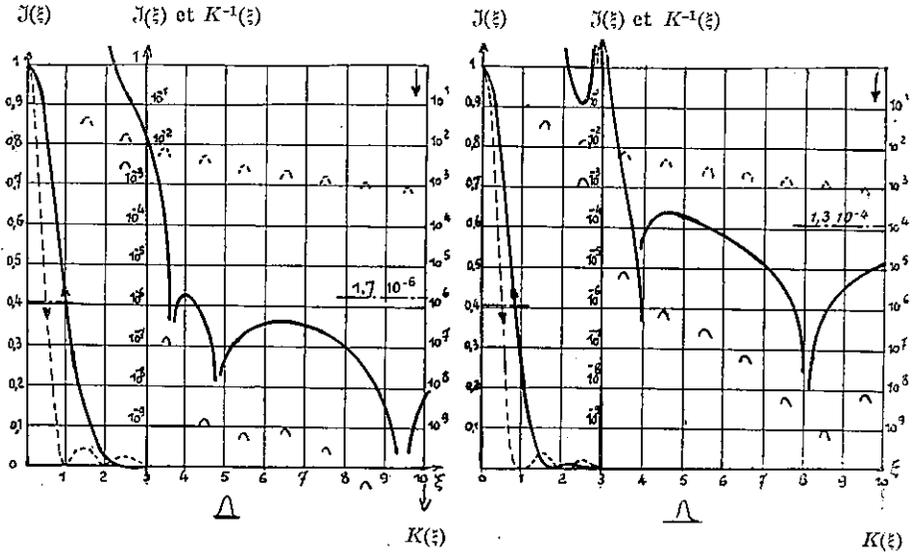


Fig. 60. — $D_{3,5-13,5}$, apodisation moyenne $8,3 \cdot 10^6$, transparence 0,27.

Fig. 61. — $D_{3,5-13,5}$, apodisation moyenne 16 400, transparence 0,455.

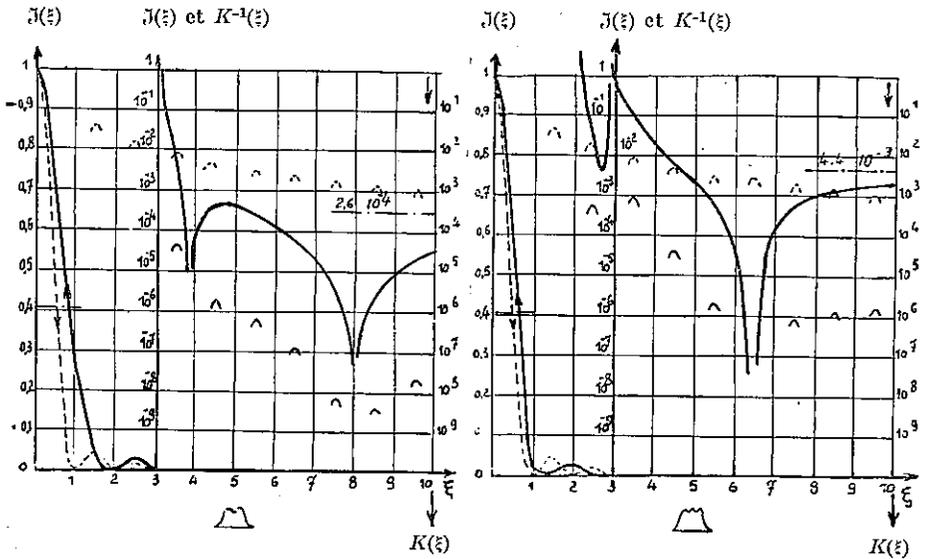


Fig. 62. — $D_{3,5-13,5}$, apodisation moyenne 7 000, transparence 0,5.

Fig. 63. — $D_{3,5-13,5}$, apodisation moyenne 260, transparence 0,647.

Comparaison des figures de diffraction d'écrans rectilinéaires à 2, 3 et 4 termes de même apodisation moyenne $M(\mathcal{E}) = 84$. Noter l'évolution des profils des fonctions de transmission des écrans avec l'augmentation du nombre de termes.

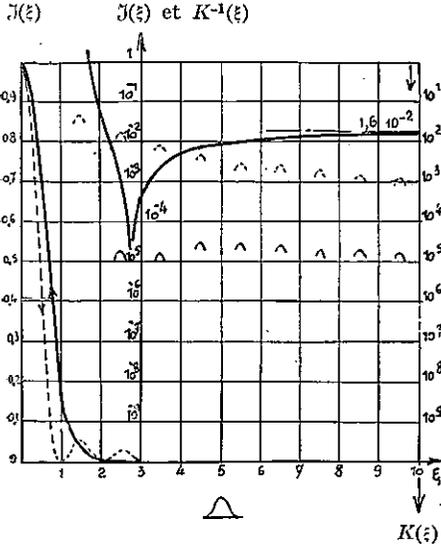


FIG. 64. — $B_{3,5-13,5}$, transparence 0,39.

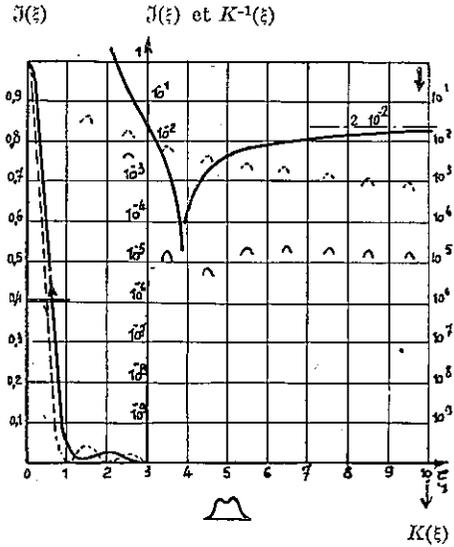


FIG. 65. — $C_{3,5-13,5}$, transparence 0,59.

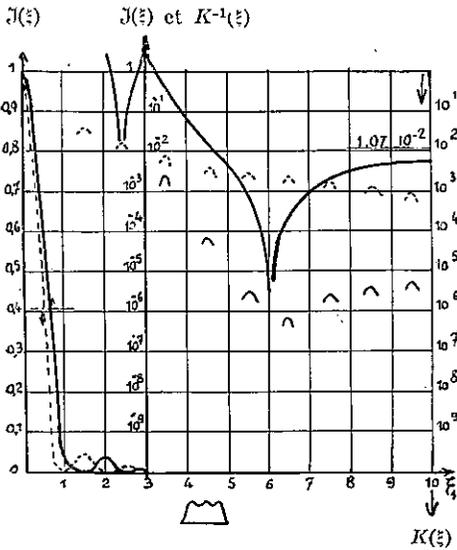


FIG. 66.
 $D_{3,5-13,5}$, transparence 0,68.

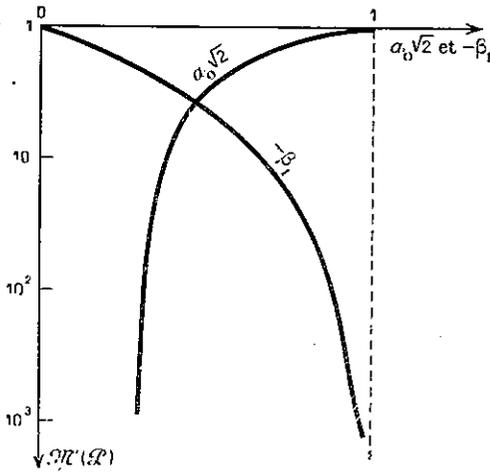


FIG. 67. — Coefficients $c_0\sqrt{2}$ et β_1 en fonction du taux d'apodisation moyenne $\mathcal{M}(x)$ [échelle logarithmique] d'un écran circulaire à 2 termes (β_{3-13} de clarté maximum. L'intervalle d'apodisation correspond à

$$\rho_1 = \lambda_3/\pi \leq \rho \leq \rho_2 = \lambda_{13}/\pi.$$

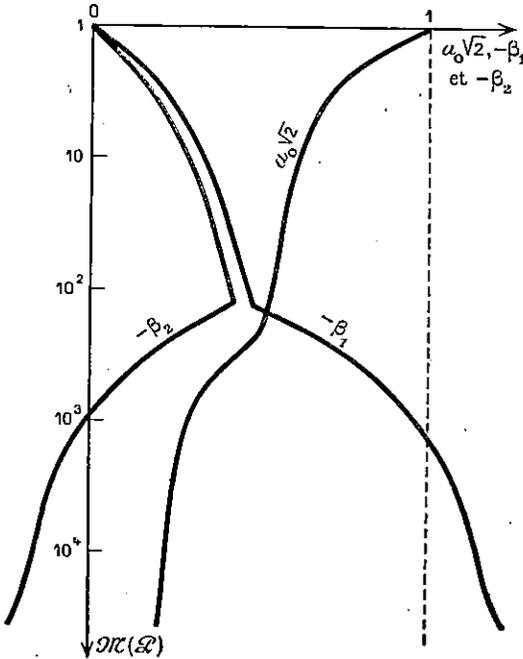


FIG. 68. — Coefficients $c_0\sqrt{2}$, β_1 et β_2 en fonction du taux d'apodisation moyenne $\mathcal{M}(x)$ d'un écran circulaire à 3 termes de clarté maximum.

$$A(r) = c_0\sqrt{2} \left[1 + \beta_1 \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_0(\lambda_1)} + \beta_2 \frac{J_0(\lambda_2 r)}{J_0(\lambda_2)} \right].$$

L'intervalle d'apodisation correspond à

$$\rho_1 = \lambda_3/\pi \leq \rho \leq \rho_2 = \lambda_{13}/\pi.$$

Erratum. Sur les figures 67 et 68, lire $c_0\sqrt{2}$ au lieu de $a_0\sqrt{2}$.

V. Vérifications expérimentales

Nous avons vérifié expérimentalement les propriétés apodisantes des répartitions d'amplitude proposées.

Ces vérifications concernent uniquement les écrans rectilinéaires, car nous n'avons pas encore réalisé d'écran circulaire. Les résultats obtenus ont été antérieurement publiés [9], aussi ne les indiquons-nous ici que pour mémoire.

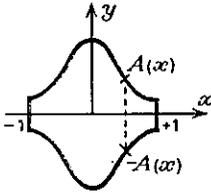


FIG. 69.

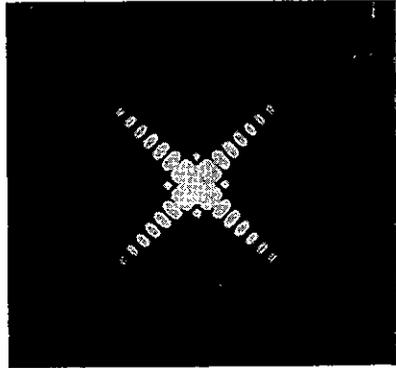


FIG. 70. — Figure de diffraction d'un point à travers un diaphragme en losange. Apodisation sur l'axe des ξ et sur l'axe des η .

1. **Diaphragmes dont la fonction de contour est $A(x)$.** — Le procédé le plus simple pour contrôler une répartition apodisante $A(x)$ consiste à réaliser un diaphragme (D) dont la fonction de contour est $A(x)$ (fig. 69). La figure de diffraction $\mathcal{A}_b(\xi, \eta)$ d'une source ponctuelle à travers un objectif diaphragmé par (D) se confond, sur l'axe des ξ ($\eta = 0$), avec la figure de diffraction d'une fente à travers une pupille absorbante de transmission d'amplitudes $A(x)$. En effet, on a

$$\mathcal{A}_b(\xi, 0) = \int_{-1}^{+1} \left\{ \int_{-A(x)}^{A(x)} dy \right\} e^{-i\pi x \xi} dx = 2 \int_{-1}^{+1} A(x) e^{-i\pi x \xi} dx.$$

C'est tout d'abord ainsi que nous avons expérimenté les fonctions $A(x)$ que nous avons déterminées par le calcul ; des résultats qualitatifs nous étaient fournis par

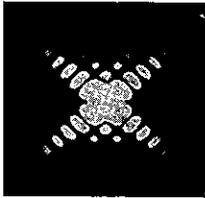


FIG. 71. — Figure de diffraction d'un point à travers un diaphragme correspondant à l'écran apodisant B_3 . L'apodisation est très élevée sur l'axe des ξ . L'énergie passe dans les angles supérieur et inférieur. L'axe des η est désapodisé.

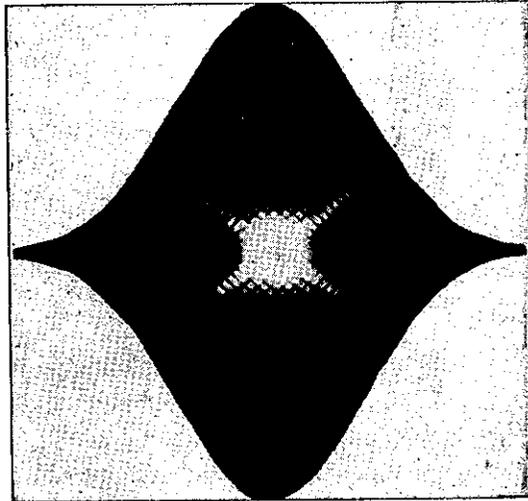


FIG. 72. — Figure de diffraction, fortement surexposée, d'un point à travers un diaphragme C_2 dont le profil se marque, ici, en noir.

la photographie de la figure $\mathcal{A}^2(\xi, \eta)$ [fig. 70, 71 et 72]. Nous les complétons par une étude photométrique (fig. 73).

2. Réalisation d'écrans absorbants par dépôt de couches minces métalliques sur une lame plane. — Ils ont nécessité la fabrication au laboratoire d'un appareil d'évaporation sous vide [26]. J'en rappellerai deux caractéristiques :

1^o) La lame à métalliser est portée par un chariot animé d'un mouvement alternatif uniforme ; elle se déplace ainsi devant un cache fixe percé d'un orifice ; le profil de cet orifice détermine les rapports des temps d'exposition des différentes parties de la lame et, par suite, les épaisseurs déposées.

2^o) L'appareil est muni d'un dispositif permettant de mesurer la transmission du dépôt pendant la marche de l'évaporation, de façon à obtenir effectivement la loi cherchée.

Il semble qu'on puisse usiner les caches dont le profil détermine l'épaisseur des dépôts avec une précision correspondant à des erreurs de densité inférieures à 0,02. Mais l'importance des erreurs qui en résultent pour la figure de diffraction ne peut être connue qu'en fonction de la répartition des erreurs sur le cache, laquelle est variable pour chaque cache. On pourrait évidemment considérer certaines

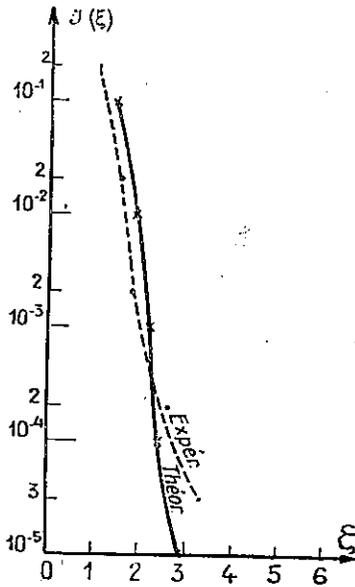


FIG. 73. — Photométrie de la figure de diffraction d'un diaphragme C_2 .

---- courbe passant par les points expérimentaux.
— courbe théorique.

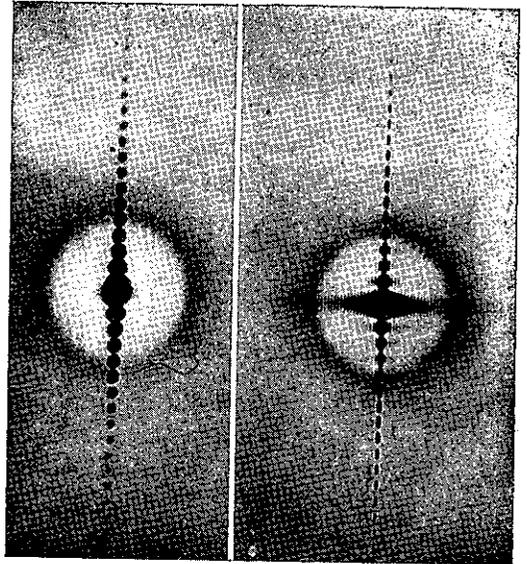


FIG. 74. — Figure de diffraction d'un écran rectilinéaire absorbant C_2 . A droite, pupille uniforme ; à gauche, écran C_2 ; les franges latérales ont disparu, le corps de la raie est élargi de 25 %.

fonctions d'erreurs conduisant à des calculs simples mais sans grand intérêt pratique. C'est seulement par la photométrie de la figure de diffraction qu'on jugera en définitive de la valeur des écrans obtenus avec un cache donné.

RÉSULTATS. — Nous donnons (fig. 74) la photographie de la figure de diffraction d'un écran C_2 ainsi obtenu. Elle met en évidence une importante apodisation. L'écran n'étant qu'imparfaitement réalisé, cette apodisation demeure toutefois inférieure à celle de la figure de diffraction théorique représentée sur la figure 43.

Le laboratoire s'est attaché à apporter des perfectionnements à la fabrication de l'écran, afin d'obtenir une plus grande fidélité de reproduction de la répartition théorique. La mise au point, qui s'achève, a été longue et délicate. Nous espérons disposer bientôt d'écrans se prêtant à des vérifications quantitatives (écrans rectilinéaires et circulaires).

CONCLUSIONS

J'ai donné aux différents chapitres de ce travail des conclusions séparées. Je conclurai donc très brièvement.

L'apodisation de la figure de diffraction s'obtient par la modification de la répartition des amplitudes sur la pupille. J'ai montré

1°) que les répartitions *efficaces* étaient des répartitions *réelles* (échec nécessaire des tentatives d'apodisation au moyen de la *phase*),

2°) que, parmi les dispositifs qui permettent d'obtenir des répartitions pupillaires réelles apodisantes, *seuls* sont utilisables *avec des sources de dimensions non négligeables* ceux qui font appel à l'*absorption* (écrans pupillaires métallisés). *Seuls* donc, ils possèdent une *luminosité appréciable* (échec des dispositifs interférentiels pour l'apodisation).

Je me suis alors attachée à rechercher *les plus clairs*, à apodisation donnée, de ces écrans absorbants. Comme on ne peut pas déterminer un écran par la donnée a priori de sa figure de diffraction (problème *sans solution* quand la figure est *quelconque*), on considère *une famille* de fonctions d'amplitude pupillaire dépendant de n paramètres et la famille associée de fonctions d'amplitude diffractée : l'expression de cette famille de fonctions est donnée par un développement en série, limité, de l'amplitude considérée. Le problème est alors d'extraire de cette famille une ou plusieurs fonctions *privilegiées*. Le choix résulte de l'application de certains *critères de qualité* qui se traduisent par un nombre suffisant de relations entre les paramètres, c'est-à-dire entre les coefficients indéterminés du développement de la fonction d'amplitude.

J'ai été ainsi amenée à définir

$$\begin{aligned} a) \text{ de nouveaux développements } A_n(x) &= c_0 f_0(x) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(x), \\ A_n(r) &= c_0 f_0(r) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(r), \end{aligned}$$

des fonctions d'amplitude pupillaire pour les écrans $A_n(x)$ à isopaques rectilignes

(écrans « rectilinéaires » pour les spectroscopes) et $A_n(r)$ à isopaques circulaires [développements de Dini-Bessel de $A_n(r)$],

b) *de nouveaux critères de qualité* pour la figure de diffraction (correspondant, les uns, à des *taux d'apodisation*, qui peuvent être *arbitrairement* choisis à l'avance, les autres à la *clarté* de l'écran).

c) *certaines méthodes pour l'amélioration systématique* de l'apodisation et, à apodisation donnée, pour l'amélioration systématique de la clarté de l'écran apodisant (ou de toute autre qualité importante relative, soit à l'écran, soit à sa figure de diffraction).

J'ai ainsi obtenu *plusieurs séries d'écrans à 2, 3 et 4 termes tant circulaires que rectilinéaires* qui représentent, à apodisation donnée, les écrans *les plus clairs* de leur catégorie. L'apodisation moyenne varie, dans chaque série, *de façon continue* depuis la valeur extrême qu'elle prend pour l'écran limite jusqu'à la valeur 1 correspondant à l'écran de transparence uniforme. C'est ainsi qu'on obtient dans une série d'écrans circulaires à 2 termes, tous les taux d'apodisation entre 900 et 1. L'utilisation de 3 termes permet d'atteindre une apodisation limite de 36 000, mais surtout, à apodisation égale, de perdre deux fois moins de lumière.

On peut proposer, pour les cas courants, un écran circulaire à 3 termes, dont l'apodisation moyenne, à partir du troisième anneau, est de 125, avec une transmission totale de 0,4, ou un écran rectilinéaire à 4 termes, dont la transmission, pour une apodisation de 100, atteint 0,6.

Certaines vérifications expérimentales des propriétés générales des dispositifs interférentiels destinés à l'apodisation ont été faites par photométrie photographique ou à l'aide du système enregistreur photoélectrique dont est équipé le grand spectroscopie de Bellevue. Des écrans absorbants apodisants ont été également réalisés au laboratoire, par évaporation sous vide d'un métal. La photographie de la figure de diffraction de l'un de ces écrans montre une apodisation très marquée, mais qui reste inférieure à celle qu'on avait cherché à réaliser. Des perfectionnements dans la réalisation de ces écrans sont actuellement mis au point.

Qu'il me soit permis d'adresser ici à Mr Pierre Jacquinet, qui a dirigé ce travail, l'expression de toute ma gratitude. J'ai bénéficié de ses conseils fructueux et de son aide matérielle et morale.

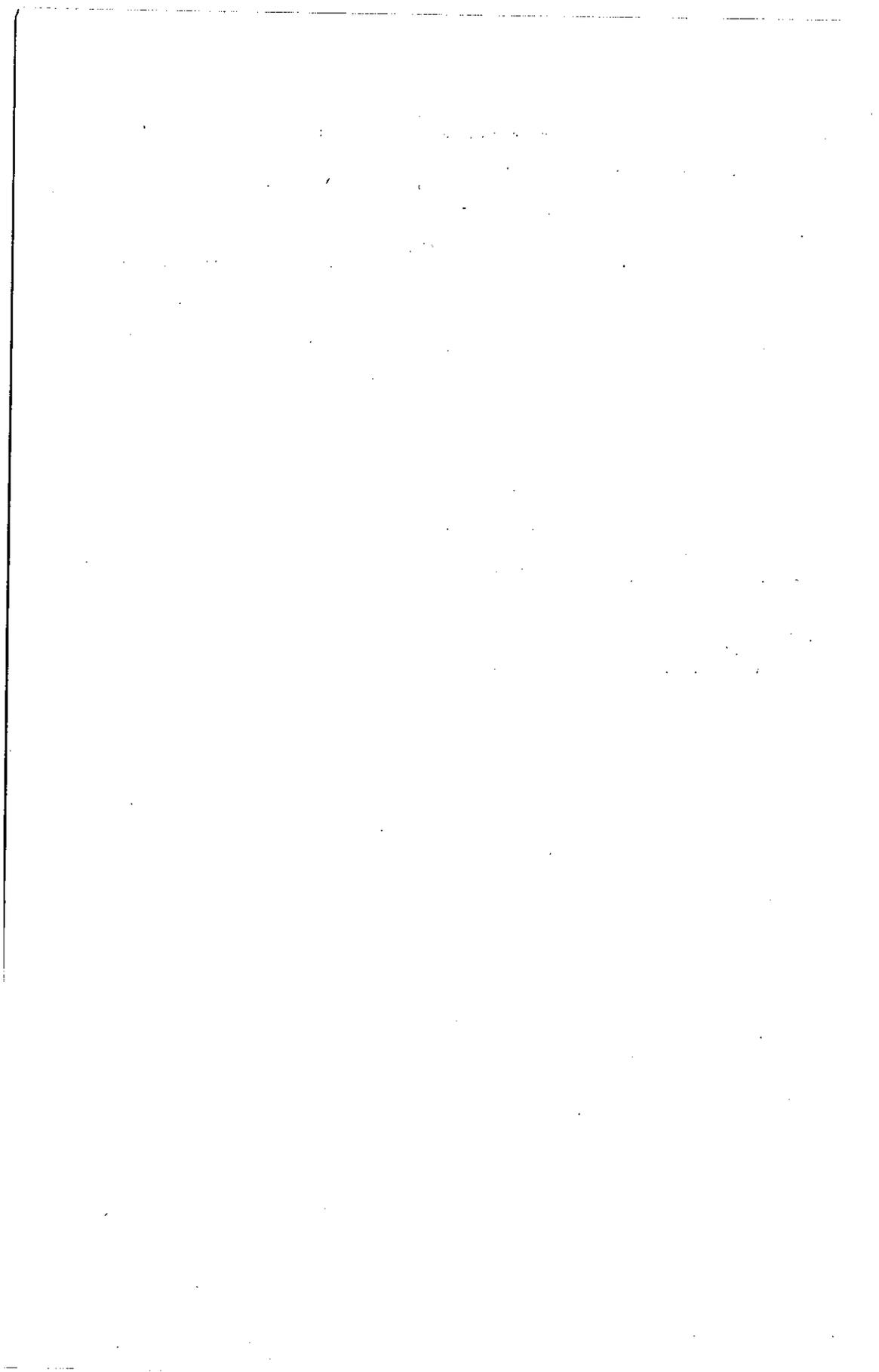
Entrée au laboratoire de l'Electro-Aimant en 1948, j'ai reçu de Mr A. Cotton un bienveillant accueil. Je désire rendre à sa mémoire un reconnaissant hommage.

J'adresse aussi mes remerciements au Centre National de la Recherche Scientifique dont l'allocation de recherches m'a permis de mener à bien ce travail.

RÉFÉRENCES

- [1] R. STRAUBEL, a) 8th International Congress on Photography, Dresden (1931), Barth, Leipzig, p. 353.
— b) Pieter Zeeman Verhandelingen, Martinus Nijhoff, 1935, p. 302.
- [2] P. M. DUFFIEUX, C. R. Ac. Sc., t. 222, 1946, p. 1482.

- [3] G. LANSRAUX, *C. R. Ac. Sc.*, t. 222, 1946, p. 1434.
- [4] P. M. DUFFIEUX & G. LANSRAUX, *Rev. Opt.*, t. 24, 1945, p. 65, 151 et 215.
- [5] P. M. DUFFIEUX, *Rev. Opt.*, t. 29, 1950, p. 323.
- [6] A. COUDER, *C. R. Ac. Sc.*, t. 219, 1944, p. 677.
- [7] A. COUDER & P. JACQUINOT, *C. R. Ac. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1639.
- [8] P. JACQUINOT, P. BOUGHON & M^{lle} B. DOSSIER, *Théorie des Images Optiques*, Ed. *Rev. Opt.*, p. 183.
- [9] M^{lle} B. DOSSIER, P. BOUGHON & P. JACQUINOT, *Jl Rech. C. N. R. S.*, t. 11, 1950, p. 49.
- [10] M^{lle} B. DOSSIER & P. JACQUINOT, *Jl Rech. C. N. R. S.*, t. 12, 1950, p. 123.
- [11] P. M. DUFFIEUX, *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'Optique*, chez l'Auteur, Université de Besançon, 1946.
- [12] P. H. VAN CITTERT, *Zeits. Physik*, t. 66, 1930, p. 547.
- [13] H. H. HOPKINS, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. 208, 1951, p. 263.
- [14] F. ZERNIKE, *Physica*, t. 5, 1938, p. 785.
- [15] H. H. HOPKINS, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. 217, 1953, p. 408.
- [16] G. LANSRAUX, Thèse, Paris, 1952.
- [17] N. G. VAN KAMPEN, *Physica*, t. 14, 1948-49, p. 575.
- [18] F. CROZE, IX^e Congrès du G. A. M. S., Paris, 1948, p. 65.
- [19] J. BROCHARD & P. JACQUINOT, *Jl Phys.*, t. 14, 1953, p. 131.
- [20] P. JACQUINOT & C. DUFOUR, *Jl Rech. C. N. R. S.*, t. 6, 1948, p. 91.
- [21] G. LANSRAUX, *Rev. Opt.*, t. 32, 1953, p. 475.
- [22] A. LICHNEROWICZ, *Algèbre et Analyse linéaires*, Masson, 1947.
- [23] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, 1922.
- [24] H. OSTERBERG & J. E. WILKINS, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. 39, 1949, p. 553.
- [25] G. LANSRAUX, *Rev. Opt.*, t. 26, 1947, p. 24 et 278.
- [26] P. JACQUINOT, *Jl Phys.*, t. 11, 1950, p. 361.
- [27] M^{lle} B. DOSSIER, *Jl Phys.*, t. 13, 1952, p. 169.



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

L'auto-absorption des raies spectrales

Vu et approuvé :

Paris, le 8 Juin 1953

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.

1475. — Imprimerie Jouve, 15, rue Racine, Paris. — 10-54
