

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Janine CONNES

**THÈSE — Recherches sur la spectroscopie
par transformation de Fourier.**

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenue le 17 octobre 1960 devant la Commission d'examen.

MM. KASTLER *Président*
JACQUINOT *Examinateurs*
MARECHAL

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1961

RECHERCHES SUR LA SPECTROSCOPIE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

par M^{me} Janine CONNES

Laboratoire Aimé Cotton, Bellevue

I. Introduction

Une amélioration des techniques de spectroscopie peut être recherchée suivant deux voies principales [1]. Un des procédés consiste à construire des appareils acceptant, pour une résolution donnée, la plus grande étendue possible. Dans ce but plusieurs méthodes ont été proposées : double ou multiple passage des faisceaux sur un même disperser [2], emploi du Fabry-Pérot intégral [3] ou du *sisam* [4]. Mais elles utilisent mal l'énergie de la source dans le *temps* parce que les éléments spectraux sont analysés *successivement*. Une amélioration fondamentale peut être obtenue en recevant l'énergie de tous les éléments spectraux *simultanément* ; c'est ce qui est réalisé dans la technique spectrographique et la méthode par transformation de Fourier.

Le principe des méthodes de spectroscopie qui utilisent un interféromètre à deux ondes et une transformation de Fourier est connu depuis longtemps. Michelson a imaginé la première en 1891. Il a montré que l'intensité I de la lumière qu'on peut mesurer à la sortie d'un interféromètre à deux ondes à différence de marche variable, est la transformée de Fourier (T. F.) en cosinus du spectre de la lumière incidente [5, 6]. Puisque la transformation de Fourier est une opération réciproque, il suffit donc en principe, pour reconstituer le spectre étudié, de faire la T. F. en cosinus de la fonction *interferogramme* représentant les variations de I en fonction de la différence de marche δ entre les deux faisceaux interférents. Mais faire la T. F. d'une fonction très complexe est une opération extrêmement longue si on ne dispose pas de calculateurs modernes à grande vitesse et Michelson n'a abordé l'étude d'un spectre quelconque qu'étendu. Il a mis au point une méthode adaptée à un problème très particulier : l'étude à très haute résolution d'un domaine spectral extrêmement réduit, qui se fait en étudiant la courbe de visibilité V , enveloppe de la fonction interférogramme. Lord Rayleigh a expliqué comment la seule connaissance de V ne permet de remonter au profil spectral

de la fonction $f(x)$ est la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier de $f(x)$. Cette somme est finie si et seulement si $f(x)$ est une fonction de carré sommable. Dans ce cas, la somme des carrés des coefficients est égale à la norme au carré de la fonction dans l'espace L^2 . Cette propriété est fondamentale pour l'analyse de Fourier et a des applications importantes en physique et en ingénierie.

On peut également remarquer que la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ est égale à la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier de sa transformée de Fourier $F(\omega)$. Cette relation est connue sous le nom de théorème de Parseval. Elle est valable pour toute fonction de carré sommable et est un résultat important de l'analyse de Fourier.

Enfin, il est intéressant de noter que la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ est égale à la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier de sa transformée de Fourier $F(\omega)$ multipliée par la norme au carré de la fonction dans l'espace L^2 . Cette relation est connue sous le nom de théorème de Parseval et est un résultat important de l'analyse de Fourier.

En conclusion, la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction de carré sommable est égale à la norme au carré de la fonction dans l'espace L^2 . Cette propriété est fondamentale pour l'analyse de Fourier et a des applications importantes en physique et en ingénierie.

La somme des carrés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ est égale à la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier de sa transformée de Fourier $F(\omega)$ multipliée par la norme au carré de la fonction dans l'espace L^2 . Cette relation est connue sous le nom de théorème de Parseval et est un résultat important de l'analyse de Fourier.

Enfin, il est intéressant de noter que la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ est égale à la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier de sa transformée de Fourier $F(\omega)$ multipliée par la norme au carré de la fonction dans l'espace L^2 . Cette relation est connue sous le nom de théorème de Parseval et est un résultat important de l'analyse de Fourier.

En conclusion, la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction de carré sommable est égale à la norme au carré de la fonction dans l'espace L^2 . Cette propriété est fondamentale pour l'analyse de Fourier et a des applications importantes en physique et en ingénierie.

En conclusion, la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier d'une fonction de carré sommable est égale à la norme au carré de la fonction dans l'espace L^2 . Cette propriété est fondamentale pour l'analyse de Fourier et a des applications importantes en physique et en ingénierie.

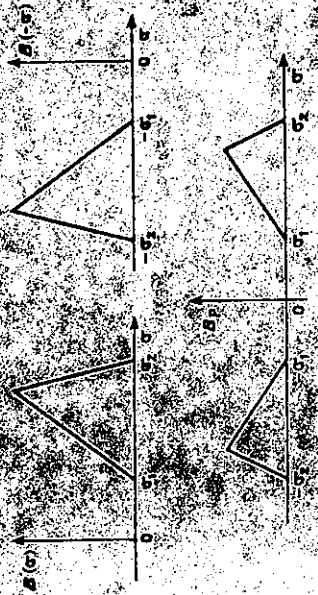


Fig. 5. — Partie paire d'un spectre optique.

séparatrice.

Si $B(\sigma)$ est le spectre de la lumière émise, l'intéferogramme a pour expression

$$(11.4) \quad I(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\sigma) \cos 2\pi\sigma\delta \, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) \cos 2\pi\sigma\delta \, d\sigma,$$

$B_p(\sigma)$ étant la partie paire de la fonction $B(\sigma)$ définie par

$$B_p(\sigma) = \frac{1}{2} [B(\sigma) + B(-\sigma)] \quad (\text{fig. 5}).$$

Si on pouvait connaître entièrement l'intéferogramme pour δ variant entre 0 et $+\infty$ (d'où on fait entre $-\infty$ et $+\infty$ puisqu'il est symétrique), le spectre serait reconstitué exactement par l'opération

$$(11.2) \quad B_p(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta) \cos 2\pi\sigma\delta \, d\delta.$$

Mais en fait, pendant la mesure, δ varie seulement entre 0 et une valeur maximum L , la valeur $B_p(\sigma)$ calculée pour un nombre d'ondes particulier σ , ne sera qu'une valeur approchée de $B_p(\sigma)$, ce qu'on traduit en disant que la résolution est finie. L'expression (11.2) peut se mettre sous la forme

$$(11.3) \quad B_p(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta) D(\delta) \cos 2\pi\sigma\delta \, d\delta,$$

$D(\delta)$ étant une fonction « orneau » telle que

$$D(\delta) = 1 \quad \text{si} \quad -L < \delta < +L, \\ D(\delta) = 0 \quad \text{pour} \quad \delta < -L \quad \text{et} \quad \delta > +L.$$

L Forme de la fonction d'appareil. — La T. F. en cosinus du produit de deux fonctions paires est le produit de composition des T. F. en cosinus de chacune des deux fonctions, d'où

$$(11.4) \quad B_p(\sigma_1) = T_{\cos} [I(\delta)] * T_{\cos} [D(\delta)].$$

La T. F. de $I(\delta)$ est précisément le spectre étudié $B_p(\sigma)$. En appelant $f(\sigma)$ la T. F. de $D(\delta)$, (11.4) écrit

$$(11.5) \quad B_p(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) [f(\sigma_1 - \sigma) + f(\sigma_1 + \sigma)] \, d\sigma.$$

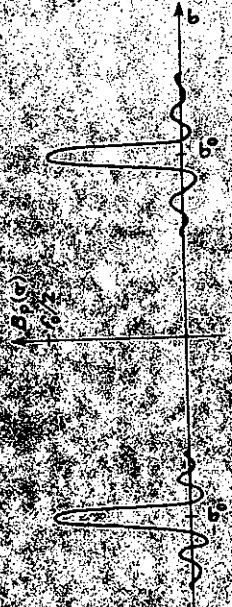


Fig. 6. — Fonction d'appareil.

Le spectre obtenu est le produit de composition de la partie paire du spectre initial par la fonction $f(\sigma)$ que nous appellerons fonction d'appareil. La fonction d'appareil ainsi définie a une dimension celle d'une longueur dans le cas où l'on calcule le spectre $B(\sigma)$, celle d'un temps quand on calcule $B(\nu)$.

Dans le cas où le spectre se réduit à une raie unique de nombre d'ondes σ_0 de luminance unité, le spectre reconstitué a pour expression

$$(11.5 \text{ bis}) \quad B_p(\sigma) = \frac{1}{2} [f(\sigma - \sigma_0) + f(\sigma + \sigma_0)].$$

Si la T. F. est faite par une méthode permettant de calculer les densités de luminance correspondant à des nombres d'ondes négatifs (qui n'ont aucune réalité physique), la fonction d'appareil comporte deux maxima centrés sur σ_0 et $-\sigma_0$ et de hauteur $f_0/2$ (fig. 6).

Quand on fait la T. F. d'une constante prise par exemple égale à l'unité, on trouve un seul maximum centré sur la fréquence 0, et de hauteur double f_0 , les deux maxima précédents étant superposés. On peut définir une fonction d'appareil normée qui sera le rapport

$$(11.6) \quad f'(\sigma - \sigma_0) = B_p(\sigma) / B_p(\sigma_0)$$

de la densité de luminance calculée pour le nombre d'ondes σ voisin de σ_0 à celle calculée pour le nombre σ_0 correspondant à la raie étudiée. La fonction d'appareil peut être mise sous la forme

$$(11.7) \quad f'(\sigma) = f_0 f'(\sigma),$$

avec

$$(11.7 \text{ bis}) \quad f_0 = 2qL,$$

q étant un facteur numérique égal ici à la valeur moyenne de la fonction $D(\delta)$, soit l'unité, et qui sera plus généralement égal à la valeur moyenne de la fonction $A(\delta)$ définie un peu plus loin, d'où

$$(11.8) \quad f_0(\sigma) = 2L f'(\sigma) = 2L \frac{\sin 2\pi\sigma L}{2\pi\sigma L}.$$

Cette fonction $f'(\sigma)$ présente des zéros pour $\sigma = k/2L$ (fig. 7, courbe a), elle a des maximums secondaires très importants et on peut souhaiter l'apodiser.

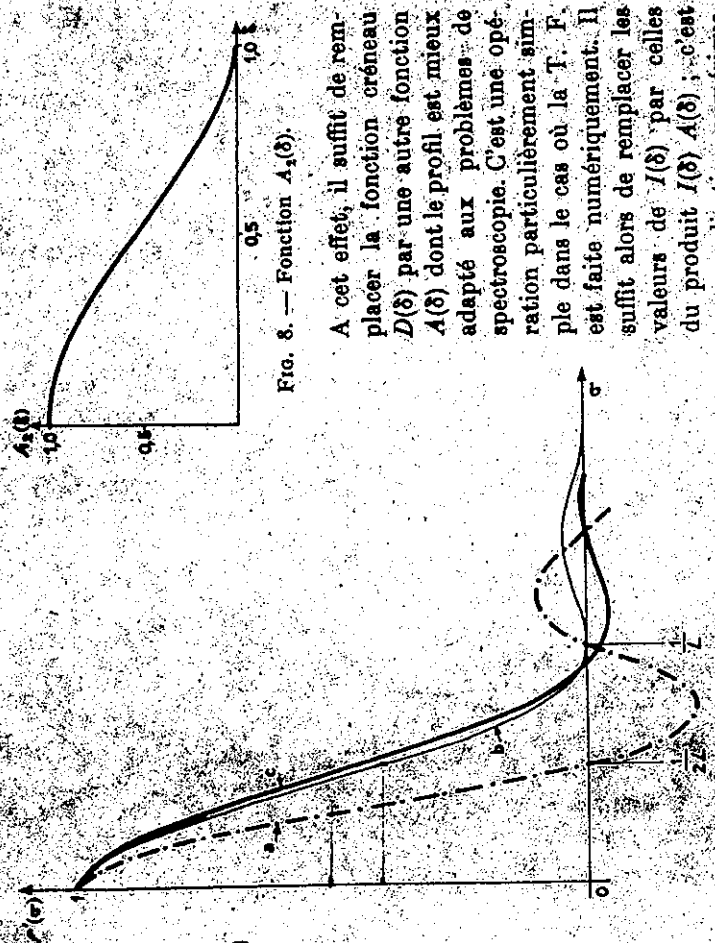


Fig. 7. — Fonctions d'appareil théoriques.

a fait l'objet de nombreux travaux effectués en particulier par Mue B. Dossier [26] et J. Arrac [27].

Nous allons envisager deux formes particulières de la fonction de pondération $A(\delta)$.

1^o $A(\delta)$ est une fonction triangulaire telle que

$$f(\delta) = 1 - |\delta/L| \quad \text{pour } -L < \delta < +L$$

$$f(\delta) = 0 \quad \text{pour } \delta < -L \text{ et } \delta > +L$$

Dans ces conditions,

$$f(\delta) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|\delta|}{L}\right) \left(1 - \frac{|\sigma|}{L}\right) d\sigma = 0,5$$

$$f(\sigma) = L \int_{-L}^{+L} f(\sigma) d\sigma = L \int_{-L}^{+L} \left(\frac{\sin \pi \sigma L}{\pi \sigma L}\right)^2 d\sigma$$

C'est la même fonction d'appareil que dans le cas du spectromètre à réseau (fig. 2).

$$q = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{\delta^2}{L^2}\right) d\delta = 0,533,$$

$$f(\sigma) = 1,066 \cdot L \cdot f'(\sigma),$$

avec

$$f'(\sigma) = (2\pi L \sigma)^{-1/2} \int_{1/2L}^{2\pi L \sigma} J_{1/2}(2\pi L \sigma)$$

Cette fonction (fig. 7, courbe c) s'annule pour la première fois pour δ très voisin de $1/L$; sa largeur à mi-hauteur est sensiblement la même que celle de la fonction $[(\sin \pi L \sigma) / \pi L \sigma]^2$, mais l'amplitude du premier minimum n'est que le vingtième de celle du maximum initial et celle du maximum suivant n'en est que le centième.

2. *Limite de résolution.* — Le critère de Lord Rayleigh ne peut s'appliquer que dans le cas où la fonction d'appareil présente des minimums nuls; donc en général on choisit un critère qui donne à peu près les mêmes résultats dans les cas usuels. On est conduit à prendre comme mesure de la limite de résolution $\delta\sigma$ la largeur à 0,404 du maximum de la fonction d'appareil. Comme la T. F. d'une fonction est d'autant plus étroite que cette fonction est plus large, on voit immédiatement que la limite de résolution varie en sens inverse de L , la loi exacte étant à déterminer dans chaque cas particulier.

L'étude des limites de résolution repose sur l'étude des largeurs à mi-hauteur des fonctions $f'(\sigma)$.

S'il n'y a pas d'apodisation, $\delta\sigma = 1/2L$, d'où une résolution théorique $R_0 = 2L\sigma$. Avec les fonctions de pondération $A_1(\delta)$ ou $A_2(\delta)$ on a, à très peu près $\delta\sigma = 1/L$, d'où une résolution théorique $R_0 = L\sigma$ (?). La résolution est donc proportionnelle à la différence de marche maximum atteinte. C'est un résultat tout à fait analogue à celui qu'on trouve dans les méthodes classiques de spectroscopie.

La figure 84b montre deux spectres du ciel nocturne obtenus à partir du même interférogramme. Pour le premier à la résolution 350, on a fait la T. F. d'une portion de l'interférogramme pour laquelle δ variat entre 0 et 0,4 mm. Pour le second à la résolution 1000, la longueur d'interférogramme utilisée est à peu près triple.

3. *Transformation de Fourier numérique.* — Le spectre qu'on étudie est toujours limité soit par l'émission elle-même soit par la transparence des matériaux constituant l'interféromètre, soit par la zone de sensibilité du détecteur. C'est ce fait important qui permet de faire la T. F. à partir de valeurs discrètes de $I(\delta)$ et d'utiliser les calculateurs numériques modernes à grande vitesse.

A) *TRANSFORMÉE DE FOURIER ET THÉORÈME DE L'ÉCHANTILLONNAGE.* — D'après le théorème de l'échantillonnage toutes les informations concernant une fonction à spectre limité sont contenues dans une infinité dénombrable de valeurs discrètes de cette fonction et on peut trouver des formules d'interpolation

(?) On peut aussi dire dans ce cas que la résolution théorique est égale au nombre de franges échantillonnées.

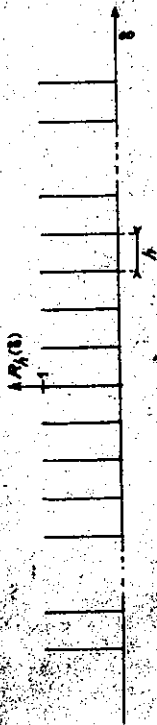


Fig. 9. — Fonction réseau $R_h(\delta)$.

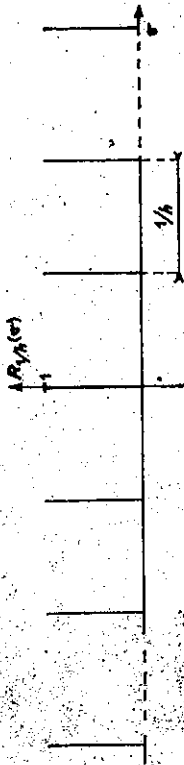


Fig. 10. — Fonction réseau $R_{1/h}(\sigma)$.

qui, à partir de ces points, permettent de reconstituer toutes les fonctions. Ces questions ont été traitées en particulier par Shannon [28], Woodward [29] et Kohlenberg [30].

Donc toutes les informations contenues dans l'interférogramme dont on sait qu'il a un spectre limité sont contenues dans des valeurs discrètes de $I(\delta)$. Il suffit en conséquence pour calculer le spectre de traiter un certain nombre de valeurs équidistantes relevées sur l'interférogramme. On remplace le calcul de l'intégrale

$$(II.11) \quad B_p(\sigma_1) = 2 \int_0^{+L} I(\delta) A(\delta) \cos 2\pi\sigma_1 \delta \, d\delta$$

par celui de la somme

$$(II.12) \quad B_p(\sigma_1) = h[I_0 A_0 + 2 I_1 A_1 \cos 2\pi\sigma_1 h + \dots + 2 I_{n-1} A_{n-1} \cos 2\pi(n-1)h \sigma_1]$$

I_0, I_1, \dots, I_{n-1} étant les valeurs de l'interférogramme pour les valeurs $0, h, \dots, (n-1)h$ de la différence de marche, A_0, A_1, \dots, A_{n-1} étant les valeurs correspondantes de la fonction d'apodisation.

La somme (II.12) est équivalente à l'intégrale

$$(II.13) \quad B_p(\sigma_1) = h \int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta) A(\delta) R_h(\delta) \cos 2\pi\sigma_1 \delta \, d\delta,$$

$R_h(\delta)$ étant une distribution de Dirac à support périodique de pas h (fig. 9) ; on en déduit immédiatement

$$(II.14) \quad B_p(\sigma_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) [F(\sigma_1 - \sigma) + F(-\sigma_1 - \sigma)] \, d\sigma.$$

$F(\sigma)$ est la T. F. du produit des deux fonctions $A(\delta)$ et $h R_h(\delta)$; en remarquant que la T. F. d'une distribution de Dirac à support périodique de pas h est, au facteur $1/h$ près, une autre distribution de Dirac à support périodique de pas $1/h$

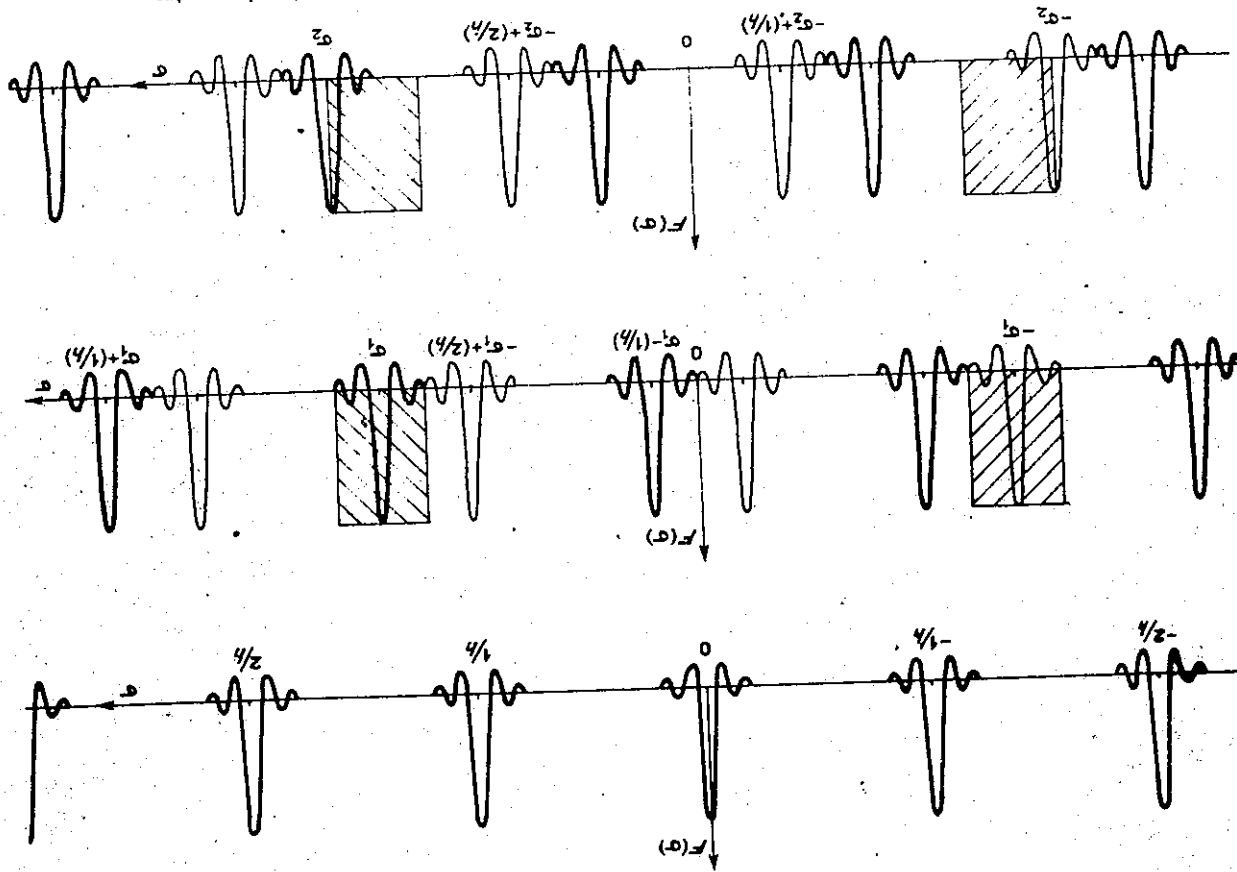


Fig. 11.

Fig. 13.

Fig. 13. Fonction d'appareil donnée par une T. F. numérique. Exploration du spectre.

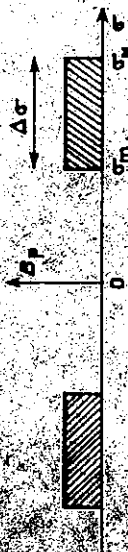


Fig. 14.

(fig. 10), on trouve l'expression de la nouvelle fonction d'appareil :

$$F(\sigma) = 2L F'(\sigma)$$

avec

$$(11.15) \quad F'(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\sin 2\pi L \left(\frac{m}{h} - \sigma \right) \right] 2\pi L \left(\frac{m}{h} - \sigma \right)$$

dans le cas où $A(\delta)$ est une fonction créneau et $F(\sigma) = 1,066 L F'(\sigma)$, où

$$(11.16) \quad F(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[2\pi L \left(\frac{m}{h} - \sigma \right) \right]^{-1/2} J_{1/2} \left[2\pi L \left(\frac{m}{h} - \sigma \right) \right]$$

avec la fonction de pondération $A_2(\delta)$.

La nouvelle fonction d'appareil est constituée par une série de maxima identiques qui se répètent tous les $1/h$ (fig. 11). On peut dire que la partie paire du spectre est explorée simultanément, par deux séries de fonctions d'appareil centrées l'une sur σ_1 , l'autre sur $-\sigma_1$ (fig. 12). L'exploration du spectre se fait ici en effectuant un calcul identique à (11.12) pour une nouvelle valeur σ_2 de σ . Pendant l'exploration du spectre, les deux séries de fonctions d'appareil ont des translations en sens inverses (fig. 13).

B) Choix du pas h . — C'est un problème très important parce que les spectres calculés vont se répéter tous les $1/h$ et que, pour que le résultat soit utilisable, ils ne doivent pas s'enchevêtrer. Cela revient à dire qu'un seul maximum de la fonction d'appareil doit explorer le spectre. Nous appellerons σ_M et σ_m les nombres d'ondes limites du spectre et $\Delta\sigma = \sigma_M - \sigma_m$ l'intervalle spectral occupé (fig. 14).

a) Relation entre h et $\Delta\sigma$. — Trois cas sont à distinguer suivant la position de $\Delta\sigma$ par rapport à la fréquence 0.

α) $\sigma_m = 0$, σ varie entre 0 et σ_M ; il suffit, pour qu'il n'y ait pas recouvrement de spectres, que $1/h = 2\Delta\sigma$ ou $h = 1/(2\Delta\sigma)$ (fig. 15a). C'est le résultat qu'on énonce habituellement en disant qu'on doit relever deux points par période du signal correspondant à la fréquence la plus élevée contenue dans le spectre.

β) $\sigma_M = \gamma \Delta\sigma$ (γ étant entier). On voit facilement que dans ce cas aussi, il n'y a pas de recouvrement d'ordres si $1/h = 2\Delta\sigma$ soit $h = 1/(2\Delta\sigma)$ (fig. 15b). La distance entre deux points relevés sur l'interferogramme en centimètres est la moitié de l'inverse de l'intervalle spectral occupé, mesuré en cm^{-1} .

γ) σ_M quelconque. $\sigma_M/\Delta\sigma = \chi + f$, χ étant un nombre entier et f une fraction. On remplace alors $\Delta\sigma$ par un autre domaine $\Delta\sigma'$ défini par $\Delta\sigma' = \sigma_M/\chi$. Il est plus large que $\Delta\sigma$ et a même borne supérieure. On est ramené au cas précédent et on choisit $h = 1/(2\Delta\sigma')$ (fig. 15c).

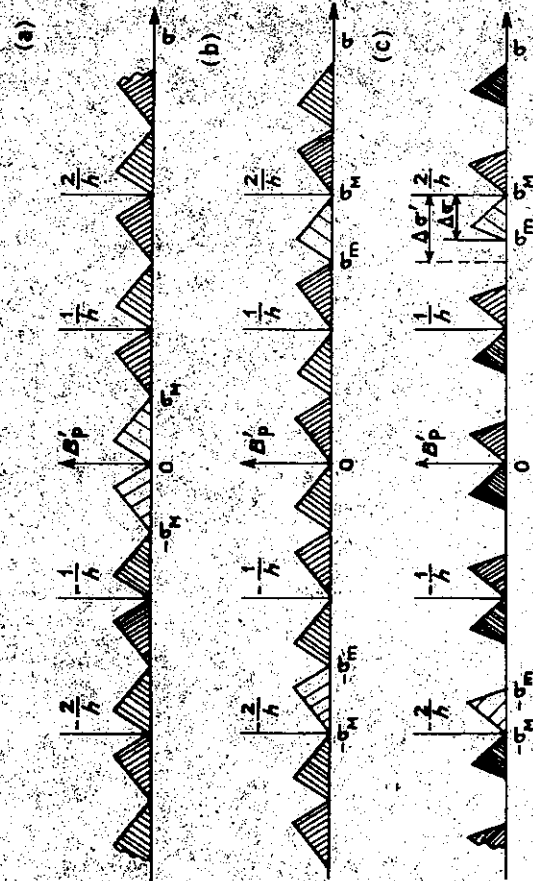


Fig. 15. — Répétition des spectres calculés numériquement.

b) Exemples numériques. — Le premier illustre le cas où le spectre s'étend de 0 à σ_M ; nous avons calculé la T. F. de la fonction $\sin^2 \pi \sigma \delta / (\pi \sigma \delta)^2$ en utilisant 36 valeurs discrètes, la distance entre deux d'entre elles étant $1/(2\sigma_M)$. Le spectre calculé se répète tous les $2\sigma_M$; la résolution est $R_0 = 18$ parce que nous n'avons utilisé qu'une petite longueur de $l(\delta)$; aussi les sommets des triangles sont-ils légèrement arrondis (fig. 16).

Dans le deuxième exemple le spectre calculé est celui d'une lampe à incandescence dont la lumière traverse des filtres isolant une bande de radiations aux environs de 1μ .

Connaissant la courbe de transmission des filtres nous pouvions en déduire

$$\Delta\sigma = 3\,410 \text{ cm}^{-1}$$

$$\sigma_M = 12\,850 \text{ cm}^{-1} \text{ et}$$

$$\sigma_M/\Delta\sigma = 3 + 0,8.$$

On définit donc un domaine $\Delta\sigma'$ tel que

$$\Delta\sigma' = \sigma_M/3 = 4\,283 \text{ cm}^{-1}$$

et on doit choisir

$$h = 1/(2 \times 4\,283)$$

$$= 0,116\,95 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

La figure 17 montre, pour cette valeur de h , la con-

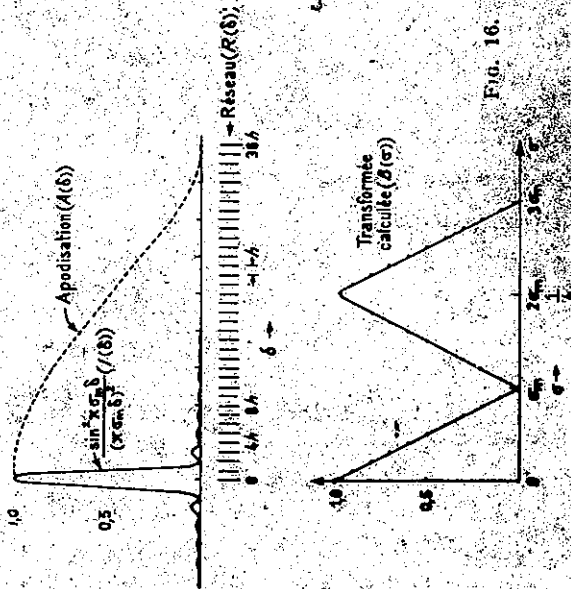


Fig. 16.

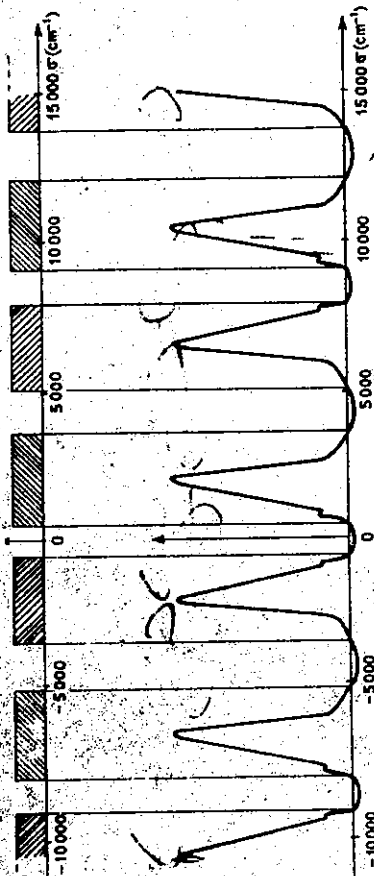


FIG. 17. — Domaine spectral occupé, $3\ 410\ \text{cm}^{-1}$; $h = 0,116\ 95 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}$; nombre de points relevés sur l'interférogramme, 25.

cordance entre la position des spectres prévus et celle des spectres calculés.

C) RELATION ENTRE LE NOMBRE DE POINTS RELEVÉS ET LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS SPECTRAUX ÉTUDIÉS. — Nous venons de voir que le pas h ne dépend que de la largeur et de la position de l'intervalle spectral occupé (2). D'autre part, la limite de résolution dépend essentiellement de la différence de marche maximale atteinte L et, accessoirement, de la forme de la fonction d'apodisation choisie. Donc l'exploration d'un domaine spectral donné à une résolution donnée pose deux problèmes distincts : détermination de L et choix du pas h . Le nombre total de points à relever est donné, à une unité près, par $n = L/h$ et il existe une relation entre n et le nombre M d'éléments spectraux contenus dans le spectre à étudier. L'élément spectral est la portion du spectre comprise entre deux points qu'on peut considérer comme juste séparés par l'instrument; il vaut donc $\delta\sigma$ et $M = \Delta\sigma/\delta\sigma$. Un raisonnement général, dû à Shannon, permet de prévoir qu'à partir de n informations contenues dans une fonction, on peut trouver n valeurs indépendantes de sa T. F. [31]. Nous allons montrer que la relation entre n et M varie avec le spectre à étudier et que, dans certains cas particuliers, on a bien $n = M$.

Considérons d'abord le cas où $\sigma_m = 0$ ou bien celui où $\sigma_m = m\ \Delta\sigma$, m étant un nombre entier. Alors $h = 1/(2\ \Delta\sigma)$ et $n = L/h = 2\ L\ \Delta\sigma$.

Si l'interférogramme n'est pas apodisé, $\delta\sigma = 1/2L$ et $n = \Delta\sigma/\delta\sigma = M$, c'est-à-dire que le nombre de points à relever est égal au nombre d'éléments spectraux.

Si on apodise comme il a été indiqué, on a sensiblement $\delta\sigma = 1/L$ et $n = 2\ M'$, M' étant le nouveau nombre d'éléments spectraux. Il vaut la moitié de M .

Dans le cas le plus défavorable, σ_m est très légèrement inférieur à $2\ \Delta\sigma$ (fig. 18); alors $\Delta\sigma' = \sigma_m$ est sensiblement égal à $2\ \Delta\sigma$ et $n = \Delta\sigma'/\delta\sigma$ est très voisin de $2\ M'$ ou $4\ M'$ suivant qu'on a fait ou non une apodisation. Donc en conclusion, avec l'apodisation, le nombre de points à relever varie entre 2 et 4 fois le nombre

(2) Ceci est vrai en l'absence de bruit. En pratique pour obtenir le meilleur rapport signal/bruit, on est conduit à diminuer considérablement h , le nombre de points relevés pouvant être multiplié par un nombre de l'ordre de 5 (§ V. 1).

d'éléments spectraux.
Remarque. — Nous venons de voir que, pour une résolution donnée, le nombre de points à relever est d'autant plus grand que le spectre est plus étendu. Bien que le gain de cette méthode par rapport aux méthodes classiques soit d'autant plus grand que M est plus élevé on peut envisager de l'employer pour l'étude à haute résolution d'un faible domaine spectral occupé, par exemple la structure hyperfine d'une raie dans l'infrarouge. Si M est de l'ordre de 100, le nombre de points à relever serait faible, de l'ordre de quelques centaines.

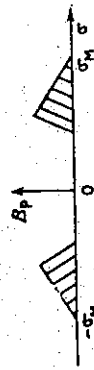


FIG. 18.

D) MÉTHODE DE CALCUL. — Nous avons établi un programme de calcul de transformation de Fourier pour ordinateur 704 IBM (3). Le problème pour arriver à une durée de calcul raisonnable était de trouver une formule de récurrence permettant de calculer $\cos\ 2\pi p_n h$ à partir de $\cos\ 2\pi p_{n-1} h$. En effet, le calcul des cosinus par des séries ou des consultations de tables conduit à des durées de calcul prohibitives.

Nous avons utilisé la formule de Tchebicheff [32]

$$\cos(p+1)x = 2\cos x \cos px - \cos(p-1)x.$$

Si les cosinus sont calculés avec six chiffres significatifs, l'écart entre la valeur calculée par une série et celle obtenue après 12 000 récurrences, est inférieur à 1/50 000.

Vérification du programme. — Nous avons calculé la T. F. d'une fonction contenant 24,5 arches de sinusofde d'amplitude unité et on a relevé deux points par période, le pas h étant pris égal à l'unité. La hauteur d'un maximum de la fonction calculée vaut, dans ce cas, f_0 et non $f_0/2$ [voir (11.5 bis) et (11.10)] à cause du recouvrement des ordres dû au choix particulier de h .

$2\ q\ L = 4,066 \times 49 = 52,263\ 4$. Le nombre calculé par la machine est 52,258 2, soit un écart de l'ordre de 1/10 000.

Le calcul se fait en deux parties :

1° dans la première, très rapide, on remplace dans chaque adresse la valeur I_{ph} de l'interférogramme au point $\delta = ph$ par la valeur correspondante $I_{ph} \cdot \text{ap}$ de l'interférogramme pondéré;

2° puis commence le calcul de la T. F. proprement dite. Pour chaque nouvelle valeur de σ on calcule le premier cosinus, $\cos\ 2\pi\sigma h$, par une série; les cosinus suivants sont calculés par la formule de récurrence et on fait la somme

$$B'(\sigma) = h[I_{A_0} + 2\ I_{A_1} \cos\ 2\pi\sigma h + \dots + 2\ I_n A_n \cos\ 2\pi n\sigma h].$$

Ceci conduit à une durée de calcul de $T = 0,8 \cdot 10^{-3}$ s par point d'entrée, par point de sortie.

Si on relève n points sur l'interférogramme et si on calcule k densités spectrales, la durée du calcul sera $t = 0,8\ nk\ 10^{-3}$ s.

(3) Le programme est maintenant à la bibliothèque générale I. B. M.

En admettant qu'il faille calculer l'intensité en trois points par élément spectral pour faciliter le tracé du spectre, la durée totale t dans le cas le plus favorable est $t = 10^8 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot M \times 3 \cdot M = 0,48 M^2 \cdot 10^{-3} s$ et dans le cas le plus défavorable, $t = M^2 \cdot 10^{-3} s$.

Il n'est pas inutile de rappeler que ces durées de calcul correspondent au cas où l'on fait le T. F. d'un interférogramme ne contenant pas de bruit. En pratique, pour obtenir le rapport s/b maximum, il faut relever plus de points sur l'interférogramme et les durées de calcul augmentent. Cette question sera étudiée en détail au chapitre V.

Note. — Il suffit de calculer un point par élément spectral pour recueillir toutes les informations contenues dans l'interférogramme, donc au total M points. Mais nous avons admis qu'il était commode de calculer Q points par élément (Q étant au moins égal à 3) pour faciliter le tracé du spectre.

Or le spectre est le produit de composition d'une série de fonctions de Dirac distancées de $\delta\sigma$ et ayant pour hauteur les M valeurs précédemment calculées, par la fonction d'appareil (théorème de Dirichlet).

Comme il est possible de faire des produits de composition avec un calculateur numérique (voir chap. IV et V) et que ce calcul est relativement rapide, on peut envisager de calculer les points intermédiaires en faisant le produit de composition des M fonctions de Dirac par la fonction d'appareil (limitée au domaine où elle a une valeur non négligeable). On obtiendrait ainsi une réduction de la durée de calcul voisine de Q . Nous nous proposons d'écrire prochainement le programme de ce calcul.

III. Fonction d'appareil réelle

Dans les conditions pratiquement réalisables, le spectre obtenu est toujours différent de celui qui résulterait du produit de composition du spectre étudié par la fonction d'appareil théorique. Les résultats précédents ont en effet été établis pour un faisceau d'étendue nulle. Ils sont modifiés quand le récepteur reçoit un faisceau d'étendue finie. Nous étudierons ces modifications dans le cas où un diaphragme de dimensions finies est placé dans le plan focal de la lentille de sortie d'un interféromètre de Michelson.

Nous montrerons qu'il en résulte, comme dans les méthodes classiques, un élargissement de la fonction d'appareil, d'où une diminution de la résolution. L'étude du produit luminosité \times résolution permet de déterminer les meilleures conditions d'utilisation de l'instrument.

En général, le spectre obtenu quand la source se réduit à une raie unique de largeur négligeable est différent de la fonction réelle ainsi définie. En effet un instrument n'est jamais parfait et la précision d'une mesure est toujours limitée. Nous étudierons quelques-unes des causes de perturbation de la fonction d'appareil, telles que l'irrégularité dans le déplacement de la partie mobile de l'interféromètre. Enfin quand la transformation de Fourier est faite par une méthode sensible à la phase, la précision nécessairement limitée de l'échantillon de

la différence de marche nulle entraîne une distorsion de la fonction d'appareil.

1. **Fonction d'appareil pour une étendue finie.** — Plusieurs auteurs se sont déjà préoccupés de la forme du diaphragme qu'il faut placer à la sortie d'un interféromètre à deux ondes [33], des dimensions qu'on doit lui donner pour avoir une profondeur de modulation convenable [34, 35] ou pour faire une mesure d'exécédents fractionnaires dans les meilleures conditions [41]. Nous allons reprendre cette question en vue de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson en spectromètre à transformation de Fourier.

L'effet de l'emploi de fentes de largeur finie sur la luminosité et la résolution d'un spectromètre à réseau ou d'un spectromètre de Fabry-Perot a été traité par P. Jacquinet & C. Dufour [36] et P. Jacquinet [37]; la même étude pour le *sisam* a été faite par P. Connes [4]. En voici les résultats essentiels : un spectromètre à fentes, à réseau ou à prisme est un appareil qui peut travailler à des résolutions très différentes, éventuellement très inférieures à la résolution théorique R_0 . Lorsque $R \ll R_0$, le produit luminosité \times résolution est sensiblement constant et, simplement en élargissant les fentes, on peut augmenter la luminosité ; mais on perd en résolution. L'exposé des résultats est facilité par l'introduction des variables réduites :

R/R_0 , rapport de la résolution réelle à la résolution théorique ;

l , largeur réduite du diaphragme ou rapport de la largeur du diaphragme à la largeur à la hauteur 0,404 du maximum de la fonction d'appareil théorique ;

L_l , rapport de la luminosité réelle à la luminosité maximum qu'on pourrait avoir par augmentation de l'ouverture du diaphragme. Dans le cas des spectromètres à fentes, L_l a une signification simple. C'est le rapport de la luminosité réelle à celle qui serait obtenue en l'absence de diffraction avec des fentes correspondant à $l = 1$.

Les figures 19 et 20 montrent pour le Fabry-Perot et le *sisam* les variations de L_l , R/R_0 , L_l , R/R_0 en fonction de l . Ce dernier produit passe par un maximum, pour une largeur réduite du diaphragme voisine de 1 et, pour être utilisés au mieux, ces instruments doivent être employés près de leur résolution théorique.

L'utilisation de l'interféromètre de Michelson en spectrométrie, comme celle de l'étalon de Fabry-Perot, exige l'emploi d'un diaphragme circulaire (d'entrée ou de sortie), centré sur la normale aux miroirs et délimitant un faisceau de rayons peu inclinés, d'angle solide Ω . Dans ces conditions, l'interférogramme enregistré $\Phi(\delta)$ est différent de l'interférogramme théorique $I(\delta)$ et sa T. F. est différente de la fonction d'appareil théorique.

1. **Calcul du flux enregistré et de la fonction d'appareil réelle.** — Le calcul du flux transmis $\Phi(\delta)$ quand le spectre étudié se réduit à une raie unique de largeur négligeable, de nombre d'ondes σ_0 et de luminance B est classique [33, 35, 38] :

$$(III.1) \quad \Phi(\delta) = BU \frac{\sin(\pi\sigma_0\Omega/2\pi)}{\pi\sigma_0\Omega/2\pi} \cos 2\pi\sigma_0\delta[1 - (\Omega/4\pi)] ;$$

$\Omega = U$ est l'étendue du faisceau. Il a déjà été montré [38] que le fait d'utiliser une étendue finie a deux conséquences : élargissement de la fonction d'appareil,

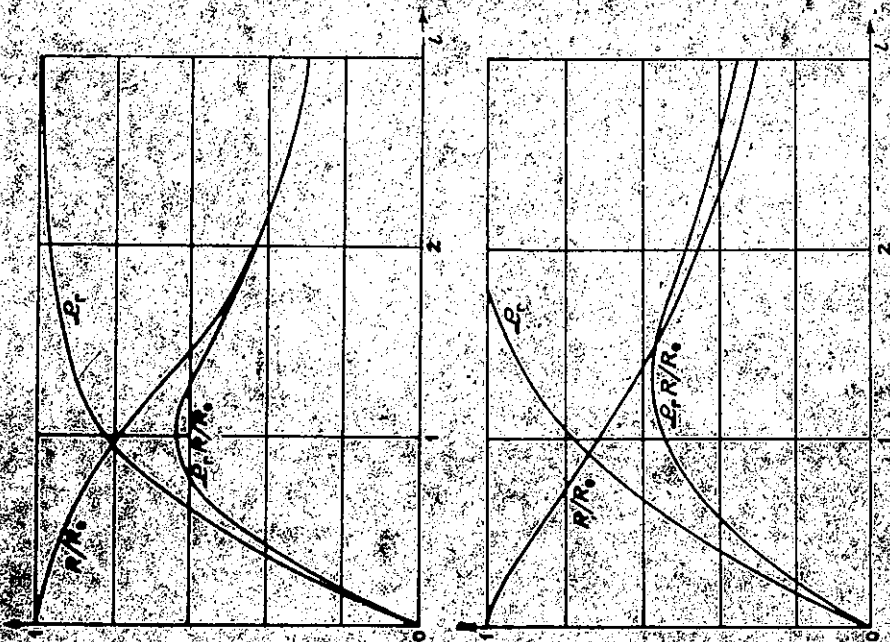


Fig. 19. — Spectromètre de Fabry-Perot.

Fig. 20. — Sisam.

dou baisse de la résolution et déplacement du spectre vers des fréquences plus faibles. La correction $\Delta\sigma$ à apporter au spectre calculé vaut $\Delta\sigma = \alpha Q/4\pi$.

Exemple numérique. — Comme nous le verrons au chapitre V, l'angle solide utilisable pour séparer la résolution 1.000 d'un spectre aux environs de $1,5 \mu$ est $\Omega = \text{rad} = 16 \cdot 10^{-4}$ sr. Dans ces conditions $\Delta\sigma = 6500 \cdot 10^{-4} = 2,6 \text{ cm}^{-1}$.

2. *Détermination des meilleures conditions d'utilisation de l'instrument.* — En toute rigueur, la largeur du diaphragme à utiliser dépend de la fonction de pondération $A(\delta)$ choisie. Nous envisagerons deux types d'apodisation.
 a) Pondération par une fonction triangulaire $A(\delta) = 1 - (8/L)\delta$. Les variations de P_r/R_0 et P_r/R_0 sont alors exactement les mêmes qu'à un usseau employé avec un diaphragme en losange. Dans les deux cas, la fonction d'appareil est semblable à celle d'un spectromètre à réseau classique. Comme dans le cas du réseau, il faut choisir un diaphragme tel que $l = 1$. Alors $R = 0,80/R_0$, $\alpha/P_r = 0,82$ (fig. 20).

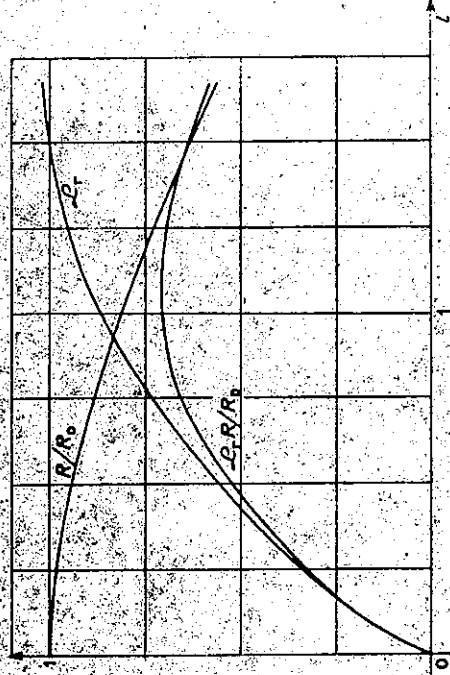


Fig. 21. — Variations de R/R_0 , P_r/R_0 et P_r/R_0 dans le cas du Michelson.

b) Pondération de l'interférogramme par $A(\delta) = [1 - (\delta^2/L^2)]^2$. La variation de R/R_0 est alors presque la même que dans le cas précédent parce que les deux fonctions d'appareil ont même largeur à mi-hauteur ; la variation de P_r/R_0 est légèrement différente. Le produit P_r/R_0 passe encore par un maximum pour l très voisin de 1. Dans ces conditions la résolution effective vaut encore $R = 0,82 R_0$ et $P_r = 0,87$ (fig. 21).

Le rayon angulaire du diaphragme est donné par la relation

$$(III. 2) \quad \alpha = \sqrt{2} R_0 = 0,9 \sqrt{2} R$$

Supposons que pour la différence de marche maximale atteinte L , les anneaux dans le plan de l'objectif de sortie soient à centre brillant ; le diamètre du diaphragme à utiliser vaut à peu près les 9/10 de celui du premier anneau brillant.

3. *Corrections des fréquences calculées.* — Le nombre d'ondes σ_c de la radiation pour laquelle on calcule la densité spectrale B , et le pas h de la fonction réseau interviennent par leur produit dans le calcul des cosinus. Le nombre d'ondes σ de la radiation ayant cette même densité B dans le spectre étudié est lié à σ_c par

$$(III. 3) \quad \sigma_c = \sigma [1 - (\Omega/4\pi)]$$

En prenant pour valeur h du pas de la fonction réseau un nombre tel que $\sigma_c h = \sigma h$, il est possible, quand la T. F. est faite numériquement, de corriger automatiquement les fréquences.

On est donc conduit à choisir

$$(III. 4) \quad \sigma_c h = h \sigma_c = h [1 - (\Omega/4\pi)]$$

Nous verrons au chapitre IV (§ III.2.4) que pour éliminer les défauts d'avance du miroir mobile, il est nécessaire de reporter les différences de marche avec une

raie de référence enregistrée en même temps que l'interférogramme. Dans ce cas le pas h de la fonction réseau $R_h(\delta)$ [voir (I.13)] est mesuré en prenant comme unité la longueur d'onde de cette raie de référence.

Ce faisceau de référence a une étendue finie généralement différente de celle du faisceau transportant le signal à étudier. Considérons le cas où le faisceau de référence suit dans l'interféromètre le même trajet que la lumière à analyser et appelons Ω l'angle solide sous lequel est vu le diaphragme placé devant la cellule de référence, depuis le centre de l'objectif de sortie. L'interférogramme de référence est une sinusoïde correspondant à un signal de nombre d'ondes σ_0 [1 - (2) $\frac{1}{2\pi}$]. On en déduit que si h est la valeur du pas mesuré en longueurs d'onde de la raie de référence, sa valeur exacte h est donnée par

$$h' = h \left[1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right] \quad (II.6)$$

Pour corriger automatiquement et simultanément le fait que le faisceau à étudier et le faisceau de référence ont des étendues finies, il faut prendre comme mesure h_2 du pas qui intervient dans le calcul numérique

$$(II.5) \quad h_2 = h \left[1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right] \quad (II.7)$$

ou, comme Ω et Ω' sont toujours petits devant 1,

$$(II.6) \quad h_2 = h \left(1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right) \quad (II.8)$$

Remarque. — P. Connes [39] a montré que la variation de la différence de marche des rayons interférents avec l'incidence, qui oblige à limiter l'étendue des faisceaux, est utile quand l'exploration du spectre se fait dans l'espace (spectrographes et spectromètres à prisme et à réseau, Fabry-Perot employé par photographie des anneaux), mais nuisible quand elle se fait dans le temps (interféromètre de F.-P. ou de Michelson photoélectrique). Si on intercale sur chacun des deux faisceaux d'un Michelson un système afocal, il est possible de combiner les déplacements relatifs des miroirs et des systèmes afocaux, de sorte que l'appareil ne donne plus de franges. L'état d'interférence est constant dans tout l'espace. L'augmentation de la luminosité n'est limitée pratiquement que par les aberrations, et le trou de sortie, s'il ne peut être complètement supprimé, sera considérablement élargi; toutes les considérations précédentes sur la variation du produit $L_1 R_1/R_0$ ne sont évidemment plus valables dans le cas où l'on emploie des systèmes afocaux.

2. Altération de la fonction d'appareil par diverses causes d'erreur. — 1. *Effets des imperfections des pièces optiques.* — Comme pour le *sisam*, les aberrations des objectifs d'entrée et de sortie, si elles restent petites par rapport au diamètre angulaire du diaphragme, sont pratiquement sans effet sur le pouvoir de résolution théorique. Par contre, les défauts des lames de l'interféromètre (miroirs ou trièdres, séparatrice et compensatrice d'un interféromètre de Michelson, réseaux lamellaires de l'appareil de Strong [43]) provoquent une baisse de la modulation variable avec la longueur d'onde, d'où une perte de *luminosité* dans le spectre reconstitué, d'autant plus grande que les longueurs d'onde sont

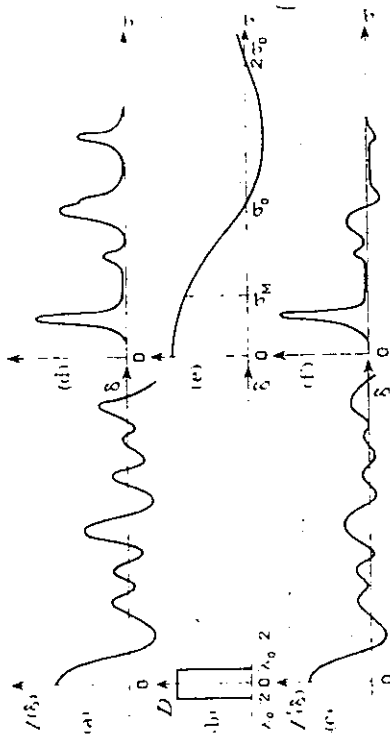


FIG. 22. — Effet d'une courbure sphérique des lames.

plus petites.

Dans les spectromètres à réseau ou à Fabry-Perot [3], la fonction d'appareil enregistrée avec des pièces optiques imparfaites est le produit de composition de la fonction d'appareil théorique par une fonction représentant les défauts des lames. Par exemple, avec des lames ayant une courbure sphérique ou cylindrique, la fonction défauts est une fonction crénneau d'autant plus large que la flèche de courbure est plus grande par rapport à la longueur d'onde étudiée. C'est une fonction de Gauss dans le cas de lames ayant un mauvais parallélisme. Ces défauts entraînent alors une baisse de la *résolution* et une perte de *luminosité*.

Dans la méthode par T. F., c'est l'*interférogramme* enregistré qui est le produit de composition de l'interférogramme théorique par la fonction défauts des lames $D(\delta)$. Le spectre calculé est finalement le *produit* du spectre théorique par la T. F. $\mathcal{A}(\delta)$ de la fonction défauts $D(\delta)$, c'est-à-dire qu'en général le spectre sera atténué du côté des fréquences élevées. Il n'y a donc *pas* élargissement de la fonction d'appareil ni baisse de la résolution.

Exemple. — Considérons par exemple le cas d'un miroir circulaire présentant une courbure sphérique, la flèche de courbure étant $\lambda_0/2$; celle de la surface d'onde sera λ_0 , ce qui signifie qu'au lieu d'avoir, à un instant donné, une différence de marche bien déterminée δ , on a toutes les valeurs comprises entre δ et $\delta + \lambda_0$. La fonction défauts est une fonction « crénneau » de largeur λ_0 (fig. 22b). L'interférogramme enregistré $I'(\delta)$ (fig. 22c) est le produit de composition de $I(\delta)$ (fig. 22a) par $D(\delta)$ et le spectre obtenu sera le produit (fig. 22f) du spectre théorique $B(\sigma)$ (fig. 22d) par la fonction $(\sin \pi\sigma/\sigma_0)/(\pi\sigma/\sigma_0)$ (fig. 22e). T. F. de la fonction $D(\delta)$, qui présente des zéros pour $\sigma = k\sigma_0$, en appelant $\sigma_0 = 1/\lambda_0$.

En pratique, il sera évidemment nécessaire que la grandeur des défauts soit faible par rapport à la plus petite longueur d'onde contenue dans le spectre; ceci revient à dire que la fréquence maximale σ_M du spectre sera petite par rapport à σ_0 (fig. 22e); dans ces conditions, dans tout le spectre, l'atténuation sera faible et peu variable.

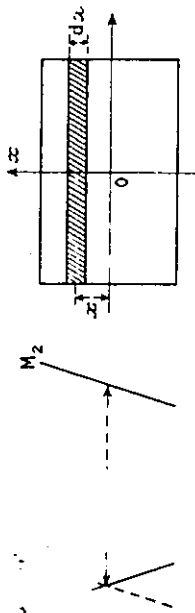


FIG. 23. — Déréglage de l'interféromètre.

2. **Effet d'un déréglage de l'interféromètre.** — Nous allons distinguer deux cas suivant que le déréglage, simplement dû à un mauvais réglage initial des pièces optiques, reste constant ou qu'il varie avec le déplacement du miroir (4).

A) **DÉRÉGLAGE CONSTANT.** — L'effet d'un déréglage constant est équivalent à un défaut des lames. Si les miroirs de l'interféromètre sont diaphragmés par des rectangles dont l'une des dimensions L est perpendiculaire à l'arête du coin d'angle ε formé par les deux miroirs (fig. 23) (ce qui est le cas le plus simple), les deux surfaces d'onde réfléchies font un angle 2ε et, à un instant donné, la différence de marche varie entre δ et $\delta + 2\varepsilon L$; en posant ici $\lambda_0 = 2\varepsilon L$, on voit que les effets sur l'interférogramme et le spectre sont *identiques* à ceux d'une courbure de flèche λ_0 ; le spectre calculé est encore atténué par un facteur $(\sin \pi\sigma\sigma_0) / (\pi\sigma\sigma_0)$.

B) **DÉRÉGLAGE VARIABLE.** Si le mouvement du miroir n'est pas une translation (par suite d'un défaut des glissières par exemple), il y a déréglage variable de l'interféromètre. On doit maintenant écrire que ε , donc λ_0 et σ_0 , sont fonctions de δ ; le signal, correspondant à chaque fréquence σ dans l'interférogramme, est atténué par un facteur fonction de δ et de σ , $P(\sigma, \delta) = [\sin \pi\sigma/\sigma_0(\delta)] / [\pi\sigma\sigma_0(\delta)]$; la nouvelle fonction d'appareil sera la T. F. de $P(\delta)$. A la différence du cas précédent, non seulement sa hauteur mais aussi sa forme pourront être modifiées. L'altération restant toujours la plus forte pour les fréquences les plus élevées. Une étude plus détaillée de ce cas paraît peu utile car il existe un procédé, dû à E. R. Peck [41], qui permet de supprimer à peu près complètement cette cause d'erreur : l'emploi de trièdres réfléchissants, insensibles à une rotation autour de leur sommet.

3. **Effet d'une erreur sur la détermination du point de l'interférogramme correspondant à une différence de marche $\delta = 0$.** — Nous allons montrer que ce point, appelé dans la suite « point zéro » de l'interférogramme, doit être repéré avec une grande précision (erreur petite par rapport à la longueur d'onde étudiée) (5). Une erreur, même faible dans sa détermination, perturbe fortement la forme de

(4) L'effet d'un déréglage sur la mesure photoélectrique d'un déplacement a été étudié par G. W. Stroke [40].

(5) Cette obligation disparaît dans le cas où la transformation de Fourier est faite par une méthode insensible à la phase des signaux contenus dans l'interférogramme : emploi d'un analyseur harmonique tel qu'il a été imaginé par P. Jacquinot [1] et réalisé par L. W. Mertz [46] ou transformation numérique du type de celle étudiée dans le § II.2.3.

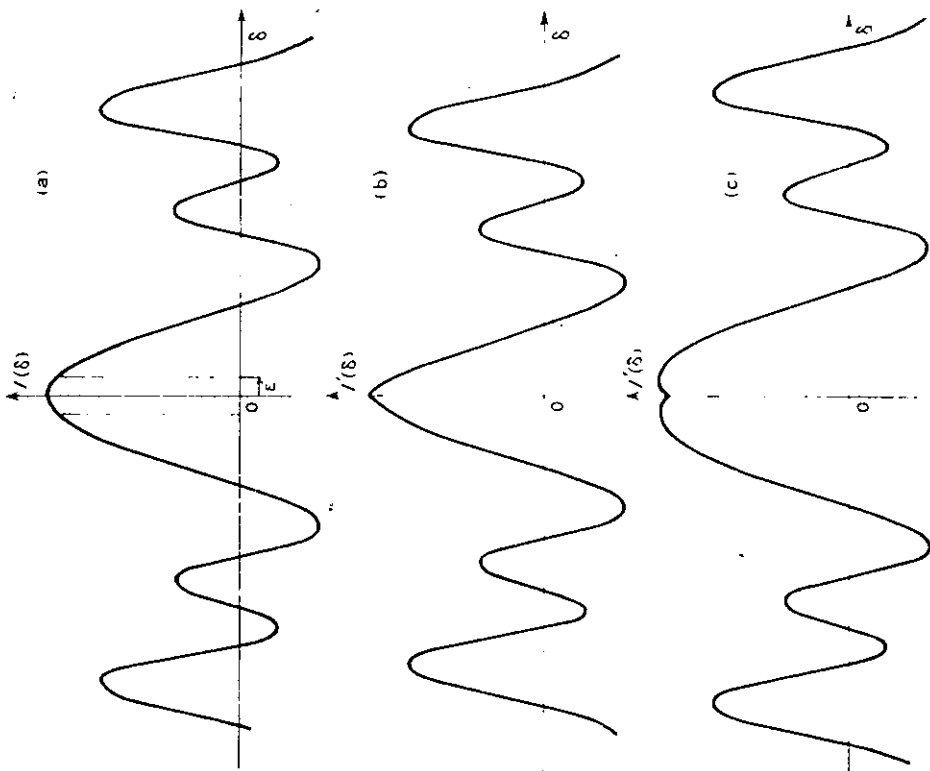


FIG. 24. — Effet sur l'interférogramme d'une erreur dans le choix du point zéro
a) $\varepsilon = 0$; b) $\varepsilon > 0$; c) $\varepsilon < 0$.

la fonction d'appareil, qui devient dyssymétrique et présente des pieds négatifs importants. De plus sa forme varie rapidement avec τ de sorte que dans le cas d'un spectre étendu, les résultats deviennent vite très difficiles à interpréter.

Supposons que nous ayons choisi pour point 0 celui qui correspond à une différence de marche ε . Suivant que ε est positif ou négatif, on fait la T. F. non pas de $I(\delta)$ (fig. 24a), mais de l'une ou l'autre des deux fonctions paires $I'(\delta)$ représentées par les figures 24b et 24c.

A) **CALCUL DE LA FONCTION D'APPAREIL.** — a) $\varepsilon > 0$. — Pour calculer la densité spectrale correspondant au nombre d'ondes σ_1 , au lieu de faire

$$(III.7) \quad B(\sigma_1) = 2 \int_0^{\infty} I(\delta) \cos 2\pi\sigma_1\delta \, d\delta,$$

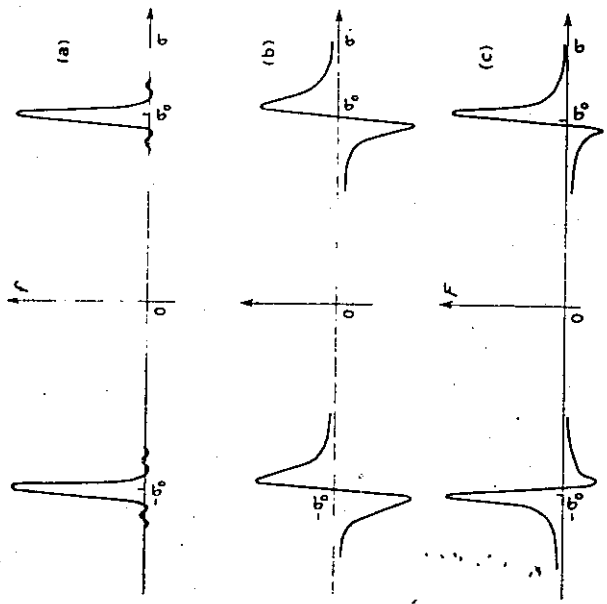


Fig. 25. — Fonctions d'appareil quand il y a une erreur dans la détermination de $\delta = 0$.

on effectue l'opération

$$(III.8) \quad B'(\sigma_1) = 2 \int_0^\infty I(\delta + \varepsilon) A(\delta) \cos 2\pi\sigma_1\delta \, d\delta.$$

Pour trouver la forme de la nouvelle fonction d'appareil, il suffit d'envisager le cas où le spectre se réduit à une radiation de nombre d'ondes σ_0 de luminance $B = 1$. Alors,

$$(III.9) \quad I(\delta + \varepsilon) = \cos 2\pi\sigma_0(\delta + \varepsilon),$$

de sorte que (III.8) peut être mise sous la forme

$$(III.10) \quad B'(\sigma_1) = 2 \left[\cos 2\pi\sigma_0\varepsilon \int_0^\infty A(\delta) \cos 2\pi\sigma_0\delta \cos 2\pi\sigma_1\delta \, d\delta - \sin 2\pi\sigma_0\varepsilon \int_0^\infty A(\delta) \sin 2\pi\sigma_0\delta \cos 2\pi\sigma_1\delta \, d\delta \right].$$

On retrouve l'intégrale

$$(III.11) \quad 2 \int_0^\infty A(\delta) \cos 2\pi\sigma_0\delta \cos 2\pi\sigma_1\delta \, d\delta = \frac{1}{2} [f(\sigma_0 - \sigma_1) + f(\sigma_0 + \sigma_1)],$$

qui donne les deux maxima habituels de la fonction d'appareil. T. F. en cosinus de $A(\delta)$, centrés sur σ_0 et $-\sigma_0$ (fig. 25a).

D'autre part (fig. 25b),

$$(III.12) \quad 2 \int_0^\infty A(\delta) \sin 2\pi\sigma_0\delta \cos 2\pi\sigma_1\delta \, d\delta = \frac{1}{2} [h(\sigma_0 + \sigma_1) + h(\sigma_0 - \sigma_1)].$$

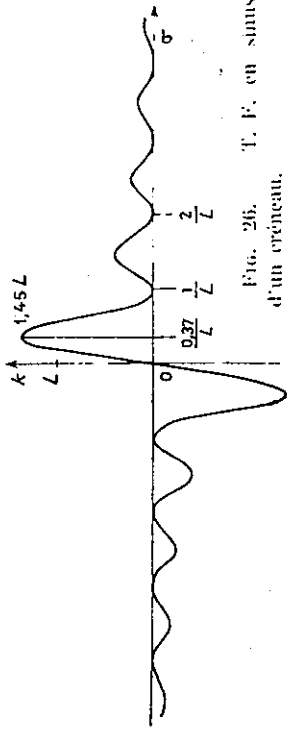


Fig. 26. — T. F. en sinus d'un créneau.

$h(\sigma)$ étant une fonction impaire, T. F. en sinus de $A(\delta)$, que nous appellerons fonction d'appareil en sinus :

$$(III.13) \quad h(\sigma) = 2 \int_0^\infty A(\delta) \sin 2\pi\sigma\delta \, d\delta.$$

C'est le produit de composition de $h(\sigma)$, T. F. en sinus d'un créneau (fig. 26), par $a(\sigma)$, T. F. en cosinus de $A(\delta)$.

La densité spectrale calculée pour le nombre d'ondes σ_1 s'écrit alors

$$(III.14) \quad B(\sigma_1) = \frac{1}{2} [\cos 2\pi\sigma_0\varepsilon f(\sigma_1 - \sigma_0) \sin 2\pi\sigma_0\varepsilon h(\sigma_1 - \sigma_0) - \cos 2\pi\sigma_0\varepsilon f(-\sigma_1 - \sigma_0) \sin 2\pi\sigma_0\varepsilon h(\sigma_1 - \sigma_0)].$$

Le spectre calculé est donc formé par les deux pics de la fonction d'appareil

$$(III.15) \quad F(\sigma) = \cos 2\pi\sigma_0\varepsilon f(\sigma) - \sin 2\pi\sigma_0\varepsilon h(\sigma).$$

centrés l'un sur σ_0 , l'autre sur $-\sigma_0$ (fig. 25c).

L'expression (III.15) montre que la fonction d'appareil dépend de la fréquence analysée dans le spectre. Le terme σ_0 ou ε/λ mesure l'erreur faite dans le choix du point zéro par rapport à la longueur d'onde étudiée. Quand ε/λ vaut 0 ou 1, $F(\sigma) = f(\sigma)$. Quand ε/λ vaut $1/4$, c'est-à-dire lorsqu'on a fait une erreur d'un quart de frange, $F(\sigma) = h(\sigma)$. Entre ces deux cas extrêmes, tous les intermédiaires sont possibles. La figure 27 donne les fonctions $F(\sigma)$ pour des valeurs de ε/λ comprises entre 0 et 0.25. La dissymétrie de la fonction va en s'accroissant en même temps que le maximum principal se déplace par translation. Dans la figure 28 on a étudié la variation du rapport C de la hauteur du pied négatif à celle du maximum central pour ε/λ variant de 0 à 0.25. Il peut être intéressant de noter la rapidité avec laquelle croît C pour les faibles valeurs de ε/λ (fig. 29).

b) $\varepsilon < 0$. — Le cas où ε est négatif se déduit aisément du cas précédent. Pour un nombre d'ondes donné σ et une valeur donnée ε' négative de l'erreur, la fonction d'appareil

$$F'(\sigma) = \cos 2\pi\sigma\varepsilon' f(\sigma) - \sin 2\pi\sigma\varepsilon' h(\sigma).$$

est identique à une fonction $F(\sigma)$ déterminée pour une valeur positive de ε .

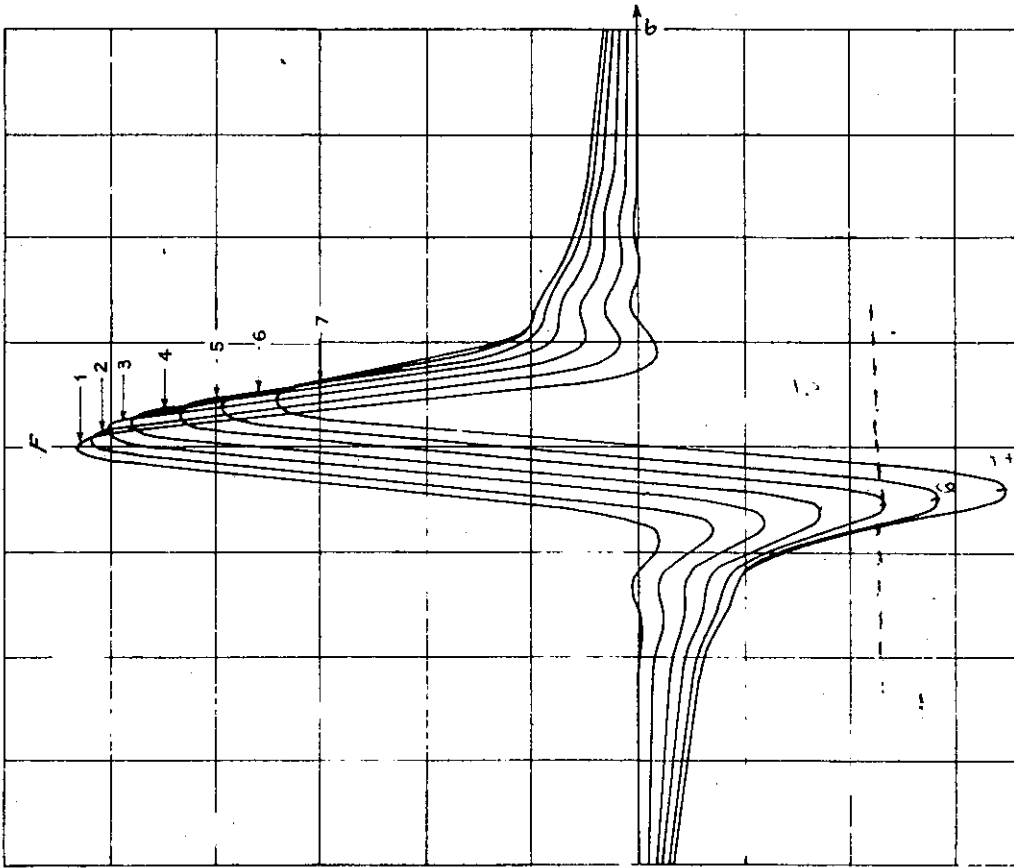


Fig. 27. — Différentes formes de la fonction d'appareil pour différentes valeurs du déphasage : courbe 1, $\epsilon/\lambda = 0$; courbe 2, $\epsilon/\lambda = 0,042$; courbe 3, $\epsilon/\lambda = 0,084$; courbe 4, $\epsilon/\lambda = 0,125$; courbe 5, $\epsilon/\lambda = 0,168$; courbe 6, $\epsilon/\lambda = 0,210$; courbe 7, $\epsilon/\lambda = 0,250$.

$$F(\sigma) = \cos 2\pi\sigma\epsilon f(\sigma) + \sin 2\pi\sigma\epsilon h(\sigma),$$

à condition que $|\sigma\epsilon| = 1 - \sigma\epsilon$.

Quand on explore un domaine spectral étendu, ϵ/λ et, par conséquent, la fonction d'appareil varient considérablement d'un bout à l'autre du spectre. La figure 30 montre les déformations de $F(\sigma)$ pour ϵ/λ variant entre $-\pi$ et $+\pi$.

B) PROBLÈMES PRATIQUES LIÉS À LA DÉTERMINATION DE LA DIFFÉRENCE DE MARCHE ZÉRO. — Quand le spectre étudié est étendu, l'interférogramme au voi-

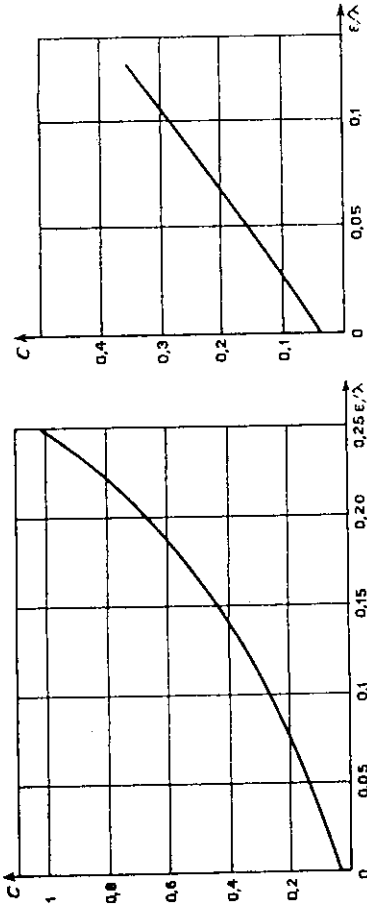


Fig. 28. — Variation de la dissymétrie de la fonction d'appareil avec le déphasage.

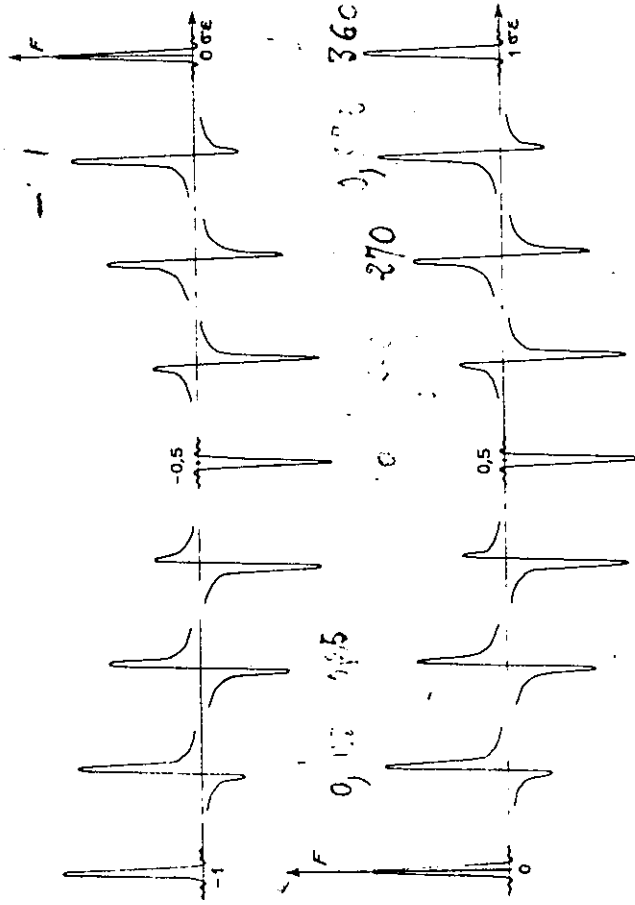


Fig. 30. — Déformation de la fonction d'appareil pour des déphasages compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

sinage de la différence de marche zéro présente seulement quelques franges dont l'intensité va rapidement en décroissant et (à condition que l'interféromètre utilisé soit bien symétrique, donc que l'interférogramme lui-même soit symétrique) le zéro peut être repéré avec une grande précision. En général, la précision est limitée pour deux raisons :

1^o en pratique, il y a toujours, superposées à l'interférogramme idéal, des fluctuations dues au bruit ;

2^o quelquefois, l'allure même de l'interférogramme rend le repérage difficile.

Si le spectre étudié ne comprend que quelques raies assez rapprochées, au voisinage de la différence de marche zéro la modulation est pratiquement constante et on peut passer entre plusieurs franges.

Une solution à ces deux problèmes consiste à enregistrer simultanément l'interférogramme à étudier (interférogramme 1) et celui fourni par une source à spectre étendu et intense (interférogramme 2). Pratiquement on emploie une lampe à incandescence et un filtre isolant une large bande de radiations dans le même domaine que le spectre à étudier.

Quand on étudie un spectre d'émission, il n'y a pas d'inconvénient à remplacer une portion de frange ou une frange entière, au centre de l'interférogramme 1, par la portion équivalente de l'interférogramme 2. Lors de l'enregistrement on reconnaît aisément le passage par la différence de marche zéro. Il suffit alors de remplacer la lumière provenant de la lampe à incandescence par le spectre à étudier. Cette question sera étudiée en détail au chapitre VI. Le problème important de la détermination de la différence de marche zéro, dans le cas où l'interférogramme est enregistré avec une constante de temps qui le rend dysymétrique, sera étudié au chapitre V.

C) MÉTHODE DE CALCUL DU SPECTRE NE NÉCESSITANT PAS LA CONNAISSANCE DU ZÉRO. — Nous allons montrer qu'il est possible de reconstituer correctement le spectre étudié, sans se préoccuper de la position du point zéro, à condition d'enregistrer l'interférogramme pour δ variant de $-L$ à $+L$, de faire la T. F. en cosinus B_1' de cet interférogramme, d'en faire la T. F. en sinus B_2' et de prendre pour mesure du spectre (*) $B' = \sqrt{B_1'^2 + B_2'^2}$. Supposons que le spectre ne contienne qu'une raie unique de luminance $B = 1$, de nombre d'ondes σ_0 ; le spectre obtenu dans ce cas sera la fonction d'appareil.

L'interférogramme se réduit à une sinusoïde ayant pour expression

$$I(\delta) = \cos 2\pi\sigma_0(\delta + \varepsilon) = \cos 2\pi\sigma_0\delta \cos 2\pi\varepsilon - \sin 2\pi\sigma_0\delta \sin 2\pi\varepsilon.$$

Il se compose d'une partie paire $I_p(\delta) = \cos 2\pi\varepsilon \cos 2\pi\sigma_0\delta$ et d'une partie impaire $I_i(\delta) = \sin 2\pi\varepsilon \sin 2\pi\sigma_0\delta$.

$$B_1'(\sigma) = \cos 2\pi\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} A(\delta) \cos 2\pi\sigma_0\delta \cos 2\pi\sigma\delta \, d\delta \\ = \frac{1}{2} \cos 2\pi\varepsilon [f(\sigma - \sigma_0) + f(\sigma + \sigma_0)],$$

$$B_2'(\sigma) = -\sin 2\pi\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} A(\delta) \sin 2\pi\sigma_0\delta \sin 2\pi\sigma\delta \, d\delta \\ = -\frac{1}{2} \sin 2\pi\varepsilon [f(\sigma - \sigma_0) - f(\sigma + \sigma_0)].$$

Le spectre calculé aura pour valeur

$$(III.16) \quad B'(\sigma) = \sqrt{[B_1'(\sigma)]^2 + [B_2'(\sigma)]^2} = \frac{1}{2} [|f(\sigma - \sigma_0)| + |f(\sigma + \sigma_0)|].$$

(*) Ce procédé est utilisé par J. G. Braithwaite & J. Brooks [53].

La nouvelle fonction d'appareil $|f(\sigma)|$ a même largeur que la fonction habituelle $f(\sigma)$. Donc la limite de résolution reste inchangée. Cette méthode a cependant plusieurs inconvénients :

1^o elle nécessite un déplacement double du miroir mobile, ce qui peut devenir difficile pour les résolutions élevées ;

2^o à durée de mesure égale, le rapport signal/bruit est légèrement moins avantageux (cette question sera étudiée plus en détail au chapitre suivant) ;

3^o la durée du calcul dans le cas d'une analyse numérique est un peu plus que quadruplée (il y a deux fois plus de points d'entrée et on fait deux calculs identiques pour les T. F. en cosinus et en sinus ; la durée du calcul des carrés des T. F. et de la racine carrée de leur somme est faible devant celle des T. F. elles-mêmes).

4. *Effet d'une erreur sur la mesure de la différence de marche.* — La reconstitution du spectre à partir de l'interférogramme nécessite la connaissance de la différence de marche correspondant à chacun de ses points. Ceci est réalisé au mieux en enregistrant simultanément (avec un enregistreur à deux plumes ou un enregistreur magnétique à deux pistes) l'interférogramme à étudier et un signal de référence donné par une radiation monochromatique de longueur d'onde connue. La précision dans la connaissance de δ est alors seulement limitée par le bruit dans le signal de référence. Cette dernière considération n'intervient pratiquement pas dans les problèmes à basse résolution, les seuls que nous ayons abordés expérimentalement jusqu'à présent ; aussi n'en avons-nous pas entrepris l'étude. Cependant le fait d'avoir à produire et à enregistrer ce signal de référence représente une certaine complication. Un autre procédé beaucoup plus simple, mais beaucoup moins précis, consiste à enregistrer simultanément l'interférogramme et des tops de repérage produits par la rotation de la vis d'entraînement (*). On peut encore plus simplement entraîner la vis et le papier de l'enregistreur par des moteurs synchrones. Nous allons étudier les déformations de la fonction d'appareil introduites, dans ces deux dernières méthodes, par les erreurs mécaniques. Notre conclusion sera qu'elles permettent seulement de traiter des problèmes à basse résolution, par exemple dans l'infrarouge lointain.

L'avance du miroir mobile n'est jamais rigoureusement linéaire parce qu'une vis n'est pas parfaite. Elle présente toujours par exemple une erreur périodique dont la période θ est celle de la rotation de la vis $\theta = p/V$, p étant le pas de la vis. Nous nous bornerons dans la suite à l'étude des « ghosts » introduits dans le spectre calculé par une erreur de ce type, parce que c'est de loin la plus gênante.

A) CALCUL DE LA HAUTEUR RELATIVE DES GHOSTS. — D'une façon générale $\delta(t)$ peut être considéré comme la somme de deux termes (fig. 31). L'un fonction linéaire du temps, l'autre fonction quelconque du temps de valeur moyenne nulle : $\delta = Vt - f(t)$. Si $f(t)$ est une fonction périodique de période θ , nous pouvons l'écrire sous forme d'une série de Fourier

(*) Un procédé de précision intermédiaire (suffisante pour l'infrarouge lointain ou moyen) utilise un signal de référence fourni par les franges de moiré obtenues avec deux réseaux dont l'un est solidaire de la partie mobile [42].

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n \frac{t}{\theta} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cos \left(2\pi n \frac{t}{\theta} - \varphi_n \right).$$

Quand l'erreur est purement sinusoïdale de période θ , seul le premier terme existe et

$$(III.17) \quad \delta = Vt + \varepsilon_1 \cos \left(2\pi \frac{t}{\theta} - \varphi \right).$$

Prenons pour instant origine celui où $\delta = 0$: l'expression (III.17) devient

$$\delta = Vt + \varepsilon_1 \sin (2\pi t/\theta).$$

Dans ces conditions l'interférogramme obtenu avec une source monochromatique de luminance B , de fréquence σ_0 , a pour expression

$$(III.18) \quad I(t) = B \cos 2\pi\sigma_0 Vt - \varepsilon_1 \sin (2\pi t/\theta) = B \cos (\Omega_0 t - \beta \sin \omega t),$$

en posant $\Omega_0 = 2\pi\sigma_0 V$ (pulsation moyenne) et $\beta = 2\pi\varepsilon_1/\lambda_0$ (indice de modulation).

On est donc ramené au problème classique de l'étude du spectre d'une onde sinusoïdale modulée en fréquence ([43] p. 407). C'est un problème familier aux radioélectriciens. On le retrouve dans l'étude des ghosts d'un réseau qui a été tracé avec une machine à vis. Sous cet aspect il a fait l'objet de plusieurs travaux dont le plus ancien est dû à Rowland ([25] p. 97, [44], [45]). Nous allons le reprendre dans notre cas particulier en ne nous limitant pas au cas où β est petit devant la longueur d'onde étudiée, parce que les vis des interféromètres sont de qualité généralement très inférieure à celle des vis qui sont utilisées dans les machines à graver les réseaux.

L'équation (III.18) peut être mise sous la forme

$$(III.19) \quad I(t) = B \cos \Omega_0 t \cos (\beta \sin \omega t) - B \sin \Omega_0 t \sin (\beta \sin \omega t).$$

En utilisant les développements classiques de $\cos (\beta \sin \omega t)$ et $\sin (\beta \sin \omega t)$ et en remarquant que $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, il vient

$$(III.20) \quad I(t) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos (\Omega_0 + n\omega) t.$$

Le spectre du signal étudié se compose de la raie principale de nombre d'ondes σ_0 et d'une infinité de ghosts situés de part et d'autre de la raie principale, d'intensité $J_n(\beta)$ et de nombre d'ondes $\sigma_0 \pm n \Delta\sigma$, n étant un entier et $\Delta\sigma$ l'intervalle entre deux quelconques de ces ghosts,

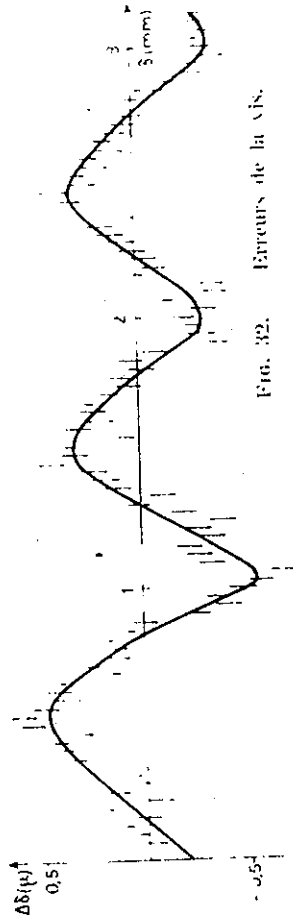


FIG. 32. Erreurs de la vis.

$$(III.21) \quad \Delta\sigma = \frac{1}{2p},$$

p étant le pas de la vis.

Comme les fonctions de Bessel deviennent négligeables quand l'indice est nettement plus grand que l'argument, le nombre de ghosts qu'on observe est pratiquement limité. On peut avoir une idée de leur hauteur relativement à la raie principale par la comparaison suivante.

Supposons que la vis soit utilisée dans une machine à tracer les réseaux et que les réseaux ainsi obtenus soient employés en montage de Littrow sous l'incidence rasante (c'est-à-dire dans les conditions les plus sévères, l'intensité des ghosts croissant comme le carré du sinus de l'angle d'incidence). On peut montrer que la hauteur relative du ghost, obtenu par T. F. de l'interférogramme, est égale au rapport de l'amplitude de la vibration lumineuse diffractée dans le ghost à celle diffractée dans la raie principale donc à la racine carrée de leur intensité relative. Elle est donc beaucoup plus grande.

Exemple numérique. — Supposons qu'une très bonne machine permette d'obtenir des réseaux tels que l'intensité du premier ghost pour une incidence de 60° et une longueur d'onde donnée soit 10^{-3} fois celle de la raie principale. La même machine, utilisée pour enregistrer un interférogramme, aurait conduit pour la même longueur d'onde à un ghost d'intensité relative $3,6 \cdot 10^{-2}$.

Ces considérations permettent de mesurer combien la réalisation d'une mécanique de précision suffisante pour enregistrer un interférogramme et en faire une transformation de Fourier sans le secours d'une raie de référence, est plus difficile que celle d'une machine à tracer les réseaux.

B) ETUDE EXPERIMENTALE. — Nous n'avons pas vérifié directement ces considérations, mais nous avons étudié la vis de notre interféromètre et nous en avons déduit la hauteur relative des ghosts que nous aurions obtenus en faisant la T. F. d'un interférogramme sans utiliser la raie de référence.

Nous avons utilisé comme source la raie rouge du cadmium et nous avons enregistré les 14 100 franges correspondant à une variation de différence de marche de 1 cm. Nous avons mesuré sur l'enregistrement les distances, de 100 franges en 100 franges, avec une précision estimée à un quart de frange; ainsi le déplacement du miroir mobile est repéré à $0,08 \mu$ près. On peut alors dresser une carte des erreurs de la vis (fig. 32). On décele facilement une erreur périodique ayant pour période celle de la vis dont le pas est $p = 1$ mm; l'amplitude de l'erreur est

3° $\lambda_0 = 15 \mu$, $\beta = 0,2$. Il n'y a plus que trois ghosts dont l'intensité soit supérieure à 2/10 000 (fig. 33c).

La figure 33 montre que l'intervalle spectral occupé, suivant que la raie étudiée se trouve dans le visible, le proche infrarouge ou l'infrarouge moyen, est de 100 cm^{-1} , 60 cm^{-1} ou 30 cm^{-1} . Si les limites de résolution sont de cet ordre, on ne pourra pratiquement pas déceler les ghosts.

Ces résultats illustrent bien la nécessité d'employer une raie de référence dès qu'on veut dépasser une résolution de l'ordre de 100, dans le visible et le proche infrarouge.

IV. Considérations générales sur le bruit dans la méthode par transformation de Fourier

Dans l'introduction nous avons montré par un raisonnement simple le gain en rapport signal/bruit, à résolution et durée de mesure égales, qu'on peut attendre de l'emploi de la méthode par transformation de Fourier au lieu d'une méthode classique. Rappelons que ceci n'est vrai que dans l'infrarouge, région où les fluctuations perturbant les mesures ont leur origine dans le récepteur lui-même et non dans le rayonnement étudié, c'est-à-dire quand le bruit de photons est négligeable devant le bruit de récepteur.

Le problème du bruit dans la méthode par transformation de Fourier ne se présente pas de la même façon que dans les méthodes classiques. En effet, ici, ce qui est donné par l'expérience, c'est l'*interférogramme*. Le bruit sur l'*interférogramme* a même allure que le bruit sur le *spectre* obtenu par une méthode classique, mais le bruit dans le spectre, obtenu par transformation de Fourier, est la T. F. du bruit contenu dans l'*interférogramme* et présente un aspect particulier.

Dans ce chapitre nous étudierons l'aspect du bruit dans les spectres. Nous montrerons que le rapport s/b dans le spectre varie comme la racine carrée de la durée totale T de la mesure et comment on peut prévoir le rapport s/b dans le spectre à partir du rapport s/b dans l'*interférogramme*.

1. Choix des meilleures conditions d'enregistrement de l'interférogramme. Bruit dans l'interférogramme. — Suivant que l'on se propose de faire la T. F. de l'*interférogramme* avec un analyseur harmonique ou par une méthode numérique, les procédés d'enregistrement de l'*interférogramme* varieront. Dans le premier cas on fait un enregistrement continu (par exemple sur une bande magnétique [1, 46]). Dans le second on peut employer soit un enregistreur à plume, soit un système convertisseur qui, à un instant donné, transforme une tension en un nombre qui s'inscrit sur un ruban perforé [42]. Quelle que soit la méthode employée les problèmes relatifs à l'amplification du signal fourni par le détecteur restent les mêmes. Fellgett, le premier, a insisté sur la nécessité de n'introduire dans tout le système amplification-détection que des éléments *parfaitement* linéaires [16]. Nous allons distinguer plusieurs possibilités suivant la fréquence du signal à enregistrer.

1° Si le détecteur utilisé est un photomultiplicateur et si l'énergie disponible

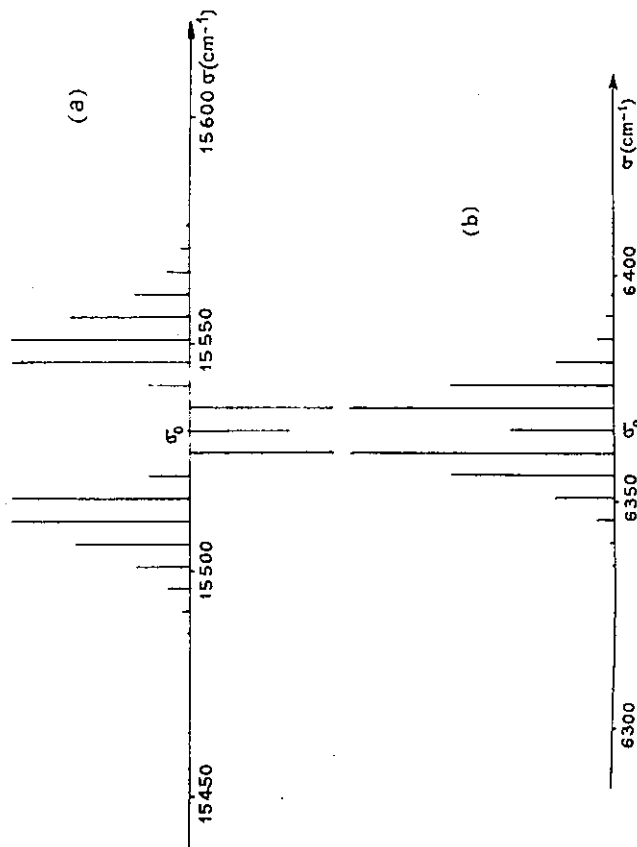


Fig. 33. — Fréquences et intensités relatives des ghosts :

- a) $\beta = 4,88$, $\lambda_0 = 6,438,47 \text{ \AA}$, $\sigma_0 = 15,531 \text{ cm}^{-1}$;
 b) $\beta = 2$, $\lambda_0 = 1,570,8 \mu$, $\sigma_0 = 6,366 \text{ cm}^{-1}$;
 c) $\beta = 0,2$, $\lambda_0 = 15,708 \mu$, $\sigma_0 = 636,6 \text{ cm}^{-1}$.

$\epsilon = 0,5 \mu$ environ.

Les ghosts qu'on obtiendrait seraient distants de $\Delta\sigma = 1/2p = 5 \text{ cm}^{-1}$. Nous avons calculé leur hauteur relative dans trois cas différents.

1° $\lambda_0 = 0,6438 \mu$, c'est-à-dire que l'*interféromètre* est supposé servir à l'étude de la raie rouge du cadmium. L'indice de modulation β vaut 4,88. Il faut aller jusqu'au onzième ghost pour trouver une intensité qui soit les 2/10 000 de l'intensité théorique de la raie principale (fig. 33a).

2° $\lambda_0 = 1,5 \mu$, $\beta = 2$. La raie étudiée est dans l'infrarouge proche. Les ghosts sont moins nombreux (fig. 33b).

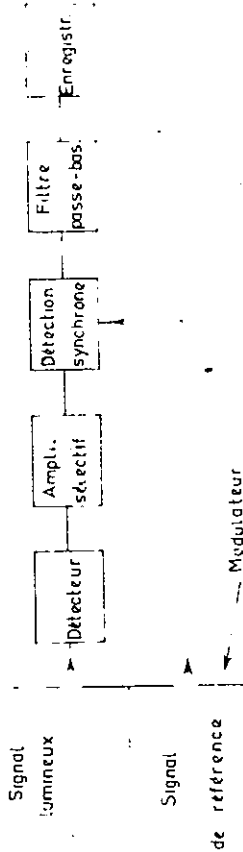


FIG. 31. — Schéma de principe de l'enregistrement d'un interférogramme.

est faible, ce qui oblige à avoir une durée d'enregistrement grande (donc une vitesse V petite, les fréquences électriques contenues dans le signal à amplifier, que nous appellerons maintenant fréquences de Fourier, sont faibles (de l'ordre du hertz). On peut alors employer un amplificateur à courant continu.

2° Les cellules à sulfure de plomb présentent un spectre de bruit non uniforme, toujours maximum au voisinage de la fréquence 0 (bruit de scintillation). D'autre part leur réponse à un signal modulé, uniforme pour les fréquences basses, décroît rapidement pour les fréquences élevées (de l'ordre de 1 000 Hz). Dans ces conditions le meilleur rapport s/b pour un signal occupant une bande de fréquences donnée est obtenu lorsque la fréquence moyenne de ce signal est de l'ordre de 100 à 1 000 Hz.

Si la source à étudier est suffisamment intense pour qu'on puisse opérer à des vitesses telles que les fréquences à analyser soient de cet ordre, un amplificateur alternatif à bande suffisamment large peut être utilisé. Mais dans la majorité des cas, l'énergie disponible sera faible. Les fréquences de Fourier seront très basses, d'où la nécessité de hacher par un modulateur le flux lumineux (suivant la méthode classique en spectroscopie infrarouge). La détection du signal électrique doit alors *obligatoirement* être une détection synchrone [16]. En effet nous verrons dans la suite qu'on peut détecter avec la méthode par transformation de Fourier des raies donnant dans l'interférogramme des sinusoides dont l'amplitude est très inférieure au bruit. Or une détection classique (même dite linéaire) n'est en fait linéaire que si le rapport s/b est notablement supérieur à 1 ([47] p. 359), d'où la nécessité *absolue* de la détection synchrone.

Le système amplificateur-détecteur à employer dans ce cas est exactement le même que celui qui sert à enregistrer le *spectre* dans les méthodes classiques (fig. 34). Le signal électrique avant détection synchrone est amplifié dans un amplificateur sélectif tel que la fréquence d'accord corresponde à la fréquence de modulation du signal lumineux. La bande passante doit être suffisamment large pour que toutes les fréquences soient transmises sans distorsion de phase ni atténuation d'amplitude. Après la détection synchrone le signal passe dans un filtre basse fréquence avant d'être enregistré. Nous verrons que ce filtre a un rôle fondamental quand la transformation de Fourier est faite numériquement, à partir de valeurs discrètes relevées sur l'interférogramme. Quand elle est faite par un analyseur harmonique qui utilise l'interférogramme en entier et pas seulement des valeurs discrètes, le rapport s/b dans le spectre calculé ne dépend

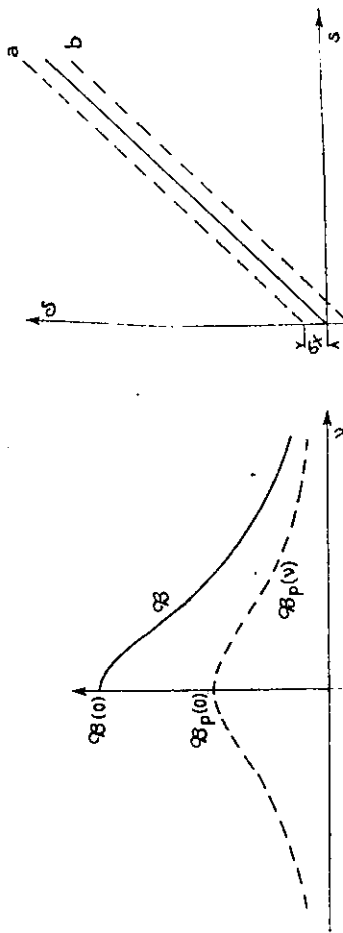


FIG. 35. — Spectre du bruit et sa partie paire.

FIG. 36. — Variation de l'ensemble signal + bruit en fonction du signal quand la T. F. est faite en repérant le point zéro.

pas de la constante de temps du filtre basse fréquence. Le rôle de ce dernier est alors simplement de réduire le bruit qui ne doit pas saturer l'enregistreur. Les densités spectrales $A(\nu)$ et $B(\nu)$, correspondant à la fréquence ν d'un signal avant et après filtrage, sont liées par la relation classique

$$(IV.1) \quad B(\nu) = A(\nu) |G(\nu)|^2,$$

$G(\nu)$ étant le gain complexe du filtre.

Si l'on suppose que le spectre de bruit est uniforme au voisinage de la fréquence de modulation (bruit blanc) avec une densité de bruit B_0 , le spectre de puissance du bruit contenu dans l'interférogramme (ou dans le spectre obtenu par une méthode classique) a pour expression

$$(IV.2) \quad B(\nu) = B_0 |G(\nu)|^2.$$

Dans le cas particulier d'un filtre résistance-capacité de constante de temps $RC = \tau$,

$$(IV.3) \quad B(\nu) = B_0 [1 + (2\pi\tau\nu)^2] \quad (\text{fig. 35}).$$

2. Aspect du bruit dans le spectre calculé. — La T. F. en cosinus, telle qu'elle a été décrite dans le chapitre II, est une transformation linéaire. L'interférogramme enregistré $I(t)$ est la somme de l'interférogramme théorique $I(t)$ que nous avons envisagé jusqu'ici et d'un bruit $x(t)$ qui peut être considéré comme une luminance aléatoire de valeur moyenne nulle. La T. F. de $I(t)$ est la somme du spectre $B_P(\nu)$, T. F. de $I(t)$, et d'un bruit $X(\nu)$ qui est la T. F. en cosinus de $x(t)$; $X(\nu)$ est une grandeur de même nature que $B(\nu)$. C'est une densité de luminance aléatoire (luminance par hertz), de valeur moyenne nulle, qui se superpose au spectre. Il n'y a pas d'interaction signal-bruit (*) et pour étudier l'ensemble signal + bruit,

(*) Nous verrons dans la suite que lorsque le spectre est obtenu comme la racine carrée de la somme des carrés des T. F. en cosinus et en sinus de l'interférogramme enregistré de L à $L + L$, comme il a été expliqué au paragraphe III.2.3C, l'étude de l'ensemble signal/bruit est beaucoup plus complexe.

rayon de corrélation est τ . Cependant si T est choisi suffisamment grand par rapport à la constante de temps τ qui a servi à enregistrer $x(t)$, on peut supposer pratiquement (bien qu'en théorie, cela ne soit pas tout à fait exact) que $x(t)$ est un motif périodique de période T et en faire une décomposition de Fourier classique ([47] p. 307, [48]). Dans l'intervalle $(0, T)$, $x(t)$ est représenté par la série de Fourier

$$(IV.4) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{2T} \cos(2\pi n t - \varphi_n), \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{n}{T},$$

que l'on peut encore mettre sous la forme

$$(IV.5) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A_n}{2T} \cos 2\pi n t + \frac{B_n}{2T} \sin 2\pi n t \right].$$

les coefficients A_n et B_n étant donnés par les expressions

$$A_n = \int_0^T x(t) \cos 2\pi n t dt = C_n \cos \varphi_n$$

et

$$B_n = \int_0^T x(t) \sin 2\pi n t dt = C_n \sin \varphi_n.$$

Les grandeurs C_n et φ_n ou A_n et B_n sont des couples de coefficients aléatoires attachés à chaque oscillogramme. Ils sont tels que

$$(IV.6) \quad \overline{A_n} = 0, \quad \overline{B_n} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{A_n^2} = \overline{B_n^2} = \frac{C_n^2}{2}.$$

Le bruit $X(v)$ dans le spectre, calculé à partir de l'interférogramme $I'(t)$, est donné par l'expression

$$(IV.7) \quad X(v) = T \cos[\pi v t].$$

C'est la T. F. en cosinus d'une fonction $x(t)$ qui peut être considérée comme une somme de sinusôides de fréquences v_n et de phases φ_n absolument quelconques. A chaque sinusôide correspond dans le spectre, T. F. de l'oscillogramme de bruit, une raie qui est le produit de composition d'une fonction de Dirac, de hauteur $C_n/2T$ par la fonction d'appareil correspondant au déphasage φ_n . Suivant la phase φ_n de la sinusôide correspondante dans $x(t)$, la fonction d'appareil aura l'une ou l'autre des formes représentées dans la figure 30. $X(v)$ est donc une fonction aléatoire dont le rayon de corrélation est de l'ordre de $1/T$, largeur de la fonction d'appareil (fig. 38) (9).

3. **Etude de la variance et du rapport s/b dans l'interférogramme et le spectre.**
 — Nous appellerons rapport s/b dans l'interférogramme, soit $(s/b)_I$ pour une raie de fréquence v_1 , le rapport de l'amplitude β de la sinusôide correspondante dans

(9) ceci quand on a fait une apodisation. Sans apodisation le rayon de corrélation du bruit est sensiblement divisé par 2.

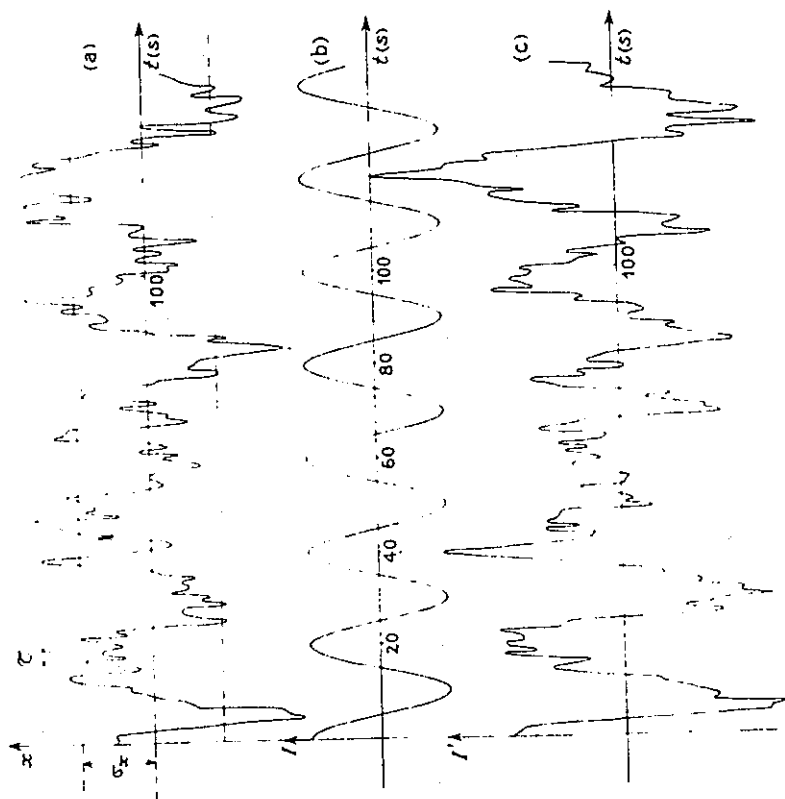


Fig. 37. — a) Bruit dans l'interférogramme ; b) signal dans l'interférogramme ; c) bruit + signal.

il suffit d'étudier séparément le signal en l'absence de bruit, ce qui a été fait dans le chapitre II, et ensuite le bruit. Si l'on représente l'ensemble signal + bruit $\cdot s$, c'est-à-dire le résultat de la T. F. en cosinus de $I'(t)$ en fonction du signal s qui serait le résultat de la T. F. en cosinus de $I(t)$, on obtient la figure 36 dans laquelle σ_x représente l'écart quadratique moyen des fluctuations dans le spectre calculé. Il y aura une certaine probabilité définie P , liée à la forme de distribution statistique du bruit, que le signal mesuré σ soit compris entre $s + \sigma_x$ (fig. 36, courbe a) et $s - \sigma_x$ (fig. 36, courbe b).

Dans l'étude d'une variable aléatoire, deux problèmes se posent :

1° la détermination de sa fonction d'autocorrélation, d'où le calcul du rayon de corrélation duquel on déduit l'aspect de la courbe représentant la fonction aléatoire ;

2° le calcul de sa puissance moyenne encore appelée variance.

Un raisonnement simple permet de prévoir l'aspect du bruit dans le spectre calculé sans qu'il soit nécessaire de calculer sa fonction d'autocorrélation. Le bruit $x(t)$ sur l'interférogramme enregistré entre les instants 0 et T , que nous appellerons oscillogramme de bruit, ne présente aucune périodicité (fig. 37a). Son

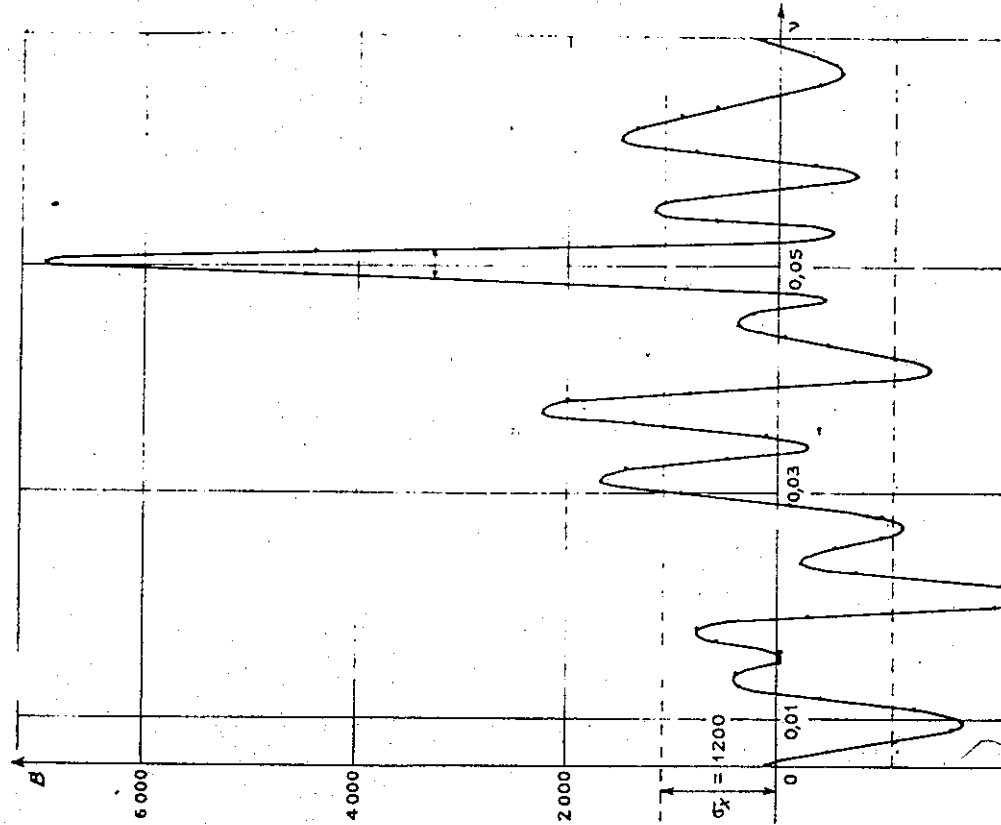


FIG. 38. — Spectre obtenu à partir de l'interférogramme $I(t)$.

l'interférogramme à l'écart quadratique moyen σ_x des fluctuations de l'interférogramme.

$$(IV.8) \quad \sigma_x = \sqrt{x^2(t)}, \quad (s/b)_1 = \beta/\sigma_x.$$

β dépend seulement de la luminance de la source, de l'étendue du faisceau et du détecteur employé ; elle est indépendante de la vitesse d'enregistrement.

Pour le calcul du rapport s/b dans le spectre, nous allons distinguer deux cas, suivant que le spectre est obtenu en faisant simplement la T. F. en cosinus d'un interférogramme symétrique enregistré pour δ variant de 0 à L pendant le temps T ou en faisant la T. F. complète d'un interférogramme enregistré de $-L$ à $+L$ pendant le même temps T .

1. Cas où la T. F. est faite en repérant le point zéro. — Nous avons vu dans le chapitre II que la hauteur de la raie correspondante dans le spectre était $q\beta T$, q étant un facteur numérique, valeur moyenne de la fonction d'apodisation $A(t)$. Il vaut 1 quand il n'y a pas d'apodisation, 0,5 avec la fonction de pondération A_1 et 0,53 avec la fonction de pondération A_2 . Nous appellerons rapport signal/bruit dans le spectre calculé le rapport $(s/b)_s$ de la hauteur théorique de la raie, calculée à partir d'une sinusoïde d'amplitude β dans l'interférogramme, à l'écart quadratique moyen $\sigma_{X(t)}$ des fluctuations dans le spectre calculé.

$$(IV.9) \quad \sigma_{X(t)} = \sqrt{X_1^2(v)} \quad \text{et} \quad (s/b)_s = q\beta T/\sigma_{X(t)}.$$

Le signal ainsi défini dans le spectre croît proportionnellement à la durée T de la mesure ; nous allons montrer que $\sigma_{X(t)}$ croît proportionnellement à la racine carrée de T , donc que le rapport s/b varie aussi comme \sqrt{T} .

A) CALCUL DE LA VARIANCE DANS LE SPECTRE. — Les fluctuations dues au bruit au voisinage de la fréquence ν_1 dans le spectre reconstitué ont pour expression

$$(IV.10) \quad X(\nu_1) = 2 \int_0^T x(t) A(t) \cos 2\pi\nu_1 t dt.$$

On en déduit que

$$\sigma_x^2(\nu_1) = 4 \int_0^T \int_0^T x(t) x(t') A(t) A(t') \cos 2\pi\nu_1 t \cos 2\pi\nu_1 t' dt dt'$$

et, en remarquant que dans cette expression seuls $x(t)$ et $x(t')$ sont des variables aléatoires,

$$(IV.11) \quad \sigma_x^2(\nu_1) = 4 \int_0^T \int_0^T \overline{x(t) x(t')} A(t) A(t') \cos 2\pi\nu_1 t \cos 2\pi\nu_1 t' dt dt'.$$

La fonction $\overline{x(t) x(t')}$ est la fonction d'autocorrélation du bruit dans l'interférogramme. Son étude repose tout entière sur le théorème de Khintchine : la T. F. en cosinus de la fonction d'autocorrélation d'une variable aléatoire stationnaire d'ordre deux est son spectre de puissance. D'où

$$\rho(\theta) = \overline{x(t) x(t')} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_p(v) \cos 2\pi v \theta dv, \quad \text{avec} \quad \theta = t - t' \quad \text{et}$$

$$(IV.12) \quad \mathcal{B}_p(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\theta) \cos 2\pi v \theta d\theta,$$

$\mathcal{B}_p(v)$ étant la partie paire du spectre de puissance $\mathcal{B}(v)$ du bruit contenu dans l'interférogramme (fig. 35).

Des équations (IV.12) on tire immédiatement les expressions donnant la densité du bruit et la variance du bruit dans l'interférogramme :

$$(IV.13) \quad \mathcal{B}_p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \sigma_x^2 = \rho(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_p(v) dv.$$

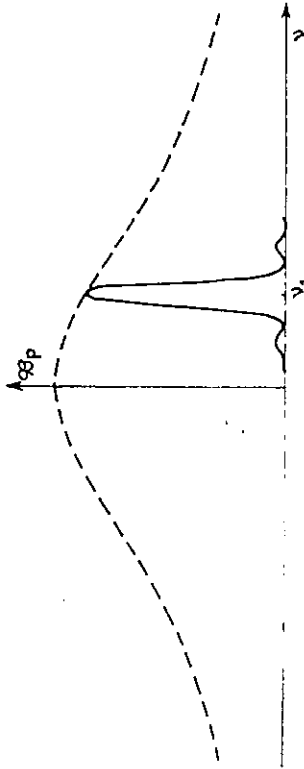


Fig. 39. — Carré de la fonction d'appareil explorant le spectre du bruit.

En remplaçant $\beta(0)$ par sa valeur dans l'expression (IV.11) il vient

$$\sigma_x^2(\nu) = 4 \int_{-\nu}^{\nu} \int_0^T A(t) A(t') \cos 2\pi\nu t' \cos 2\pi\nu t \left[\cos 2\pi\nu t \cos 2\pi\nu t' + \sin 2\pi\nu t \sin 2\pi\nu t' \right] dt dt'$$

Après développement et réduction, la variance s'écrit

$$(IV.14)$$

$$\sigma_x^2(\nu) = \frac{1}{4} \int_{-\nu}^{\nu} \int_0^T \left[f_p^2(\nu_1 - \nu) + k^2(\nu_1 - \nu) + f^2(\nu_1 + \nu) + k^2(\nu_1 + \nu) \right] d\nu$$

$f(\nu)$ et $k(\nu)$ étant les fonctions d'appareil en cosinus et sinus définies au chapitre précédent. Quand l'interférogramme a été enregistré à travers un filtre, le spectre $\beta(\nu)$ du bruit qu'il contient n'est pas uniforme en fonction de la fréquence. Mais on peut considérer $\beta(\nu)$ comme constant et égal à $\beta(\nu_1)$ dans un intervalle de fréquences grand par rapport à la largeur des fonctions $f^2(\nu)$ et $k^2(\nu)$. De plus,

$$(IV.15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) dt,$$

d'où la nouvelle expression de la variance

$$(IV.16) \quad \sigma_x^2(\nu) = \beta_p^2(\nu_1) \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\nu_1 - \nu) d\nu.$$

En remplaçant $f^2(\nu_1 - \nu)$ par $f_0^2 f^2(\nu_1 - \nu)$ [voir (II.7)], il vient

$$(IV.17) \quad \sigma_x^2(\nu) = \beta_p^2(\nu_1) f_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\nu_1 - \nu) d\nu = \frac{1}{2} \beta(\nu_1) f_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\nu_1 - \nu) d\nu,$$

résultat qui s'énonce ainsi (fig. 39) : la puissance moyenne du bruit dans le spectre est, au facteur $\frac{1}{2} f_0^2$ près, l'énergie découpée dans le spectre de puissance du bruit contenu dans l'interférogramme par le carré de la fonction d'appareil normée centrée sur ν_1 . Le facteur $1/2$ vient de ce que la T. F. faite dans les conditions envisagées ci-dessus est une *détection synchrone* et on retrouve le facteur de gain $1/2$ habituel chaque fois qu'on remplace une détection classique par une détection

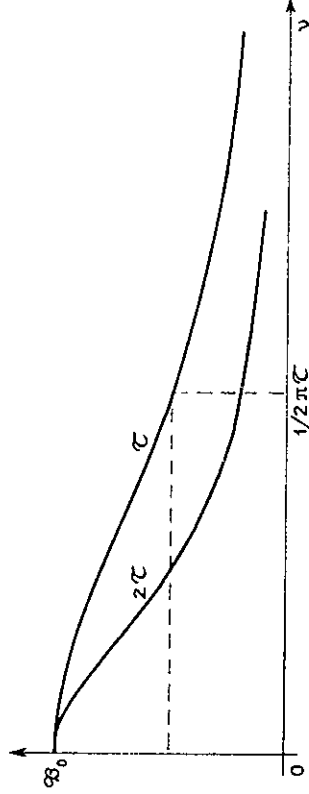


Fig. 40. — Spectre du bruit pour deux valeurs de la constante de temps.

synchrone [49]. En effet on a vu que le bruit dans l'interférogramme pouvait être mis sous la forme d'une somme de termes pairs et de termes impairs. Quand on fait la T. F. en cosinus on détecte seulement les termes pairs.

D'après (IV.15) le terme $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\nu) d\nu$ peut se mettre sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\nu) d\nu = 2QT,$$

Q étant la valeur moyenne du carré de la fonction d'apodisation :

$$Q = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A^2(t) dt.$$

C'est un facteur numérique qui vaut 1 quand il n'y a pas d'apodisation, 0,33 quand l'interférogramme est pondéré par la fonction triangle A_1 et 0,106 avec la fonction de pondération A_2 ; (IV.16) devient alors

$$(IV.18) \quad \sigma_x^2(\nu) = 2Q\beta_p(\nu_1)T = Q\beta(\nu_1)T.$$

Nous verrons dans le chapitre suivant que le filtre \mathcal{F} est toujours choisi de telle sorte que le spectre du signal à étudier soit dans une région où on puisse en première approximation confondre $\beta(\nu_1)$ avec $\beta(0)$ densité de bruit, ceci afin de ne pas avoir de déphasage excessif du signal ; dans ces conditions σ_x peut, quelle que soit la fréquence considérée, se mettre sous la forme

$$(IV.19) \quad \sigma_x = \sqrt{Q} \sqrt{\beta(0)} \sqrt{T}.$$

La densité de bruit $\beta(0)$ est une quantité qui dépend seulement du détecteur employé. Quand on change de vitesse d'enregistrement il faut, bien entendu, modifier la constante de temps du filtre passe-bas mais, ce faisant, on modifie seulement la largeur de la bande passante du filtre et non $\beta(0)$ (fig. 40). Le spectre (IV.9) devient alors

$$(IV.20) \quad (s/b)_s = \frac{q\beta T}{\sqrt{Q}\beta(0)T} = \beta \frac{q}{\sqrt{Q}} \frac{1}{\sqrt{\beta(0)}} \sqrt{T}.$$

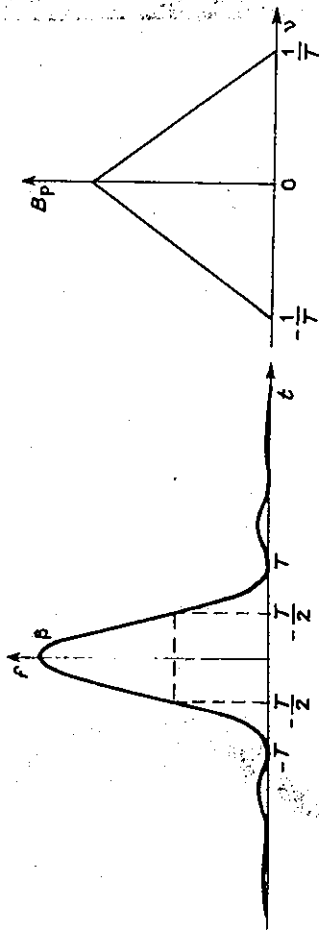


FIG. 41. — Signal enregistré par un spectromètre à réseau.

Le facteur numérique q/\sqrt{Q} , qui est le quotient de la valeur moyenne de la fonction de pondération par la racine carrée de la valeur moyenne du carré de cette fonction de pondération, vaut 1 quand il n'y a pas d'apodisation, 0,87 avec la pondération en triangle et 0,84 avec la pondération par la fonction A_2 .

B) DISCUSSION DES RÉSULTATS. — De l'équation (IV.20) donnant l'expression du rapport s/b dans le spectre nous pouvons tirer trois conclusions importantes.

a) Quand, par la méthode par transformation de Fourier, on veut traiter un problème donné à une résolution donnée, le rapport s/b dans le spectre reconstitué varie comme la racine carrée de la durée de la mesure. On retrouve ainsi un résultat absolument général, commun à toutes les méthodes. C'est en comparant les coefficients de proportionnalité dans la méthode par transformation de Fourier et les méthodes classiques qu'on peut prouver la supériorité de l'un des procédés sur les autres.

Supposons qu'on veuille enregistrer avec un instrument classique la raie monochromatique de largeur négligeable qui donnerait une sinusoïde d'amplitude β dans un interférogamme. Nous supposons que l'instrument a même étendue que l'interférogramme employé en spectromètre, que les facteurs de transmission des deux appareils sont les mêmes ⁽¹⁰⁾, que les deux mesures sont faites avec le même détecteur et que la résolution est la même dans les deux cas. Dans ces conditions, le signal enregistré en fonction du temps reconstitue la fonction d'appareil. Le maximum aura pour hauteur β . Supposons que nous ayons mis un temps T pour enregistrer un intervalle spectral égal à la limite de résolution, c'est-à-dire égal à la largeur de la fonction d'appareil. Dans la figure 41 nous avons représenté la fonction d'appareil qu'on aurait pour un spectromètre à réseau. Le spectre de fréquences du signal électrique ainsi enregistré en est la T. F. en cosinus; il s'étend de $-1/T$ à $+1/T$ (fig. 42). Le filtre idéal à utiliser pour l'enregistrement dans ces conditions est un filtre passe-bas rectangulaire ayant un gain de module

(10) Il faut avec l'interférogramme de Michelson, pour que la transparence soit égale à l'unité, utiliser le faisceau de sortie comme il a été décrit ici et le faisceau en opposition qui est renvoyé dans la direction de la source. Il suffit alors de recevoir les deux faisceaux sur une cellule et de faire la différence des deux signaux électriques [16].

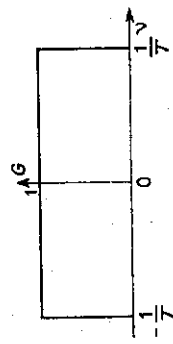


FIG. 43. — Filtre idéal à utiliser avec un spectromètre à réseau.

soit différente. Dans les deux cas, la variance dans le spectre vaut

$$(IV.21) \quad \sigma_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} I_p(v) dv = \int_{-1/T}^{+1/T} I_p(v) dv = -\frac{I_p(0)}{T} = \frac{I(0)}{T}.$$

Le rapport s/b dans l'enregistrement prend alors la forme $s/b = \beta(1/\sqrt{I(0)})\sqrt{T}$. Cette expression est strictement équivalente à celle donnant le rapport s/b dans le spectre calculé par la méthode par transformation de Fourier si l'on ne fait pas d'apodisation (IV.19). Donc s'il s'agit d'étudier un élément spectral unique, les méthodes classiques et la méthode par transformation de Fourier donnent le même résultat.

Remarquons que, avec le filtre réel envisagé plus haut, les fréquences élevées dans le spectre subissent une atténuation et un déphasage inadmissibles. Pratiquement, pour que l'atténuation et le déphasage des fréquences élevées ne dépassent pas un certain taux qu'on se fixe à l'avance, on emploie un filtre dont la bande passante est beaucoup plus large (fig. 44, courbe c). Alors la puissance de bruit dans le spectre est plus élevée, mais on peut faire sur le spectre une opération de lissage et on retrouve sensiblement les mêmes résultats que précédemment.

Quand le spectromètre classique utilisé n'est pas un spectromètre à réseau, le spectre de fréquences n'est plus nécessairement nul pour des fréquences supérieures à $1/T$ mais, la durée d'enregistrement d'un élément spectral étant toujours T , la fréquence maximale du signal électrique qu'on doit transmettre sans déformation est toujours de l'ordre de $1/T$ et les considérations précédentes restent valables.

Supposons maintenant que nous voulions étudier un spectre contenant M éléments spectraux. Si on veut garder le même rapport s/b par la méthode classique, la durée de la mesure deviendra MT . Mais pour une durée totale de mesure valant MT , le rapport s/b dans le spectre obtenu par transformation de Fourier vaut, d'après (IV.19), $s/b = \beta(1/\sqrt{I(0)})\sqrt{MT}$. D'où le gain \sqrt{M} en rapport s/b que la méthode par transformation de Fourier permet d'obtenir par rapport aux méthodes classiques pour l'étude d'un problème à résolution donnée et durée de mesure donnée.

b) Le rapport s/b dans le spectre est indépendant de la constante de temps du filtre à travers lequel on a enregistré l'interférogramme. C'est un résultat à rapprocher du fait que dans les méthodes classiques la précision de la mesure, mais non le rapport s/b , est indépendante de la constante de temps qui a servi à l'enregistrement du spectre.

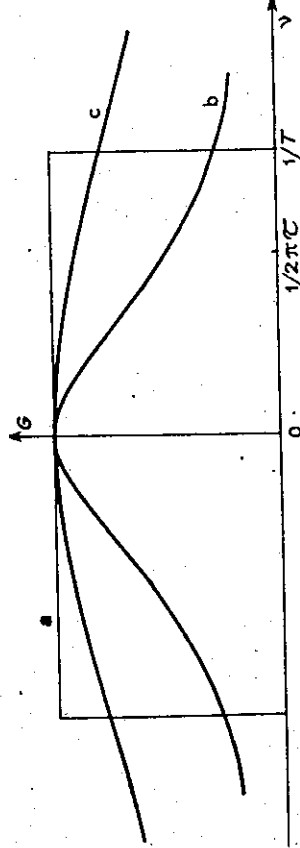


FIG. 44. — a) Courbe de gain théorique ; b) courbe de gain d'un filtre réel ayant même surface que le filtre théorique $\tau = 1/4T$; c) courbe de gain du filtre utilisé.

c) A durée de mesure égale T , le rapport s/b dans le spectre varie avec le type de fonction d'appareil cho.si. Il est maximum quand on ne fait pas d'apodisation. Il est affaibli par un facteur 0,87 quand la fonction de pondération est la fonction triangle et par 0,84 quand c'est la fonction A_2 . Le fait de pondérer l'interférogramme améliore la forme de la fonction d'appareil mais entraîne des pertes en résolution et rapport s/b . Cet affaiblissement en rapport s/b est d'ailleurs légèrement inférieur à celui qu'on a en optique quand on emploie des apodiseurs absorbants en présence de bruit de photons et à fortiori en présence de bruit de récepteur. Le raisonnement simple qui consiste à dire que dans le cas d'une apodisation numérique faite sur l'interférogramme on ne diminue pas le rapport s/b parce que le signal et le bruit sont divisés par un même facteur ou parce que le nombre de photons reçus n'est pas diminué, n'est donc pas correct.

C) CALCUL DE \mathcal{R} , QUOTIENT DU RAPPORT s/b DANS LE SPECTRE PAR LE RAPPORT s/b DANS L'INTERFÉROGRAMME. \mathcal{R} , rapport de $(s/b)_s$ à $(s/b)_i$, peut être mis sous diverses formes équivalentes que nous discuterons. D'une façon générale

$$(IV.22) \quad \mathcal{R} = \frac{q\beta T}{\sigma_x} \frac{\sigma_x}{\beta} = q \frac{\sigma_x}{\sigma_x} T.$$

Théoriquement, l'interférogramme aurait pu être enregistré sans constante de temps, sans pour cela que le rapport s/b dans le spectre calculé varie. Dans ces conditions, l'écart quadratique moyen σ_z des fluctuations dans l'interférogramme serait infini et \mathcal{R} serait aussi infini. Pratiquement l'interférogramme est toujours enregistré à travers un filtre et nous allons montrer que le quotient σ_x/σ_x est à peu près proportionnel à l'inverse de la racine carrée de la constante de temps du filtre utilisé.

Si le filtre passe-bas est un filtre RC, la variance dans le spectre au voisinage de la fréquence $\nu = 0$ a pour expression

$$(IV.22 bis) \quad \sigma_x^2(\nu) = 2QT \mathcal{B}_p(0).$$

La variance dans l'interférogramme est donnée par

$$\sigma_z^2 = \mathcal{B}_p(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} d\nu = \frac{\mathcal{B}_p(0)}{2\tau}.$$

d'où (11)

$$(IV.23) \quad \sigma_x^2(\nu) = 4QT\tau\sigma_z^2$$

et, dans ces conditions, on a

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \frac{q}{\sqrt{Q}} \sqrt{\frac{T}{\tau}}.$$

La variance dans le spectre au voisinage de la fréquence ν_1 a pour expression

$$\sigma_x^2(\nu_1) = 2QT \mathcal{B}_p(\nu_1) = \sigma_x^2(0) \mathcal{B}_p(\nu_1)/\mathcal{B}_p(0),$$

qu'on peut encore écrire

$$\sigma_x^2(\nu_1) = \frac{1}{1 + (2\pi\nu_1\tau)^2} \sigma_x^2(0).$$

L'expression

$$(IV.23 bis) \quad \sigma_x^2(\nu_1) = \frac{4QT\tau}{1 + (2\pi\nu_1\tau)^2} \sigma_z^2$$

(11) Il existe un moyen très simple d'arriver à ce résultat directement sans passer par l'intermédiaire des relations (IV.14) et (IV.17) qui font intervenir le produit de composition du spectre du bruit par le carré de la fonction d'appareil. Mais si le calcul est plus simple par ce procédé, la première façon d'envisager le problème reste très utile pour le comprendre physiquement et pour traiter le cas du bruit dans la T. F. numérique comme il sera fait au début du chapitre suivant.

Les fonctions $y(t)$ et $X(\nu)$, étant des T. F. réciproques, sont liées par la relation

$$(IV.24) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \int_0^{\infty} X^2(\nu) d\nu.$$

Dans notre problème, l'interférogramme de bruit a été pondéré par la fonction $A(t)$ de sorte que $y(t) = x(t)A(t)$, $x(t)$ étant le bruit dans l'interférogramme. Les fluctuations $X(\nu)$ dans le spectre obtenu à partir d'un interférogramme enregistré avec le filtre de gain $G(\nu)$ sont liées à celles qu'on aurait dans le spectre obtenu à partir d'un interférogramme enregistré sans filtre, $Y(\nu)$ par la relation

$$\int_0^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_0^{\infty} |Y(\nu)|^2 |G(\nu)|^2 d\nu.$$

Donc la relation (IV.24) s'écrit

$$(IV.25) \quad \int_0^{\infty} x^2(t) A^2(t) dt = \int_0^{\infty} |X(\nu)|^2 |G(\nu)|^2 d\nu.$$

Soit σ_z^2 la variance dans l'interférogramme et σ_x^2 la variance dans le spectre au voisinage de la fréquence 0. En remarquant que $A^2(t)$ et $|G(\nu)|^2$ sont des quantités très lentement variables devant $x^2(t)$ et $Y^2(\nu)$ la relation (IV.25) devient

$$(IV.26) \quad \sigma_z^2 \int_0^{\infty} A^2(t) dt = \sigma_x^2 \int_0^{\infty} |G(\nu)|^2 d\nu = \sigma_x^2(0) \int_0^{\infty} |G(\nu)|^2 d\nu,$$

puisque le filtre considéré a un gain unité pour la fréquence 0.

En appelant Q la valeur moyenne du carré de la fonction d'apodisation et en remplaçant $|G(\nu)|^2$ par sa valeur $1/[1 + (2\pi\nu\tau)^2]$, on conclut $QT\sigma_z^2 = \sigma_x^2(0)/4\tau$, d'où $\sigma_x^2(0) = 4QT\tau\sigma_z^2$, expression équivalente à (IV.23).

permet donc de calculer la variance dans le spectre au voisinage d'une fréquence quelconque en fonction de la variance dans l'interférogramme.

Le rapport k^2 varie comme la racine carrée du quotient de la durée de la mesure par la constante de temps du filtre β . Il suffit d'augmenter T pour le rendre aussi grand qu'on veut. Prenons le cas où la T. F. est faite sans apodisation : $q_i \sqrt{Q}$ vaut alors 1 et $k^2 = 0.5 \sqrt{T \tau}$; si $T = 4.10^3 \tau$ (ce qui conduit à un enregistrement de l'interférogramme qui dure trois heures si la constante de temps utilisée est $\tau = 1$ s), $k^2 = 100$. Nous en déduisons que pour avoir un rapport $s/b = 2$ dans le spectre calculé, il suffit que le rapport s/b dans l'interférogramme soit de $1/50$. La sinusoïde correspondante serait totalement invisible dans le bruit. Il faut donc bien se garder d'arrêter l'enregistrement de l'interférogramme quand on ne voit plus de franges et qu'on a l'impression d'enregistrer uniquement du bruit.

1) VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES. — Nos vérifications expérimentales ont porté sur trois points précis. Au moyen d'un amplificateur à détection synchrone et filtre passe-bas précédemment décrit, nous avons enregistré les fluctuations d'une cellule à sulfure de plomb. Nous avons calculé la fonction de corrélation de ces fluctuations $x(t)$ et leur spectre en faisant la T. F. en cosinus de la fonction d'autocorrélation. Puis nous avons composé un interférogramme synthétique en ajoutant une sinusoïde de période et d'amplitude connues au bruit étudié et nous avons fait la T. F. de cet interférogramme. Nous avons pu ainsi vérifier l'accord entre le rapport s/b prévu et le rapport s/b mesuré dans le spectre, de même que la variation k en rapport s/b quand on passe de l'interférogramme au spectre.

a) *Fonction de corrélation et spectre du bruit dans l'interférogramme.* — Nous avons voulu vérifier qu'il ne s'introduisait pas d'autres sources de bruit que celles envisagées et que nous pouvions calculer k à partir de l'expression qu'il a lorsque l'interférogramme a été enregistré à travers un filtre RC. Nous avons choisi $\tau = 2$ s (fig. 37a). Les fluctuations enregistrées ont un écart quadratique moyen $\sigma_x = 37,5 \mu$, μ étant la valeur de l'unité arbitraire qui sert à mesurer les déviations sur l'enregistrement (ici des millimètres). La fonction de corrélation a été calculée par l'ordinateur 704 IBM (12).

Si la durée d'enregistrement de $x(t)$ était infinie, sa fonction d'autocorrélation (12) Il est possible de calculer la fonction d'autocorrélation d'une fonction $f(x)$ dont on sait qu'elle a un spectre de fréquences limité de largeur $\Delta\nu$ à partir de valeurs discrètes équidistantes de cette fonction. Il suffit de choisir la distance h entre deux points de telle sorte que la fréquence de répétition $1/2h$ du spectre de fréquences de la nouvelle fonction ainsi définie, soit égale ou supérieure à $2 \Delta\nu$. Si le spectre de fréquences de $f(x)$ n'est pas limité, l'approximation avec laquelle on calcule sa fonction d'autocorrélation par cette méthode est d'autant meilleure que le pas h est choisi plus petit. La discussion complète de cette question est semblable à celle qui sera faite dans le chapitre suivant pour déterminer la distance h entre deux points à relever sur l'interférogramme pour avoir le rapport s/b maximum quand on fait une T. F. numérique. La figure 45 montre une fonction $f(x)$ et sa fonction d'autocorrélation $C_f(x)$ calculée numériquement à partir de valeurs discrètes de $f(x)$. Il y a un parfait accord entre $C_f(x)$ calculée et $C_f(x)$ prévue.

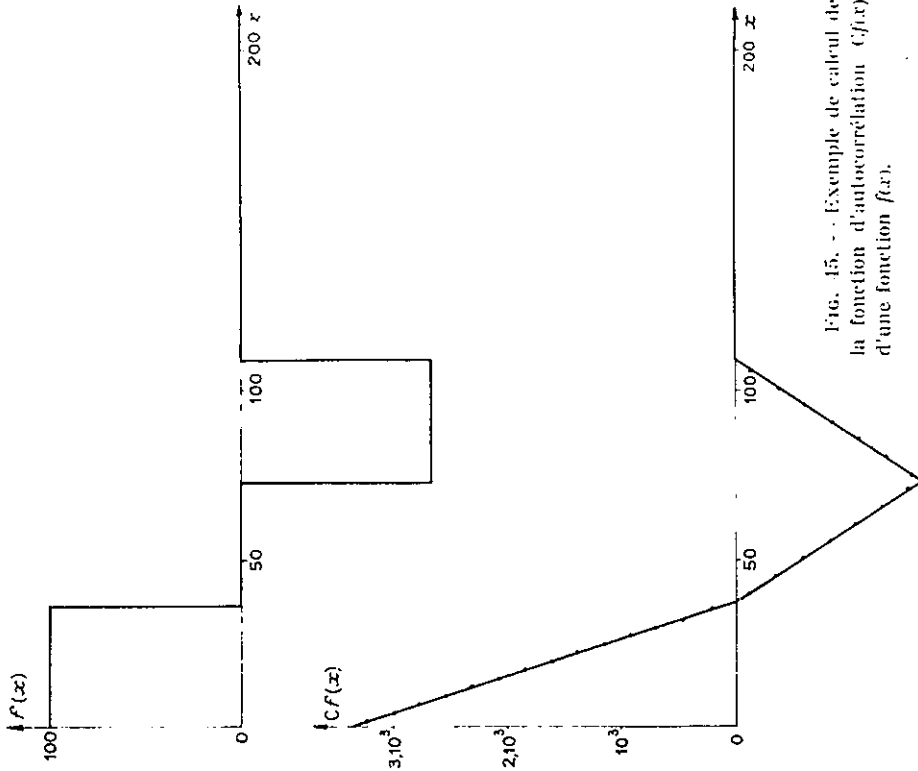


Fig. 45. — Exemple de calcul de la fonction d'autocorrélation $C_f(x)$ d'une fonction $f(x)$.

$\rho(\theta)$ aurait pour expression $\exp(-t/\tau)$ (fig. 46, courbe a). Comme la durée de l'enregistrement est limitée, $\rho(\theta)$ est légèrement différente de $\exp(-t/\tau)$ et s'en écarte d'autant plus que T/τ est plus petit. Les courbes b et c de la figure 46 montrent $\rho(\theta)$ pour $T/\tau = 90$ et $T/\tau = 180$. Les fluctuations sont considérablement réduites dans le second cas, comme prévu. La T. F. en cosinus de $\rho(\theta)$ donne le spectre de puissance du bruit $x(t)$ (fig. 47, courbe b). Elle s'écarte peu de la courbe théorique (fig. 47, courbe a).

b) *Rapport s/b dans le spectre calculé.* — Nous avons composé un interférogramme théorique $I'(t)$ (fig. 37c) formé de la superposition de la portion de bruit $x(t)$ telle que $T/\tau = 180$ précédemment considérée et d'une sinusoïde

$$I(t) = 37 \cos 2 \pi 0,05 t \quad (\text{fig. 37b}).$$

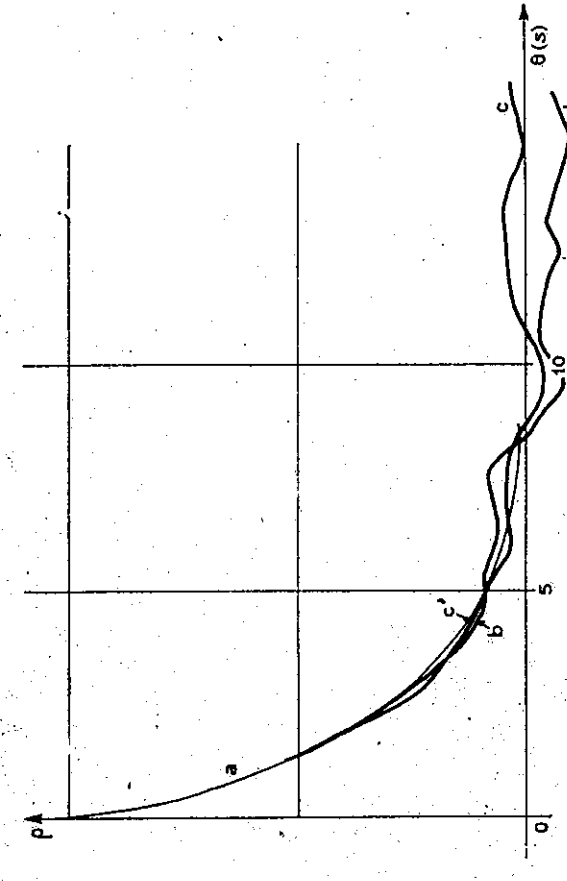


Fig. 46. — Fonction d'autocorrélation du bruit dans l'interférogramme.

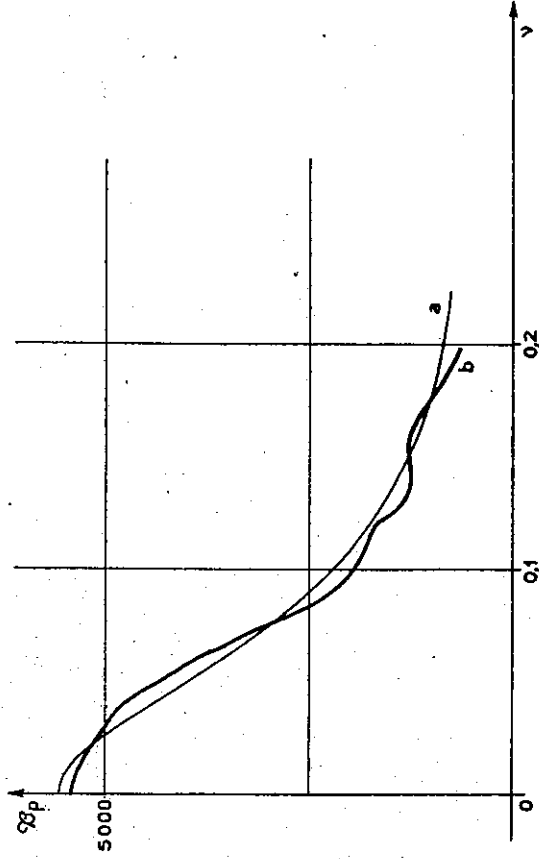


Fig. 47. — Spectre de puissance du bruit dans l'interférogramme.

Dans ces conditions le rapport s/b dans l'interférogramme vaut 1 et il est pratiquement impossible de distinguer celui des deux graphiques 37a ou 37c qui est du bruit pur.

Le spectre $B_p(\nu)$ de $I(t)$ a été calculé numériquement en choisissant $h = 1,2$ (fig. 38). Nous verrons dans le chapitre suivant que le rapport s/b dans le spectre calculé est alors les 98/100 du rapport s/b maximum qu'on aurait obtenu en utilisant toutes les valeurs de $I(t)$. La formule (IV.20) permet de prévoir $(s/b)_s$. D'après la figure 47,

$$B_p(0,05) = 4\,950 \text{ u. s.}, \text{ d'où } (s/b)_s = 37 \times 0,84 \times \frac{1}{\sqrt{2 \times 4\,950}} \sqrt{360} = 0,91.$$

Le rapport s/b mesuré sur le spectre vaut 6,4. Il a été obtenu en faisant le quotient de la hauteur mesurée de la raie à $\nu = 0,1$ par l'écart quadratique moyen des fluctuations dans le spectre. Cet écart quadratique moyen est la valeur moyenne du carré des fluctuations aux environs de $\nu = 0,1$. L'échantillon de bruit a été choisi suffisamment long pour que $\overline{X(\nu)} = 0$. Dans ces conditions le σ_x calculé vaut $\sigma_x = 1\,200 \text{ u. s.}$ Remarquons que la formule (IV.19) permet de prévoir

$$\sigma_x = \sqrt{0,406 \times 2 \times 4\,950 \times 360} = 1\,200 \text{ u. s.}$$

Le signal théorique a pour valeur

$$s = q\beta T = 0,53 \times 37 \times 360 = 7\,059,6 \text{ u. s.}$$

Il est probable que le rapport s/b mesuré est compris entre les deux limites $(s + \sigma_x)/\sigma_x = 6,8$ et $(s - \sigma_x)/\sigma_x = 4,9$. Nous l'avons en effet trouvé égal à 6,4.

c) *Variation en rapport s/b en passant de l'interférogramme au spectre.* — Le rapport s/b dans l'interférogramme étant égal à 1, la valeur mesurée de b vaut 6,4. Sa valeur théorique peut être calculée à partir de la formule (IV.22) qui donne

$$b = 0,53 \times \frac{37,5}{1\,200} \times 360 = 5,905.$$

2. *Cas où la T. F. est faite sans repérer le point zéro.* — Nous avons vu (§III.2.3C) qu'il était possible de reconstituer le spectre sans connaître le point zéro de l'interférogramme. Il suffit d'enregistrer l'interférogramme pour δ variant de $-L$ à $+L$ et de prendre la racine carrée de la somme des carrés des T. F. en sinus et cosinus, en d'autres termes de faire la T. F. complète. Nous nous proposons d'étudier le rapport signal/bruit dans le spectre calculé par cette méthode et de comparer les résultats à ceux obtenus dans le cas où l'on fait uniquement la T. F. en cosinus. Quand on fait des élévations au carré, on introduit des éléments non linéaires et on peut prévoir qu'il ne suffira plus de considérer séparément la T. F. de l'interférogramme sans bruit et la T. F. du bruit; il y a une interaction signal-bruit.

Nous supposons que dans les deux cas la mesure a duré le même temps total T . En l'absence de bruit les deux méthodes sont rigoureusement équivalentes. Mais l'étude de l'ensemble signal-bruit est beaucoup plus complexe quand on fait la T. F. complète.

Dans le premier cas, le bruit dans le spectre calculé a une distribution gaussienne. Sa valeur moyenne est nulle. Nous avons appelé « signal » la hauteur s d'une raie obtenue en l'absence de bruit à partir d'un certain interférogramme. Nous dési-

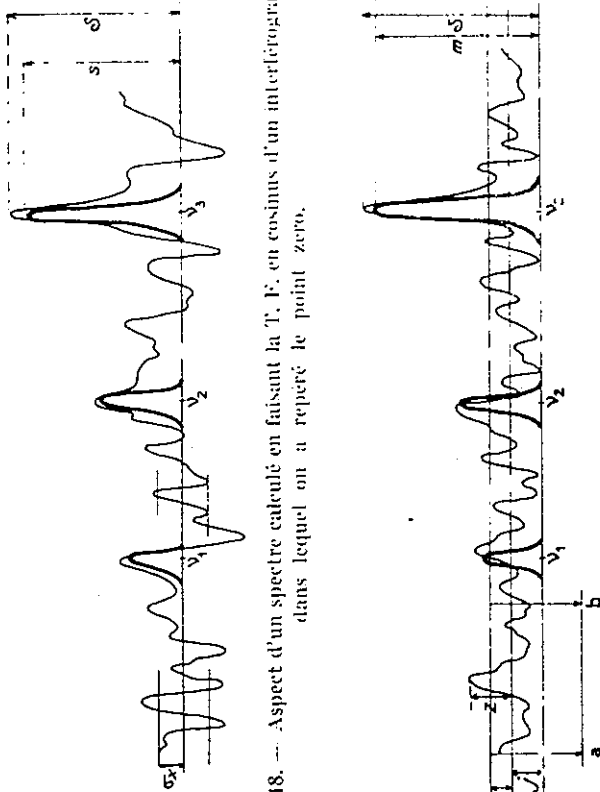


Fig. 48. — Aspect d'un spectre calculé en faisant la T. F. en cosinus d'un interférogramme dans lequel on a repéré le point zéro.

Fig. 49. — Spectre calculé en faisant la T. F. complète du même interférogramme que dans la figure 48, mais dans lequel on n'a pas repéré le point zéro.

gnons par ρ la variance σ_x^2 dans le spectre en présence de bruit (quantité qu'on peut mesurer dans un spectre en faisant le carré moyen des fluctuations dans une région où il n'y a pas de raie) (fig. 48). Il y a une probabilité définie P pour que le nombre δ mesurant la hauteur de la raie soit compris entre $s + \lambda \rho$ et $s - \lambda \rho$, quel que soit s . Autrement dit, l'opération est parfaitement linéaire et l'écart quadratique moyen des fluctuations dans le spectre est indépendant du signal. Dans la figure 51 on a représenté les variations de $\sqrt{\lambda \rho}$ en fonction de $s/\sqrt{\rho}$. La courbe a représenté la valeur moyenne du signal $\lambda \rho = s\sqrt{\rho}$. Les courbes a' , $b/\sqrt{\rho} = (s/\sqrt{\rho}) + 1$, et a'' , $b/\sqrt{\rho} = (s/\sqrt{\rho}) - 1$, indiquent les deux limites entre lesquelles il y a la probabilité P de trouver la valeur du quotient du signal mesuré par $\sqrt{\rho}$. Nous avons appelé rapport signal/bruit s/b le quotient $s/\sqrt{\rho}$.

Quand on fait la T. F. complète, les résultats sont différents; pour pouvoir comparer plus commodément les deux méthodes, nous allons exprimer les quantités que nous appellerons signal et bruit dans ce cas en fonction de s et ρ . Etant donnée l'interaction signal-bruit, il n'est pas indiqué quand on fait la T. F. complète de traiter le bruit seul, puis l'ensemble signal-bruit. Il faut traiter le signal et le bruit ensemble et en déduire ce qui se passe dans les régions du spectre où le signal est nul. Voici les principaux résultats que nous mettrons en évidence:
 1° dans les régions du spectre où il n'y a pas de raie (fig. 49, portion ab), le bruit est une fonction aléatoire $J(v)$ qu'on peut considérer comme la superposition d'une composante continue non nulle $J(v) = j$ et d'une partie fluctuante $z'(v)$ de valeur moyenne nulle $z'(v) = 0$ et de valeur quadratique moyenne $z'^2(v)$;

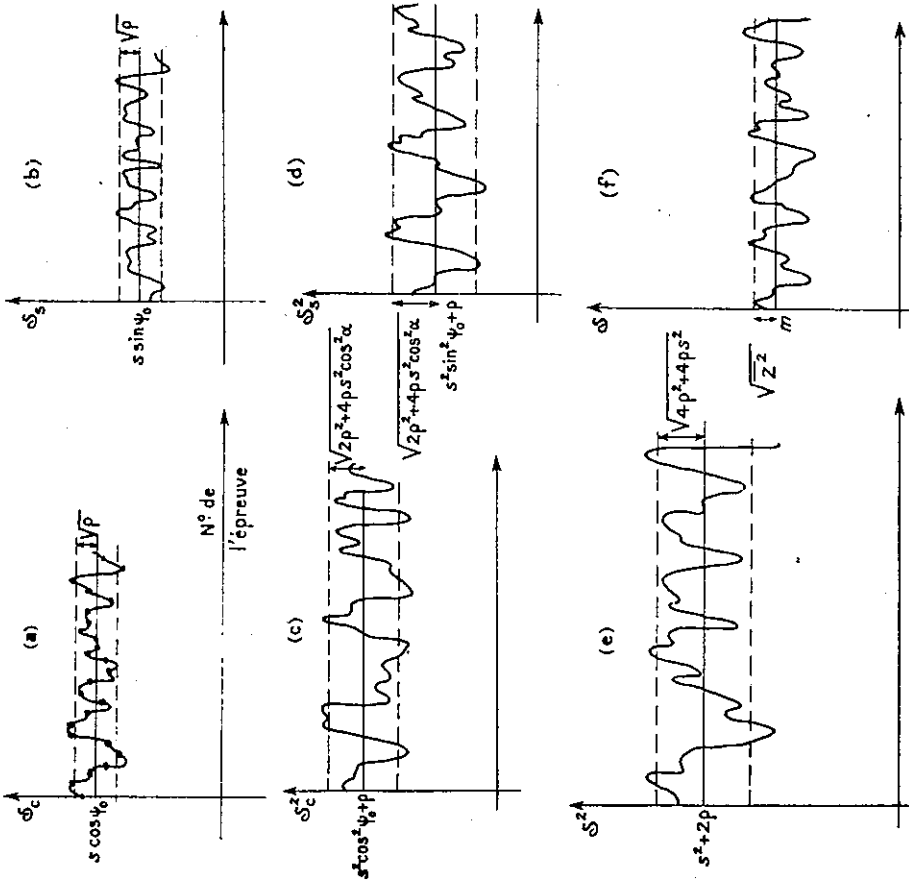


Fig. 50. — Etude de l'ensemble signal-bruit quand la T. F. est faite sans repérer le point zéro de l'interférogramme.

2° le nombre δ mesurant la hauteur d'une raie dans le spectre reconstitué ne sera plus simplement un nombre compris entre $s + a$ et $s - a$, a étant un écart quadratique moyen à déterminer. Chaque valeur δ peut être toujours mise sous la forme

$$\delta = m + z, \quad (IV.27)$$

m étant la valeur moyenne de δ et z étant une fonction aléatoire de valeur moyenne nulle. Mais le fait important est que m n'est plus égal à s et, de plus, est fonction de ρ . D'autre part, z^2 est également fonction de s ; la valeur moyenne m devient une fonction *approximativement* linéaire de s lorsque $s/\sqrt{\rho} \gg 1$.

Précisons la signification de m . Si on calculait une infinité de spectres à partir d'une infinité d'interférogrammes enregistrés dans les mêmes conditions (constituant une infinité d'épreuves appartenant à une même catégorie), les nombres δ

mesurant le signal correspondant à une certaine fréquence ν_1 dans chaque spectre se grouperaient autour de la valeur m , espérance mathématique de λ , soit $E\{\lambda\} = m$.

Nous appellerons « signal » dans le cas de la T. F. complète, la différence $m - j$, c'est-à-dire la hauteur de la raie au-dessus de la valeur moyenne du bruit (fig. 49) parce que c'est effectivement cette quantité qui sera accessible à l'expérimentateur. Le rapport signal/bruit dans le spectre calculé est mesuré par le quotient $(m - j)/\sqrt{s^2}$.

A) ETUDE DE L'ENSEMBLE SIGNAL-BRUIT. — Nous étudierons l'ensemble signal-bruit à chaque étape de la reconstitution du spectre en supposant que la sinusoïde correspondant dans l'interférogramme à la fréquence envisagée, présente un décalage ψ_0 par rapport à l'origine, comme il a été supposé dans le chapitre précédent, le résultat final ne devant évidemment pas dépendre de ψ_0 . Nous étudierons donc successivement les résultats de la T. F. en cosinus de l'interférogramme, de sa T. F., en sinus et de la racine carrée de la somme des carrés de ces deux transformées.

a) *Transformée de Fourier en cosinus.* — La hauteur de la raie résultant de la T. F. en cosinus de l'interférogramme, s'il n'y avait pas de bruit, serait (§ III.2.3 C)

$$(IV.28) \quad s_c = s \cos \psi_0.$$

La valeur correspondante du spectre calculé λ_c peut se mettre sous la forme

$$(IV.29) \quad \lambda_c = s \cos \psi_0 + X(\nu_1).$$

Nous avons vu précédemment que le bruit enregistré sur l'interférogramme pouvait être considéré comme une superposition de sinusoides d'amplitude et de phase aléatoires et, en particulier, nous pouvons écrire que la composante du bruit à la fréquence ν_1 est de la forme ([47] p. 351)

$$y(t) = \frac{C_1}{2T} \cos(2\pi\nu_1 t - \varphi) = \frac{C_1}{2T} \cos \varphi \cos 2\pi\nu_1 t + \frac{C_1}{2T} \sin \varphi \sin 2\pi\nu_1 t,$$

de sorte que le résultat de la T. F. en cosinus de $y(t)$ s'écrit

$$X(\nu_1) = \mathcal{R} \cos \varphi.$$

C'est une grandeur aléatoire dont les caractéristiques, valeur moyenne et écart quadratique moyen sont les mêmes que celles de la quantité $X(\nu)$, T. F. en cosinus de $x(t)$ pour les différentes valeurs de ν (¹⁵).

On a donc

$$(IV.30) \quad \overline{\mathcal{R} \cos \varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{R}^2 \cos^2 \varphi} = \overline{\mathcal{R}^2}/2 = \rho.$$

(¹⁵) Les moyennes de $X(\nu_1)$ seraient faites sur une infinité d'épreuves, c'est-à-dire une infinité de valeurs $X(\nu_1)$ obtenues en faisant la T. F. en cosinus d'une infinité d'interférogrammes enregistrés dans les mêmes conditions. On a la relation $\overline{X(\nu_1)} = \overline{X(\nu)} = 0$.

Supposons que nous puissions enregistrer une infinité d'interférogrammes dans les mêmes conditions et que nous portions sur un graphique les valeurs λ_c mesurées sur chaque spectre obtenu à partir de chaque interférogramme. La courbe joignant ces points aurait l'allure de celle représentée par la figure 50a. Les valeurs de λ_c se groupent autour de la valeur moyenne $s \cos \psi_0$, l'écart quadratique moyen des fluctuations valant $\sqrt{\rho}$.

b) *T. F. en sinus.* — Les résultats sont évidemment analogues et on peut définir de la même façon

$$(IV.31) \quad \lambda_s = s \sin \psi_0 + \lambda' \sin \varphi,$$

avec

$$\overline{\lambda' \sin \varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lambda'^2 \sin^2 \varphi} = \rho \quad (\text{fig. 50b}).$$

Les deux fonctions aléatoires $\lambda' \cos \varphi$ et $\lambda' \sin \varphi$ ont même valeur moyenne, même écart quadratique moyen, même fonction d'autocorrélation, mais leur coefficient de corrélation est nul (¹⁶).

c) *Somme des carrés des T. F. en sinus et cosinus.* — Le carré de λ_c comporte une composante continue et une partie fluctuante de valeur moyenne nulle. Les deux quantités intéressantes à considérer sont la composante continue qui vaut

$\overline{\lambda_c^2}$ et la variance de la partie fluctuante, c'est-à-dire $(\lambda_c^2 - \overline{\lambda_c^2})^2$ (fig. 50c) :

$$\lambda_c^2 = s^2 \cos^2 \psi_0 + \lambda'^2 \cos^2 \varphi + 2s\lambda' \cos \psi_0 \cos \varphi,$$

d'où

$$(IV.32) \quad \overline{\lambda_c^2} = s^2 \cos^2 \psi_0 + \rho.$$

Donc la valeur moyenne de λ_c^2 dépend non seulement de s et de ψ , mais aussi de ρ , donc de la densité \mathcal{P}_0 de bruit dans l'interférogramme.

La partie fluctuante a pour valeur

$$\lambda_c^2 - \overline{\lambda_c^2} = \mathcal{R}^2 \cos^2 \varphi - \rho + 2s\lambda' \cos \psi_0 \cos \varphi.$$

Sa variance est donc

$$(IV.33) \quad (\lambda_c^2 - \overline{\lambda_c^2})^2 = \mathcal{R}^4 \cos^4 \varphi + \rho^2 + 4s^2 \cos^2 \psi_0 \mathcal{R}^2 \cos^2 \varphi - 2\rho \mathcal{R}^2 \cos^2 \varphi.$$

On peut évaluer le terme $\mathcal{R}^4 \cos^4 \varphi$ à partir du théorème classique suivant.

Si $x(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire-laplacienne de valeur moyenne nulle dont la fonction d'autocorrélation est $C(\tau)$, c'est-à-dire telle que $\overline{x^2} = C(0)$, la fonction d'autocorrélation de son carré $x^2(t)$ s'écrit [51]

$$\overline{x^2(t)x^2(t-\tau)} = 2C^2(\tau) + C^2(0).$$

(¹⁶) Leur fonction de corrélation est nulle aussi pour un retard nul ; mais les variables $\mathcal{R} \sin \varphi$ et $\mathcal{R} \cos \varphi$ ne sont pas des variables indépendantes et leur fonction de corrélation est différente de zéro pour un retard qui n'est pas nul, ce qui d'ailleurs n'intervient pas dans le cas présent.

On en dédu.

$$\overline{x^4(t)} = 3 C^2(0).$$

Dans notre cas puisque $\lambda^2 \cos^2 \varphi = \rho$, $\lambda^4 \cos^4 \varphi = 3 \rho^2$, (IV.33) prend la forme

$$(IV.34) \quad \overline{(\sigma_c^2 - c^2)^2} = 2 \rho^2 + 4 \rho s^2 \cos^2 \psi_0.$$

Les fluctuations seront d'autant plus importantes que ρ sera plus grand, mais aussi que le signal sera plus élevé. Les relations (IV.32) et (IV.34) montrent bien les interactions signal-bruit.

On calcule, de la même façon, la composante continue de $\overline{y_s^2}$ et la variance de sa composante fluctuante :

$$(IV.35) \quad \overline{y_s^2} = s^2 \sin^2 \psi_0 + \rho \text{ et } \overline{(\overline{y_s^2} - \overline{y_s^2})^2} = 2 \rho^2 + 4 \rho s^2 \sin^2 \psi_0 \quad (\text{fig. 50d}).$$

Quand on fait la somme $\overline{y^2} = \overline{y_c^2} + \overline{y_s^2}$, les composantes continues s'ajoutent tandis que les composantes fluctuantes ajoutent leurs variances. On a donc

$$(IV.36) \quad \overline{y^2} = s^2 + 2 \rho \quad \text{et} \quad \overline{(\overline{y^2} - \overline{y^2})^2} = 4 \rho^2 + 4 \rho s^2 \quad (\text{fig. 50e}).$$

d) *Calcul de \overline{y}* . — Dans la dernière étape du calcul, il reste à prendre la racine carrée de $\overline{y^2}$; nous nous proposons de déterminer la valeur moyenne de \overline{y} , soit m , et $\sqrt{\overline{z^2}}$ écart moyen quadratique de la composante fluctuante de \overline{y} en fonction de s et de ρ .

Pour déterminer ces deux quantités, nous disposons des deux relations (IV.36) dans lesquelles nous allons remplacer $\overline{\sigma^2}$ et $\overline{\sigma^2}$ par leurs valeurs en fonctions de m et z

$$(IV.37) \quad \overline{y^2} = m + 2 m z + z^2 = m^2 + z^2 \quad (\text{fig. 50f})$$

et, d'après (IV.36),

$$(IV.38) \quad m^2 + z^2 = s^2 + 2 \rho,$$

$$(IV.39) \quad \overline{(\overline{y^2} - \overline{\sigma^2})^2} = [(\overline{\sigma^2} - (s^2 + 2 \rho))]^2 = \overline{\sigma^4} - 2 \overline{\sigma^2} (s^2 + 2 \rho) + (s^2 + 2 \rho)^2 = \overline{\sigma^4} - (s^2 + 2 \rho)^2.$$

En remplaçant \overline{y} par sa valeur en fonction de m et z il vient

$$\overline{\sigma^4} = m^4 + 6 m^2 z^2 + z^4.$$

Nous pouvons substituer à m^4 et $m^2 z^2$ leurs valeurs en fonctions de s et ρ tirées de (IV.38) et remarquer que $z^4 = 3 (\overline{z^2})^2$. La deuxième équation (IV.36) s'écrit alors

$$(IV.40) \quad (\overline{z^2})^2 - \overline{z^2} (4 \rho + 2 s^2) + 2 \rho^2 + 2 \rho s^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(IV.41) \quad \overline{z^2} = 2 \rho + s^2 - \sqrt{s^4 - 2 \rho s^2 + 2 \rho^2}$$

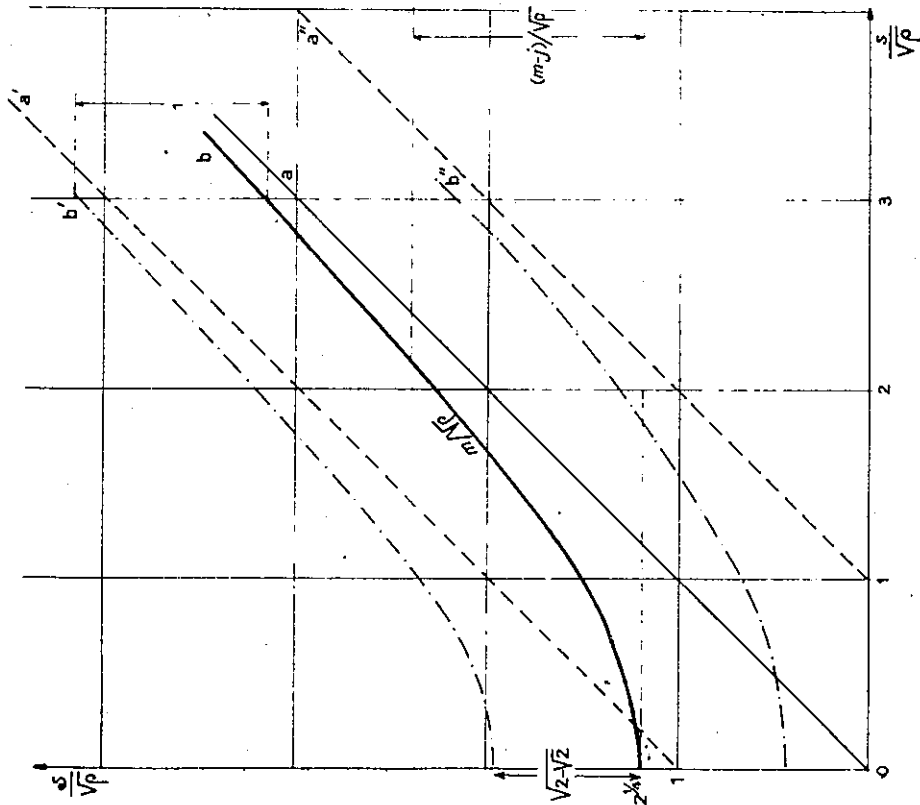


FIG. 51. — Variation de $s/\sqrt{\rho}$ en fonction de $s/\sqrt{\rho}$ dans le cas d'une T. F. en cosinus seul et dans le cas d'une T. F. complète.

et

$$(IV.42) \quad m = (s^4 + 2 \rho s^2 + 2 \rho^2)^{1/4}.$$

Les résultats sont rassemblés dans la figure 51 (courbes b, b', b'') dans laquelle nous avons représenté $s/\sqrt{\rho}$ en fonction de $s/\sqrt{\rho}$, c'est-à-dire du rapport signal/bruit dans le spectre qu'on aurait obtenu en faisant simplement la T. F. en cosinus du même interférogramme dans lequel on aurait repéré le point zéro. La courbe b indique la variation de $m/\sqrt{\rho}$ en fonction de $s/\sqrt{\rho}$ et les courbes b' et b'' les limites entre lesquelles il y a une probabilité définie P de trouver la valeur mesurée $s/\sqrt{\rho}$.

Nous voyons immédiatement que, en présence de bruit, m n'est pas une fonction linéaire de s. Pour préciser, nous allons commencer par examiner les deux cas extrêmes, celui où le signal est nul ($s = 0$) et celui où $s/\sqrt{\rho}$ est grand.

1° $s = 0$. Les relations (IV.41) et (IV.42) s'écrivent

$$2\rho - \rho\sqrt{2} = \rho(2 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad m = 2^{1/4}\sqrt{\rho}.$$

Ceci signifie que dans un endroit du spectre où il n'y a pas de raie (fig. 49, portion ab), on observe un bruit composé d'une composante continue qui vaut $2^{1/4}\sqrt{\rho}$ et d'une composante fluctuante dont l'écart quadratique moyen mesure $(2 - \sqrt{2})^{1/2}\sqrt{\rho} \approx 0,8\sqrt{\rho}$, c'est-à-dire les 4/5 de l'écart quadratique moyen des fluctuations dans le spectre calculé en faisant la T. F. en cosinus de l'interférogramme enregistré de 0 à L.

2° $s/\sqrt{\rho}$ est grand. Si ρ/s^2 peut être considéré comme un infiniment petit du premier ordre, les relations (IV.41) et (IV.42) deviennent, en négligeant les

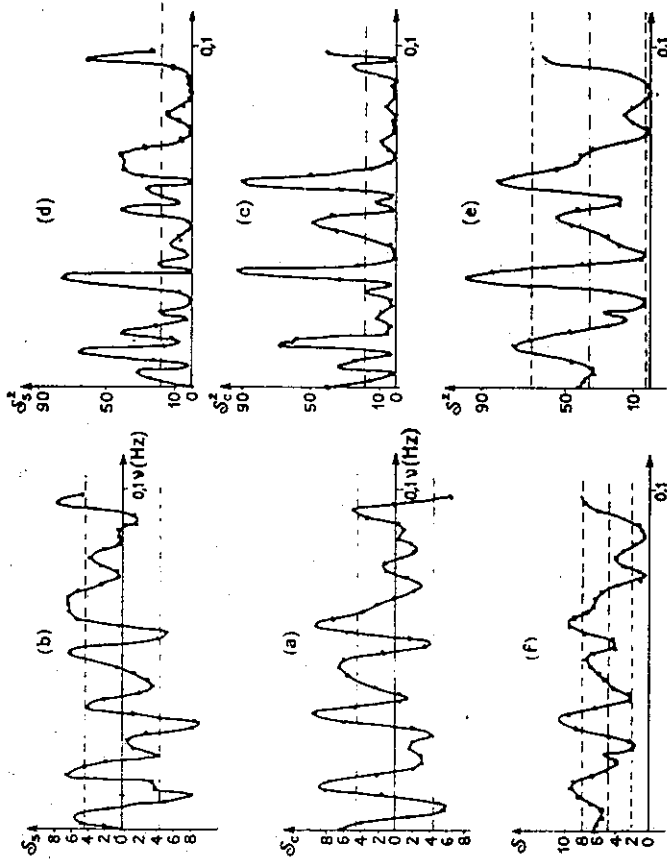


FIG. 52. — Etude de la T. F. complète d'un interférogramme contenant uniquement du bruit.

termes du second ordre,

$$\bar{s}^2 = 2\rho + s^2 - s^2[1 + (2\rho/s^2)]^{1/2} = \rho, \quad m = s + (\rho/2s).$$

Donc pour des raies qui apparaissent avec un grand rapport s/b dans le spectre calculé par la T. F. en cosinus d'un interférogramme dans lequel on aurait repéré la différence de marche 0, la T. F. complète donne un résultat approximativement linéaire et l'écart quadratique moyen des fluctuations qui affectent σ est alors le même que dans la première méthode.

3° Valeurs de $s/\sqrt{\rho}$ voisines de 1. Il reste à examiner les cas intermédiaires, pour des valeurs de $s/\sqrt{\rho}$ voisines de 1. Le signal $m - j$ est faible et ne varie pas du tout proportionnellement à s .

A des rapports s/b de 2, 3, 6 dans le spectre qu'on obtiendrait en faisant la T. F. en cosinus (raies de fréquences ν_1, ν_2, ν_3 dans la figure 48) correspondent des rapports signal/bruit de 1, 2, 5 dans les spectres qu'on obtiendrait en faisant la T. F. complète (fréquence ν_1, ν_2, ν_3 dans la figure 49).

B) VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES. — Elles ont porté uniquement sur le cas où $s = 0$. Elles ont été faites à partir de l'enregistrement de bruit $x(t)$ dont une partie est représentée par la figure 37a et qui a été utilisée pour les vérifications expérimentales du chapitre précédent (§ III.1.3) ; λ_c et λ_s , T. F. en cosinus et sinus de $x(t)$, sont représentées par les figures 52a et 52b. La bande de fréquences calculée vaut 0,1 Hz, soit 20 fois le rayon de corrélation du bruit. Les valeurs de crêtes sont comprises entre ± 8 u. s. (u étant une unité arbitraire) et les écarts quadratiques moyens mesurés ont respectivement pour valeur $\sqrt{s_1} = 4,25$ u. s. et $\sqrt{s_2} = 4,20$ u. s. Les fonctions λ_c^2 et λ_s^2 (fig. 52c et 52d) ont respectivement pour valeur moyenne $\lambda_c^2 = 18,06 \text{ u.}^2 \cdot \text{s.}^2$ et $\lambda_s^2 = 17,79 \text{ u.}^2 \cdot \text{s.}^2$, valeurs très voisines. Si λ_c et λ_s avaient été calculées sur une bande de fréquences de largeur infinie, les variances λ_c^2 et λ_s^2 seraient rigoureusement égales. La valeur moyenne de la somme $\lambda_c^2 + \lambda_s^2 = 35,85 \text{ u.}^2 \cdot \text{s.}^2$.

D'après les conclusions du paragraphe précédent la valeur prévue de la variance des fluctuations de λ^2 — λ^2 serait $(\lambda_c^2 - \lambda_s^2)^2 = 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 = 1,296 \text{ u.}^2 \cdot \text{s.}^2$.

La même quantité mesurée sur la figure 52c vaut $1,240 \text{ u.}^2 \cdot \text{s.}^2$. La valeur prévue de la moyenne de λ est $\bar{\lambda} = m = (\rho\sqrt{2})^{1/2} = 4,9$ u. s. et celle de l'écart quadratique moyen des fluctuations de $\lambda - m$

$$\sqrt{(\lambda - m)^2} = \sqrt{\rho(2 - \sqrt{2})} = 3,2 \text{ u. s.}$$

Les mêmes quantités mesurées sur la figure 52d ont pour valeurs $m = 5,2$ u. s. et $\sqrt{(\lambda - m)^2} = 2,9$ u. s.

C) CONCLUSION. — Nous sommes maintenant en mesure de comparer les deux procédés, plus complètement que dans le chapitre précédent. La seconde méthode n'est jamais rigoureusement linéaire (de même qu'une détection classique n'est jamais, en présence de bruit, rigoureusement linéaire). Elle est catastrophique pour les faibles valeurs du rapport signal/bruit mais, pour des valeurs élevées du rapport signal/bruit, les deux méthodes sont pratiquement équivalentes.

On pourrait montrer que, si la transformation de Fourier est faite avec un analyseur harmonique (méthode qui ne nécessite pas le repérage du zéro), l'étude de la linéarité et du rapport $(s/b)_A$ conduit aux mêmes résultats que lorsqu'on fait la T. F. numérique complète. Rappelons d'autre part les deux inconvénients de cette dernière méthode : valeur double du déplacement de la partie mobile et durée de calcul plus que quadruplée.

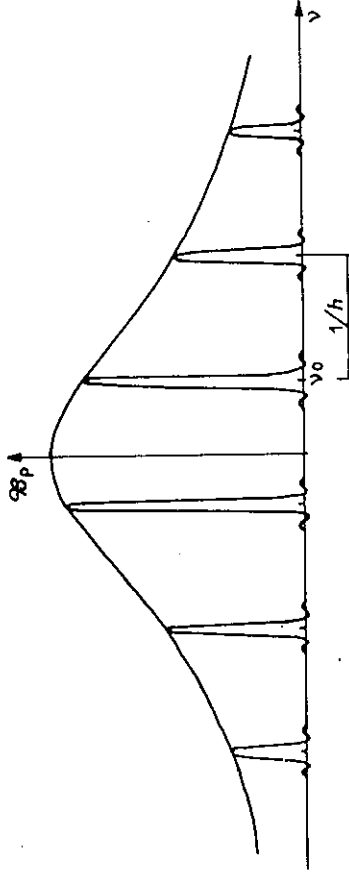


FIG. 53. — Différents pics de la fonction d'appareil explorant le spectre du bruit.

de temps) voisin de la constante de temps. Nous allons préciser cette idée en étudiant la variance en fonction du pas h .

1. *Puissance moyenne de bruit dans une T. F. numérique.* — En remplaçant $l_j(v)$ par sa valeur dans l'équation (V. 1), il vient

$$(V. 2) \quad \sigma_{\tilde{X}}^2 = l_p(0) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{\left[2\pi\tau\left(v_0 + \frac{m}{h}\right)\right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(v) dv$$

On retrouve dans l'expression de $\sigma_{\tilde{X}}^2$ le produit

$$\sigma_{\tilde{X}}^2(0) = l_p(0) \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(v) dv$$

qui donne la variance dans le spectre calculé par intégrale, au voisinage de la fréquence 0 et dont nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il valait (IV. 22 bis)

$$(V. 3) \quad \sigma_{\tilde{X}}^2(0) = 2QT l_p(0).$$

Dans le cas d'une T. F. numérique on peut donc mettre $\sigma_{\tilde{X}}^2$ sous la forme

$$(V. 4) \quad \sigma_{\tilde{X}}^2 = \sigma_{\tilde{X}}^2(0) \Phi_{\nu_0}(h, \tau),$$

en posant

$$(V. 5) \quad \Phi_{\nu_0}(h, \tau) = \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} 1 + \left[2\pi\tau\left(v_0 + \frac{m}{h}\right)\right]^2}$$

Il faut donc évaluer cette série. Nous pouvons le faire d'une façon particulièrement simple parce qu'il se trouve que la T. F. de la fonction $1/[1 + (2\pi\tau)^2]$ est facile à calculer. Le calcul est basé sur la propriété suivante : soient deux fonctions $P(v)$ et $Q(t)$ qui sont les T. F. l'une de l'autre. On a entre elles la relation

V. Bruit dans les transformations de Fourier numériques. Diverses méthodes pour obtenir le rapport s/b maximum

Quand la T. F. est calculée numériquement à partir d'un nombre fini de valeurs de l'interférogramme, le rapport s/b dans le spectre calculé est toujours inférieur au rapport s/b maximal qu'on obtiendrait en utilisant une suite continue de valeurs de $l(t)$. Nous établirons l'expression donnant l'écart quadratique moyen des fluctuations dans le spectre calculé numériquement ; nous traiterons la question importante du choix de la constante de temps à utiliser pendant l'enregistrement et nous discuterons divers procédés qu'on peut employer pour obtenir un rapport s/b maximum à partir d'un interférogramme donné.

1. **Bruit dans une T. F. numérique.** — Rappelons le résultat fondamental du chapitre précédent : la puissance moyenne de bruit dans le spectre calculé est l'énergie découpée dans le spectre du bruit contenu dans l'interférogramme par le carré de la fonction d'appareil ; or, quand on fait une T. F. numérique, nous avons vu dans le chapitre I que la fonction d'appareil se compose de plusieurs pics distants entre eux de $1/h$ (fig. 13), h étant le pas de la fonction réseau utilisée pour relever les points sur l'interférogramme : l'expression (IV. 16)

$$\sigma_{\tilde{X}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} l_p(v) f^2(v_0 - v) dv$$

devient donc, dans le cas d'une transformation de Fourier numérique,

$$(V. 1) \quad \sigma_{\tilde{X}}^2 = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} l_p(v) f^2\left[v_0 + \frac{m}{h} - v\right] dv.$$

On voit donc que plusieurs pics de la fonction d'appareil explorent le spectre du bruit, même dans le cas où le spectre à étudier est limité de telle sorte qu'il ne soit exploré que par un pic. Si le spectre $l(v)$ du bruit contenu dans l'interférogramme était uniforme, la puissance moyenne de bruit dans le spectre calculé augmenterait indéfiniment avec le nombre de pics de la fonction d'appareil, d'où la nécessité absolue d'employer, lors de l'enregistrement, un filtre qui limite le spectre du bruit dans l'interférogramme. Nous considérons, dans la suite, le cas du filtre RC (il est en effet difficile de réaliser des filtres passe-bas plus efficaces aux fréquences très basses utilisées dans nos expériences) ; le spectre du bruit contenu dans l'interférogramme a alors pour expression

$$\mathcal{B}_p(v) = \mathcal{B}_p(0) / [1 + (2\pi\tau v)^2], \quad \text{avec } \tau = RC$$

et au voisinage d'une fréquence v_0 dans le spectre calculé la puissance moyenne de bruit est la somme des énergies découpées dans le spectre $\mathcal{B}_p(v)$ par la série de pics correspondant au carré de la fonction d'appareil centrés sur $v_0 \pm (m/h)$ (fig. 53). On conçoit qu'on aura utilisé à peu près toutes les informations contenues dans l'interférogramme enregistré si on choisit le pas h (mesuré en unité

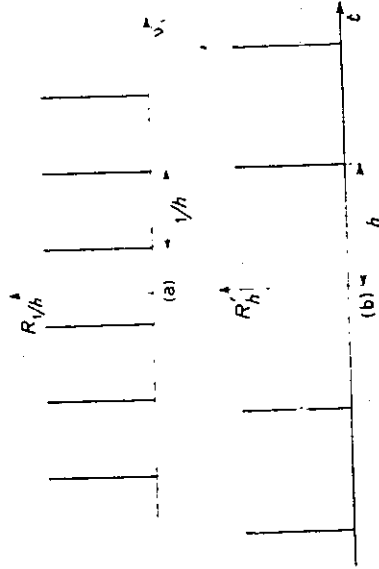


Fig. 54. — a) Fonction réseau $R_{1/h}$; b) fonction réseau R'_h

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu) d\nu = Q(0).$$

Remarquons que la série (V. 5) n'est autre que l'intégrale

$$(V. 6) \quad \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} R_{1/h}(\nu) d\nu,$$

$R_{1/h}$ étant le produit de composition d'une distribution de Dirac à support périodique de pas $1/h$ par une fonction de Dirac centrée sur la fréquence $\nu = \nu_0$ (fig. 54a).

Posons

$$P(\nu) = \frac{1}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} R_{1/h}(\nu) = \mathcal{B}'_p(\nu) R_{1/h}(\nu).$$

Pour calculer $\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu) d\nu$ il suffit donc de trouver la T. F. $Q(t)$ de $P(\nu)$ et de prendre la valeur particulière $Q(0)$.

La T. F. de $P(\nu)$ est le produit de composition des T. F. de $\mathcal{B}'_p(\nu)$ et de $R_{1/h}(\nu)$.

La T. F. de $\mathcal{B}'_p(\nu)$ est connue ; elle vaut

$$T \cos \left[\frac{1}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} \right] = \frac{1}{2\tau} e^{-|t|\tau}.$$

La T. F. de $R_{1/h}(\nu)$ a pour expression

$$T \cos [R_{1/h}(\nu)] = h R'_h \cos 2\pi\nu\tau,$$

R'_h étant une distribution de Dirac à support périodique de pas h (fig. 54b). On en déduit immédiatement la valeur de Φ ,

$$\Phi = \frac{h}{2\tau} e^{-|t|\tau} R'_h \cos 2\pi\nu\tau,$$

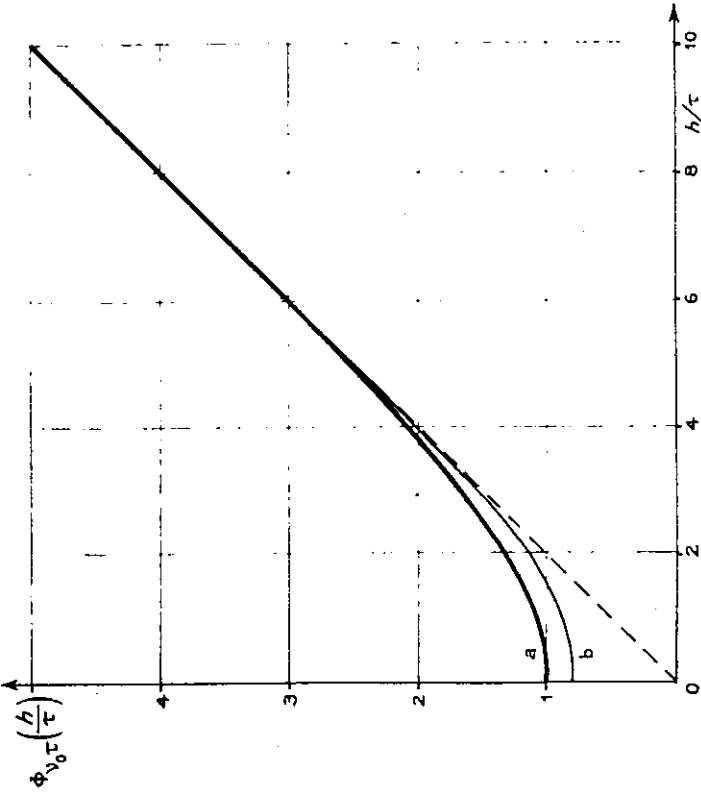


Fig. 55. — Etude de la variance dans le spectre en fonction du quotient du pas par la constante de temps : courbe b, $\nu_0 = 0$; en tirets, $\nu_0 = (1.2) (1.2\pi\tau)$.

qu'on peut mettre sous la forme

$$\Phi = \frac{h}{2\tau} \left[\operatorname{Re} \left(2 \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-mh/\tau} e^{2\pi i \nu_0 m h} - 1 \right) \right]$$

ou

$$(V. 7) \quad \Phi = \frac{h}{2\tau} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{2}{1 - \exp \left\{ -h \left[\frac{1}{\tau} - 2\pi i \nu_0 \right] \right\}} - 1 \right) \right].$$

Après développement et réduction, (V. 7) devient

$$(V. 8) \quad \Phi = \frac{h}{2\tau} \frac{\operatorname{sh}(h/\tau)}{\operatorname{ch}(h/\tau) - \cos 2\pi\nu_0 h}.$$

d'où l'expression de la puissance moyenne de bruit dans le cas d'une T. F. numérique

$$(V. 9) \quad \sigma_X^2 = \mathcal{B}'_p(0) 2QT.$$

L'expression (V. 8) de $\Phi_{\nu_0}(h, \tau)$ permet de calculer les variations de la puissance de bruit en fonction du pas h , quand l'enregistrement a été fait avec une certaine constante de temps τ . Dans le cas particulier où $\nu_0 = 0$, $\Phi_0(h, \tau)$ devient alors uniquement fonction du quotient h/τ (fig. 55, courbe a) :

$$(V.8 \text{ bis}) \quad \Phi_0(h/\tau) = \frac{h}{2\tau} \frac{\text{sh}(h/\tau)}{\text{ch}(h/\tau)} ;$$

h/τ étant mesuré en unité de temps) est l'inverse du nombre de points relevés sur l'interférogramme pendant un temps égal à τ .

La courbe $\Phi_0(h/\tau)$ a une tangente horizontale à l'origine. Pour $\nu_0 = 0$ et $h/\tau = 0$, $\Phi_0(h/\tau) = 1$ et on retrouve l'expression habituelle de la variance correspondant à ce cas

$$\sigma_x^2(\omega) = 2 \int_p(0) Q T .$$

Quand la fréquence d'analyse est une fréquence ν_0 quelconque différente de 0, on peut encore définir une fonction $\Phi(h/\tau)$ qui est valable pour une certaine valeur du produit $\nu_0 \tau$. On peut l'écrire

$$(V.8 \text{ ter}) \quad \Phi_{\nu_0} \left(\frac{h}{\tau} \right) = \frac{h}{2\tau} \frac{\text{sh}(h/\tau)}{\text{ch}(h/\tau) - \cos(2\pi\nu_0\tau h/\tau)} .$$

Elle donne les variations de la puissance de bruit dans le spectre au voisinage de la fréquence ν_0 , en fonction du quotient h/τ quand l'interférogramme a été enregistré à travers un filtre de constante de temps τ . La courbe b de la figure 55 a été construite pour $\nu_0 \tau = 1/4\pi$, c'est-à-dire que la fréquence ν_0 envisagée vaut $1/4\pi\tau$; elle est telle que $\int_p(\nu_0) = 0,8 \int_p(0)$ [fig. 56]. Les fonctions Φ_0 et Φ_{ν_0} sont extrêmement voisines. Elles ont même asymptote $\Phi' = h/2\tau$. Pour des valeurs de h/τ de l'ordre de quelques unités elles sont pratiquement confondues.

L'examen de ces courbes met en évidence plusieurs résultats importants. Quelle que soit la fréquence d'analyse ν_0 :

- 1° plus h/τ est petit, donc plus on relève de points sur l'interférogramme, moins il y a de bruit dans le spectre;
- 2° pour des valeurs de h/τ supérieures à quelques unités la puissance de bruit est proportionnelle au pas h ;
- 3° on ne gagne pratiquement rien en choisissant $h/\tau < 1$ (plutôt que $h/\tau = 1$) c'est-à-dire en relevant plus d'un point par constante de temps.

Ces résultats peuvent être précisés quand on étudie la variation du rapport s/b , dans le spectre calculé à partir d'un certain interférogramme, en fonction de h/τ .

2. Variation du rapport s/b en fonction du pas h . — Le bruit est minimum quand on utilise une suite continue de valeurs de $I(t)$; il est alors caractérisé par

$$(V.10) \quad (\sigma_x)_M = 2 Q T \int_p(0) \Phi_{\nu_0}(0) .$$

Appelons $(s/b)_M$ la valeur maximale que prend alors le rapport s/b dans le spectre calculé :

$$(s/b)_M = s/(\sigma_x)_M = s/\sqrt{2 Q T \int_p(0) \Phi_{\nu_0}(0)} .$$

Le rapport s/b , obtenu pour une valeur h du pas du réseau, a pour expression

$$s/b = s/\sigma_x = s/\sqrt{2 Q T \int_p(0) \Phi_{\nu_0}(h/\tau)} .$$

Le quotient $S = (s/b)/(s/b)_M$ mesure la perte en rapport s/b due au fait qu'on n'emploie que des valeurs discrètes de $I(t)$: $S = \sqrt{\Phi_{\nu_0\tau}(0)/\Phi_{\nu_0\tau}(h/\tau)}$. Il est représenté par une courbe qui, en principe, est valable pour une seule valeur du produit $\nu_0\tau$. Mais étant données les faibles variations de Φ avec $\nu_0\tau$, les courbes S seront pratiquement identiques. La figure 57 correspond à $\nu_0 = 0$. On voit que le fait d'utiliser pour faire la T. F., au lieu d'une suite continue de valeurs de $I(t)$, des valeurs discrètes prises en des instants séparés par des intervalles de temps égaux à la constante de temps, entraîne un léger affaiblissement du rapport s/b dans le spectre; il est multiplié par 0,95.

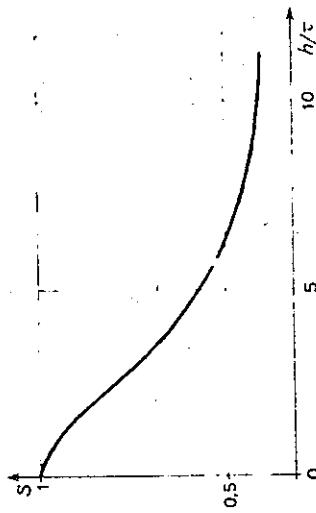


Fig. 57. — Variation de S en fonction de h/τ .

3. Vérifications expérimentales. — Elles ont été faites à partir d'un interférogramme synthétique $I'(t)$ comportant une composante continue $I(t) = 40$ u. (unité arbitraire), dont la T. F. sera une raie centrée sur la fréquence 0, et des fluctuations d'écart quadratique moyen $\sigma_x = 37,5$ u. enregistrées avec une constante de temps $\tau = 2$ s et représentées par la figure 37a. La durée totale de l'enregistrement est $T = 360$ s.

La T. F. de cet interférogramme faite en utilisant une suite continue de valeurs de $I(t)$ se compose donc d'une raie centrée sur la fréquence 0 et de fluctuations dont l'écart quadratique moyen vaut, d'après (IV. 23),

$$\sigma_x = \sqrt{4 \times 0,406 \times 360 \times 2 \times 37,5 \times 37,5} = 1\,284 \text{ u. s.}$$

La T. F. de $I'(t)$ a été calculée numériquement avec trois valeurs différentes de pas h . 1° $h = 1,2$ s. Nombre de points relevés sur l'interférogramme, $N = 300$; $h/\tau = 0,6$. D'après la figure 57, S vaut alors 0,98, d'où la valeur prévue de l'écart quadratique moyen des fluctuations dans le spectre calculé : σ_x (prévu) = $1284/0,98 = 1\,307$ u. s. L'écart quadratique moyen des fluctuations mesuré dans le spectre calculé (fig. 58a) en prenant la racine carrée de la moyenne des carrés des ordonnées relevées sur ce spectre tous les 10^{-3} Hz (soit 3 points par rayon de corrélation) vaut

$$\sigma_x \text{ (mesuré)} = 1\,284 \text{ u. s.}$$

$$2^\circ h = 10,8 \text{ s. } N = 33 \text{ et } h/\tau = 5,4, \text{ d'où } S = 0,55.$$

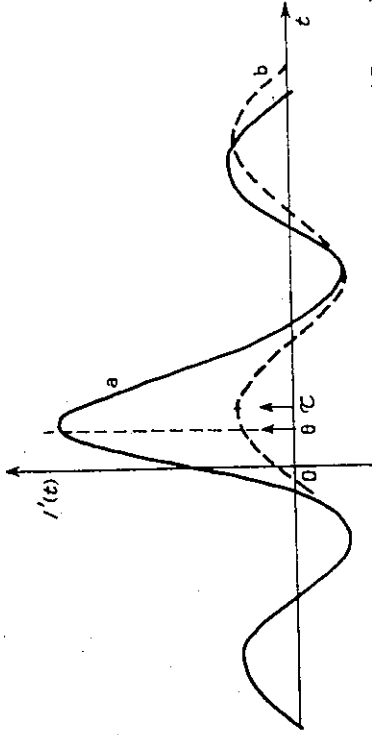


FIG. 59. — Courbe a, interférogamme enregistré à travers un filtre RC; courbe b, sinusoïde particulière contenue dans cet interférogamme.

Soit θ l'instant correspondant au point que nous choisissons comme point zéro sur l'interférogamme enregistré (fig. 59, courbe a). Avec cette nouvelle origine pour l'analyse de l'interférogamme, le retard pour une fréquence ν présente dans l'interférogamme (fig. 59, courbe b), devient $\alpha = \tau - \theta$, ce qui correspond, en appelant η la période du signal à un déphasage,

$$(V.13) \quad 2\pi\alpha/\eta = \text{arc tg } 2\pi\nu\tau - 2\pi\theta\nu,$$

α/η et le coefficient ϵ/λ , envisagé au chapitre III, qui mesure l'erreur faite sur le choix du point zéro en prenant comme unité la longueur d'onde du signal, sont équivalents. Dans la suite nous remplacerons α/η par ϵ/λ ,

$$(V.13 \text{ bis}) \quad \frac{\epsilon}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \text{arc tg } 2\pi\nu\tau - \theta\nu$$

qu'on peut encore mettre sous la forme

$$(V.13 \text{ ter}) \quad \frac{\epsilon}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \text{arc tg } 2\pi\nu\tau - \frac{\theta}{2\pi\tau} 2\pi\nu\tau.$$

ϵ/λ sera nul pour $\nu = 0$ et pour une fréquence ν_0 qui sera donnée à partir de θ par la relation

$$(V.14) \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi\theta} \text{arc tg } 2\pi\nu_0\tau.$$

Donc dans le spectre les fonctions d'appareil correspondant aux fréquences 0 et ν_0 seront symétriques. Celles qui correspondent aux autres fréquences seraient dissymétriques. Les expressions (V.13 bis) et (V.13 ter) permettant de calculer les coefficients ϵ/λ qui leur correspondent on pourra déterminer leur aspect d'après la figure 30. Nous avons cherché à représenter les variations de ϵ/λ dans un même spectre, en fonction de $2\pi\nu\tau$, pour différents choix du point zéro, c'est-à-dire pour différentes valeurs de $2\pi\nu_0\tau$.

Dans la figure 60 nous avons envisagé les cas correspondant à $2\pi\nu_0\tau = 0$, $2\pi\nu_0\tau = 1$ et $2\pi\nu_0\tau = 2$. La courbe d représente la fonction $(1/2\pi)$ arc tg $2\pi\nu\tau$. Les droites a, b, c, correspondant aux trois cas envisagés, ont respectivement

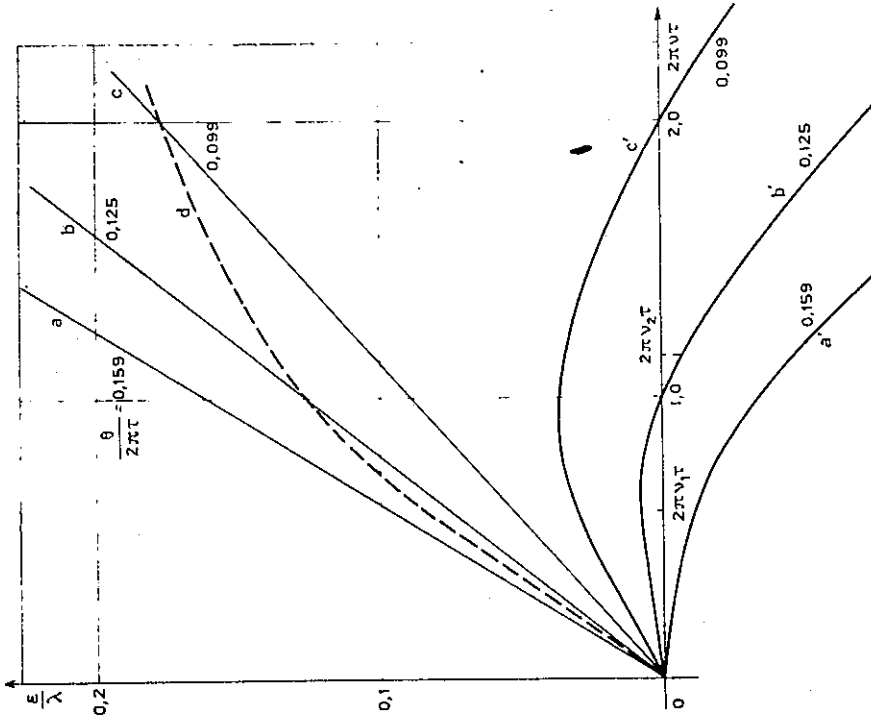


FIG. 60. — Variations de ϵ/λ en fonction de $2\pi\nu\tau$ suivant le choix de $2\pi\nu_0\tau$.

pour pente $\theta/2\pi\tau = 0,159$, $\theta/2\pi\tau = 0,125$ et $\theta/2\pi\tau = 0,099$. D'après (V.13 ter) on en déduit immédiatement les valeurs correspondantes de ϵ/λ (courbes a', b', c').

L'examen des figures montre que :

- 1° pour $\theta = 0$, le déphasage est toujours négatif (fig. 60, courbe a') ;
- 2° pour les autres valeurs de θ , le déphasage croît à partir de 0, passe par un maximum $(\epsilon/\lambda)_M$ pour une fréquence ν_1 , décroît jusqu'à 0 pour une fréquence ν_0 et devient négatif. Pour une fréquence ν_2 , il vaut $-(\epsilon/\lambda)_M$. Donc si les fréquences contenues dans le spectre à analyser sont toutes comprises entre 0 et ν_2 , ϵ/λ ne dépassera jamais pour ces fréquences $|(\epsilon/\lambda)_M|$ et toutes les fonctions d'appareil correspondantes auront un coefficient de dissymétrie inférieur à $C[(\epsilon/\lambda)_M]$ qu'on peut mesurer sur la figure 28 ou 29.

Si on choisit $\nu_0 = 1/2\pi\tau$ (fig. 60, courbe b') on a $\nu_2 = 1,25/2\pi\tau$ et $C = 0,06$.

Pour $\nu_0 = 1/\pi\tau$ (fig. 60, courbe c'), $C = 0,09$.

De la figure 60 nous avons pu déduire la figure 61 dans laquelle nous avons représenté en fonction du coefficient ϵ/λ maximum qu'on tolère dans le spectre

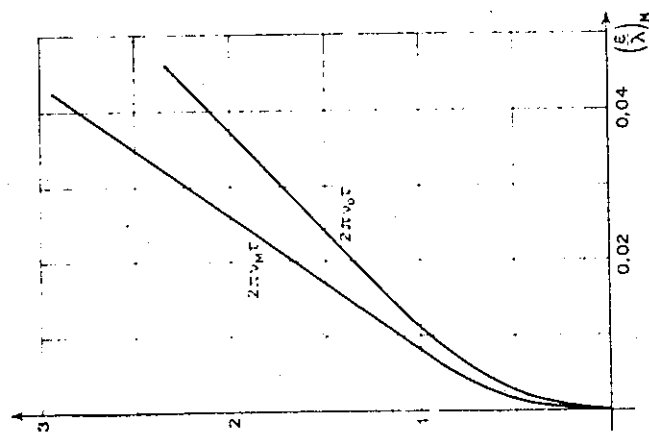


Fig. 61. — Variations de $2\pi\nu_M\tau$ et $2\pi\nu_0\tau$ en fonction du coefficient $\epsilon\lambda/\lambda_M$ maximum toléré dans le spectre.

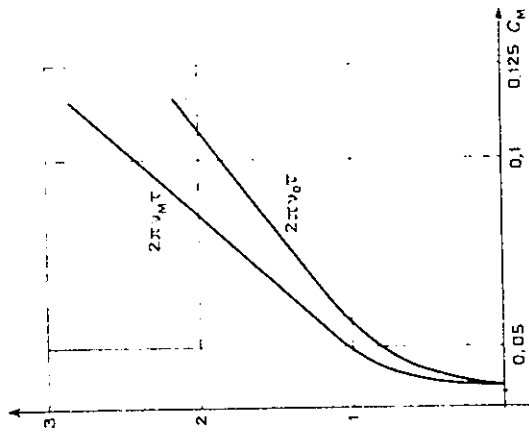


Fig. 62. — Variations de $2\pi\nu_M\tau$ et $2\pi\nu_0\tau$ en fonction du coefficient de dyssymétrie maximum C_M toléré dans le spectre.

reconstitué les valeurs de $2\pi\nu_0\tau$ et $2\pi\nu_M\tau$ étant la fréquence limite contenue dans le spectre à étudier.

Les courbes 28 et 29 reliant C et ϵ/λ sont, rappelons-le, établies pour le cas où la fonction de pondération est $A_2(t)$. Il est facile de les établir pour chaque type de fonction d'appareil. La figure 62 donne directement $2\pi\nu_0\tau$ et $2\pi\nu_M\tau$ en fonction de C dans le cas où l'on emploie $A_2(t)$.

En conclusion, quand on ne veut pas que le déphasage relatif d'une extrémité à l'autre du spectre dépasse une certaine valeur deux problèmes se posent simultanément : le choix de la constante de temps et celui du point zéro de l'interferogramme. Les deux données sont : la fréquence maximum ν_M contenue dans le spectre à étudier et le coefficient ϵ/λ maximum qu'on tolère. La figure 61 permet de déterminer la valeur correspondante de $2\pi\nu_M\tau$ donc de τ puisque ν_M est connue ; la même figure permet ensuite de déterminer ν_0 à partir de la valeur correspondante de $2\pi\nu_0\tau$. Quand on connaît ν_0 (V. 14) permet de calculer la valeur correspondante de θ .

C'est la méthode rigoureuse pour déterminer la constante de temps à utiliser et le point zéro. Il existe une méthode approchée pour résoudre le dernier problème ; elle consiste à enregistrer en même temps que l'interferogramme celui fourni par une bande de radiations isolée dans un spectre continu par un filtre, dont le maximum de transmission coïncide avec la région spectrale à étudier,

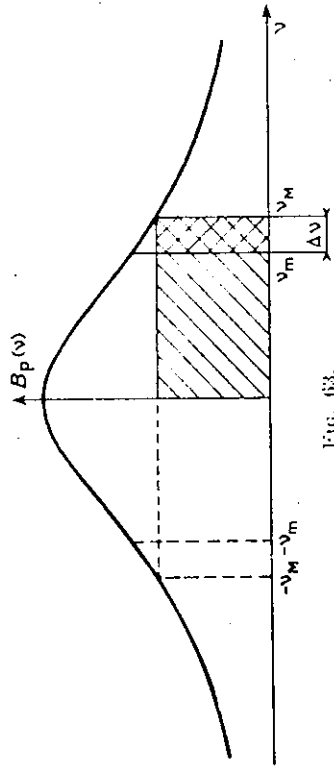


Fig. 63.

et enregistré avec la même constante de temps. Le maximum de la frange centrale de l'interferogramme correspondant indique alors approximativement le point qu'on doit choisir comme origine pour l'analyse de l'interferogramme.

5. *Etude d'un cas particulier.* — Soit à étudier un spectre s'étendant de 0 à ν_M (fig. 63). Si on tolère $C = 0,05$ (ce qui conduit à une dyssymétrie de l'ordre de 1,100, puisque $C = 0,04$ pour une fonction parfaitement symétrique) on déduit (fig. 61) : $\tau = 1,22\nu_M$ et $\nu_0 = 0,84/2\pi\tau = 0,84/\nu_M$.

Dans ces conditions le spectre du bruit est tel que $I(\nu_M) = \frac{1}{2} I(0)$ [fig. 63] et la fréquence ν_M dans le spectre reconstitué est affaiblie par un facteur $\sqrt{2}$. Si on fait une T. F. numérique, en choisissant le pas h minimum pour qu'il n'y ait pas de recouvrement des spectres optiques, soit $h = 1/2\nu_M$, le quotient $h\tau$ vaut π ; d'après la figure 57, S vaut alors 0,7.

Donc quand on étudie un spectre s'étendant de la fréquence 0 à une fréquence maximum ν_M , on peut, en relevant le nombre minimum n de points sur l'interferogramme, obtenir un rapport s/b qui vaut les 7/10 du rapport s/b maximum qu'on pourrait obtenir avec l'interferogramme donné, et ceci avec une distorsion de la fonction d'appareil de l'ordre de 1/100, à condition de choisir convenablement la constante de temps et le point zéro de l'interferogramme. Pour faire une comparaison des intensités des raies dans le spectre calculé, il faudra évidemment faire une correction tenant compte de la variation de gain du filtre dans le domaine de fréquences envisagé.

Supposons maintenant que le spectre des fréquences de Fourier soit limité entre ν_M et ν_M avec, par exemple, $\nu_M = 4\nu_M/5$ (fig. 63). La constante de temps à employer reste la même que précédemment si nous nous fixons les mêmes tolérances et, pour obtenir le même rapport s/b à partir d'un interferogramme enregistré pendant le même temps T , le pas h devra toujours être égal à $1/2\nu_M$. Or d'après le chapitre II, pour qu'il n'y ait pas de recouvrement des spectres optiques il aurait suffi de choisir un pas $h = 1/(2\Delta\nu) = 5/2\nu_M$. Le nombre N de points à relever pour obtenir le rapport signal/bruit $s/b = 0,7$ (s/b) $_M$ est égal à cinq fois le nombre minimum n de points qu'il faudrait relever pour que les différents spectres optiques calculés n'empêchent pas les uns sur les autres. La durée du calcul est alors multipliée par 5. Nous étudierons dans la suite divers procédés

peuvent être obtenus dans le spectre de Fourier. Le spectre de Fourier est obtenu en filtrant directement le signal par un filtre passe-bande passif. Il peut être représenté complètement par un nombre de points arbitrairement choisis dans le même rapport que les bandes passantes. On ne peut alors le calculer que dans le même rapport que les bandes passantes. Le rapport s/b (la durée du calcul) est à peu près réduite dans le même rapport que la durée du calcul de composition étant très courte) ce qui entraîne l'avantage net de la méthode.

1. Filtrage électrique. — Le filtre devrait avoir une bande passante réglable sur la fréquence moyenne du spectre utile. Les considérations relatives au réglage incommode par ce filtre sont analogues à celles relatives au réglage incommode par un filtre passe-bas. Dans ce cas on trouvera, pour un choix convenable de l'origine de l'analyse de l'interferogramme enregistré entre 0 et $2\Delta y$ et une largeur T en cosinus, une seule fréquence pour laquelle l'image de Fourier sera pratiquement symétrique. Nous n'avons pas étudié ce procédé en détail parce que les fréquences très basses que nous utilisons, il est difficile de réaliser des filtres passe-bande et le même résultat peut être obtenu plus facilement par le procédé du changement de fréquence.

Remarquons que le procédé de filtrage électrique n'est intéressant que si la largeur de l'intervalle Δy du spectre des fréquences de Fourier de la largeur y_{max} satisfait à la relation $y_{max} > 2\Delta y$. En effet nous avons vu (fig. 1) que tant que y_{max} reste inférieure à $2\Delta y$, le pas h a choisi pour qu'il n'y ait pas vraiment de spectres calculés dans la même largeur $h = 1/2\Delta y$ que si les fréquences de Fourier s'étendaient de 0 à y_{max} .

2. Méthode du changement de fréquence. — Cette méthode est proposée par Merz. Nous ne la discutons pas ici, nous bornant à rappeler les principes de son principe et à donner un exemple d'application dans le chapitre V.

Au lieu d'enregistrer $I(t)$ comme précédemment on enregistre simultanément deux $I'(h)$ et $I''(t)$ obtenus comme produits de $I(t)$ par deux signaux sinusoidaux de fréquence respectivement en phase et en quadrature avec $I(t)$. La somme de la T.F. en cosinus de $I'(h)$ et de la T.F. en sinus de $I''(t)$ donne le spectre cherché.

Un problème délicat qui se pose est l'ajustement des phases des signaux. Si les phases sont correctement ajustées la méthode du changement de fréquence donne, pour un choix convenable de y_0 à l'intérieur du domaine $y_0 < y_{max}$, un rapport s/b égal à celui qui serait obtenu avec un filtre passe-bande (et ceci avec une durée du calcul divisée par 2). Mais il faut faire l'enregistrement simultané de deux interférogrammes ce qui représente une certaine complication.

On peut se contenter d'enregistrer un seul interférogramme si l'on choisit y_0 à l'extérieur du domaine $y_0 < y_{max}$ ou si le signal de fréquence y_0 est déphasé de $\pi/4$ par rapport aux fréquences de Fourier contenues dans l'interferogramme avant changement de fréquence, mais dans les deux cas la durée du calcul est au moins multipliée par 2 et le rapport s/b dans le spectre calculé est affaibli par la factor $1/\sqrt{2}$.

par la réponse proportionnelle d'un filtre idéal dont la bande passante aurait pour largeur celle de l'intervalle spectral occupé par les fréquences de Fourier. Le résultat est un nouvel interférogramme $I'(t)$ identique à celui qui aurait été obtenu en filtrant directement le signal par un filtre passe-bande passif. Il peut être représenté complètement par un nombre de points arbitrairement choisis dans le même rapport que les bandes passantes. On ne peut alors le calculer que dans le même rapport que les bandes passantes. Le rapport s/b (la durée du calcul) est à peu près réduite dans le même rapport que la durée du calcul de composition étant très courte) ce qui entraîne l'avantage net de la méthode.

1. Filtrage électrique. — Le filtre devrait avoir une bande passante réglable sur la fréquence moyenne du spectre utile. Les considérations relatives au réglage incommode par ce filtre sont analogues à celles relatives au réglage incommode par un filtre passe-bas. Dans ce cas on trouvera, pour un choix convenable de l'origine de l'analyse de l'interferogramme enregistré entre 0 et $2\Delta y$ et une largeur T en cosinus, une seule fréquence pour laquelle l'image de Fourier sera pratiquement symétrique. Nous n'avons pas étudié ce procédé en détail parce que les fréquences très basses que nous utilisons, il est difficile de réaliser des filtres passe-bande et le même résultat peut être obtenu plus facilement par le procédé du changement de fréquence.

Remarquons que le procédé de filtrage électrique n'est intéressant que si la largeur de l'intervalle Δy du spectre des fréquences de Fourier de la largeur y_{max} satisfait à la relation $y_{max} > 2\Delta y$. En effet nous avons vu (fig. 1) que tant que y_{max} reste inférieure à $2\Delta y$, le pas h a choisi pour qu'il n'y ait pas vraiment de spectres calculés dans la même largeur $h = 1/2\Delta y$ que si les fréquences de Fourier s'étendaient de 0 à y_{max} .

2. Méthode du changement de fréquence. — Cette méthode est proposée par Merz. Nous ne la discutons pas ici, nous bornant à rappeler les principes de son principe et à donner un exemple d'application dans le chapitre V.

Au lieu d'enregistrer $I(t)$ comme précédemment on enregistre simultanément deux $I'(h)$ et $I''(t)$ obtenus comme produits de $I(t)$ par deux signaux sinusoidaux de fréquence respectivement en phase et en quadrature avec $I(t)$. La somme de la T.F. en cosinus de $I'(h)$ et de la T.F. en sinus de $I''(t)$ donne le spectre cherché.

Un problème délicat qui se pose est l'ajustement des phases des signaux. Si les phases sont correctement ajustées la méthode du changement de fréquence donne, pour un choix convenable de y_0 à l'intérieur du domaine $y_0 < y_{max}$, un rapport s/b égal à celui qui serait obtenu avec un filtre passe-bande (et ceci avec une durée du calcul divisée par 2). Mais il faut faire l'enregistrement simultané de deux interférogrammes ce qui représente une certaine complication.

On peut se contenter d'enregistrer un seul interférogramme si l'on choisit y_0 à l'extérieur du domaine $y_0 < y_{max}$ ou si le signal de fréquence y_0 est déphasé de $\pi/4$ par rapport aux fréquences de Fourier contenues dans l'interferogramme avant changement de fréquence, mais dans les deux cas la durée du calcul est au moins multipliée par 2 et le rapport s/b dans le spectre calculé est affaibli par la factor $1/\sqrt{2}$.

Etude de divers procédés permettant d'obtenir à partir d'un interférogramme enregistré pendant un temps T un rapport s/b maximum avec une durée de calcul minimum. — Nous avons vu dans le chapitre IV que le rapport s/b dans le spectre avant comme la durée de la mesure. Supposons que nous disposions d'un certain temps pour faire la mesure et que nous ayons choisi de faire ensuite numériquement la T.F. de l'interferogramme obtenu. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la T.F. numérique d'un interférogramme enregistré avec un filtre passe-bas donnait toujours un rapport s/b inférieur à celui qu'on obtiendrait en utilisant l'interferogramme entièrement. Une façon d'augmenter ce fait consiste à dire que plusieurs pics de la fonction d'appareil expliquent le spectre du bruit quand on a choisi le nombre minimum de points dans le spectre de la fonction d'appareil expliquent le spectre optique.

Il peut être obtenu le rapport s/b maximum à partir d'un interférogramme enregistré pendant le temps T tout en utilisant, pour faire la T.F. numérique, le pas h le plus grand possible. Il est par conséquent nécessaire que le spectre du bruit soit nul en dehors du domaine des fréquences de Fourier. Nous allons envisager deux bornes de ce domaine à quatre méthodes différentes pour obtenir ce résultat.

a) **Limite d'un filtre passe-bande.** — Le filtre passe-bas qui est utilisé pour l'enregistrement de l'interferogramme est remplacé par un filtre passe-bande. Cette méthode est équivalente à la précédente mais en fait plus élégante et plus facile à mettre en œuvre.

b) **Changement de fréquence par hétérodyne avant enregistrement.** — Cette méthode qui a été proposée par Merz (54) sous le nom de « hétérodyne spectro-métrie » est équivalente à la précédente mais en fait plus élégante et plus facile à mettre en œuvre.

c) **Enregistrement statique.** — En l'absence de bruit toutes les informations concernant le spectre sont contenues en un nombre de points n de l'interferogramme. On connaît également que, en présence de bruit, on obtiendra le rapport s/b maximum dans le spectre si on utilise le temps total T à la mesure de ces points. La méthode consiste donc à arrêter le miroir mobile de l'interferomètre pour chacune des n valeurs intéressantes de la différence de marche, à intégrer le signal pendant un temps T/n en chacun de ces points et à déplacer le miroir mobile des n fois sans enregistrer entre ces différentes valeurs de δ . La réalisation mécanique de ce type de déplacement étant un peu difficile nous avons utilisé une variante de cette méthode. L'enregistrement à vitesse variable : déplacement rapide du miroir, puis ralentissement au voisinage des points utiles.

d) **Filtre mathématique.** — Dans cette dernière méthode, l'enregistrement est fait avec un simple filtre passe-bas et le nombre de points à relever N reste le même par les considérations de développement par rapport à l'ordre de la T.F. Nous avons de procéder au calcul du spectre, on effectue un calcul interne-ment de la durée du calcul de composition de l'interferogramme enregistré $I(t)$.

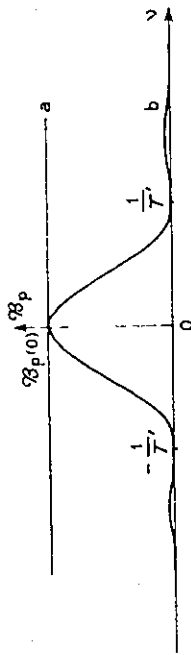


Fig. 65. — Spectre du bruit après intégration du signal.

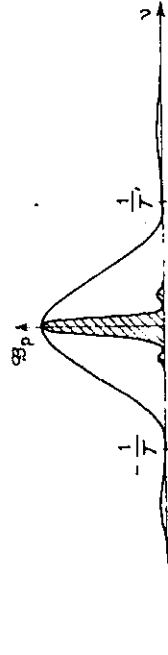


Fig. 66. — Spectre du bruit exploré par le carré de la fonction d'appareil.

$$(V.20) \quad |C(\nu)|^2 = \frac{\sin^2 \pi \nu T'}{(\pi \nu T')^2} \quad (15) \quad (\text{fig. 65, courbe b}).$$

Le bruit dans le spectre sera la T. F. $X(\nu)$ de $x(t)$ faite en choisissant un pas $h = T'$. L'écart quadratique moyen $(\sigma_X)^2$ sera donc l'énergie découpée dans le spectre du bruit par le carré des fonctions d'appareil centrées sur $\nu \pm m(1/T')$. Pour le calcul de $(\sigma_X)^2$ le résultat est évident ; un des maxima étant centré sur la fréquence 0, les autres le sont sur $\pm m(1/T')$, valeurs de la fréquence pour lesquelles $I'_p(\nu)$ est nul. On en conclut immédiatement

$$\sigma_X^2(0) = 2 Q T' I_p(0) \quad (\text{fig. 66}),$$

expression identique à (IV. 22 bis).

Le rapport signal/bruit dans le spectre calculé est donc le même que lorsque l'interférogramme $I'(t)$ est enregistré d'une façon continue pendant le temps T et que la T. F. est faite en utilisant toutes les valeurs de $I'(t)$.

Il reste à montrer que si la T. F. est faite pour une fréquence ν_1 différente de 0, l'écart quadratique moyen des fluctuations garde la même valeur.

$$\sigma_X^2(\nu_1) = \sigma_X^2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi \nu T'}{(\pi \nu T')^2} R_{1/T'} d\nu,$$

$R_{1/T'}$ étant une distribution de Dirac à support périodique de pas $1/T'$ centrée sur la fréquence ν_0 (fig. 67). Si nous posons

$$P(\nu) = \frac{\sin^2 \pi \nu T'}{(\pi \nu T')^2} R_{1/T'}(\nu) \quad (\text{fig. 68}),$$

(15) Les différents « lobes » distants de $1/T'$ du filtre introduit par Vinokur dans le cas de la sommation telle qu'il la pratique, viennent de ce qu'il ne fait pas une véritable intégration, mais une somme de valeurs discrètes du signal. Ces différents lobes sont à rapprocher des différents pics de la fonction d'appareil qu'on obtient dans le cas où la T. F. est faite numériquement à partir de valeurs discrètes de l'interférogramme.

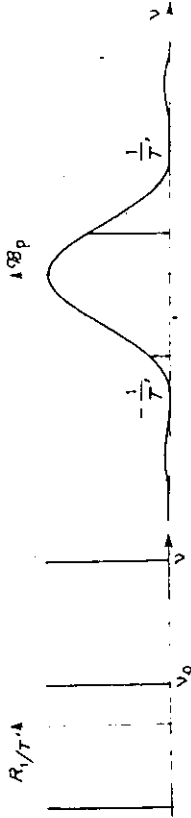


Fig. 67. — Fonction réseau $R_{1/T'}$. Fig. 68. — Produit de $R_{1/T'}$ par $h_1 T'$, centrée sur la fréquence ν_0 .

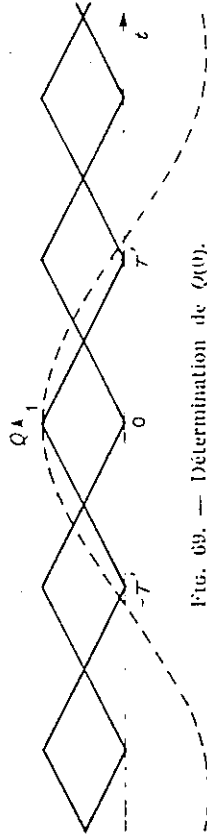


Fig. 69. — Détermination de $Q(0)$.

et $Q(0) = T \cos[P(\nu)]$ on a encore

$$(V.21) \quad \sigma_X^2(\nu_1) = \sigma_X^2(0) Q(0).$$

La T. F. de $P(\nu)$ (fig. 69) est le produit de composition d'une fonction triangulaire de hauteur $1/T'$ et de base $2 T'$ par la fonction $h_1 T' \cos 2\pi \nu_0 t$. $R_{1/T'}$ étant une distribution de Dirac à support périodique de pas T' . On voit immédiatement, d'après la figure 69, que $Q(0) = 1$ d'où

$$\sigma_X^2(\nu_1) = \sigma_X^2(0).$$

Cette méthode d'enregistrement est assez difficile à réaliser étant donnée la précision requise pour la variation de la différence de marche. On peut néanmoins l'envisager pour l'infrarouge lointain où les tolérances sont toujours plus larges. Dans l'infrarouge proche nous avons utilisé une variante de cette méthode. *l'enregistrement à vitesse variable.*

Le domaine spectral occupé $\Delta\sigma = 369 \text{ cm}^{-1}$ est tel que le pas h à choisir pour qu'il n'y ait pas recouvrement des fréquences de Fourier vaut

$$h = 1/(2 \Delta\sigma) = 13,519 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} = 21 \lambda_0,$$

λ_0 étant la longueur d'onde de la raie de référence, ici la raie rouge du cadmium.

Les différences de marche sont repérées à l'aide de compteurs à présélection et compteurs totalisateurs dont les indications augmentent de 1 unité chaque fois que la différence de marche augmente de λ_0 . Le chariot se déplace alternativement à faible vitesse V_1 pendant que δ varie de $3 \lambda_0$ et à vitesse V_2 16 fois plus grande pendant une variation $\Delta\delta = 18 \lambda_0$, les changements de vitesse étant déclenchés par des compteurs à présélection. L'opération est conduite de la façon suivante (fig. 87). Le point zéro est repéré par une frange blanche, l'interféromètre se déplaçant à la vitesse V_1 ; quand $\delta = 22,5 \lambda_0$ un compteur à présélection réglé sur 18 déclenche la vitesse V_2 ; quand le compteur est revenu au 0, il déclenche à la fois la vitesse V_1 et un compteur à présélection réglé sur 3, etc. Les ordonnées

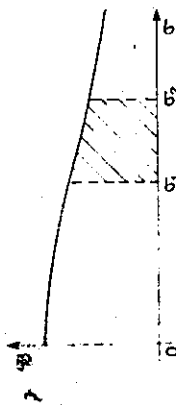


FIG. 70. — Spectre du bruit et spectre optique.

sont relevées sur l'interférogramme pour $\delta = 0, 2l, 4l, \dots, n \cdot 2l$, comme l'indique la figure 87. La méthode a correctement fonctionné, mais nous l'avons abandonnée parce que le rapport signal/bruit dans le spectre calculé était insuffisant. La raison est que, dans les conditions décrites, le rapport du temps utile de la mesure (temps utile qu'on peut écrire $\tau \cdot l/2\lambda_0$, τ étant la constante de temps utilisée) au temps total T est trop faible. Il y a deux raisons :

- 1° étant donnée la qualité de la mécanique utilisée, le régime permanent de vitesse ne s'établit pas instantanément ; trois franges doivent défilier à la vitesse V_1 et $1/6$ de la course est fait à vitesse faible ;
- 2° les compteurs à présélection utilisés ne peuvent compter plus de 25 impulsions par seconde et le rapport des deux vitesses ne peut être que de 16. Le temps passé entre les points à mesurer est donc une fraction trop grande du temps total de la mesure.

4. Filtrage numérique. — Cette question faisant l'objet d'une publication plus détaillée [56], nous ne ferons ici que la résumer succinctement.

Si on fait le produit de composition de l'interférogramme $I'(\delta)$ enregistré comme précédemment à travers un simple filtre passe-bas par la réponse percussive $\tilde{A}(\delta)$ d'un filtre idéal $G(\sigma)$ dont la bande passante coïncide avec le spectre optique à étudier, on obtient un interférogramme $I''(\delta)$ dont la T. F. coïncide avec celle de $I'(\delta)$ dans le domaine du filtre et est nulle en dehors. Pour avoir le rapport s/b maximum dans le spectre calculé il suffit alors de relever sur $I''(\delta)$ le nombre minimum de points compatible avec la largeur du spectre optique et sa position par rapport à l'origine (voir § II. 2. 3B).

Supposons, par exemple, que les positions relatives du spectre du bruit et du spectre optique soient représentées par la figure 70. La réponse percussive $\tilde{A}(\delta)$ (fig. 71a) correspondant à $G(\sigma)$ (fig. 71b) a pour expression

$$\tilde{A}(\delta) = T \cos[G(\sigma)] = \Delta\sigma \frac{\sin \pi \Delta\sigma \delta}{\pi \Delta\sigma \delta},$$

avec $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$. Si les fonctions $\tilde{A}(\delta)$ et $I'(\delta)$ avaient un spectre limité il serait possible de calculer rigoureusement leur produit de composition à partir de valeurs discrètes de ces fonctions. Comme leurs spectres sont illimités, à partir de valeurs discrètes de ces fonctions on ne peut calculer qu'une valeur approchée $\mathcal{S}(\delta)$ de $I''(\delta)$, l'approximation étant d'autant meilleure que le pas h' choisi pour faire la convolution est plus petit. On montre que le rapport s/b obtenu en faisant la T. F. de $\mathcal{S}(\delta)$ avec le pas h maximum (voir § II. 2. 3B) est rigoureusement le même que dans le spectre obtenu en faisant la T. F. de $I''(\delta)$ avec le pas h' . Comme une convolution se calcule numériquement beaucoup plus vite qu'une T. F. le gain de temps de calcul pour un même rapport s/b final est de l'ordre de h'/h , c'est-à-dire de l'ordre de $\sigma_m/\Delta\sigma$. Nous verrons une application de cette méthode dans le chapitre VI.

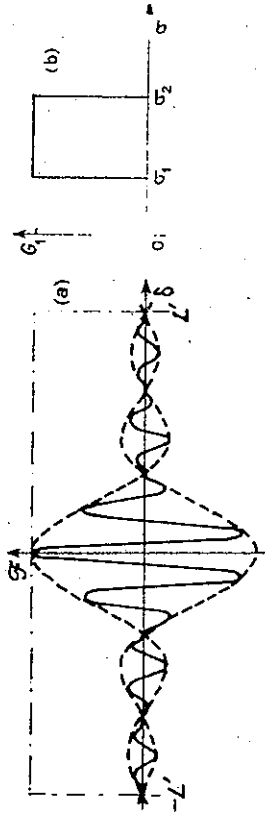


FIG. 71. — a) Réponse percussive $\tilde{A}(\delta)$ du filtre; b) gain théorique du filtre numérique.

3. Conclusion. — Nous venons de voir plusieurs méthodes permettant d'obtenir pour une durée de calcul minimum le rapport s/b maximum compatible avec la durée de la mesure T : emploi d'un filtre passe-bande, méthode de changement de fréquence, filtrage numérique. La conclusion de cette étude est la suivante : chaque fois que la largeur relative $\Delta\sigma/\sigma_m$ du domaine spectral à étudier est faible, il y aura intérêt à enregistrer l'interférogramme avec la méthode par changement de fréquence, la fréquence ν_0 étant choisie à peu près au milieu de l'intervalle occupé $\Delta\nu$. Toutefois cette méthode présente une certaine complexité instrumentale et il est quelquefois possible de s'en passer et d'enregistrer l'interférogramme à travers un simple filtre passe-bas. Dans ces conditions il est avantageux de faire un filtrage numérique. Cette dernière méthode peut être utile, même si la largeur relative du domaine spectral à étudier est grande, quand, provisoirement, on ne s'intéresse qu'à une portion de ce domaine.

VI. Expériences et résultats

Nous avons traité à l'aide de la méthode par transformation de Fourier deux problèmes dans l'infrarouge proche : l'étude de l'émission du ciel nocturne vers $1,6 \mu$, région où l'atmosphère est transparente, et l'étude de la lumière de réémission du germanium vers $4,7 \mu$. Ces deux sources avaient déjà été étudiées avec des spectromètres à réseau [57, 58]. Mais leur faible niveau d'énergie ne permettait d'atteindre dans un temps de mesure raisonnable que des résolutions faibles, de l'ordre respectivement de 150 et 1 500, et avec un rapport signal/bruit insuffisant pour mettre en évidence de faibles composantes dont l'existence était discutée [59] ou pour déterminer la loi de déplacement d'une raie en fonction du champ magnétique. Le but poursuivi est donc une augmentation de la résolution et une amélioration du rapport signal/bruit. Pour les deux études nous avons utilisé le même interféromètre de Michelson que nous allons décrire sommairement.

1. Description de l'ensemble interféromètre-détecteur. — L'interféromètre utilisé est parfaitement classique (fig. 72).

Optique. — Toute l'optique est en verre ; l'instrument ne peut donc être utilisé que dans le proche infrarouge jusque vers $2,7 \mu$, région où le verre devient absorbant. Les deux miroirs ont 7 cm de diamètre et sont aluminisés ; les lames séparatrices et compensatrices mesurent $7 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$; leur épaisseur est la même à

DÉTECTEUR. — Le détecteur est une cellule Kodak à sulfure de plomb. La puissance de bruit de ces cellules croît à peu près proportionnellement à leur surface ; il y a donc intérêt à choisir une cellule ayant la plus petite surface possible. Si on appelle S la surface de la section droite du faisceau, Ω l'ouverture du faisceau de sortie, s la surface de la cellule et ω l'angle solide du faisceau qu'elle reçoit, pour utiliser toute la lumière, il faut que $S\Omega = s\omega$. Plusieurs dispositifs ont été proposés pour admettre ω le plus grand possible. Williamson a préconisé l'emploi d'un « cone channel condenser » [39], P. Connes celui d'un condenseur de microscope sur la face arrière duquel est collée la cellule [4]. C'est cette dernière solution que nous avons adoptée (fig. 73a). L'ouverture numérique du condenseur utilisé est $n \sin \theta_{\max} = 1,4$. L'angle solide accepté finalement par la cellule correspondrait dans l'air à une valeur de $\omega = 1,45 \times 2 \pi$ sd. Une lentille de champ fait l'image des miroirs sur la face avant du condenseur et le condenseur fait l'image du trou de sortie sur la lentille (fig. 73b). La cellule est refroidie à la température de la neige carbonique.

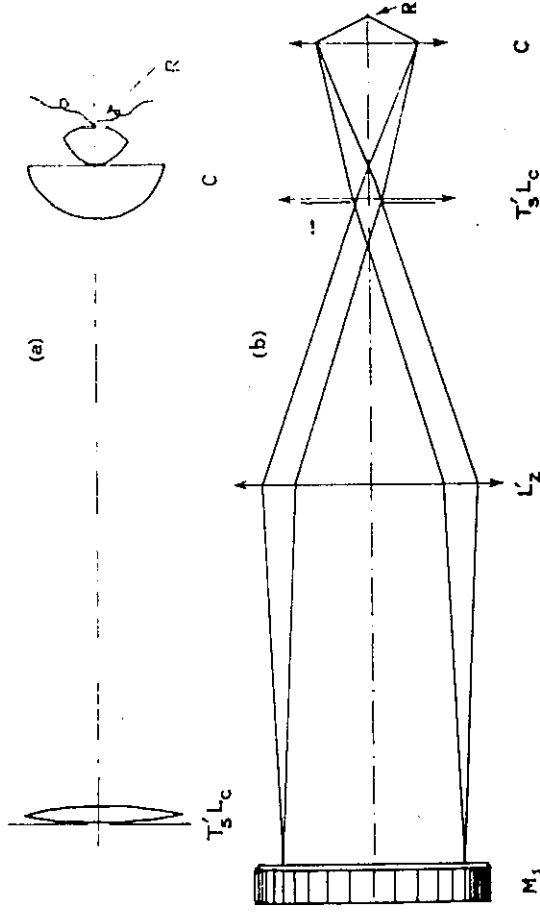


Fig. 73. — a) Schéma de montage du détecteur ; b) schéma optique : M_1 , miroir ; L_4 , lentille de sortie ; T_5 , trou de sortie ; L_c , lentille de champ ; C , condenseur ; R , récepteur.

Le faisceau de référence suit dans l'interféromètre exactement le même trajet que le faisceau de lumière à étudier (fig. 74) ; il est reçu par un photomultiplicateur car nous avons toujours utilisé comme raie de référence, une raie prise dans le visible.

PARTIE MÉCANIQUE. — Le miroir mobile est bloqué sur un chariot se déplaçant sur des glissières parallèles. La qualité des glissières est suffisante pour que le parallélisme soit conservé à 1/10 de frange de la raie rouge du cadmium près, pour une translation du miroir mobile de 8 mm (donc une variation de différence de marche de 16 mm) avec un diamètre utilisé des miroirs de 5 cm.

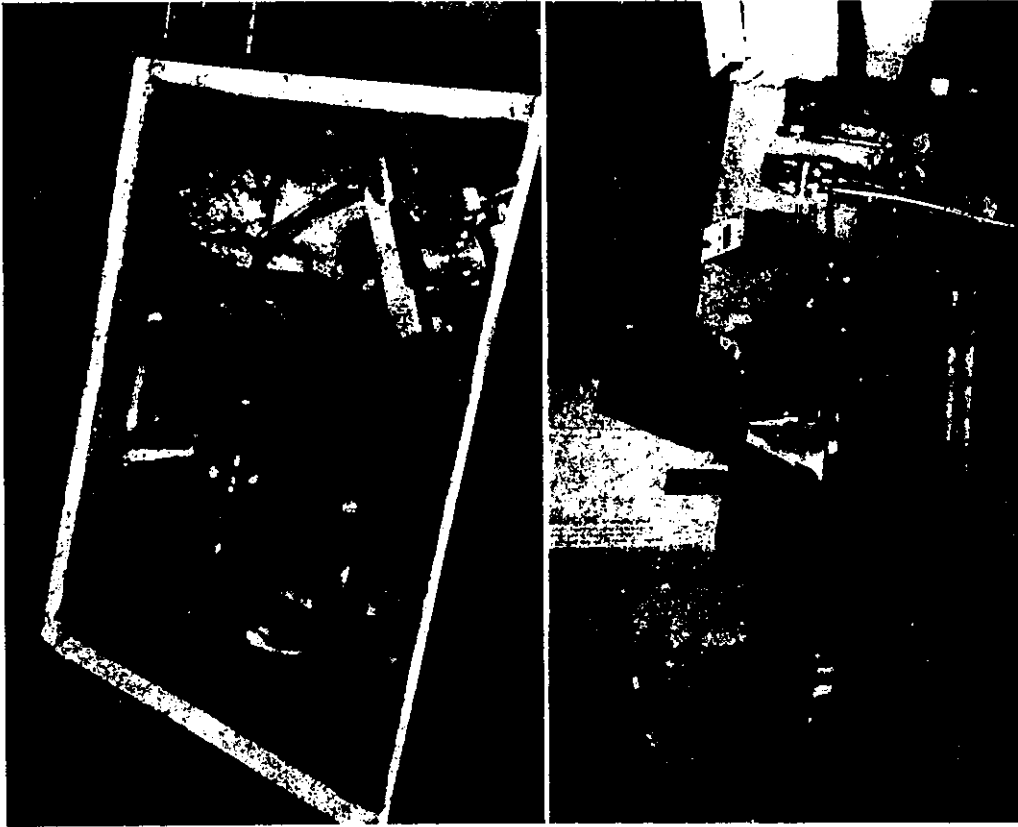


Fig. 72.

1 μ près. Elles sont tenues dans le même support, la face de la séparatrice qui est recouverte d'une semi-aluminiure étant contre la compensatrice. Il n'y a aucun réglage ni sur la séparatrice, ni sur la compensatrice. Nous avons adopté cette disposition pour obtenir facilement un bon parallélisme des deux lames, ce qui est nécessaire pour que l'appareil soit parfaitement symétrique et que les interférogrammes enregistrés présentent un point zéro. Mais la solution n'est pas parfaite (à cause de la différence des dispersions et du déphasage à la réflexion sur la semi-aluminiure côté verre et côté air). Pour qu'elle le soit il faudrait que les deux lames soient collées par une substance ayant même indice et que le verre et qui puisse se mettre sous une épaisseur très faible.

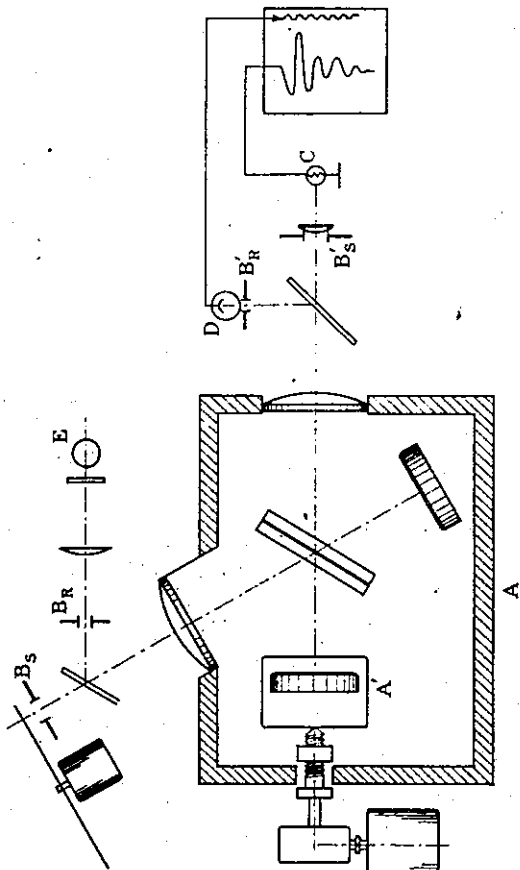


Fig. 74. — Schéma de principe : A, interféromètre de Michelson ; A', miroir mobile avec entraînement ; B, trous d'entrée et de sortie ; C, détecteur au sulfure de plomb ; D, photomultiplicateur ; E, lampe à cadmium.

Les réglages du parallélisme agissent sur les supports de miroir. Les réglages grossiers se font suivant un procédé classique en agissant directement sur l'arrière du miroir mobile à l'aide de trois vis calantes placées à 120° l'une de l'autre et que l'on retire une fois le réglage obtenu. Les réglages fins sont portés par le miroir fixe. Le miroir est monté dans une pièce orientable par flexion ayant la forme représentée par la figure 75a. La partie cylindrique B a 8 mm de diamètre et 10 mm de long. La partie A porte deux lames d'acier à ressort perpendiculaires et à 45° de la verticale sur l'extrémité desquelles on peut agir à l'aide de vis de pas fin 0,5 mm (fig. 75b). La torsion de B qui en résulte donne deux réglages complètement indépendants. Un tour complet de vis correspond à un dérèglement d'une demi-frange. Il faut que l'ensemble soit très rigide puisque les faisceaux optiques ont des longueurs relativement grandes (environ 15 cm). Aussi les deux consoles portant le miroir fixe et l'ensemble séparatrice-compensatrice sont-elles bloquées sur un lourd support en ciment. Le support des deux glissières est solidaire du même bloc de ciment.

ENTRAÎNEMENT. — L'entraînement du chariot se fait à l'aide d'une vis métrique de pas 0,5 mm et de qualité quelconque. Il est inutile d'employer une vis de qualité supérieure puisque nous avons vu que même avec une très bonne vis les différences de marche devaient être repérées à l'aide d'une raie de référence. La vis se déplace sous l'action d'un moteur synchrone tournant à 750 tr/mn par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse et d'une vis tangente donnant une démultiplication dans un rapport 100. La boîte de vitesse permet d'obtenir des rapports de démultiplication variant de 2 en 2 entre 1 et 4 096, de sorte que la vitesse de déplacement du miroir mobile varie entre $6,25 \cdot 10^{-2}$ et $1,5 \cdot 10^{-5}$ mm/s. L'appareil est extrêmement sensible aux vibrations qui amènent des

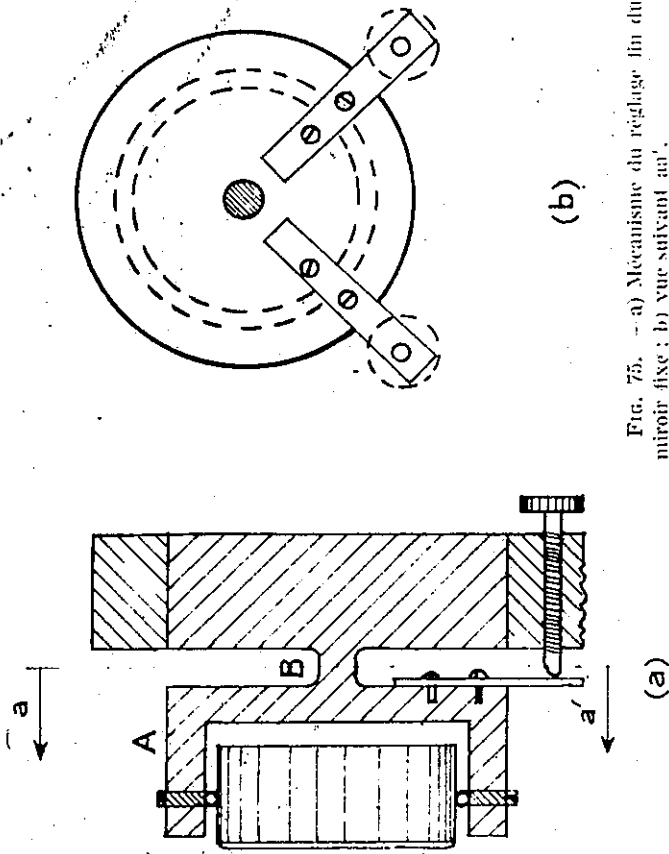


Fig. 75. — a) Mécanisme du réglage fin du miroir fixe ; b) vue suivant ax'.

modifications de longueur des faisceaux interférents ; il y a deux sources principales de vibrations : celles venant du sol et celles qui sont dues au moteur et à tous les organes de démultiplication et transmission. Pour supprimer autant que possible les premières, le bloc de ciment est monté sur des caoutchoucs amortisseurs et pour atténuer les secondes, l'axe d'entraînement et tous les organes de transmission sont reliés entre eux par l'intermédiaire de flexors. Il faut bien entendu éviter les variations de température. Aussi l'interféromètre est-il placé à l'intérieur d'une boîte garnie intérieurement de matière isolante et recouverte de papier d'aluminium. Cet isolement thermique s'est révélé suffisant même lorsqu'on travaillait dans une pièce non thermostatée. Pour diminuer les absorptions dans le verre les fenêtres de la boîte sont constituées par les lentilles collimatrices d'entrée et de sortie.

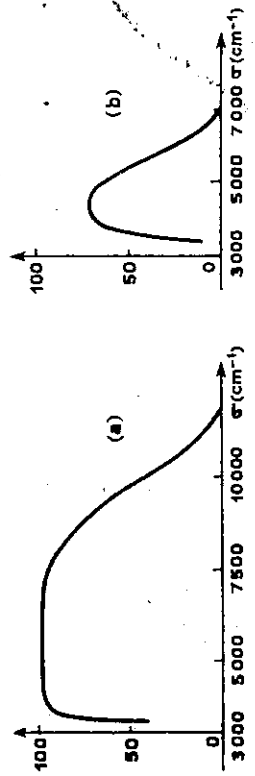
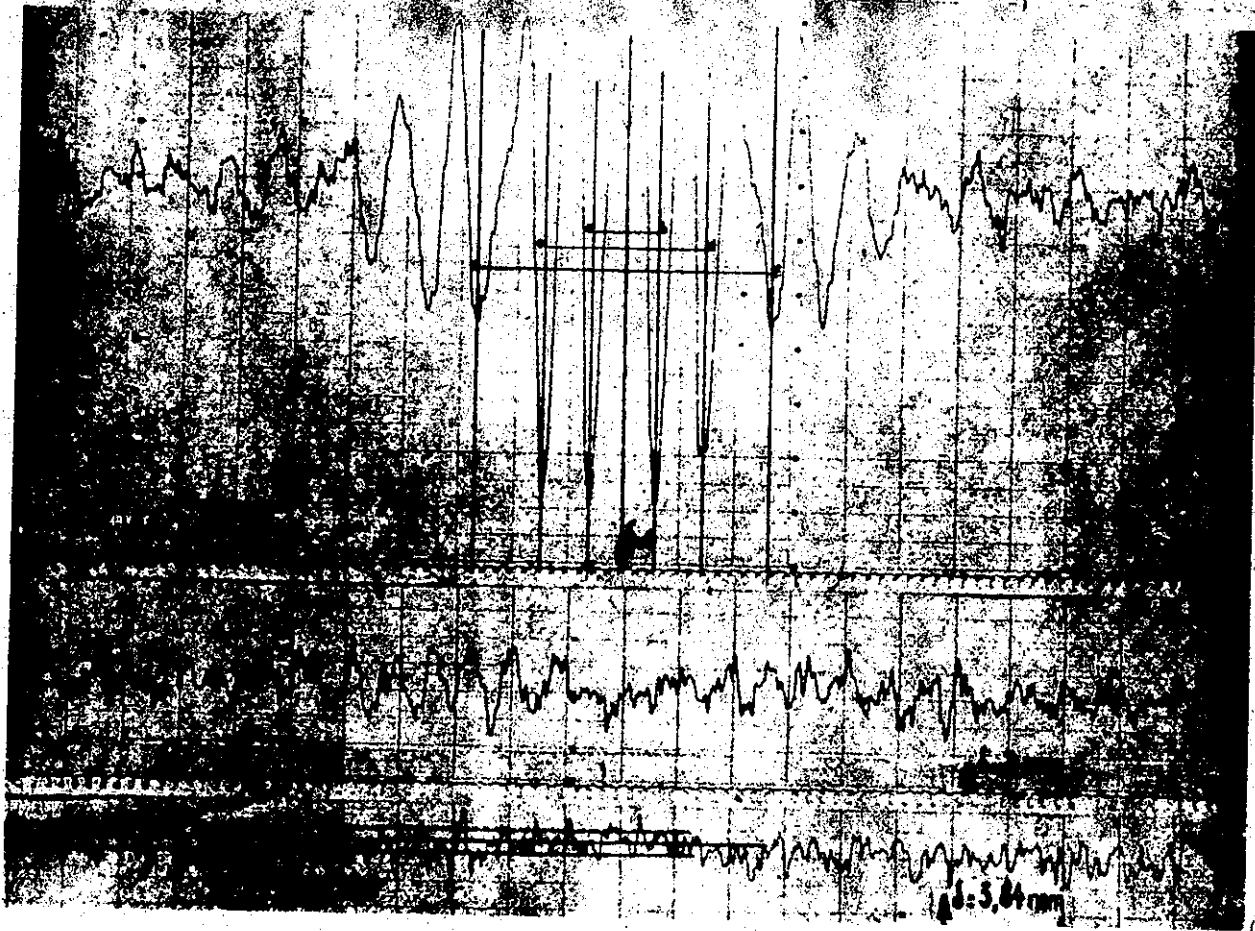
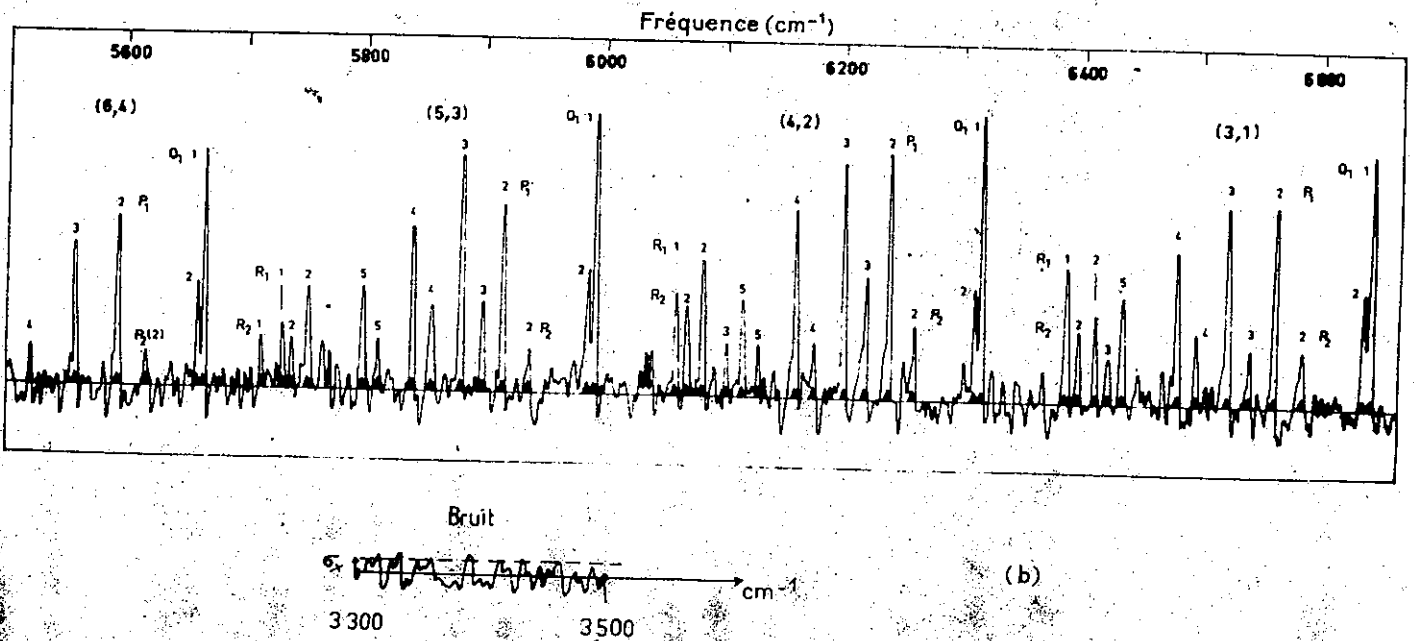


Fig. 76. — Courbes de transmission de filtres ; en ordonnées, facteurs de transmission en pour cent.

2. Etude du spectre d'émission du ciel nocturne. — L'interprétation des résultats concernant cette étude a déjà fait l'objet de deux publications [61, 62]. Nous allons préciser ici les conditions dans lesquelles ont été faites les expériences. Le montage est celui représenté par les figures 72b et 74. Un simple miroir de



(a)



(b)

Fig. 77. — a) Interférogramme du ciel nocturne (8 mars 1956), obtenu au sulfure de plomb sans filtre ; b) spectre du ciel nocturne.

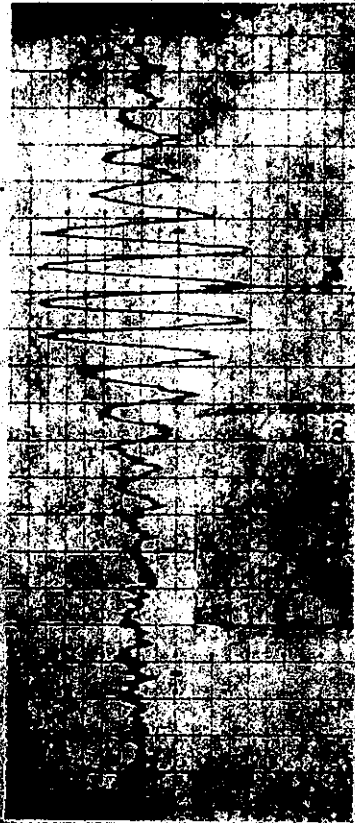


Fig. 78. — a) Interférogramme du rayonnement émis par le modulateur ; b) spectre du rayonnement émis par le modulateur.

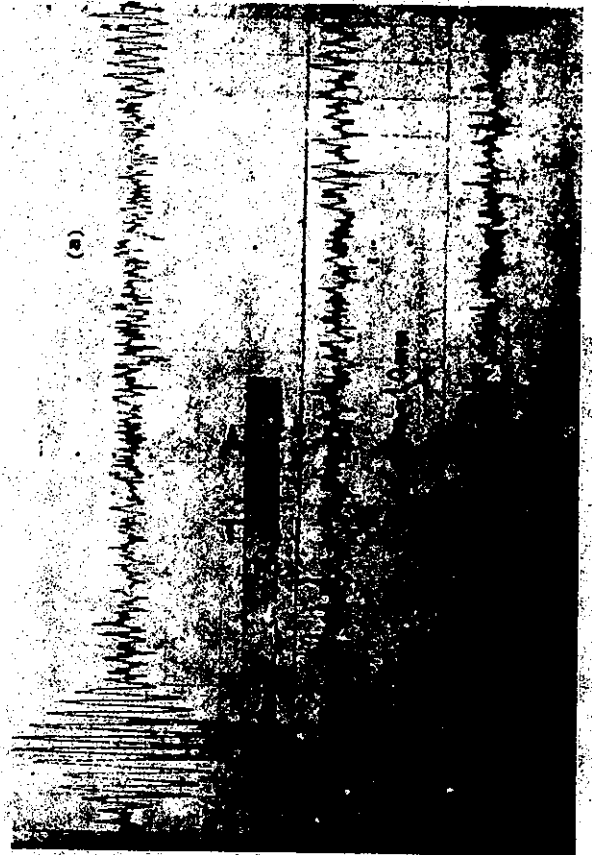
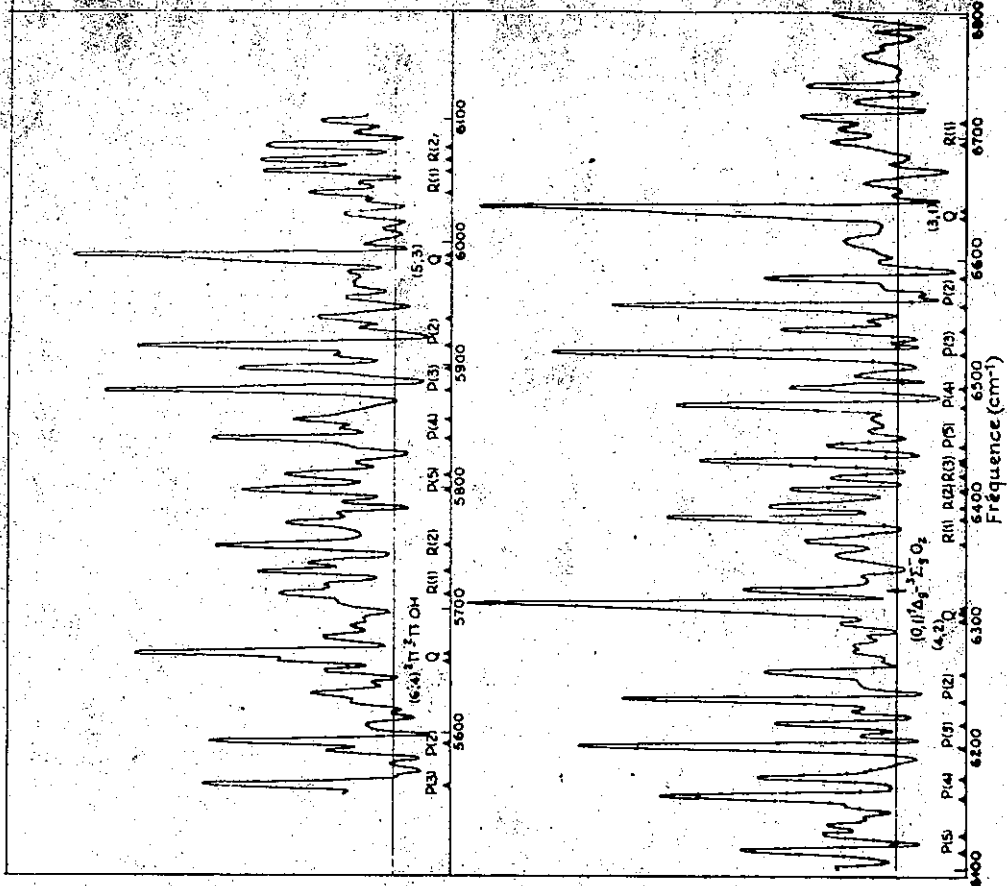


Fig. 79. — a) Interférogramme du ciel nocturne (28 février 1959), cellule au sulfure de plomb avec filtre interférentiel ; b) spectre du ciel nocturne. R 91W)

renvoi visible sur la figure 72b permet de viser au N. O. à 20° au-dessus de l'horizon. Il n'y a donc aucune optique intermédiaire entre le ciel et la lentille d'entrée de l'interféromètre. Le diamètre du trou a été choisi de telle sorte que l'appareil travaille dans les meilleures conditions de luminosité-résolution. Dans ces conditions l'angle d'ouverture maximum du faisceau dans le cas où l'on veut obtenir une résolution effective de 2.000 cm^{-1} mesure 3.10^{-2} rad et l'angle solide du faisceau utilisé vaut $\Omega = 2.7.10^{-3} \text{ sr}$. Le modulateur placé devant le trou d'entrée B_s hache le flux à une fréquence de 125-Hz. Le signal électrique provenant de la cellule à sulfure de plomb est amplifié dans un appareil à détection synchrone.



Bruit (b)

sulfure de plomb avec filtre interférentiel ; b) spectre du ciel nocturne. R 91W)

classique, filtré par un filtre RC et enregistré sur un mégarécepteur potentiométrique à plume.

Nous avons étudié la région vers 16μ avec une cellule à sulfure de plomb et la région vers 12μ avec un photomultiplicateur Bailemand.

Etude de la région voisine de 16μ . — Un filtre placé directement devant la cellule et dont la courbe de transmission est représentée par la figure 76a, éliminant les longueurs d'onde inférieures à 12μ . Nous avons employé comme raie de référence la raie rouge du cadmium isolée dans le spectre d'une lampe Osram par des filtres colorés. L'interfrange qui proviendrait de la lampe Osram et qui pourrait nuire à l'étude de la cellule au sulfure de plomb, est coupé par un ensemble de filtres dont la courbe de transmission est représentée par la figure 76b et par une solution de sulfate de cuivre à 2 g. de sulfate par litre.

La figure 77a donne un exemple d'interferogramme obtenu dans ces conditions. On note immédiatement que comme attendu, la frange centrale ne correspond pas à un maximum, en fait elle est nulle. Le phénomène d'interférences l'inversité inversement, elle s'agit d'un système d'interférences à frange centrale brillante. C'est toujours, comme dans la frange centrale (73), p. 659). L'explication réside dans le fait que l'interfrange enregistré est en fait la somme de deux interfranges qui proviennent de plusieurs cellules qui proviennent de la lumière émise par le cristal.

Le signal enregistré est celui qui provient de l'émission des pales du modulateur en carton noir, dont la température est d'environ 150°C . alors que la cellule est approximativement à 50°C . (température de la neige carbonique). Le modulateur rayonnant approximativement à 150°C est enregistré sur un mégarécepteur potentiométrique à plume. Le signal enregistré correspond à quelques franges au voisinage de la différence de marche zéro. Nous l'avons enregistré une nuit ou le ciel était couvert et l'émission du ciel nocturne était donc nulle (fig. 78a) le spectre correspondant (fig. 78b) est coupé du côté des grandes longueurs d'onde par le verre qui devient obscurant pour empêcher fortement le signal en opposition de phase. Il suffit donc de placer devant la cellule un filtre interférentiel qui coupe au delà de 2μ du côté des grandes longueurs d'onde, et laisse passer les radiations vers 16μ . Avec un tel filtre, l'interferogramme est redevenu presque normal avec une frange centrale beaucoup plus grande (fig. 79a).

Le repérage du point zéro peut se faire de deux manières qui donnent des précisions équivalentes ou bien en prenant la moyenne des milieux des segments joignant les axes de deux franges symétriques par rapport à la frange centrale, tels que ab, cd, ef, comme il est indiqué dans la figure 77a, ou bien en enregistrant à la différence de marche zéro, l'interferogramme d'une source blanche avec la même constante de temps (fig. 80).



Fig. 80

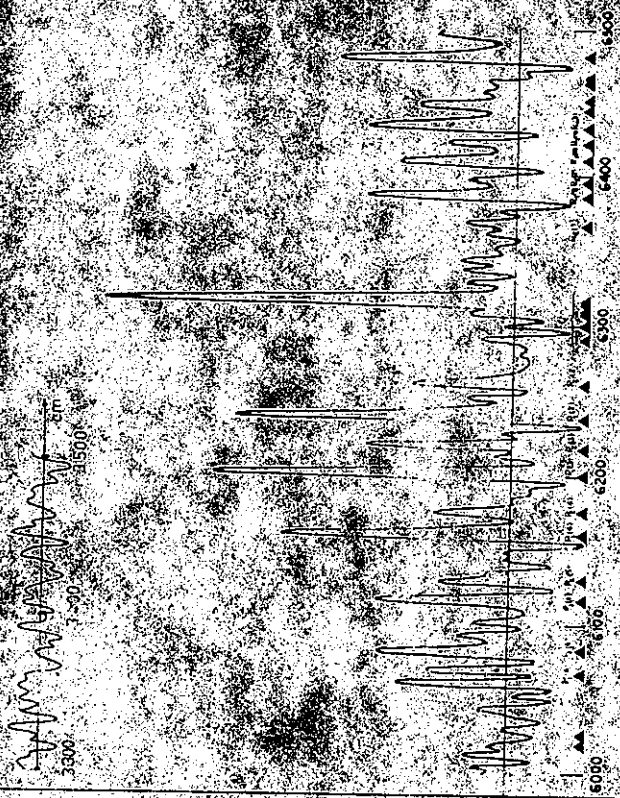


Fig. 81 — Spectre du ciel nocturne : $f = 150$. — $f = 900$.
 Nous présentons ici trois spectres obtenus à des résolutions 300 (fig. 81, p. 99) et 2 000 (fig. 77b).

Spectre de la figure 81. — Résolution effective 900. Durée de l'enregistrement de l'interferogramme 20 s.

La figure 81 montre la comparaison entre deux spectres : celui à la résolution 300 obtenu par transformation de Fourier et celui à la résolution 150 obtenu avec un spectromètre à réseau. Ce dernier est en fait la moyenne de onze spectres chacun d'eux ayant été enregistré pendant une demi-heure (49). Les maxima négatifs qu'on observe du côté des petits nombres d'ondes à côté de chaque raie avant une forte intensité montrent qu'il y a eu une erreur dans la détermination du point zéro de l'interferogramme.

Spectre de la figure 79b. — Il a été calculé à partir de l'interferogramme de la figure 79a enregistré au crépuscule : différence de marche maximum atteinte, 1,96 mm ; limite de résolution calculée en tenant compte de l'étendue du faisceau, $6,25 \text{ cm}^{-1}$; limite de résolution mesurée, $6,3 \text{ cm}^{-1}$; domaine spectral étudié, 1250 cm^{-1} entre 550 et 6800 cm^{-1} ; nombre d'éléments spectraux, 210 ; durée d'enregistrement, 40 mn.

(19) Wallace Jones a récemment obtenu avec un spectromètre à réseau un spectre à la résolution 400 en employant un nouveau détecteur au germanium. Dans les deux expériences comparées de la figure 81 le détecteur était une cellule Kodak.

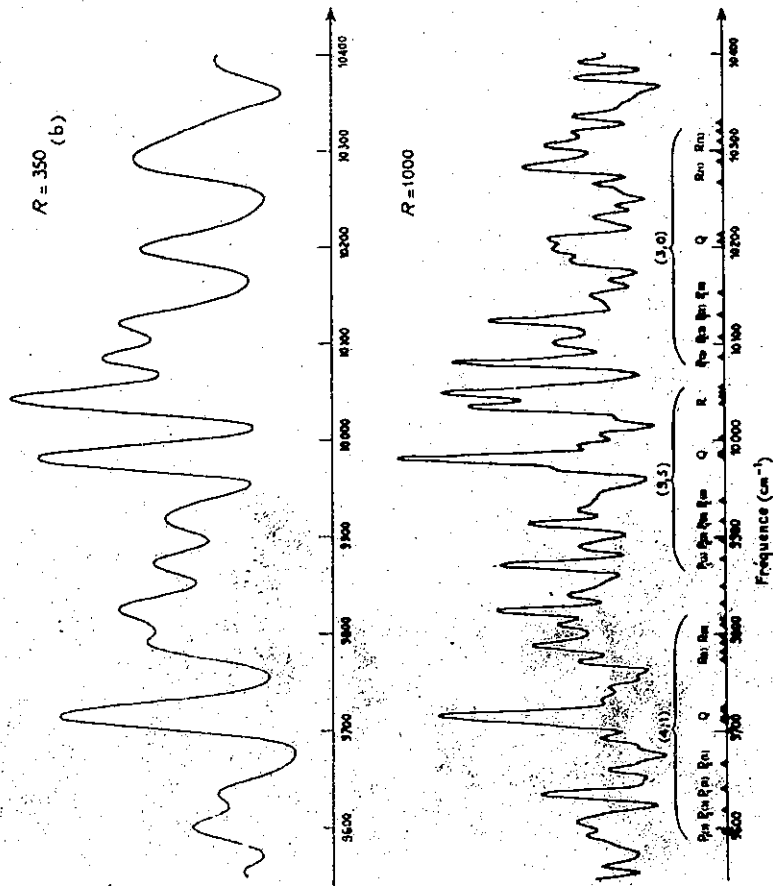


FIG. 84. — a) Interferogramme du ciel nocturne. photomultiplicateur ; b) spectre du ciel nocturne.

on a pu dresser une table des fréquences observées pour les raies de vibration-rotation du radical OH, ce qui il est difficile de faire à partir d'une expérience réalisée au laboratoire étant données les difficultés de construction de sources convenables ; l'essai de la détermination d'une température de rotation à partir des intensités des raies montre qu'on ne peut obtenir un accord entre les températures calculées à partir des branches P, Q et R simultanément. Une explication possible serait que les probabilités de transmission calculées par Benedict, Plyler & Humphreys [63] et utilisées pour la détermination de la température à partir des intensités des

raies sont fausses. Les auteurs avaient d'ailleurs prévu cette possibilité parce qu'ils ont négligé l'interaction vibration-rotation.

3. Etude de la lumière de réémission du germanium. — Nous avons étudié aussi par cette méthode la lumière de recombinaison intrinsèque dans le germanium. Une étude complète des résultats obtenus fera l'objet de la thèse d'O. Parodi. Nous nous bornerons ici à présenter les premiers spectres obtenus.

Une première étude avait été faite par C. Benoit à la Guillaume & O. Parodi qui avaient étudié avec un spectromètre à réseau (fig. 85) la lumière de recombinaison émise par un cristal de germanium dans lequel un excès de porteurs minoritaires était créé par injection optique. A la température de l'hélium liquide, ils avaient mis en évidence trois raies. Les raies A et C sont dues à l'annihilation d'un exciton indirect avec émission simultanée d'un photon longitudinal acoustique (A) ou transverse optique (C). L'origine de la raie B qui n'apparaissait qu'au-dessous de 2° K n'était pas précisée. Nous avons pu depuis mettre en évidence que c'était une raie de recombinaison par l'intermédiaire de centres dus à des dislocations. Son intensité varie avec le point où se fait l'injection optique dans le cristal ; elle disparaît quand l'échantillon est placé dans un champ magnétique.

La limite de résolution théorique du spectromètre à réseau $\delta\sigma_0$ était 4 cm^{-1} . La largeur de la raie A mesurée sur le spectre de la figure 85 vaut 14 cm^{-1} .

On pouvait espérer plusieurs avantages de la méthode par T. F. :

- a) explorer un domaine spectral plus étendu compris entre $5\,600$ et $6\,100 \text{ cm}^{-1}$ sans augmenter la durée de la mesure. La question de cette durée est en effet primordiale dans cette expérience car le fait d'éclairer le cristal l'échauffe et la consommation d'hélium nécessaire pour maintenir la température inférieure à 2°K augmente rapidement ;
 - b) augmenter le rapport signal/bruit ce qui était nécessaire pour deux raisons :
 - 1° les enregistrements avec le spectromètre à réseau ne permettaient pas de déduire avec suffisamment de précision la loi de variation du déplacement de la raie A en fonction du champ magnétique dans lequel est placé le cristal ;
 - 2° on pouvait espérer déceler la présence éventuelle de raies vers $5\,950 \text{ cm}^{-1}$ dont l'existence avait été soupçonnée par Haynes [59] ;
 - c) augmenter la résolution pour résoudre la structure éventuelle de la raie A.
- Donc bien que ce problème ne soit pas un problème à très grand nombre d'éléments spectraux, comme celui du ciel nocturne, il paraissait souhaitable de l'aborder par cette méthode.
- Nous avons essayé plusieurs méthodes d'enregistrement de l'interferogramme.



FIG. 85. — Spectre du rayonnement de recombinaison intrinsèque dans le germanium ; spectre enregistré par un spectromètre à réseau, $R_0 = 1\,400$.

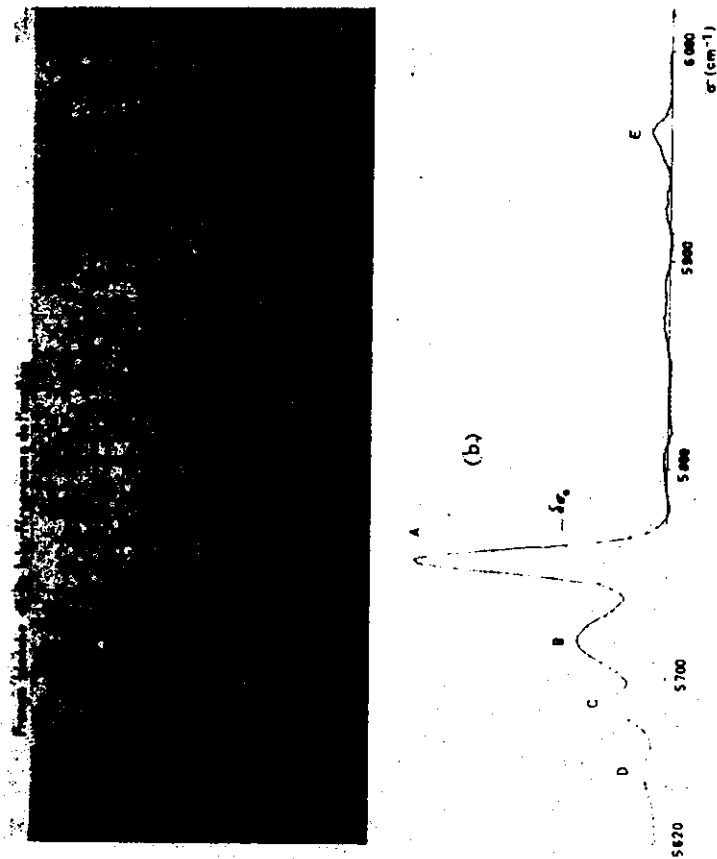


Fig. 86. — a) Interférogramme enregistré à vitesse constante. $R_0 = 1\ 000$;
b) spectre obtenu à partir de cet interférogramme.

1. *Enregistrement à vitesse constante.* — Comme le spectre étudié est beaucoup plus simple que celui du ciel nocturne, l'interférogramme est très différent (fig. 86a). Il a l'aspect d'une sinusoïde dont l'amplitude est lentement modulée :

différence de marche maximum, $L = 2,4$ mm ;
limite de résolution théorique, $\delta\sigma_0 = 5,7$ cm^{-1} ;
durée de l'enregistrement, 40 mn.

Dans ce cas encore, la vitesse d'enregistrement est limitée par la vitesse maximum de la plume de l'enregistreur.

Le spectre qui a été calculé numériquement à partir de cet interférogramme est représenté par la figure 86b :

largeur à mi-hauteur de la raie, 14 cm^{-1} ;

rapport signal/bruit pour la raie A, de l'ordre de 100.

On retrouve les trois raies A, B, C.

On décèle en outre la présence d'une raie D vers 5 655 cm^{-1} qui peut être interprétée aussi comme une raie de dislocation (elle n'apparaît qu'au-dessous de 2° K et disparaît dans le champ) et d'une raie E vers 5 960 cm^{-1} dont l'origine n'est pas expliquée et qui, vraisemblablement, est double. Pour s'en assurer il faut augmenter la résolution, donc la différence de marche maximum atteinte. Il ne peut être question de faire un enregistrement à vitesse constante car :

1° la durée de la mesure serait beaucoup trop grande avec l'enregistreur dont nous disposons ;

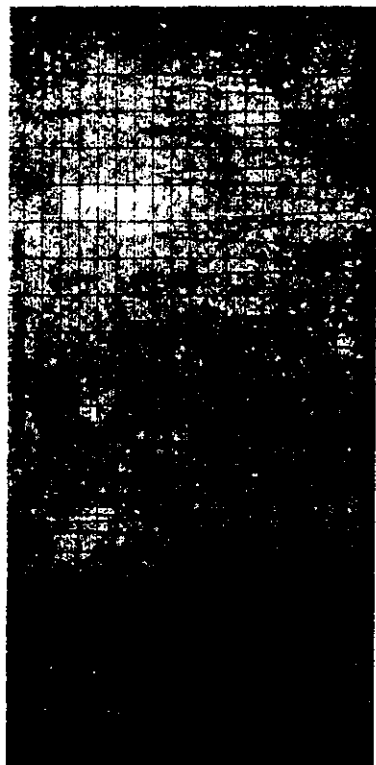


Fig. 87.

2° le nombre de points à relever sur l'interférogramme serait trop élevé.

Deux solutions peuvent être envisagées : l'enregistrement à vitesse variable, la méthode par changement de fréquence.

2. *Enregistrement à vitesse variable.* — Nous avons déjà expliqué dans le chapitre précédent que ce système avait été essayé, avait correctement fonctionné (fig. 87) mais que, étant données les caractéristiques de notre mécanique, le temps utile n'était pas une fraction suffisante du temps total et le rapport s/b était insuffisant.

3. *Méthode du changement de fréquence.* — Ce procédé permet à la fois d'enregistrer des fréquences électriques beaucoup plus basses (d'où une vitesse d'exploration qui pourra être considérablement augmentée et une durée de mesure très diminuée) et d'amener le spectre du bruit à mieux coïncider avec le spectre des fréquences de Fourier (d'où un nombre de points à relever beaucoup moins grand).

Le domaine spectral occupé est $\Delta\sigma = 500$ cm^{-1} entre 5 600 et 6 100 cm^{-1} . Si on choisit le nombre d'ondes de l'hétérodyne $\sigma_0 = 6\ 100$ cm^{-1} , le spectre à étudier après changement de fréquence se trouve compris entre 0 et 500 cm^{-1} et peut être obtenu par une simple T. F. en cosinus du nouvel interférogramme (fig. 88). Pour une même vitesse du chariot mobile la fréquence du maximum du signal à étudier sera donc divisée par 12.

Rappelons que, étant données les irrégularités d'avance du chariot et les instabilités de fréquence qui en résultent, il n'est pas question d'utiliser pour faire le changement de fréquence un signal électrique fourni par un oscillateur basse-

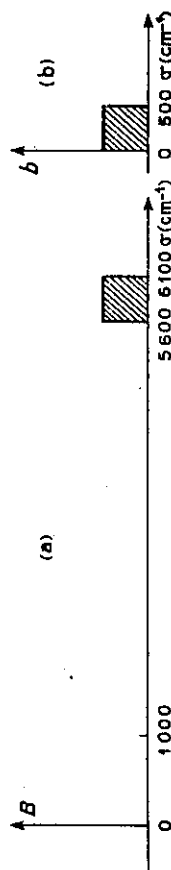


Fig. 88. — Domaine spectral occupé avant et après changement de fréquence.

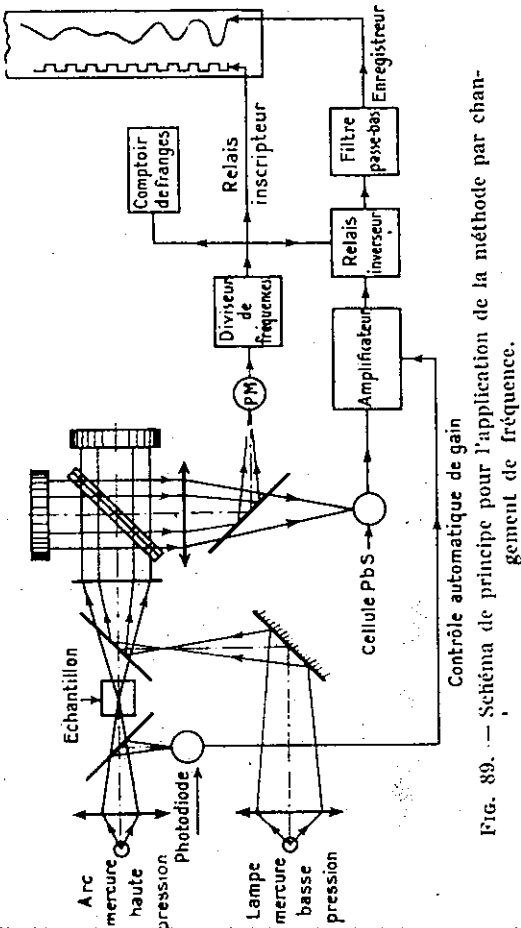


Fig. 89. — Schéma de principe pour l'application de la méthode par changement de fréquence.

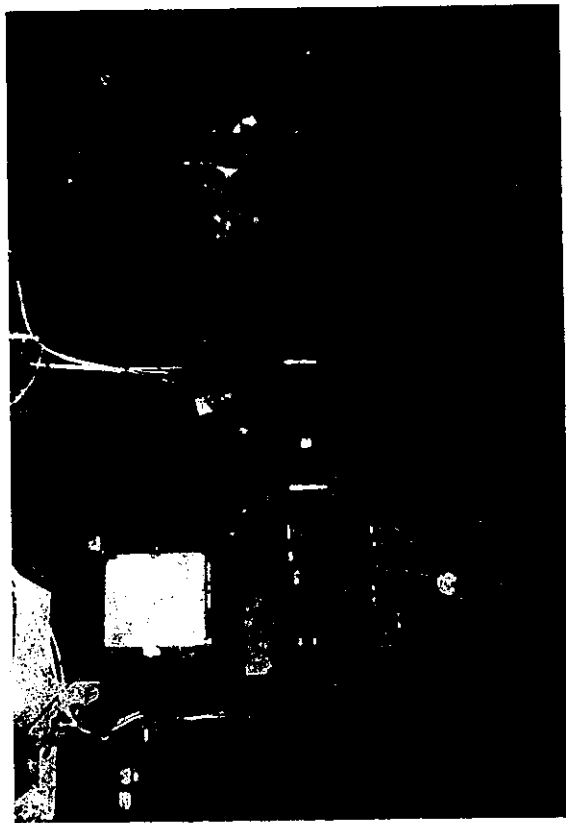


Fig. 90.

fréquence. Il faut qu'il soit fourni par l'interféromètre lui-même dans les mêmes conditions que le signal à étudier. Nous n'avons pas utilisé le signal provenant d'une raie optique de nombre d'ondes 6 100 cm^{-1} mais, en remarquant que le nombre d'ondes de la raie verte du mercure est 18 312 cm^{-1} et que 18 312 $\text{cm}^{-1}/3 = 6 104 \text{ cm}^{-1}$, on voit qu'il suffit d'utiliser l'harmonique 3 de la fréquence correspondant à la raie verte du mercure.

QUELQUES DÉTAILS DE RÉALISATION. — Le diagramme du montage est représenté par la figure 89, l'appareil lui-même par la figure 90.

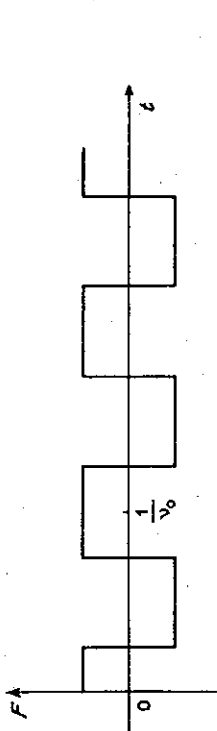


Fig. 91. — Fonction créneau $F(t)$ de période $1/v_0$.

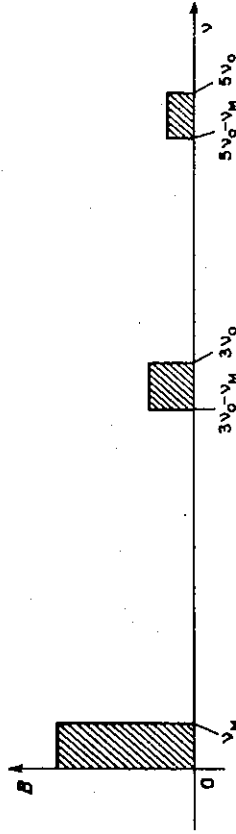


Fig. 92. — Spectre obtenu par T. F. en cosinus du produit $I(t) F(t)$.

Raie de référence. — Nous avons utilisé comme raie de référence la raie verte du mercure. Le signal fourni par le photomultiplicateur est envoyé d'une part à un ensemble de multivibrateurs qui divisent sa fréquence par 3, d'autre part au relais inscripteur de l'enregistreur. Ce relais peut d'ailleurs inscrire soit un créneau pour chaque frange de référence soit un signal ayant une fréquence trois fois plus petite.

Changement de fréquence. — En fait nous n'avons pas multiplié l'interférogramme initial par un signal sinusoïdal $\cos 2\pi\nu_0 t$, mais par une fonction carrée $F(t)$ (fig. 91) qu'on peut mettre sous la forme

$$F(t) = \cos 2\pi\nu_0 t + \frac{1}{3} \cos 2\pi 3\nu_0 t + \frac{1}{5} \cos 2\pi 5\nu_0 t + \dots$$

ce qui est beaucoup plus simple à réaliser car il suffit à des intervalles de temps égaux d'inverser le signal ⁽¹³⁾.

Donc, après multiplication, les fréquences à analyser occuperont les intervalles $0, \nu_M$ (ν_M étant la fréquence maximum correspondant à $\sigma_M = 500$); $3 \nu_0 - \nu_M$, $3 \nu_0$; $5 \nu_0 - \nu_M$, $5 \nu_0$ (fig. 92). Il faut tenir compte de ces spectres parasites dans le choix du pas h . Leur fréquence est d'ailleurs supérieure à celle des termes en $\nu_0 + \nu_M$ dont nous avons expliqué dans le chapitre précédent qu'ils sont filtrés par un filtre passe-bas. De plus nous ferons un filtrage numérique qui annule complètement leur effet.

Annulation du niveau moyen. — Le signal fourni par la cellule au sulfure de plomb comprend la partie modulée, que nous appelons interférogramme et que nous avons traitée jusqu'ici, et une composante continue qui, après changement de

⁽¹³⁾ L'inversion du signal devrait avoir lieu à des intervalles de temps égaux si l'avance du chariot était parfaite; pratiquement elle se fera à des intervalles de temps correspondant au défilement de 1,5 frange de la raie du mercure.

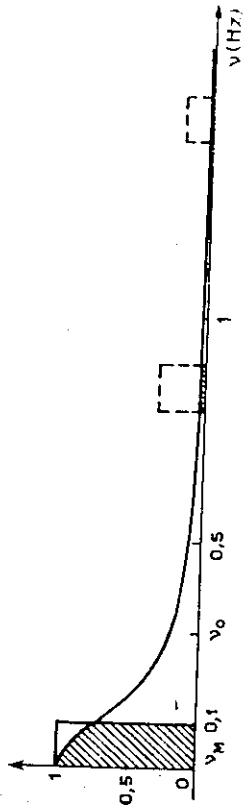


Fig. 91. — Position relative du spectre du bruit et du spectre des fréquences de Fourier, $\tau = 1$ s.

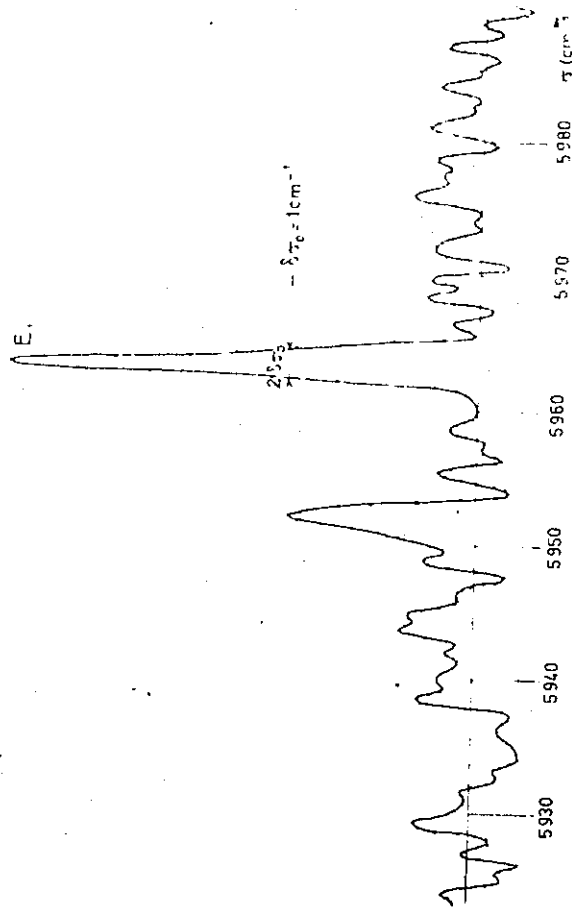


Fig. 95. — Rayonnement de recombinaison intrinsèque dans le germanium.
 $R_0 = 6\ 000$.

Spectre de la figure 93b. — La figure 93b présente le spectre obtenu à partir de l'interférogramme de la figure 93a :

valeur du pas h , $0,5$ s, d'où $h \tau = 0,5$ et le rapport s, b dans le spectre est pratiquement le même que si on avait utilisé tous les points de l'interférogramme ; nombre de points relevés, 12 672 ; nombre de points calculés, 401.

Un filtrage numérique (la largeur du filtre étant choisie égale à 500 cm^{-1}) a permis de réduire le nombre de points utilisés pour faire la T. F.

Le calcul n'a été fait que dans les régions des raies A, C et E. Durée du calcul : 22 mn.

L'examen du spectre montre deux résultats intéressants :

la raie A est nettement dyssymétrique ;

la raie E s'est dédoublée en deux raies à $5\ 952$ et $5\ 963\text{ cm}^{-1}$;

l'examen détaillé de la raie E₁ (fig. 95) montre que sa largeur propre est de l'ordre de 2 cm^{-1} ; elle a donc été étudiée avec une résolution surabondante. Aussi dans

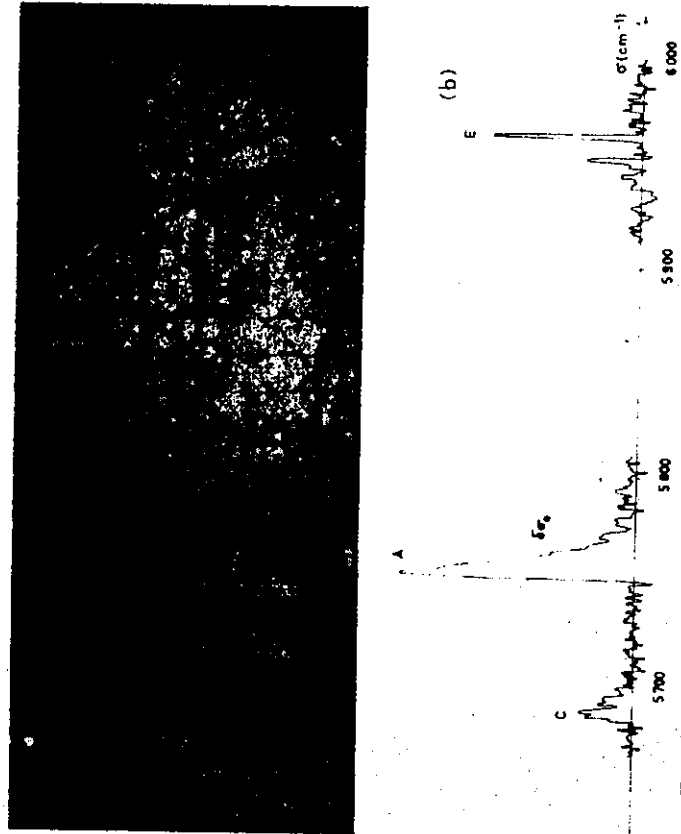


Fig. 93. — a) Interférogramme obtenu par la méthode du changement de fréquence ; b) spectre déduit de cet interférogramme, $R_0 = 6\ 000$.

fréquence, donne un signal important à la fréquence ν_0 . Il est donc nécessaire d'éliminer ce signal constant en lui ajoutant un signal égal et de sens opposé. Un résidu de signal moyen donne sur l'interférogramme des oscillations rapides qui se superposent aux franges lentes du nouvel interférogramme (fig. 93a). Ce signal à la fréquence ν_0 est d'ailleurs fortement atténué par le filtre passe-bas qui est censé éliminer complètement les termes de fréquence $\nu_0 + \nu_M$.

Repérage du zéro. — Pour que le repérage se fasse avec une précision suffisante au voisinage du zéro, la vitesse est 16 fois plus petite que la vitesse normale d'enregistrement ; au passage de la frange blanche fournie par une source continue, on déclenche un compteur qui compte les franges de la raie du mercure. Ses indications permettent de déclencher la multiplication de fréquence ; la même manœuvre divisée par 3 la fréquence du relais inscripteur de la frange de référence. Une dernière manœuvre permet à un instant quelconque de passer à une vitesse 16 fois plus grande.

Interférogramme enregistré (fig. 93a). — Il n'a pas été enregistré dans les meilleures conditions :

différence de marche maximum atteinte, $L = 11,7\text{ mm}$;

limite de résolution théorique, $\delta\sigma_0 = 1\text{ cm}^{-1}$;

durée de l'enregistrement, 1 h 30 m ;

fréquences électriques du signal à étudier comprises entre 0 et $0,1\text{ Hz}$ (fig. 94) ; constante de temps $\tau = 1\text{ s}$.

les expériences suivantes dont les résultats ne sont pas présentés ici, nous sommes-nous contentée d'une résolution de l'ordre de 4 000. Comme le bruit sur le spectre de la figure 93b nous paraissait dû en grande partie à des fluctuations du niveau moyen de l'interférogramme, nous avons stabilisé l'arc au mercure et asservi la tension de la cellule au sulfure de plomb comme il est indiqué dans la figure 93.

Conclusion. — L'emploi de la méthode par transformation de Fourier a permis de passer de la résolution 150 à la résolution 2 000 dans l'étude du rayonnement émis par le ciel nocturne. Dans le cas du rayonnement de recombinaison dans le germanium, problème à petit nombre d'éléments spectraux, les résultats sont moins spectaculaires. Cependant nous avons pu mettre en évidence la dissymétrie de la raie due à l'annihilation d'un exciton avec émission d'un photon et d'un phonon longitudinal acoustique et la présence de deux raies vers 5 960 cm⁻¹ dont l'origine n'est pas encore expliquée.

VII. Comparaison des différentes méthodes de spectroscopie

La méthode de spectroscopie par transformation de Fourier telle qu'elle vient d'être présentée exige des techniques très différentes de celles des méthodes classiques. Cependant il n'y a pas de différences fondamentales entre toutes ces méthodes. Quel que soit le procédé employé le spectre reconstitué est toujours la T. F. en cosinus de la partie paire $\langle \delta \rangle$ de la fonction d'auto-corrélation $C(\delta)$ de la vibration lumineuse incidente. C'est cette fonction $\langle \delta \rangle$ que jusqu'à présent nous avons appelée « interférogramme ».

Nous allons montrer comment, dans les méthodes classiques (spectromètre à prisme, à réseau ou à Fabry-Perot) le flux qu'on mesure à la sortie de l'instrument est la T. F. de $\langle \delta \rangle$, obtenue, pour chaque fréquence, comme la somme d'une série particulière de n valeurs discrètes équidistantes de $\langle \delta \rangle$, n étant le nombre de faisceaux interférents. Dans la méthode par transformation de Fourier $n = 2$; le flux qu'on mesure pour la valeur h de la différence de marche est la somme de seulement deux valeurs particulières de $\langle \delta \rangle$: $\langle \delta \rangle(0)$ et $\langle \delta \rangle(h)$ et il faut faire la transformation de Fourier à postériori.

Une façon particulièrement rapide de faire cette synthèse de diverses méthodes de spectroscopie consiste à appliquer, au traitement de la vibration lumineuse par un spectromètre, quelques-uns des résultats les plus élémentaires relatifs à la détermination du spectre des grandeurs fluctuantes. En effet le champ électromagnétique en un point de l'espace est une fonction aléatoire du temps. Fellgett [14, 15], Gebbie [20] et Mertz [64] ont déjà brièvement signalé ce moyen de traiter les instruments de spectroscopie. Les problèmes théoriques relatifs aux grands appareils aléatoires et à leurs spectres ont été traités pour la première fois d'une façon satisfaisante par Wiener et Lévy dans une étude du mouvement brownien. Depuis, ces études ont été poussées très loin du point de vue purement mathématique et les résultats ont été appliqués à la théorie de la turbulence et au traitement du bruit de fond dans la théorie des communications.

Avant de développer le cas particulier de la spectroscopie optique nous allons rappeler quelques définitions et théorèmes concernant l'analyse spectrale d'une variable aléatoire.

1. Rôle d'un filtre linéaire et homogène dans l'analyse spectrale. — On ne peut associer à une variable $X(t)$ [fonction certaine ou aléatoire du temps] un spectre de puissance que si la puissance moyenne $E\{|X(t)|^2\}$, définie comme la moyenne arithmétique de la quantité $|X(t)|^2$ mesurée au même instant t dans une infinité d'épreuves macroscopiquement identiques, est indépendante du temps. Alors à chaque composante de fréquence ν obtenue à partir de $X(t)$ dans une décomposition de Fourier,

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu,$$

il sera possible d'attribuer une puissance définie $B(\nu)$ qui lui sera propre.

La puissance moyenne est la somme

$$E\{|X(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\nu) d\nu. \quad (\text{VII.1})$$

Nous ne nous intéresserons qu'aux fonctions aléatoires remplissant ces conditions: ce sont elles que l'on rencontre en optique. Ce sont des fonctions à covariance stationnaire et leur étude repose en grande partie sur le théorème de Khintchine d'après lequel la T. F. de la fonction de corrélation $C_X(\tau) = E\{X(t) X^*(t - \tau)\}$ est précisément $B(\nu)$:

$$B(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau. \quad (\text{VII.2})$$

Une analyse spectrale se fait à l'aide d'un filtre. Nous appellerons filtre linéaire [48] p. 347] une transformation linéaire et homogène par rapport au temps qui à la variable $X(t)$ fait correspondre $Y(t)$ tel que

$$Y(t) = X(t) * P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\theta) P(t - \theta) d\theta, \quad (\text{VII.3})$$

$P(t)$ étant la réponse percussive du filtre, c'est-à-dire sa réponse à une impulsion de Dirac (¹⁹).

La quantité complexe $G(\nu)$ de module $g(\nu)$ qu'on appelle gain du filtre est la T. F. de $P(t)$

(¹⁹) Dans la théorie électromagnétique de la lumière [65] une impulsion de lumière est un train d'ondes très court, d'autant plus court que sa distribution en fréquences donnée par une décomposition de Fourier est plus large (fig. 96).

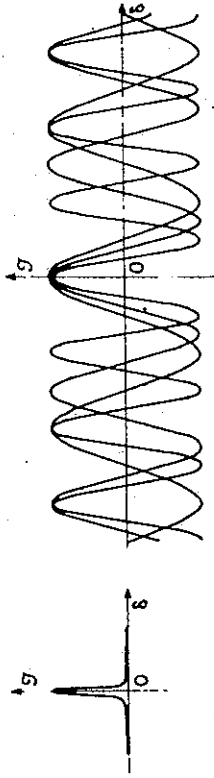


Fig. 96. — Impulsion de lumière et sa décomposition de Fourier.

$$(VII.4) \quad G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{2i\pi\nu t} dt.$$

Deux calculs classiques conduisent à mettre la puissance moyenne après le filtre sous l'une ou l'autre des deux formes fondamentales :

$$(VII.5) \quad E \left\{ |Y(t)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\nu) |G(\nu)|^2 d\nu,$$

$$(VII.6) \quad E \left\{ |Y(t)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau) C_P(\tau) d\tau.$$

$C_P(\tau)$ étant la fonction d'autocorrélation de $P(t)$.

Ces deux équations sont équivalentes ; on peut d'ailleurs passer de l'une à l'autre par la relation de Parseval, après avoir remarqué que la T. F. de $C_X(\tau)$ est la répartition spectrale $B(\nu)$ cherchée et que la T. F. de $C_P(\tau)$ est le carré du module du gain du filtre \mathcal{F} .

Nous pouvons de plus remarquer que lorsque la fonction $P(t)$ est réelle, c'est simplement la partie réelle $\text{Re}[C_X(\tau)] = C_X(\tau)$ qui intervient dans l'équation (VII.6) ; elle devient alors (29)

$$(VII.7) \quad E \left\{ |Y(t)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}[C_X(\tau)] C_P(\tau) d\tau.$$

La partie réelle d'une fonction de corrélation étant paire, sa T. F. est aussi une fonction paire et la relation (VII.5) prend alors la forme

$$(VII.8) \quad E \left\{ |Y(t)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} B_P(\nu) |G(\nu)|^2 d\nu,$$

$B_P(\nu)$ étant la partie paire du spectre $B(\nu)$ telle qu'elle a été définie dans le chapitre II.

La formule (VII.8) montre que la puissance moyenne est l'énergie découpée dans le spectre par la courbe de transmission d'énergie du filtre $|G(\nu)|^2$. Si \mathcal{F} est un filtre passe-bande rectangulaire, on a $|G(\nu)| = 1$ pour ν compris entre ν_1 et ν_2

(29) En effet

$$\begin{aligned} E \left\{ |Y(t)|^2 \right\} &= E \left\{ Y(t) Y^*(t) \right\} = E \left\{ \frac{1}{2} [Y(t) Y^*(t) + Y^*(t) Y(t)] \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{2} \iint X(\theta) P(t - \theta) d\theta X^*(\theta') P^*(t - \theta') d\theta' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \iint X^*(\theta) P^*(t - \theta) d\theta X(\theta') P(t - \theta') d\theta' \right\}. \end{aligned}$$

Dans le cas où $P(t)$ est une fonction réelle, $P(t - \theta) \equiv P^*(t - \theta)$ et on peut grouper des termes :

$$\begin{aligned} E \left\{ |Y(t)|^2 \right\} &= \iint \left[\frac{1}{2} E \left\{ X(\theta) X^*(\theta') \right\} + \frac{1}{2} E \left\{ X^*(\theta) X(\theta') \right\} \right] P(t - \theta) P(t - \theta') d\theta d\theta' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [C_X(\tau) + C_X^*(-\tau)] C_P(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}[C_X(\tau)] C_P(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

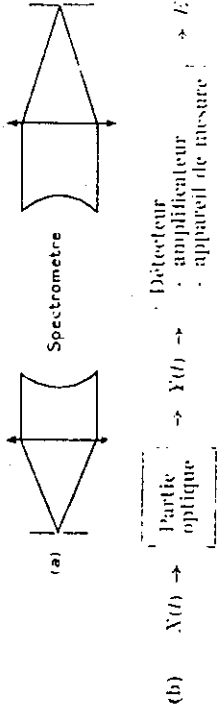


FIG. 97. — a) Schéma de principe de la partie optique d'un spectromètre ; b) schéma de principe du fonctionnement d'un spectromètre.

et $G(\nu) = 0$ ailleurs. Le filtre idéal pour faire une analyse spectrale aurait une largeur nulle mais, si ν_1 et ν_2 sont très rapprochés, on peut dire que la puissance mesurée est proportionnelle à la densité spectrale correspondant à une fréquence ν_0 comprise entre ν_1 et ν_2 . Alors,

$$(VII.9) \quad E \left\{ |Y(t)|^2 \right\} = B(\nu_0) \Delta\nu.$$

On explore le spectre en déplaçant la bande passante du filtre.

2. **Généralités sur les spectromètres considérés comme des filtres.** Un spectromètre classique (prisme, réseau, Fabry-Perot) ou un interféromètre à deux ondes employé en spectromètre se compose d'une partie optique qui, à chaque instant, reçoit des radiations lumineuses et en transmet une certaine proportion à un ensemble détecteur-amplificateur-appareil de mesure, qui est donc d'une constante de temps et mesure la puissance moyenne transportée par les radiations transmises. Considérons d'abord le cas du spectromètre employé avec des diaphragmes d'entrée et de sortie infiniment fins, les cas pratiques d'utilisation s'en déduisant aisément (fig. 97a). Soit $X(t)$ la valeur du champ électrique à l'intérieur du diaphragme d'entrée (point-source) et $Y(t)$ la valeur du champ électrique à l'intérieur du diaphragme de sortie où est placé le détecteur (fig. 97b). Le signal fourni par celui-ci est amplifié puis transmis à un enregistreur, l'ensemble ayant une constante de temps \bar{c} de sorte qu'on mesure approximativement la quantité

$$\int_{t-\bar{c}}^{t+\bar{c}} |Y(t)|^2 dt.$$

Nous supposons dans la suite que le temps \bar{c} est assez grand pour qu'on puisse confondre $\int_{t-\bar{c}}^{t+\bar{c}} |Y(t)|^2 dt$ et la puissance moyenne $|Y(t)|^2$ (ce qui ne serait rigoureux que si $\bar{c} \rightarrow \infty$). Cette approximation revient à négliger complètement le bruit, que nous ne considérons pas dans ce chapitre. Étant donné le caractère stationnaire laplacien de $X(t)$, $|Y(t)|^2$ a même valeur que $E \left\{ |Y(t)|^2 \right\}$.

Le problème est de déterminer avec quelle approximation $E \left\{ |Y(t)|^2 \right\}$ que nous appellerons désormais Φ , flux mesuré par le détecteur (21), est le spectre de $X(t)$ tel

(21) Dans le cas théorique envisagé ici, les diaphragmes sont infiniment fins et Φ est un écartement. Dans tous les cas pratiques, les faisceaux auront une étendue l' et on mesurera bien un flux.

que nous l'avons défini au paragraphe VII.4, c'est-à-dire avec quelle approximation l'instrument fait la T. F. de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

4. Expression du flux Φ . — Le spectromètre fractionne la radiation incidente en diverses parties (division dans l'espace dans le cas du spectromètre à réseau ou à prisme, division d'amplitude dans le cas du spectromètre Fabry-Perot) qu'il transmet avec des retards optiques en progression arithmétique et des atténuations diverses avant de les recombiner de sorte que $Y(t)$ peut être mis sous la forme

$$(VII.10) \quad Y(t) = p_1 X(t + \tau_1) + p_2 X(t - \tau_2) + p_3 X(t - 2\tau_1) + \dots + p_n X[t - (n-1)\tau_1],$$

où $k\tau_1$ est le retard du faisceau $k+1$ et p_{k+1} son facteur de transmission. Cette somme est équivalente à l'intégrale ⁽²²⁾

$$(VII.11) \quad Y(t) = \int_{-\tau}^{+\tau} X(t - \tau) P(\tau) d\tau = \int_{-\tau}^{+\tau} X(t - \tau) R(\tau) d\tau,$$

$R(\tau)$ étant une distribution de Dirac à support périodique de pas τ_1 et $P(\tau)$ une fonction de répartition qui prend les valeurs particulières p_1, p_2, \dots, p_n pour $\tau = 0, \tau_1, \dots, (n-1)\tau_1$ et peut éventuellement devenir nulle pour $\tau > n\tau_1$ si le nombre des faisceaux transmis avant la recombinaison est fini. Puisqu'un produit de composition est commutatif, (VII.11) est équivalente à

$$(VII.12) \quad Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\theta) p(t - \theta) d\theta.$$

Sous cette forme, l'analogie avec (VII.3) est complète ; $p(t)$ est la réponse percussive du spectromètre considéré comme un filtre linéaire. C'est une fonction réelle. On peut donc écrire immédiatement, par comparaison à (VII.8) et (VII.7),

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\nu) |G(\nu)|^2 d\nu \quad \text{et} \quad \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau) C_p(\tau) d\tau.$$

En remarquant que ν, t, τ et τ_1 sont reliés au nombre d'ondes σ , à la longueur l mesurée sur le train d'ondes et aux retards géométriques δ et h par les relations $\sigma = \nu/c, l = tc, \delta = \tau c$ et $h = \tau_1 c$, les deux équations précédentes prennent la forme

$$(VII.13) \quad \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) |G(\sigma)|^2 d\sigma,$$

et

$$(VII.14) \quad \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\delta) C_p(\delta) d\delta.$$

Ces deux équations ont été établies pour une valeur particulière du retard h entre deux faisceaux consécutifs ; les fonctions $P(t)$ et $R(t)$ et le flux sont des fonc-

⁽²²⁾ Dans le cas du prisme, le nombre des faisceaux qui interfèrent est infini et le pas de la fonction $R(\tau)$ est nul.

tions de h . Nous utiliserons par la suite les deux relations (VII.13) et (VII.14) [qui sont en fait équivalentes]. C'est en considérant la seconde que nous verrons comment l'instrument fait la T. F. de $C_X(\delta)$, opération dont la première traduit le résultat.

La fonction $C_p(\delta)$ est la fonction d'autocorrélation du produit $P(t) R_h(t)$. C'est donc encore le produit d'une distribution de Dirac à support périodique, de même pas h , par une fonction paire $A(\delta)$ qui est la fonction d'autocorrélation de $P(t)$:

$$(VII.15) \quad C_p(\delta) = A(\delta) R_h(\delta).$$

Nous verrons dans la suite pour chaque type de spectromètre, la forme particulière de $A(\delta)$ dont nous voyons dès maintenant qu'elle jouera le même rôle que la fonction de pondération introduite dans la méthode par transformation de Fourier.

En remplaçant $C_p(\delta)$ par sa valeur dans (VII.14) il vient

$$(VII.16) \quad \Phi(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\delta) A(\delta) R_h(\delta) d\delta,$$

qui est équivalente à

$$(VII.17) \quad \Phi(h) = C'_0 A_1 + 2 C'_1 A_2 + \dots + 2 C'_{n-1} A_n - \sum_{k=-(n-1)}^{k=n-1} C'_k A_{k+1}.$$

C'est une somme finie de valeurs discrètes de la fonction d'autocorrélation de la radiation incidente, multipliée par la fonction de pondération $A(\delta)$ propre à l'instrument. Il est aisé de montrer que c'est une transformation de Fourier. En effet, on ne change rien à la valeur de la somme (VII.17) si on multiplie chaque terme par le facteur $\cos 2\pi\sigma h k \delta$ dans lequel σh a été choisi égal à m/h , m étant un entier, de telle sorte que le cosinus soit toujours égal à 1. La nouvelle somme

$$(VII.18) \quad \Phi(h) = \sum_{k=-(n-1)}^{k=n-1} C'_k A_{k+1} \cos 2\pi\sigma h k \delta$$

est équivalente à

$$(VII.19) \quad \Phi(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\delta) A(\delta) R_h(\delta) \cos 2\pi\sigma h \delta d\delta.$$

C'est exactement l'expression (II.13) donnant la valeur d'une densité spectrale calculée en faisant la T. F. numérique de l'interférogramme. En posant $F(\sigma) = T \cos[A(\delta) R_h(\delta)]$, on peut écrire (VII.19) sous la forme

$$(VII.20) \quad \Phi(h) = B_p(\sigma h) = \frac{1}{2} \int_{-\sigma}^{+\sigma} B_p(\sigma) [F(\sigma h - \sigma) + F(\sigma h + \sigma)] d\sigma.$$

En comparant (VII.13) et (VII.20) on voit que

$$(VII.21) \quad |G(\sigma)|^2 = \frac{1}{2} [F(\sigma h - \sigma) + F(\sigma h + \sigma)].$$

La densité spectrale mesurée pour le nombre d'ondes σh est donc l'énergie

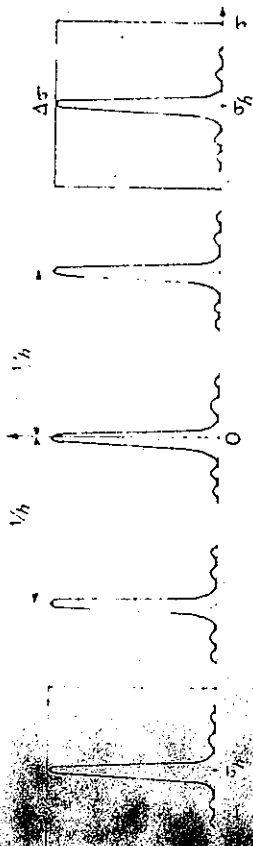


Fig. 98. — Fonction d'appareil.

Fig. 100. — Déformation de la fonction d'appareil avec la valeur h du pas ; un des maxima reste centré sur la fréquence 0.

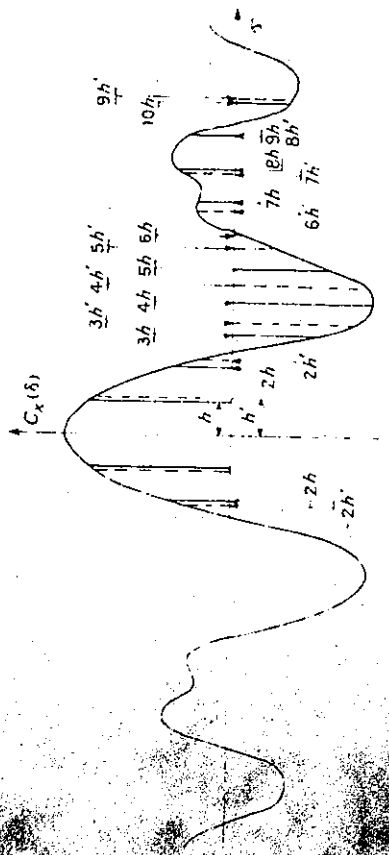
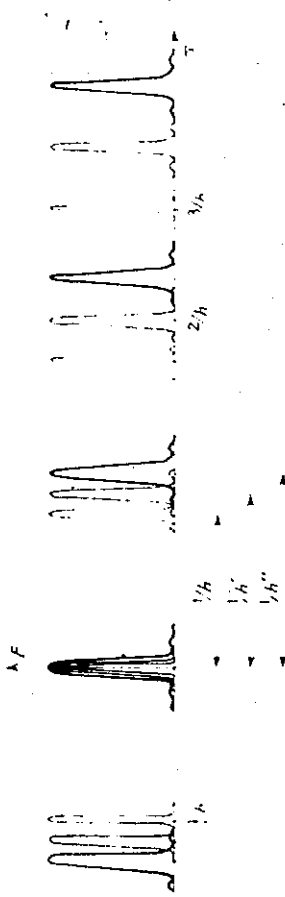


Fig. 99. — Fonction d'autocorrélation $C_x(\delta)$ et fonctions réseau R_h de pas h .

découpée dans le spectre par la fonction $|G(\sigma)|^2$ que les spectroscopistes appellent fonction d'appareil.

2. *Forme de la fonction d'appareil.* — Nous avons souligné l'analogie entre les expressions (VII.19) et (II.13). De même les équations (VII.21) et (II.14) montrent qu'il y a dans les spectromètres classiques comme dans le cas de la T. F. numérique d'un interférogramme, la fonction d'appareil se compose de deux séries de pics distants entre eux de $1/h$ et centrés sur σ_h et $-\sigma_h$ chacun des pics étant la T. F. de la fonction de pondération $A(\delta)$ de l'interférogramme. Il y a cependant quelques petites différences avec le cas où la T. F. numérique est faite comme il a été indiqué au chapitre II. Dans le cas d'un spectromètre classique puisque σ_h , nombre d'ondes pour lequel est faite la T. F., est un multiple entier de $1/h$, il y a toujours un pic centré sur l'origine (fig.98) et les deux séries de pics de la fonction d'appareil sont confondues, de sorte qu'on peut écrire

$$(VII.22) \quad B_p(\sigma_h) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) F(\sigma_h - \sigma) d\sigma.$$

Quand on explore le spectre, c'est-à-dire qu'on cherche la densité spectrale correspondant à un nombre σ_h voisin de σ_h on change le retard entre deux faisceaux consécutifs qui devient h' . On change donc le pas de la fonction réseau

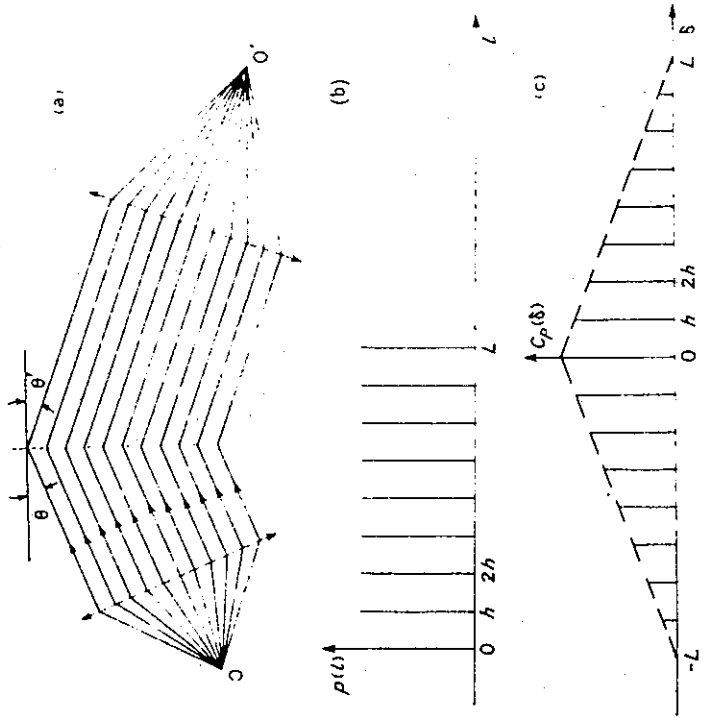


Fig. 101. — a) Schéma de principe d'un spectromètre à réseau ; b) réponse percussive d'un spectromètre à réseau ; c) fonction d'autocorrélation de la réponse percussive d'un spectromètre à réseau.

$R_h(\delta)$ qui sert à relever les points sur la fonction $A(\delta)$ [fig. 99]. La nouvelle valeur $B(\sigma_h)$ est donc obtenue à partir d'une nouvelle série de valeurs de $A(\delta)$. La nouvelle fonction d'appareil ne se déduit pas de la première par deux translations comme dans le cas où l'on fait la T. F. numérique d'un interférogramme à partir d'une seule série de valeurs équidistantes relevées sur cet interférogramme comme il a été expliqué dans le chapitre II. La distance $\Delta\sigma$ entre deux pics consécutifs est alors égale à $1/h'$, mais un des pics reste centré sur l'origine (fig. 100). De plus, en toute rigueur, $A(\delta)$ est fonction de h et la forme de chaque

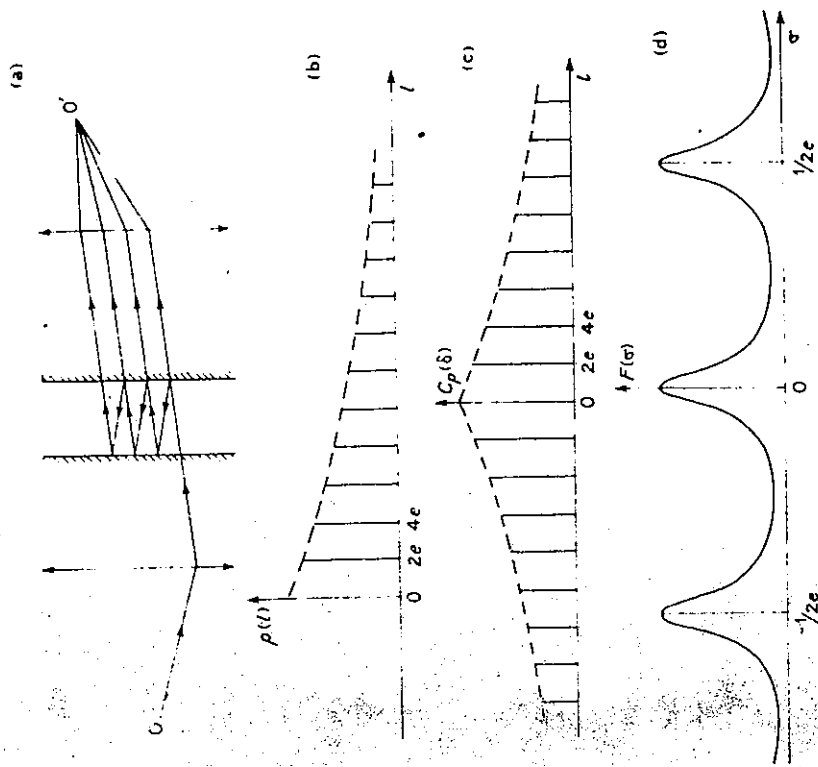


Fig. 102. — a) Schéma de principe d'un spectromètre Fabry-Perot ; b) réponse percussive d'un spectromètre Fabry-Perot ; c) fonction d'autocorrelation de la réponse percussive d'un spectromètre Fabry-Perot ; d) fonction d'appareil d'un spectromètre Fabry-Perot.

maximum varie avec h ; les variations seront bien entendu négligeables dans le domaine spectral exploré.

Nous avons vu que lorsqu'on faisait la T. F. numérique d'un interférogramme on choisissait précisément le pas h de telle sorte qu'un seul pic explore le spectre. Dans le cas des spectromètres classiques il faut prendre la précaution de limiter éventuellement par un filtre optique le spectre à étudier de telle sorte que l'intervalle spectral occupé $\Delta\sigma$ soit au plus égal à $1/h$ (fig. 98).

On appelle généralement limite de résolution la largeur à mi-hauteur d'un des pics de la fonction d'appareil. Cette largeur sera d'autant plus faible que celle de sa T. F., $A(\delta)$, sera plus large, donc qu'on connaîtra une plus grande portion de la fonction d'autocorrelation.

3. Formes des fonctions d'appareil des spectromètres classiques. — Il suffit de déterminer $p(l)$ dans chaque type de spectromètre pour retrouver immédiatement sa fonction d'appareil théorique.

1. Spectromètre à réseau. — Considérons un réseau à n fentes infiniment fines et les vibrations issues de ces n fentes dans la direction θ' (fig. 101a). $p(l)$ est alors une distribution de Dirac de pas $h = a(\sin \theta - \sin \theta')$, a étant la distance entre deux traits du réseau, limitée par une fonction créneau de largeur $L = (n - 1)h$ (fig. 101b). Si le réseau reçoit une impulsion de lumière il transmet n impulsions dans la direction θ' . $C_p(\delta)$ est une distribution de Dirac de pas h , modulée par une fonction triangulaire $A(\delta)$ qui est nulle en dehors de l'intervalle $|\delta| \leq L$ (fig. 101c). D'où l'expression de la fonction d'appareil

$$F(\sigma) = |G(\sigma)|^2 = T \cos \left[C_p(\delta) \right] = \sum_{m=-n}^{m=n} L^2 \left| \frac{\sin \pi L \left(\frac{m}{n} \sigma \right)}{\pi L \left(\frac{m}{n} \sigma \right)} \right|^2$$

2. Spectromètre Fabry-Perot. — Soient e la distance séparant les deux lames, r le facteur de réflexion d'amplitude des revêtements des lames (fig. 102a). Dans ce cas (fig. 102b),

$$p(l) = r^{2l/h} R_h(l) = \exp \left(- \frac{l}{h} \text{Log} \frac{1}{r^2} \right) R_h(l)$$

d'où (fig. 102c)

$$A(\delta) = \exp \left(- \left| \frac{\delta}{h} \right| \text{Log} \frac{1}{r^2} \right)$$

et

$$F(\sigma) = |G(\sigma)|^2 = T \cos \left[A(\delta) R_h(\delta) \right] = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{h} \text{Log} \frac{1}{r^2} \exp \left[- \frac{m}{h} \text{Log} \left(\frac{m}{h} - \sigma \right) \right]^2$$

C'est la superposition de fonctions de résonance qui se répètent tous les $1/h$. C'est une fonction d'Airy dont la largeur à mi-hauteur vaut $\delta\sigma = (1/h) (1 - r^2)^{1/2}$ (fig. 102d).

3. Spectromètre à prisme. — Lord Rayleigh [66] a étudié la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif et en a fait l'application dans le cas du prisme. Il a montré que la réponse percussive du prisme dans une direction donnée est un train d'ondes sinusoïdal de fréquence v_1 et de longueur $L = c (dn/d\lambda) \lambda_1$ avec $\lambda_1 = c/v_1$, si e est la longueur de la base du prisme (fig. 103) et

$$F(\sigma) = |G(\sigma)|^2 = \left[\frac{\sin \pi L (\sigma_1 - \sigma)}{\pi L (\sigma_1 - \sigma)} \right]^2$$

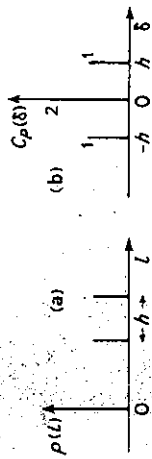


FIG. 101. — a) Réponse percussive d'un interféromètre de Michelson ; b) fonction d'autocorrélation de la réponse percussive d'un interféromètre de Michelson.

Dans le cas $C_p(\delta) = A(\delta)$, $A(\delta)$ est une fonction triangulaire, nulle en dehors du domaine $-L, +L$. La fonction $R_h(t)$ a un pas infiniment fin car il y a une infinité de rayons qui interfèrent. Le spectre qu'on obtient avec un prisme est unique.

4. **Méthode par transformation de Fourier.** Dans un interféromètre à deux ondes, la vibration incidente est divisée en deux vibrations d'égale amplitude. Si l'instrument reçoit une impulsion, il transmet deux impulsions décalées dans le temps de $\tau_1 = hc$ (fig. 101a) ; $C_p(\delta)$ a une forme particulièrement simple. Elle se compose de trois verticales : deux à $\delta = \pm h$ de hauteur 1 et une autre double pour $\delta = 0$ (fig. 101b) de sorte que

$$\psi(h) = \int_{-h}^{+h} C_p(\delta) C_p(\delta) d\delta = 2 C_p(0) = 2 C_p(h)$$

Ici $\psi(h)$ est la somme de deux valeurs particulières de $C_p(\delta)$. Ce n'est pas suffisant pour faire une transformation de Fourier. En fait $\psi(h)$ se compose d'une partie constante $C_p(0)$ et d'une partie variable qui donne précisément $C_p(\delta)$ quand on fait varier h linéairement en fonction du temps.

Pour reconstituer le spectre à partir de l'interférogramme, on pourrait traiter l'interférogramme *exactement* comme le font les spectromètres classiques, en formant pour le calcul de la densité spectrale correspondant à chaque nombre d'ondes la somme d'une série particulière de valeurs discrètes et équidistantes de l'interférogramme. On pourrait, bien entendu, choisir $A(\delta)$ à volonté de sorte qu'on pourrait obtenir *exactement* la même fonction d'appareil théorique qu'avec un spectromètre classique, avec les deux séries de pics confondues et un pic constamment centré sur la fréquence zéro. Mais pratiquement, il est beaucoup plus simple de relever une seule série de valeurs sur $C_p(\delta)$ et de faire numériquement la transformation de Fourier en faisant varier les \cosinus comme il a été exposé dans le chapitre II.

5. **Conclusion.** — Tous les spectromètres font la T. F. de la partie paire $C_p(\delta)$ de la fonction d'autocorrélation de la vibration lumineuse. La résolution est limitée parce que $C_p(\delta)$ n'est connue qu'entre 0 et L , différence de marche maximum entre les faisceaux interférents. Quand le disperser est un prisme, la T. F. de $C_p(\delta)$ est faite en utilisant la suite continue de valeurs entre 0 et L , et le spectre obtenu est unique. Dans les autres spectromètres classiques la T. F. est obtenue comme la somme de valeurs discrètes équidistantes de $C_p(\delta)$; la fonction d'appareil se compose donc d'une série de pics, chacun d'eux étant la T. F. de la fonction de pondération $A(\delta)$ propre à l'instrument qui multiplie $C_p(\delta)$. Dans la méthode par transformation de Fourier c'est $C_p(\delta)$ qui est mesuré. On peut soit faire la T. F. en utilisant une suite continue de valeurs de $C_p(\delta)$ comme pour le

prisme, auquel cas le spectre obtenu est unique, soit calculer numériquement la T. F. à partir de valeurs discrètes équidistantes de $C_p(\delta)$. Si on utilise une série différente de valeurs pour chaque nombre d'ondes, puisqu'on peut choisir $A(\delta)$ à volonté, on pourrait obtenir *exactement la même fonction d'appareil* qu'avec n'importe quel spectromètre classique. Quand la transformation de Fourier est faite à partir d'une seule série de valeurs de $C_p(\delta)$, la fonction d'appareil se compose de deux séries de pics qui se déplacent en sens inverse pendant l'exploration et la limite de résolution est fixe d'une extrémité à l'autre du spectre.

VIII. Conclusion

En conclusion, il nous semble que la méthode de spectrométrie par transformation de Fourier est, dans l'infrarouge, la plus puissante des méthodes spectrométriques. Elle allie en effet l'avantage fondamental des méthodes interférométriques classiques, à savoir le grand angle solide utilisable, et celui des méthodes « multiplex », dans lesquelles la totalité du temps de mesure est utilisée pour la détermination de chaque élément spectral. Sa supériorité sur les autres méthodes est d'autant plus grande que le nombre d'éléments spectraux à étudier est plus élevé. Elle nous a permis de traiter dans l'infrarouge, proche deux problèmes dont au moins un eut été impossible à résoudre par d'autres procédés. Dans les deux cas, le gain qu'on peut en attendre s'est traduit par un accroissement considérable de la résolution.

Mais sa mise en œuvre, dès que les résolutions désirées dépassent quelques milliers, posent des problèmes qui ne sont pas encore résolus actuellement : obtention d'une grande différence de marche sans dérèglement de l'interféromètre et calcul de la T. F. de l'interférogramme. Pour réaliser cette dernière opération on dispose actuellement de deux procédés : analyseur harmonique qui ne permet pas de dépasser des résolutions de l'ordre de 100 et calculateurs numériques.

La durée du calcul d'un spectre par transformation de Fourier numérique est proportionnelle au nombre N de points d'entrée. En l'absence de bruit, N serait de l'ordre du nombre M d'éléments spectraux contenus dans le spectre à étudier. L'étude des facteurs dont dépend le bruit dans le spectre calculé montre que pour obtenir le rapport signal/bruit maximum dans le spectre, si l'interférogramme a été enregistré à travers un filtre passe-bas, N peut être très supérieur à M . Plusieurs procédés d'enregistrement de l'interférogramme ou de calcul permettent d'obtenir le spectre dans les meilleures conditions tout en n'utilisant pour faire la transformation de Fourier qu'un nombre N voisin de M : enregistrement statique, méthode du changement de fréquence, filtrage numérique. Quel que soit le procédé utilisé quand on traite par transformation de Fourier un problème à grand nombre d'éléments spectraux, on rencontre deux difficultés : la première qui a trait à l'obligation de relever un grand nombre de points sur l'interférogramme peut être levée en utilisant un système convertisseur qui enregistre directement sur cartes perforées les valeurs nécessaires de l'interférogramme. Mais la seconde qui concerne la durée élevée du calcul et le délai qui s'écoule entre l'enregistrement de l'interférogramme et l'obtention du spectre est inévitable. L'exploitation régulière de cette méthode pour des problèmes à des résolutions n'importe moyennes,

est donc difficilement qu'on ne disposera pas d'un calculateur rapide de transmission de Fourier qui permettra d'obtenir le spectre très rapidement après l'enregistrement des interférogrammes.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Mr le Professeur Jacquinet et à mes collègues de la recherche et à passer de ma reconnaissance.

Je remercie Mr Connes, mes camarades chercheurs H. Gush et O. Parodi pour leur accueil et pour leur aide dans les réalisations expérimentales et pour de nombreuses discussions. P. Giacomo pour l'aide qu'il m'a apportée lors de la construction de l'interferomètre, R. Chabbal, tous les techniciens et ouvriers du laboratoire. Mme Colton et J. Arsac pour les conseils qu'il m'a donnés dans l'étude des questions concernant le bruit.

Je remercie également le Comité du Centre européen de calcul scientifique et Mr Watson, Directeur du Centre de calcul de l'Université de Toronto, pour leurs attributions d'heures de calcul gratuites sur 704 et 650 IBM.

RÉFÉRENCES

1. H. P. GUSH, *J. Opt. Soc. Amer.*, **55**, 1954, p. 25.
 2. H. P. GUSH, *J. Opt. Soc. Amer.*, **56**, 1956, p. 39.
 3. H. P. GUSH, *J. Opt. Soc. Amer.*, **57**, 1958, p. 49; **58**, 1960, p. 402.
 4. P. CONNES, *J. Opt. Soc. Amer.*, **53**, 1959, p. 157, 416 et **53**, 1960, p. 402.
 5. A. MICHAELSON, *Phil. Mag.*, **31**, 1891, p. 256.
 6. A. MICHAELSON, *Phil. Mag.*, **34**, 1892, p. 280.
 7. L. V. BRUNNEN, *J. Opt. Soc. Amer.*, **34**, 1892, p. 407.
 8. A. RUSSELL PEPPER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47**, 1957, p. 6.
 9. D. A. JAGGSON, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48**, 1958, p. 303.
 10. D. A. JAGGSON, *Communication privée*.
 11. J. J. CONNES, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48**, 1958, p. 390.
 12. J. J. CONNES, *Symposium de l'Association de l'Optique*, 1959.
 13. *Communication privée* à M. J. E. COLLEY, *J. Opt. Soc. Amer.*, **59**, 1959, p. 432.
 14. P. FERRIER, *Thèse*, Cambridge Univ., 1951.
 15. P. FERRIER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48**, 1958, p. 187.
 16. P. FERRIER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **51**, 1955, p. 237.
 17. P. FERRIER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **57**, 1957, p. 354.
 18. P. FERRIER, *Nature*, **178**, 1956, p. 432.
 19. P. FERRIER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **50**, 1957, p. 194.
 20. P. FERRIER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **51**, 1955, p. 230.
 21. P. FERRIER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **51**, 1955, p. 233.
 22. P. FERRIER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **51**, 1955, p. 816.
 23. P. FERRIER & G. A. VASSAR, *J. Opt. Soc. Amer.*, **51**, 1955, p. 192.
 24. P. FERRIER & G. A. VASSAR, *J. Opt. Soc. Amer.*, **49**, 1959, p. 845.
 25. P. FERRIER, *Studies of Optics*, Univ. Press, Chicago.
 26. M. B. DOSSETT, *Phil. Mag.*, **53**, 1954, p. 57, 147, 267 et 552.
 27. S. H. STANGOR, *J. Opt. Soc. Amer.*, **53**, 1957, p. 55.
 28. G. STANNON, *Bell Syst. Techn. J.*, **3**, 1948, p. 47 et 379.
 29. M. WOLFORD, *Probability and information theory*, Pergamon Press, London, 1955, p. 21.
 30. A. K. ROBERTS, *J. Opt. Soc. Amer.*, **54**, 1958, p. 1432.
 31. G. STANNON & S. W. WOLFORD, *The mathematical theory of communication*, Univ. Illinois Press, 1959, p. 33.
 32. P. FERRIER, *Communication privée*.
 33. E. R. PECK, *J. Opt. Soc. Amer.*, **44**, 1956, p. 931.
 34. J. O. HARRISON & G. W. STROKE, *J. Opt. Soc. Amer.*, **45**, 1955, p. 116.
 35. J. W. STROKE, *Ph.D. Thesis*, Cornell Univ., Ithaca, N.Y., 1957, p. 339.
 36. J. W. STROKE, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48**, 1958, p. 91.
 37. J. W. STROKE, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48**, 1958, p. 91.

38] M. J. CONNES, *J. Phys.*, **19**, L. 19, 1958, p. 107.
 39] P. CONNES, *Rev. Opt.*, **35**, 1956, p. 37.
 40] G. W. STROKE, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47**, 1957, p. 1007.
 41] E. R. PECK, *J. Opt. Soc. Amer.*, **38**, 1948, p. 1015.
 42] H. A. GIBBS, *Symposium de l'Association de l'Optique*, 1959.
 43] A. ANGOT, *Compléments de mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
 44] M. A. J. GAMES, M. THOMPSON, E. L. BRYANT & A. MURPHY, *Bell. Syst. Techn. J.*, **30**, 1951, p. 121.
 45] R. W. WOOD, *Phys. Rev.*, **40**, 1937, p. 1058.
 46] L. W. MERTZ, *Opt. Soc. Amer. Meeting*, 1960.
 47] P. GRUYER & A. BLANCHARD, *Le bruit de fond*, Ed. Masson, Paris, 1958.
 48] A. BLANCHARD & R. FOURIER, *Théorie des fonctions aléatoires*, Ed. Masson, Paris, 1953.
 49] J. GACCHIS, *Ann. Radioelectricit.*, **4**, 11, 1956, p. 308.
 50] P. JACQUINET, *J. Phys.*, **18**, L. 19, 1958, p. 39.
 51] P. JACQUINET, *Symposium de Stockholm*, 1959.
 52] P. M. DUFFIN, *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique*, Ed. F. Andrieux, Univ. Besançon, p. 109.
 53] J. G. BRADY, *Opt. Soc. Amer. Meeting*, 1960.
 54] L. W. MERTZ, *Symposium de Stockholm*, 1959.
 55] M. VINSOURE, *Thèse*, Paris, 1959.
 56] H. P. GUSH & V. NOZAKI, *J. Phys.*, **18**, L. 22, 1958, p. 285.
 57] O. PARODI & P. BESNOIST, *J. Opt. Soc. Amer.*, **46**, 1956, p. 346.
 58] J. R. HAYNES, M. LAX & W. F. FLEMING, *J. Phys. Chem.*, **63**, 1959, p. 302.
 59] H. P. GUSH & A. VALLANER, *J. Opt. Soc. Amer.*, **49**, 1959, p. 915.
 60] D. E. WILLIAMSON, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48**, 1958, p. 742.
 61] M. J. CONNES & H. P. GUSH, *J. Phys.*, **18**, L. 20, 1958, p. 515.
 62] W. S. BENNETT, E. K. PLYDEN & C. J. H. VAN DER MEULEN, *J. Opt. Soc. Amer.*, **49**, 1959, p. 398.
 63] L. W. MERTZ, *Communication privée*.
 64] R. LOSHAK, *Geometrical and physical optics*, Ed. Longmans, Green and Co., London, 1957.
 65] Lord Rayleigh, *Scientific Papers*, **5**, 1912, p. 272.